

## Lançamento Inclinado

Mário Leite

...

Nas postagens imediatamente anteriores à esta tratamos do “Movimento em Queda Livre” e “Lançamento Vertical” de um corpo, respectivamente. Agora vamos tratar do chamado “Lançamento Inclinado” a partir do solo; isto é, o lançamento de um corpo formando um certo ângulo  $\alpha$ . Neste caso o lançamento é considerado inclinado (oblíquo) e pode ser decomposto em dois submovimentos: um **vertical** e outro **horizontal**. Então, de acordo com as leis da Física, enquanto o corpo se movimenta para a frente ele sobe e, em algum momento vai descer. A **figura 1** mostra um esquema de eixos cartesianos **X-Y** com o vetor-velocidade de lançamento  $\vec{V}_0$  fazendo um ângulo  $\alpha$  com a horizontal e sendo decomposto em duas velocidades: uma vertical  $V_y$  e outra horizontal  $V_x$ .

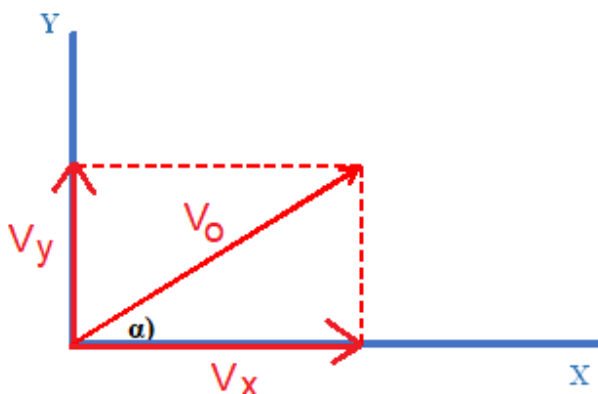


Figura 1 - Velocidade do corpo decomposta em duas direções

Analicamente, temos o seguinte:  $V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha)$  e  $V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha)$

Fisicamente, a subida do corpo é devido à força inicial do lançamento e a descida é devido à ação da gravidade puxando o corpo para baixo e descrevendo uma parábola com concavidade para baixo, tal como um arco de círculo. A **figura 2** mostra um esquema de lançamento inclinado real para cinco tipos diferentes de ângulos,

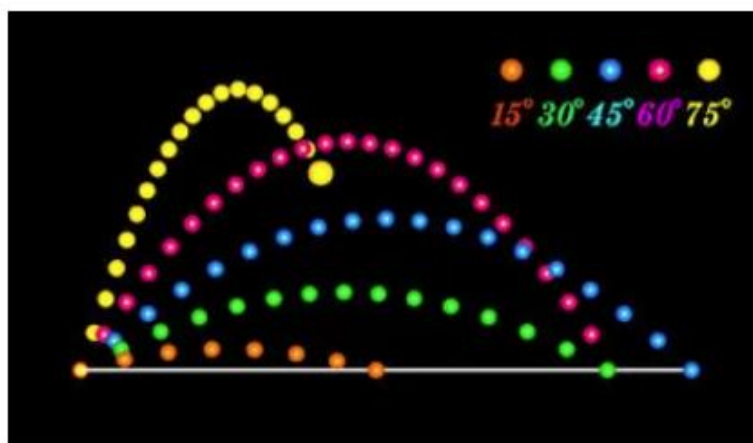


Figura 2 - Lançamentos inclinados com cinco ângulos diferentes

Fonte: Internet

Utilizando a “Equação de Torricelli” para movimento de corpos sujeitos à ação da gravidade temos o seguinte:  $V^2 = V_0^2 + 2 \cdot G \cdot H$ , onde  $V$  é a velocidade instantânea,  $V_0$  a velocidade inicial,  $G$  a aceleração da gravidade e  $H$  a distância percorrida a cada intervalo de tempo. Então, no momento em que o corpo atinge o ponto mais alto de sua trajetória sua velocidade  $V$  é zero e podemos escrever a seguinte expressão:  $0 = (V_0 \cdot \sin(\alpha))^2 - 2 \cdot G \cdot H_{\max}$ .

