Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Notas de Optimización

Apuntes y ejercicios seleccionados

Carlos E Martínez-Rodríguez
Academia de Matemáticas
Plantel Casa Libertad
carlos.martinez@uacm.edu.mx

2026

Índice

1. Contenido del curso

Los temas a cubrir en el curso son los siguientes:

I Formulación matemática de un problema de Optimización con restricciones

II Condiciones de optimalidad de primero y segundo orden

III Interpretación geométrica

IV Programación lineal: el método simplex y el de puntos interiores

V Programación cuadrática

El propósito general del curso es que **el/la estudiante comprenda y aplique la teoría, técnicas y métodos para resolver problemas de optimización con restricciones**.

1.1. Metodología del curso

El curso consistirá en 3 sesiones a la semana en las que se desarrollarán y revisarán los contenidos del curso, las sesiones serán teóricas y se complementarán con prácticas en `R`, a través de scripts en formato `Rmd` los cuales se compilarán en un único documento al que se le denominará `Portafolio`. Además del estudio de los contenidos del curso, el/la estudiante desarrollará a lo largo del curso 4 biografías de una lista de 52 científicos prominentes en la historia de la ciencia. La evaluación de los contenidos del curso será a través de tres evaluaciones formativas en las cuales se deberá de demostrar el dominio de los temas revisados en clase. La asistencia será importante para poder ser evaluado con estos tres elementos, el requisito de porcentaje de asistencia es del 85 %, en caso de no contar con este porcentaje mínimo de asistencia para poder certificar la materia deberá de presentar el examen de certificación, mismo que será elaborado por el comité de certificación.

1.2. Evaluación del curso

La calificación final del curso se obtiene de la suma de los siguientes porcentajes: *Calificación Final* = *Portafolio* (30 %) + *Biografías* (10 %) + *Evaluaciones* (60 %).

1.3. Científicos prominentes

- Euclides
- Arquimedes
- Galileo
- Kepler
- Fermat
- Pascal
- Newton
- Leibniz
- Bernoulli
- Jacobi
- Euler
- Lagrange
- Laplace
- Gauss
- Moebius
- Poisson

- Bolzano
- Cauchy
- Abel
- Galois
- Riemann
- Cantor
- Planck
- Bohr
- Poincare
- Hilbert
- Russell
- Ramanujan
- Schrodinger
- Einstein
- Courant
- Pauli
- Heisenberg
- Fermi
- Dirac
- Neumann
- Kolmogorov
- Oppenheimer
- Godel
- Chandrasekhar
- Turing
- Erdos
- Feynman
- Nash
- Grothendieck
- Higgs
- Penrose
- Kleinrock
- Knuth
- Hawking
- Simon
- Perelman

2. Fundamentos

2.1. Álgebra Lineal

Definición 1 (Valores y vectores propios)**.** *Sea A una matrix de $n \times n$, v vector de dimensión n y λ escalar. Se dice que v es un vector propio de A y λ es vector propio de A si se cumple*

$$Av = \lambda v$$

Nota 1. *De la igualdad anterior se tiene $Av - \lambda v = (A - I\lambda)\, v = 0$, ecuación que siempre tiene como solución $v = 0$, para cualquier λ. Si $(A - I\lambda)$ es invertible, la única solución es $v = 0$. Para tener soluciones no triviales, se requiere que λ sea tal que $(A - I\lambda)$ no sea invertible, entonces*

$$det\,(A - I\lambda) = 0$$

Teorema 1. *Sea A matriz de $n \times n$, λ es un valor propio de A si y sólo si*

$$p\,(\lambda) = det\,(A - I\lambda) = 0$$

Definición 2. *La ecuacíon $p\,(\lambda) = 0$ se denomina polinomio característico de A.*

Teorema 2. *Sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores característicos de A con vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Entonces los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.*

Definición 3. *Sea λ valor propio de A, la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ.*

Definición 4. *Semejantes Sean A y B matrices de $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que*

$$B = C^{-1}AC. \tag{1}$$

Teorema 3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica*

i) *Los valores propios de A son reales.*

ii) *Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Definición 5 (Diagonalizacion)**.** *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.*

