Série Convergente

Mário Leite

•••

De uma maneira bem simples, o valor de uma série numérica pode ser definido como "a soma de uma sequência de termos numéricos". Analiticamente, uma série numérica pode ser definida pela seguinte expressão $S_n = \sum a_k$, onde S_n é o resultado da soma dos termos a_k com k começando com um valor inicial e atingindo um valor n muito alto. A **figura 1** mostra a expressão geral de uma série numérica:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Figura 1 - Expressão geral de uma série

As séries podem ser: *convergentes* ou *divergentes*. Quando a soma dos termos tende para um valor finito ela é **convergente**; quando a soma desses termos tende para um valor não determinado à medida que **n** aumenta, tendendo ao infinito, ela é dita divergente. Observe as duas séries abaixo: a primeira, somando os termos fracionários e todos positivos, tende a um valor não determinado: **infinito**. A segunda, somando os mesmos termos, porém alternando os sinais dos termos a soma tende para um valor finito: **Ln(2)** (logaritmo natural de 2).

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 ... + [(-1)^{(n-1)}]/n --> \infty$$
 (série divergente)
$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 ... + [(-1)^{(n-1)}]/n = Ln(2)$$
 (série convergente)

Analisar e provar que determinada série é convergente ou divergente é um processo meio complicado e foge ao escopo desta postagem; por isto não vamos tratar deste assunto aqui. O objetivo é mostrar um exemplo de série convergente, cujo resultado é um valor finito; no caso o programa "SerieConverge" (codificado em Visualg) mostra qual é o resultado da expressão da figura 2: o limite de x/(x+1) quando x tende ao infinito.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Lim} (x/x+1) \\ x \to \infty \end{array}\right)$$

Figura 2 - Expressão a ser calculada

A figura 3a mostra a entrada de dado e as figuras 3b e 3c mostram as saídas do programa "SerieConverge" considerando um milhão de termos, baseado na expressão da figura 2, sendo que a figura 3c, além de mostrar o resultado, mostra também o tempo de processamento para este número de termos. Note que a soma desses termos tende, claramente, para o valor 1.

```
Algoritmo "SerieConverge"
//Mostra que a sequência x/(x+1) tende para 1 quando o número de termos
//da série é muito grande.
//Em Visualg
//Autor: Mário Leite
//----
   Var x, n: inteiro
      Sx: real
Inicio
  n <- 0
  Escreval("")
   Enquanto ((n<1) ou (n>1000000)) Faca //valida o número de termos da série
     Escreva ("Entre com o número de termos desejado [mínimo 1]: ")
      Leia(n)
   FimEnquanto //fim da validação do número de termos da série
   LimpaTela
   Para x De 1 Ate n Faca
     Sx <- x/(x+1) //expressão da série
      {Formata a saída convenientemente}
      Se ((x>=1) e (x<10)) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, "
                                                 ", "Valor da série:", Sx)
      Fimse
      Se ((x>=10) e (x<100)) Entao
        Escreval ("Número de termos:",x, "
                                                  ", "Valor da série:", Sx)
      Fimse
      Se((x>=100) e (x<1000)) Entao
        Escreval ("Número de termos:",x, "
                                                ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se ((x)=1000) e (x<10000) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, "
                                                ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se((x>=10000) e (x<100000)) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, " ", "Valor da série:", Sx)
      Se((x>=100000) e (x<1000000)) Entao
        Escreval ("Número de termos:",x, "
                                             ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se (x>=1000000) e (x<10000000)) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, " ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x>=10000000) e (x<100000000)) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, " ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x>=100000000) e (x<1000000000)) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, " ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x=1000000000) Entao
         Escreval ("Número de termos:",x, "", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
   FimPara
   Escreval("")
FimAlgoritmo
```

```
Entre com o número de termos desejado [minimo 1]: 1000000
```