Neste caso **H** se transforma em uma altura máxima **H<sub>max</sub>** que denotaremos aqui com **Y<sub>max</sub>**. O sinal negativo para **G** é porque o movimento é retardado na vertical, e isto implica na seguinte expressão.

$$Y_{\max} = V_o^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) / 2 \cdot G$$

Considerando a expressão da velocidade de subida como **V<sub>y</sub> = G · T<sub>s</sub>**, então **T<sub>s</sub>** será o tempo de subida do corpo, com **T<sub>s</sub> = V<sub>y</sub>/G = V<sub>o</sub> · sen(α)/G**

No caso da componente horizontal do movimento o corpo não sofre ação da gravidade e desprezando qualquer tipo de atrito com o ar, esse tipo de movimento pode ser considerado uniformemente variado com **V=V<sub>o</sub>**. Assim, podemos escrever: a seguinte expressão para o movimento horizontal:

$$H = V_x \cdot T \implies H = V_o \cdot \cos(\alpha) \cdot T$$

O valor de **T** (tempo total para o corpo subir e descer) é: **2 · V<sub>o</sub> · sen(α)/G**; e substituindo na equação de **H** teremos o alcance máximo **X<sub>max</sub>**:

$$X_{\max} = V_o \cdot \cos(\alpha) \cdot 2 \cdot V_o \cdot \text{sen}(\alpha) / G = 2 \cdot V_o^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) / G$$

Por outro lado, a trigonometria mostra que **2 · sen(α) · cos(α) = sen(2α)**, o que resulta na seguinte expressão:

$$X_{\max} = V_o^2 \cdot \text{sen}(2\alpha) / G$$

Assim, finalmente, teremos as duas expressões mais importantes do movimento de um corpo a partir do solo fazendo um certo ângulo **α** com a horizontal:

Altura máxima atingida: **Y<sub>max</sub> = V<sub>o</sub><sup>2</sup> · sen<sup>2</sup>(α) / 2 · G**

Distância máxima percorrida: **X<sub>max</sub> = V<sub>o</sub><sup>2</sup> · sen(2α) / G**

Deste modo, conhecendo a velocidade inicial como um dado de entrada podemos saber qual a altura máxima atingida pelo corpo e a sua distância horizontal máxima percorrida em função apenas do ângulo de lançamento. Então, para maximizar estes dois valores com uma determinada velocidade inicial, o fator **sen(2α)** tem que ter um valor máximo; e como o valor máximo do *seno* é **1** deste modo **2α** deve ser 90° o que implicar **α=45°**.

As **figuras 3, 4, 5, 6, 7** mostram saídas do programa “**LancamentoInclinado**”, codificado em **C#** (projeto *Console*) exibindo uma tabela de valores para as distâncias percorridas pelo corpo na horizontal e a altura máxima atingida na vertical, com velocidade inicial de **20 m/s** em intervalos de tempo de **0,1 s** e com ângulos de inclinações variados: **30°, 45° e 60°**. Observe que a distância horizontal máxima percorrida é com ângulo de **45°** e a mínima para ângulos diferentes deste valor.

E apenas por curiosidade, vamos considerar o Sistema Astros 2020 do exército brasileiro com o míssil AV-TM 300, projetado para atingir uma distância máxima de 300 Km (considerando sua configuração normal). Se o tubo lançador estiver a **45°** a velocidade de lançamento deve ser em torno **V<sub>o</sub> = (300000\*9,80665)<sup>0.5</sup> = 1715.2244 m/s**, e o tempo gasto para atingir o alvo nesta distância máxima é cerca de **4 min** conforme mostra a simulação na **figura 7**.

Conclusão: Para que um corpo lançado obliquamente atinja uma distância máxima, além de uma alta velocidade de lançamento o ângulo com a horizontal ter que ser, exatamente **45°**, que é o ângulo inicial que os lançadores de projéteis (mísseis e foguetes) do tipo *terra-terra* consideram. Mas, dependendo da localização do alvo o controle operacional é feito apenas em função do ângulo do lançamento já que a propulsão que dá a velocidade inicial é constante, pois depende apenas das características do equipamento e do tipo de projétil a ser lançado.