Proposición 1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular, tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ donde $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal.*

Teorema 4. *Diagonalizacion Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n valores propios linealmente independientes, en este caso la matriz diagonal D tiene como elementos en la diagona los n valores propios de A. Entonces $D = C^{-1}AC$.*

Teorema 5. *Sea A matriz simétrica real de $n \times n$, entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales.*

Definición 6. *Se dice que A matriz de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t AQ = D$, donde $D = diag\left(\lambda_1, \lambda 2, \ldots, \lambda_n\right)$ son los valores propios de A.*

Teorema 6. *Sea A matriz real de $n \times n$, entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.*

Definición 7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se denomina* ***menor de orden** k **de la matriz*** *A al determinante que se obtiene de eliminar $(n-k)$ filas y las mismas $(n-k)$ columnas.*

Definición 8. *Formas Cuadráticas*

i) *Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.*

ii) *Una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma $F\left(x, y\right) = ax^2 + bxy + cy^2$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.*

Definición 9. *Sobre formas cuadráticas Sea A matriz simétrica, entonces se define la forma cuadrática $F\left(x, y\right) = Av \cdot v$.*

Ejemplo 1. *Si $F\left(x, y\right) = ax^2 + bxy + cy^2$ es forma cuadrática, sea $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix}$ entonces $Av \cdot v = d$.*

Definición 10. *Una forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$ es una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi\left(x\right) = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$ es una matriz $n \times n$ y simétricade la forma: $\varphi\left(x\right) = x^t Ax$.

Nota 2. *La matriz A asociada a una forma cuadrática es $n \times n$ y simétrica, por tanto diagonalizable ortogonalmente, es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $D = Q^t AQ$, donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios λ_i de A, y la columnas de Q son los vectores propios de A.*

De donde

$$\begin{aligned} & D = Q^t AQ, \text{ por tanto } A = QDQ^t, \text{ entonces la forma cuadrática queda de la forma} \\ & \varphi\left(x\right) = x^t Ax = x^t QDQ^t x = \left(x^t Q\right) D \left(Q^t x\right) = \left(Q^t x\right)^t D \left(Q^t x\right), \text{ haciendo } \tilde{x} = Q^t x \\ & \varphi\left(x\right) = \tilde{\varphi}\left(\tilde{x}\right) = \tilde{x}^t D\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Se dice que $\tilde{\varphi}\left(\tilde{x}\right)$ es la forma canónica o forma diagonal de la forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$.

Teorema 7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y real; sean $A_i, 1 \leq 1 \leq n$ los menores principales de orden i de la matriz n, entonces*

i) *A es definida positiva si y sólo sí todos los menores principales son positivos.*

ii) *A es definida negativa sí y sólo sí los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos.*

iii) *Si A es semidefinida positiva o negativa, entonces $det(A) = 0$.*

iv) *Si $A_1 > 0$, $A_2 > 0, \ldots, A_n > 0$ y $det(A) = 0$, entonces A es semidefinida positiva.*

v) *Si $A_1 < 0$, $A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots,$ y $det(A) = 0$, entonces A es semidefinida negativa.*

vi) *A es semidefinida positiva sí y sólo sí todos los menores de la matriz A son mayores o iguales a cero.*

vii) *A es semidefinida negaiva sí y sólo sí los menores de la matriz A de orden impar son menores o iguales a cero y los de orden par son mayores o iguales a cero.*

viii) *Si no se cumplen estas condiciones, la matriz A es indefinida.*

Definición 11 (Segmento)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se llama **segmento** de extremos x e y al conjunto de puntos $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $z = ax + (1-\alpha)\,y$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Definición 12 (Convexo)**.** *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in S$ y $\forall \alpha \in [0,1]$ se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)\,y \in S$.*

Definición 13 (Funciones convexas)**.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

a) *f es convexa en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in [0,1]$.*

b) *f es estrictamente convexa en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

c) *f es cóncava sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$, $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in [0,1]$.*

d) *f es cóncava sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) > \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$, $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