Figura 3a - Entrando com o número desejado de termos

```
×
Número de termos: 999972
                            Valor da série: 0.999998999972999
Número de termos: 999973
                            Valor da série: 0.999998999973999
Número de termos: 999974
                            Valor da série: 0.999998999974999
                            Valor da série: 0.999998999975999
Número de termos: 999975
Número de termos: 999976
                            Valor da série: 0.999998999976999
Número de termos: 999977
                            Valor da série: 0.999998999978
Número de termos: 999978
                            Valor da série: 0.999998999979
Número de termos: 999979
                            Valor da série: 0.99999899998
                            Valor da série: 0.999998999981
Número de termos: 999980
Número de termos: 999981
                            Valor da série: 0.999998999982
Número de termos: 999982
                            Valor da série: 0.999998999983
Número de termos: 999983
                            Valor da série: 0.999998999984
Número de termos: 999984
                            Valor da série: 0.999998999985
Número de termos: 999985
                            Valor da série: 0.999998999986
Número de termos: 999986
                            Valor da série: 0.999998999987
Número de termos: 999987
                            Valor da série: 0.999998999988
                            Valor da série: 0.999998999989
Número de termos: 999988
Número de termos: 999989
                            Valor da série: 0.99999899999
Número de termos: 999990
                            Valor da série: 0.999998999991
Número de termos: 999991
                            Valor da série: 0.999998999992
Número de termos: 999992
                            Valor da série: 0.999998999993
Número de termos: 999993
                            Valor da série: 0.999998999994
Número de termos: 999994
                            Valor da série: 0.999998999995
Número de termos: 999995
                            Valor da série: 0.999998999996
Número de termos: 999996
                            Valor da série: 0.999998999997
                            Valor da série: 0.999998999998
Número de termos: 999997
Número de termos: 999998
                            Valor da série: 0.999998999999
Número de termos: 999999
                            Valor da série: 0.999999
                            Valor da série: 0.999999000001
Número de termos: 1000000
*** Fim da execução.
   Feche esta janela para retornar ao Visualg.
```

Figura 3b - Saída do programa "SerieConverge"

```
Valor da série: 0.999998999974999
Número de termos: 999974
Número de termos: 999975 Valor da série: 0.999998999975999
Número de termos: 999976 Valor da série: 0.999998999976999
Número de termos: 999977 Valor da série: 0.999998999978
Número de termos: 999978 Valor da série: 0.999998999979
Número de termos: 999979 Valor da série: 0.99999899998
Número de termos: 999980 Valor da série: 0.999998999981
Número de termos: 999981
                         Valor da série: 0.999998999982
Número de termos: 999982
                         Valor da série: 0.999998999983
Número de termos: 999983
                          Valor da série: 0.999998999984
                          Valor da série: 0.999998999985
Número de termos: 999984
Número de termos: 999985
                          Valor da série: 0.999998999986
Número de termos: 999986
                          Valor da série: 0.999998999987
Número de termos: 999987
                          Valor da série: 0.999998999988
Número de termos: 999988
                          Valor da série: 0.999998999989
Número de termos: 999989
                          Valor da série: 0.99999899999
Número de termos: 999990
                          Valor da série: 0.999998999991
                          Valor da série: 0.999998999992
Número de termos: 999991
                        Valor da série: 0.999998999993
Número de termos: 999992
                        Valor da série: 0.999998999994
Número de termos: 999993
Número de termos: 999994 Valor da série: 0.999998999995
Número de termos: 999995 Valor da série: 0.999998999996
Número de termos: 999996 Valor da série: 0.999998999997
Número de termos: 999997
                          Valor da série: 0.999998999998
Número de termos: 999998
                          Valor da série: 0.999998999999
Número de termos: 999999
                          Valor da série: 0.999999
Número de termos: 1000000 Valor da série: 0.999999000001
Cronômetro terminado. Tempo decorrido: 3995 segundo(s) e 359 ms.
Fim da execução.
```

Figura 3c - Saída do programa "SerieConverge" com o tempo de processamento