---

```
D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\Lancame...
Velocidade de lançamento: 20 m/s
Ângulo de inclinação de lançamento: 30 graus
Distância máxima a percorrer: 35,3 m
Altura máxima a alcançar: 5,1 m

Distância horizontal percorrida em 0,0 s: 0,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,1 s: 1,7 m
Distância horizontal percorrida em 0,2 s: 3,5 m
Distância horizontal percorrida em 0,3 s: 5,2 m
Distância horizontal percorrida em 0,4 s: 6,9 m
Distância horizontal percorrida em 0,5 s: 8,7 m
Distância horizontal percorrida em 0,6 s: 10,4 m
Distância horizontal percorrida em 0,7 s: 12,1 m
Distância horizontal percorrida em 0,8 s: 13,9 m
Distância horizontal percorrida em 0,9 s: 15,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,0 s: 17,3 m
Distância horizontal percorrida em 1,1 s: 19,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,2 s: 20,8 m
Distância horizontal percorrida em 1,3 s: 22,5 m
Distância horizontal percorrida em 1,4 s: 24,2 m
Distância horizontal percorrida em 1,5 s: 26,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,6 s: 27,7 m
Distância horizontal percorrida em 1,7 s: 29,4 m
Distância horizontal percorrida em 1,8 s: 31,2 m
Distância horizontal percorrida em 1,9 s: 32,9 m
Distância horizontal percorrida em 2,0 s: 34,6 m
Distância horizontal percorrida em 2,1 s: 35,3 m

Tempo gasto para percorrer a distância máxima: 2,1 s
```

Figura 3

```
D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\Lanca...
Velocidade de lançamento: 20 m/s
Ângulo de inclinação de lançamento: 45 graus
Distância máxima a percorrer: 40,8 m
Altura máxima a alcançar: 10,2 m

Distância horizontal percorrida em 0,0 s: 0,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,1 s: 1,4 m
Distância horizontal percorrida em 0,2 s: 2,8 m
Distância horizontal percorrida em 0,3 s: 4,2 m
Distância horizontal percorrida em 0,4 s: 5,7 m
Distância horizontal percorrida em 0,5 s: 7,1 m
Distância horizontal percorrida em 0,6 s: 8,5 m
Distância horizontal percorrida em 0,7 s: 9,9 m
Distância horizontal percorrida em 0,8 s: 11,3 m
Distância horizontal percorrida em 0,9 s: 12,7 m
Distância horizontal percorrida em 1,0 s: 14,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,1 s: 15,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,2 s: 17,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,3 s: 18,4 m
Distância horizontal percorrida em 1,4 s: 19,8 m
Distância horizontal percorrida em 1,5 s: 21,2 m
Distância horizontal percorrida em 1,6 s: 22,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,7 s: 24,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,8 s: 25,5 m
Distância horizontal percorrida em 1,9 s: 26,9 m
Distância horizontal percorrida em 2,0 s: 28,3 m
Distância horizontal percorrida em 2,1 s: 29,7 m
Distância horizontal percorrida em 2,2 s: 31,1 m
Distância horizontal percorrida em 2,3 s: 32,5 m
Distância horizontal percorrida em 2,4 s: 33,9 m
Distância horizontal percorrida em 2,5 s: 35,4 m
Distância horizontal percorrida em 2,6 s: 36,8 m
Distância horizontal percorrida em 2,7 s: 38,2 m
Distância horizontal percorrida em 2,8 s: 39,6 m
Distância horizontal percorrida em 2,9 s: 40,8 m

Tempo gasto para percorrer a distância máxima: 2,9 s
```