Teorema 8. *Sobre funciones convexas Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

i) *f es convexa en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida positiva $\forall x \in D$.*

ii) *f es cóncava en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida negativa $\forall x \in D$.*

iii) *Si la matriz $Hf\,(x)$ es definida positiva $\forall x \in D$, entonces f es estríctamente convexa en D*

iii) *Si la matriz $Hf\,(x)$ es definidanegativa $\forall x \in D$, entonces f es estríctamente cóncava en D*

La matrix $Hf\,(x)$ se denomina matriz Hessiana de la función f:

$$Hf\,(x) = Hf\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f^{(2)}_{x_1x_1} & \cdots & f^{(2)}_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(2)}_{x_nx_1} & \cdots & f^{(2)}_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Propiedades 1 (Funciones convexas). *i)* *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Si f es cóncava (convexa) en D, entonces es continua en el interior de D.*

ii) *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

a) *Si f es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en D, entonces f es convexa (cóncava) en D.*

b) *f es convexa (estrictamente convexa) en D si y sólo si $-f$ es cóncava (estrictamente cóncava) en D.*

c) *Si f es convexa (cóncava) en D y $\alpha \geq 0$, entonces αf es convexa (cóncava) en D.*

d) *Si $f(x) > 0$ y cóncava en D, entonces $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ es convexa en D.*

iii) *Sean $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío, funciones convexas (cóncavas) en D.*

a) *La suma de dichas funciones es una función convexa (cóncava) en D.*

b) *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son escalares no negativos, entonces $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$ es una función convexa (cóncava) en D.*

iv) *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

a) *Si f es convexa en D, entonces $S_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

b) *Si f es cóncava en D, entonces $T_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

v) *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío y sea $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im} f \subset E \subset \mathbb{R}$.*

a) *Si f es convexa y g es creciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en D.*

b) *Si f es convexa y g es decreciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en D.*

c) *Si f es cóncava y g es decreciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en D.*

) *Si f es cóncava y g es creciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en D.*

2.1.1. Ejercicios

1.

2.2. Optimización

Definición 14 (Extremos locales y globales). *i) Una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ alcanza un máximo relativo o local en un punto $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de su dominio si se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo punto x perteneciente a una vecindad de x_0.*

ii) Una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ alcanza un mínimo relativo o local en un punto $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de su dominio si se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo punto x perteneciente a un entorno de x_0.

Observación 1. *Si las desigualdades de las definiciones anteriores se cumplen para todos los puntos x pertenecientes al dominio de la función f, entonces f alcanza un máximo absoluto o global (o mínimo absoluto o global) en el punto x_0.*

Un problema de optimización sin restricciones se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Optimizar } f(x) \text{ donde } f : D \to \mathbb{R}, \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 9. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$. Si en $x_0 \in D$ la función f presenta un óptimo local, entonces $\nabla f(x_0) = 0$, es decir, $f'_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(x_0) = 0$.*

Definición 15. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$ y $x_0 \in D$. Se dice que x_0 es un punto crítico de f si $\nabla f(x_0) = 0$.*

Teorema 10. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^2(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Se cumple lo siguiente:*

(i) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida positiva, entonces f presenta en x_0 un mínimo local.

(ii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida negativa, entonces f presenta en x_0 un máximo local.

(iii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es indefinida, entonces f presenta en x_0 un punto silla.

Observación 2. *Si x_0 es un punto crítico de f pero f no tiene un óptimo local en x_0, se dice que x_0 es un punto silla o punto de ensilladura de f, es decir, x_0 es un punto silla de f si y sólo si existen puntos x e y en una vecindad de x_0 tales que $f(x) < f(x_0) < f(y)$.*

Teorema 11. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f \in C^1(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) Si f es convexa en D, entonces f presenta en x_0 un mínimo global.

(ii) Si f es estrictamente convexa en D, entonces f presenta en x_0 un mínimo global único.

(iii) Si f es cóncava en D, entonces f presenta en x_0 un máximo global.

(iv) Si f es estrictamente cóncava en D, entonces f presenta en x_0 un máximo global único.

