Série Convergente

Mário Leite

...

De uma maneira bem simples, o valor de uma série numérica pode ser definido como “a soma de uma sequência de termos numéricos”. Analiticamente, uma série numérica pode ser definida pela seguinte expressão $\mathbf{S_n = \sum a_k}$, onde $\mathbf{S_n}$ é o resultado da soma dos termos $\mathbf{a_k}$ com **k** começando com um valor inicial e atingindo um valor **n** muito alto. A **figura 1** mostra a expressão geral de uma série numérica:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Figura 1 - Expressão geral de uma série

As séries podem ser: *convergentes* ou *divergentes*. Quando a soma dos termos tende para um valor finito ela é **convergente**; quando a soma desses termos tende para um valor não determinado à medida que **n** aumenta, tendendo ao infinito, ela é dita divergente. Observe as duas séries abaixo: a primeira, somando os termos fracionários e todos positivos, tende a um valor não determinado: **infinito**. A segunda, somando os mesmos termos, porém alternando os sinais dos termos a soma tende para um valor finito: **Ln(2)** (logaritmo natural de 2).

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 \, .. + [(-1)^{(n-1)}]/n \;\text{-->}\; \infty \qquad \text{(série divergente)}$$

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 \, .. + [(-1)^{(n-1)}]/n \; = Ln(2) \qquad \text{(série convergente)}$$

Analisar e provar que determinada série é convergente ou divergente é um processo meio complicado e foge ao escopo desta postagem; por isto não vamos tratar deste assunto aqui. O objetivo é mostrar um exemplo de série convergente, cujo resultado é um valor finito; no caso o programa **"SerieConverge"** (codificado em Visualg) mostra qual é o resultado da expressão da **figura 2**: o limite de **x/(x+1)** quando **x** tende ao infinito.

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} (x/x+1)}$$

Figura 2 - Expressão a ser calculada

A **figura 3a** mostra a entrada de dado e as **figuras 3b** e **3c** mostram as saídas do programa **"SerieConverge"** considerando um milhão de termos, baseado na expressão da **figura 2**, sendo que a **figura 3c**, além de mostrar o resultado, mostra também o tempo de processamento para este número de termos. Note que a soma desses termos tende, claramente, para o valor **1**.

```
Algoritmo "SerieConverge"
//Mostra que a sequência x/(x+1) tende para 1 quando o número de termos
//da série é muito grande.
//Em Visualg
//Autor: Mário Leite
//-------------------------------------------------------------------------
   Var x, n: inteiro
       Sx: real
Inicio
   n <- 0
   Escreval("")
   Enquanto ((n<1) ou (n>1000000)) Faca  //valida o número de termos da série
      Escreva("Entre com o número de termos desejado [mínimo 1]:  ")
      Leia(n)
   FimEnquanto  //fim da validação do número de termos da série
   LimpaTela
   Para x De 1 Ate n Faca
      Sx <- x/(x+1) //expressão da série
      {Formata a saída convenientemente}
      Se((x>=1) e (x<10)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "         ", "Valor da série:", Sx)
      Fimse
      Se((x>=10) e (x<100)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "        ", "Valor da série:", Sx)
      Fimse
      Se((x>=100) e (x<1000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "       ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se((x>=1000) e (x<10000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "      ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se((x>=10000) e (x<100000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "     ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se((x>=100000) e (x<1000000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "    ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x>=1000000) e (x<10000000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "   ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x>=10000000) e (x<100000000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "  ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x>=100000000) e (x<1000000000)) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, " ", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
      Se(x=1000000000) Entao
         Escreval("Número de termos:",x, "", "Valor da série:", Sx)
      FimSe
   FimPara
   Escreval("")
FimAlgoritmo
```

```
Entre com o número de termos desejado [mínimo 1]:  1000000
```

Figura 3a - Entrando com o número desejado de termos

```
Número de termos: 999972    Valor da série: 0.999998999972999
Número de termos: 999973    Valor da série: 0.999998999973999
Número de termos: 999974    Valor da série: 0.999998999974999
Número de termos: 999975    Valor da série: 0.999998999975999
Número de termos: 999976    Valor da série: 0.999998999976999
Número de termos: 999977    Valor da série: 0.999998999978
Número de termos: 999978    Valor da série: 0.999998999979
Número de termos: 999979    Valor da série: 0.99999899998
Número de termos: 999980    Valor da série: 0.999998999981
Número de termos: 999981    Valor da série: 0.999998999982
Número de termos: 999982    Valor da série: 0.999998999983
Número de termos: 999983    Valor da série: 0.999998999984
Número de termos: 999984    Valor da série: 0.999998999985
Número de termos: 999985    Valor da série: 0.999998999986
Número de termos: 999986    Valor da série: 0.999998999987
Número de termos: 999987    Valor da série: 0.999998999988
Número de termos: 999988    Valor da série: 0.999998999989
Número de termos: 999989    Valor da série: 0.99999899999
Número de termos: 999990    Valor da série: 0.999998999991
Número de termos: 999991    Valor da série: 0.999998999992
Número de termos: 999992    Valor da série: 0.999998999993
Número de termos: 999993    Valor da série: 0.999998999994
Número de termos: 999994    Valor da série: 0.999998999995
Número de termos: 999995    Valor da série: 0.999998999996
Número de termos: 999996    Valor da série: 0.999998999997
Número de termos: 999997    Valor da série: 0.999998999998
Número de termos: 999998    Valor da série: 0.999998999999
Número de termos: 999999    Valor da série: 0.999999
Número de termos: 1000000   Valor da série: 0.999999000001


*** Fim da execução.
*** Feche esta janela para retornar ao Visualg.
```

Figura 3b - Saída do programa "SerieConverge"

```
Número de termos: 999974    Valor da série: 0.999998999974999
Número de termos: 999975    Valor da série: 0.999998999975999
Número de termos: 999976    Valor da série: 0.999998999976999
Número de termos: 999977    Valor da série: 0.999998999978
Número de termos: 999978    Valor da série: 0.999998999979
Número de termos: 999979    Valor da série: 0.99999899998
Número de termos: 999980    Valor da série: 0.999998999981
Número de termos: 999981    Valor da série: 0.999998999982
Número de termos: 999982    Valor da série: 0.999998999983
Número de termos: 999983    Valor da série: 0.999998999984
Número de termos: 999984    Valor da série: 0.999998999985
Número de termos: 999985    Valor da série: 0.999998999986
Número de termos: 999986    Valor da série: 0.999998999987
Número de termos: 999987    Valor da série: 0.999998999988
Número de termos: 999988    Valor da série: 0.999998999989
Número de termos: 999989    Valor da série: 0.99999899999
Número de termos: 999990    Valor da série: 0.999998999991
Número de termos: 999991    Valor da série: 0.999998999992
Número de termos: 999992    Valor da série: 0.999998999993
Número de termos: 999993    Valor da série: 0.999998999994
Número de termos: 999994    Valor da série: 0.999998999995
Número de termos: 999995    Valor da série: 0.999998999996
Número de termos: 999996    Valor da série: 0.999998999997
Número de termos: 999997    Valor da série: 0.999998999998
Número de termos: 999998    Valor da série: 0.999998999999
Número de termos: 999999    Valor da série: 0.999999
Número de termos: 1000000   Valor da série: 0.999999000001


Cronômetro terminado. Tempo decorrido: 3995 segundo(s) e 359 ms.

Fim da execução.
```

Figura 3c - Saída do programa "SerieConverge" com o tempo de processamento