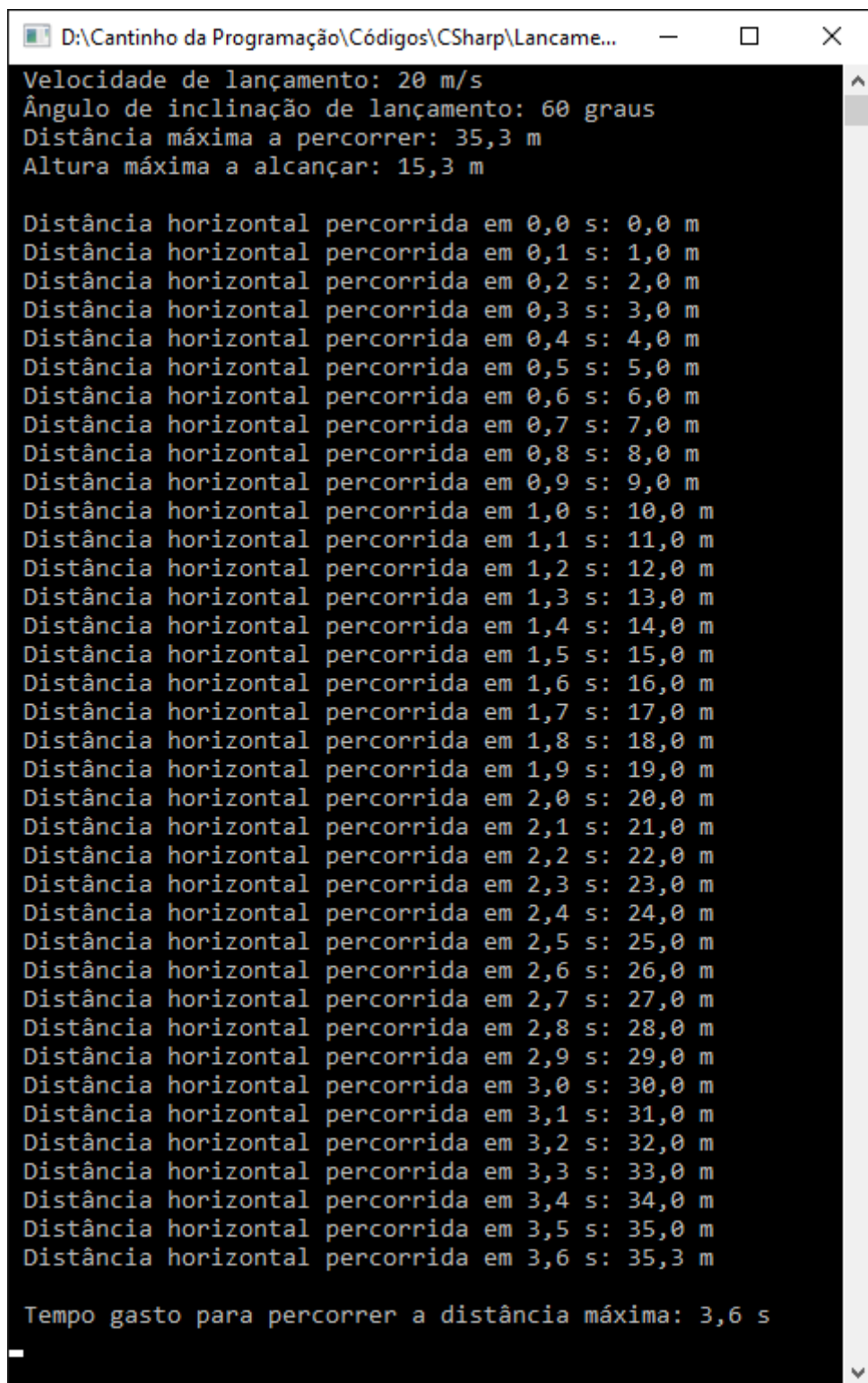
Figura 4

```
D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\Lancam...
Velocidade de lançamento: 20 m/s
Ângulo de inclinação de lançamento: 50 graus
Distância máxima a percorrer: 40,2 m
Altura máxima a alcançar: 12 m

Distância horizontal percorrida em 0,0 s: 0,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,1 s: 1,3 m
Distância horizontal percorrida em 0,2 s: 2,6 m
Distância horizontal percorrida em 0,3 s: 3,9 m
Distância horizontal percorrida em 0,4 s: 5,1 m
Distância horizontal percorrida em 0,5 s: 6,4 m
Distância horizontal percorrida em 0,6 s: 7,7 m
Distância horizontal percorrida em 0,7 s: 9,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,8 s: 10,3 m
Distância horizontal percorrida em 0,9 s: 11,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,0 s: 12,9 m
Distância horizontal percorrida em 1,1 s: 14,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,2 s: 15,4 m
Distância horizontal percorrida em 1,3 s: 16,7 m
Distância horizontal percorrida em 1,4 s: 18,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,5 s: 19,3 m
Distância horizontal percorrida em 1,6 s: 20,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,7 s: 21,9 m
Distância horizontal percorrida em 1,8 s: 23,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,9 s: 24,4 m
Distância horizontal percorrida em 2,0 s: 25,7 m
Distância horizontal percorrida em 2,1 s: 27,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,2 s: 28,3 m
Distância horizontal percorrida em 2,3 s: 29,6 m
Distância horizontal percorrida em 2,4 s: 30,9 m
Distância horizontal percorrida em 2,5 s: 32,1 m
Distância horizontal percorrida em 2,6 s: 33,4 m
Distância horizontal percorrida em 2,7 s: 34,7 m
Distância horizontal percorrida em 2,8 s: 36,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,9 s: 37,3 m
Distância horizontal percorrida em 3,0 s: 38,6 m
Distância horizontal percorrida em 3,1 s: 39,9 m
Distância horizontal percorrida em 3,2 s: 40,2 m

Tempo gasto para percorrer a distância máxima: 3,2 s
```