Observación 3. *Si f es cóncava (convexa) en D, con D abierto y convexo y $f \in C^1(D)$, la condición $\nabla f(x_0) = 0$ para $x_0 \in D$ es necesaria y suficiente para que la función f alcance en x_0 un máximo(mínimo) global.*

Proposición 2. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $Im\,(f) \subset A \subset \mathbb{R}$. $f \in C^1(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Entonces se cumple que:*

(i) Si g es creciente, entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza máximos (mínimos) en D.

(ii) Si g es decreciente, entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza mínimos (máximos) en D.

2.3. Ejercicios

Ejercicio 1. *Dada la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz A.

Ejercicio 2. *Dada la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz A.

Ejercicio 3. *Hallar los autovalores y autovectores de la siguiente matriz simétrica:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dada la siguiente matriz indicar si es diagonalizable. En caso de que lo sea, calcular las matrices D y P que verifican:*

$$D = P^{-1}AP$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada la siguiente matriz indicar si es diagonalizable. En caso de que lo sea, calcular las matrices D y P que verifican:

$$D = P^{-1}AP$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & -6 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Dada la siguiente matriz simétrica A:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz diagonal (D) y la matriz ortogonal (Q) que verifican:

$$D = Q^t AQ$$

Ejercicio 6. *Dada la siguiente matriz simétrica A:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz diagonal (D) y la matriz ortogonal (Q) que verifican:

$$D = Q^t AQ$$

Ejercicio 7. *a) Buscar la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Buscar la matriz asociada a la siguiente forma cuadrática

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$$

Ejercicio 8. *Determinar el signo de las siguientes formas cuadráticas a partir del signo de sus autovalores:*

a) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ *es definida positiva*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = 3 > 0, \qquad \lambda_2 = 1 > 0$$

b) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ *es semidefinida positiva*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = 2 > 0, \qquad \lambda_2 = 0$$

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2$ *es definida negativa*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = -7 < 0, \quad \lambda_2 = -2 < 0, \quad \lambda_3 = -4 < 0$$

d) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 = -3x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ *es semidefinida negativa*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = -3 < 0, \quad \lambda_2 = -5 < 0, \quad \lambda_3 = 0$$

e) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 7x_2^2$ *es indefinida*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = 5 > 0, \qquad \lambda_2 = -7 < 0$$

Ejercicio 9. *Determinar el signo de las siguientes formas cuadráticas a partir del signo de sus menores principales:*

a) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ *es definida positiva*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los menores principales:

$$A_1 = 3 > 0, \qquad A_2 = \det(A) = 3 > 0$$

b) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ *es semidefinida positiva*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los menores principales:

$$A_1 = 1 > 0, \qquad A_2 = \det(A) = 0$$

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2$ *es definida negativa*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Los menores principales:

$$A_1 = -7 < 0, \quad A_2 = 14 > 0, \quad A_3 = \det(A) = -56 < 0$$

d) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2$ *es semidefinida negativa*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Los menores principales:

$$A_1 = -3 < 0, \quad A_2 = 3 > 0, \quad A_3 = \det(A) = 0$$

e) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 7x_2^2$ *es indefinida*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Los menores principales:

$$A_1 = 5 > 0, \qquad A_2 = \det(A) = -35 < 0$$

Ejercicio 10. *Analizar el signo de la siguiente forma cuadrática*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{cases} A_1 = -1 < 0 \\ A_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = 0 \\ A_3 = \det(A) = 0 \end{cases}$$

Sea

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad (x > 0 \ \wedge \ y > 0)$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{x^2} \\ f_y = -\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

¿Cómo se determina el signo de la matriz Hessiana?

Ejercicio 11.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-1)^2 + 2x_2^3 + 5x_3^2$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} f_{x_1} = 2(x_1-1) \\ f_{x_2} = 6x_2^2 \\ f_{x_3} = 10x_3 \end{cases}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Observemos que si se considera $D = \mathbb{R}^3$ la función no es cóncava ni convexa, pero si consideramos como dominio

$$D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0\}$$

(conjunto abierto y convexo) entonces f es estrictamente convexa en D.