Figura 5



The image shows a screenshot of a Windows console application window. The title bar reads "D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\Lancame...". The console output is as follows:

```
Velocidade de lançamento: 20 m/s
Ângulo de inclinação de lançamento: 60 graus
Distância máxima a percorrer: 35,3 m
Altura máxima a alcançar: 15,3 m

Distância horizontal percorrida em 0,0 s: 0,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,1 s: 1,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,2 s: 2,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,3 s: 3,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,4 s: 4,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,5 s: 5,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,6 s: 6,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,7 s: 7,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,8 s: 8,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,9 s: 9,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,0 s: 10,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,1 s: 11,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,2 s: 12,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,3 s: 13,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,4 s: 14,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,5 s: 15,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,6 s: 16,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,7 s: 17,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,8 s: 18,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,9 s: 19,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,0 s: 20,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,1 s: 21,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,2 s: 22,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,3 s: 23,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,4 s: 24,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,5 s: 25,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,6 s: 26,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,7 s: 27,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,8 s: 28,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,9 s: 29,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,0 s: 30,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,1 s: 31,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,2 s: 32,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,3 s: 33,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,4 s: 34,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,5 s: 35,0 m
Distância horizontal percorrida em 3,6 s: 35,3 m

Tempo gasto para percorrer a distância máxima: 3,6 s
```

Figura 6



```
D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\LancamentoInclinado\Lan...
Velocidade de lançamento: 1715,2244 m/s
Ângulo de inclinação de lançamento: 45 graus
Distância máxima a percorrer: 300000 m
Altura máxima a alcançar: 75000 m

Distância horizontal percorrida em 0,0 s: 0,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,1 s: 121,3 m
Distância horizontal percorrida em 0,2 s: 242,6 m
Distância horizontal percorrida em 0,3 s: 363,9 m
Distância horizontal percorrida em 0,4 s: 485,1 m
Distância horizontal percorrida em 0,5 s: 606,4 m
Distância horizontal percorrida em 0,6 s: 727,7 m
Distância horizontal percorrida em 0,7 s: 849,0 m
Distância horizontal percorrida em 0,8 s: 970,3 m
Distância horizontal percorrida em 0,9 s: 1091,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,0 s: 1212,8 m
Distância horizontal percorrida em 1,1 s: 1334,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,2 s: 1455,4 m
Distância horizontal percorrida em 1,3 s: 1576,7 m
Distância horizontal percorrida em 1,4 s: 1698,0 m
Distância horizontal percorrida em 1,5 s: 1819,3 m
Distância horizontal percorrida em 1,6 s: 1940,6 m
Distância horizontal percorrida em 1,7 s: 2061,8 m
Distância horizontal percorrida em 1,8 s: 2183,1 m
Distância horizontal percorrida em 1,9 s: 2304,4 m
Distância horizontal percorrida em 2,0 s: 2425,7 m
Distância horizontal percorrida em 2,1 s: 2547,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,2 s: 2668,3 m
Distância horizontal percorrida em 2,3 s: 2789,5 m
Distância horizontal percorrida em 2,4 s: 2910,8 m
Distância horizontal percorrida em 2,5 s: 3032,1 m
Distância horizontal percorrida em 2,6 s: 3153,4 m
Distância horizontal percorrida em 2,7 s: 3274,7 m
Distância horizontal percorrida em 2,8 s: 3396,0 m
Distância horizontal percorrida em 2,9 s: 3517,3 m
```

*Sequência dos resultados*



```
D:\Cantinho da Programação\Códigos\CSharp\LancamentoInclinado\Lan...
Distância horizontal percorrida em 246,0999999999 s: 298481,6 m
Distância horizontal percorrida em 246,1999999999 s: 298602,9 m
Distância horizontal percorrida em 246,2999999999 s: 298724,2 m
Distância horizontal percorrida em 246,3999999999 s: 298845,5 m
Distância horizontal percorrida em 246,4999999999 s: 298966,7 m
Distância horizontal percorrida em 246,5999999999 s: 299088,0 m
Distância horizontal percorrida em 246,6999999999 s: 299209,3 m
Distância horizontal percorrida em 246,7999999999 s: 299330,6 m
Distância horizontal percorrida em 246,8999999999 s: 299451,9 m
Distância horizontal percorrida em 246,9999999999 s: 299573,2 m
Distância horizontal percorrida em 247,0999999999 s: 299694,4 m
Distância horizontal percorrida em 247,1999999999 s: 299815,7 m
Distância horizontal percorrida em 247,2999999999 s: 299937,0 m
Distância horizontal percorrida em 247,3999999999 s: 300000 m

Tempo gasto para percorrer a distância máxima: 247,3999999999 s
```

Figura 7 - Simulação para o Sistema Astros 2020 com o míssil AV-TM 300

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace LancamentoInclinado
{
    internal class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            double G, Vo, T, X, Xmax, Ymax;
            double angGrau, angRad;
            string TS, XS;
            bool VirgT, VirgX;

            //X = Vo.cos(α).T - Distância horizontal percorrida com o tempo
            //Xmax = (Vo.Vo.sen(2α))/G - Distância horizontal máxima percorrida
            //Ymax = (Vo*Vo.sen(α).sen(α))/2.G - Altura máxima alcançada
            Vo = 20; //velocidade de lançamento
            angGrau = 60; //30, 45, 50, 60 - ângulos de lançamentos
            angRad = (angGrau * 3.14159265358979323846264338327950)/180;
            G = 9.80665; //valor do módulo da aceleração da gravidade
            Xmax = Math.Abs((Vo*Vo*Math.Sin(2*angRad)))/G;
            Xmax = (double)((int)(Xmax * 10 + 0.5)) / 10; //com uma decimal
            Ymax = (Vo * Vo * Math.Sin(angRad) * Math.Sin(angRad))/(2 * G);
            Ymax = (double)((int)(Ymax * 10 + 0.5)) / 10; //com uma decimal
            Console.WriteLine(" Velocidade de lançamento: " + Vo + " m/s");
            Console.WriteLine(" Ângulo de inclinação de lançamento: " +
                               angGrau + " graus");
            Console.WriteLine(" Distância máxima a percorrer: "+Xmax+ " m");
            Console.WriteLine(" Altura máxima a alcançar: " + Ymax + " m");
            Console.WriteLine();
            T = 0;
            while(true)
            {
                X = Math.Abs(Vo*Math.Cos(angRad))*T;
                X = (double)((int)(X * 10 + 0.5)) / 10; //com uma decimal
                TS = T.ToString();
                XS = X.ToString();
                VirgT = TS.Contains(",");
                VirgX = XS.Contains(",");
                if (!VirgT)
                    TS = TS + ",0";
                if (!VirgX)
                    XS = XS + ",0";
                if (X >= Xmax)
                {
                    Console.WriteLine(" Distância horizontal percorrida em "
                                         + TS + " s: " + Xmax + " m");
                    Console.WriteLine();
                    break;
                }
                else
                {
                    Console.WriteLine(" Distância horizontal percorrida em "
                                         + TS + " s: " + XS + " m");
                }
                T = T + 0.1;
            }
            Console.WriteLine(" Tempo gasto para percorrer a distância
                               máxima: " + TS + " s");
            Console.ReadKey();
        } //fim do método principal
    } //fim da classe
} //fim da aplicação

```