Ejercicio 12.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 10y + 5$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f_y = 2y + x - 10 = 0 \end{cases} \implies (-2,6) \text{ es el punto crítico}$$

Ahora hallamos las derivadas parciales segundas y construimos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = 2 > 0 \\ |H_2| = \det(Hf) = 3 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función presenta en $(-2,6)$ *un mínimo relativo.*

Observemos que otra forma de expresar la solución hubiese sido: en $(-2,6,f(-2,6)) = (-2,6,-23)$ *hay un mínimo relativo.*

Ejercicio 13.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2xe^{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = 2ye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \implies (0,0) \text{ es el punto crítico}$$

Ahora hallamos las derivadas parciales segundas y construimos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2+2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por el punto crítico:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = 2 > 0 \\ |H_2| = \det(Hf) = 4 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función presenta en $(0,0)$ *un mínimo relativo.*

Ejercicio 14.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f_{x_1} = -3x_1^2 + 3x_3 = 0 \\ f_{x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \\ f_{x_3} = 3x_1 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right) \quad y \quad P_2 = (0, 1, 0).$$

Ejercicio 15. *Consideremos la función*

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

y sea

$$g(x) = \ln x$$

(función estrictamente creciente).

Busco los extremos de la función:

$$h(x, y) = g \circ f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} h_x = 2x = 0 \\ h_y = 2y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (0,0) \text{ es el punto crítico}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hh(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función h presenta en $(0, 0)$ *un mínimo relativo.*

Luego en ese punto la función f también alcanza un mínimo relativo.

Ejercicio 16.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 10y + 5$$

Derivadas primeras:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = 2y + x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-2, 6)$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Menores principales:

$$|H_1| = 2 > 0, \qquad |H_2| = \det Hf = 3 > 0$$

Luego $(-2, 6)$ *es un mínimo relativo.*

Ejercicio 17.

$$f(x, y) = 2 - 3x^2 + 3x^2y + y^3 - 3y^2$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (0, 0),\ P_2 = (0, 2),\ P_3 = (1, 1),\ P_4 = (-1, 1)$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -6 + 6y & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Clasificación:

$$P_1 : \textit{máximo}, \quad P_2 : \textit{mínimo}, \quad P_3, P_4 : \textit{puntos silla}$$

Ejercicio 18.

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

Punto crítico:

$$(0, 0)$$

Hessiana:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{mínimo relativo}$$

Ejercicio 19.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

Puntos críticos:

$$P_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{4}\right), \quad P_2 = (0, 1, 0)$$

Clasificación:

$$P_1 : \textit{máximo relativo}, \quad P_2 : \textit{punto silla}$$

Ejercicio 20.

$$\begin{cases} f(x, y) = xy \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(12 - x - y)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 12 - x - y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = y, \quad \lambda = x \Rightarrow y = x$$

Reemplazando:

$$12 - x - x = 0 \Rightarrow x = 6,\ y = 6,\ \lambda = 6$$

Punto crítico $P = (6, 6)$.
Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $n = 2$, $m = 1$ *entonces* $n - m = 1$.
Para máximo relativo:

$$|\bar{H}| > 0$$

Como $\det(\bar{H}) = 2 > 0$, *el problema presenta en* $P = (6, 6)$ *un máximo relativo.*

Ejercicio 21.

$$\begin{cases} f(x, y) = 3x + 2y \\ 2x^2 + 3y^2 = 210 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + 2y + \lambda(210 - 2x^2 - 3y^2)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} 3 - 4\lambda x = 0 \\ 2 - 6\lambda y = 0 \\ 210 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = \frac{3}{4x} = \frac{1}{3y} \Rightarrow y = \frac{4}{9}x$$

Reemplazando en la restricción:

$$2x^2 + 3\left(\frac{4}{9}x\right)^2 = 210 \Rightarrow x^2 = 81$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (9, 4),\ \lambda = \frac{1}{12} \qquad P_2 = (-9, -4),\ \lambda = -\frac{1}{12}$$

Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}$$

Evaluando:

$$\det \bar{H}(P_1) = 840 > 0 \Rightarrow \textit{máximo relativo}$$

$$\det \bar{H}(P_2) = -840 < 0 \Rightarrow \textit{mínimo relativo}$$

Ejercicio 22.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2 - x - y)$$

Ejercicio 23.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 2z \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 2z + \lambda_1(25 - x^2 - y^2) + \lambda_2(-x - y - z)$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (5,0,-5), \quad P_2 = (-5,0,5)$$

Clasificación:

$$P_1 : \textit{mínimo relativo}, \quad P_2 : \textit{máximo relativo}$$

Ejercicio 24.

$$\begin{cases} f(x,y) = x^4 + y^4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(-x + y)$$

Punto crítico:

$$P = (0,0)$$

Como $\det \bar{H}(P) = 0$*, no se puede concluir. Se requiere estudio local.*

Referencias

[1] Erling Andersen and Knud Andersen. Presolving in linear programming. *Math. Program.*, 71:221–245, December 1995.

[2] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.

[3] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.

[4] Feras Awad. Linear Programming Lecture Notes for Math 373.

[5] Michael Best and Klaus Ritter. *Linear Programming Active Set Analysis and Computer Programs.* January 1985.

[6] Omar Antolín Camarena. Math 340: Linear Programming.

[7] Zhang Chenlin. *OVERVIEW LINEAR PROGRAMMING AND ITS APPLICATION.* August 2022.

[8] Marco Chiarandini. Linear and Integer Programming Lecture Notes.

[9] George B Dantzig. Reminiscences about the Origins of Linear Programming.

[10] George B. Dantzig. Linear Programming. *Operations Research*, 50(1):42–47, February 2002.

[11] George B. Dantzig and Mukund Narain Thapa. *Linear programming.* Springer series in operations research. Springer, New York, 1997.

[12] George Bernard Dantzig. Linear Programming and Extensions.

[13] Departamento de Matemáticas, ITAM. Programación lineal (temario mat-24410). Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2012. Temario de curso de Programación Lineal, MAT-24410.

[14] Departamento de Matemáticas, ITAM. Temario de programación lineal (mat 24410) – primavera 2022. Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2022. Temario oficial de curso de Programación Lineal.

[15] Therese Donovan. Linear Programming in R.

[16] Thomas S Fergusin and M Casquilho. Linear Programming, a concise introduction.

[17] Richard Fletcher. A review of linear programming and its application to the assessment tools for teaching and learning (asTTle) projects. January 2001.

[18] Donald Goldfarb and Michael Todd. *Linear programming*, volume 1. October 1989. Journal Abbreviation: Optimization Pages: 170 Publication Title: Optimization.

[19] Jack E. Graver. On the foundations of linear and integer linear programming I. *Mathematical Programming*, 9(1):207–226, December 1975.

[20] Christopher Griffin. Linear programming: Penn State Math 484 Lecture Notes.

[21] Anupam Gupta and Ryan O'Donnell. Lecture notes for CMU's course on linear programming and semidefinite programming.

[22] Mr Jana. *Linear Programing Problem (LPP).* October 2023.

[23] Rajendra Kunwar and Hari Sapkota. An Introduction to Linear Programming Problems with Some Real-Life Applications. *European Journal of Mathematics and Statistics*, 3:21–27, April 2022.

[24] Dalgobind Mahto. Linear Programming (Graphical Method). March 2015.

[25] Steven Miller. An introduction to linear programming. May 2007.

[26] Dritan Nace. Lecture Notes in Linear Programming modeling.

[27] Phong Nguyen. *Linear Programming.* May 2003.

[28] Desmond C. Ong. *14.5 Using R to solve Linear Optimization | Statistics and Analytics for the Social and Computing Sciences.*

[29] Benjamin Van Roy and Kahn Mason. Formulation and Analysis of Linear Programs.

[30] Mark Schulze. Linear Programming for Optimization. September 2000.

[31] Gilbert Strang. Linear Algebra and Its Applications.

[32] Preeti Tiwari and Dr Agrawal. *A study of linear programming technique.* January 2022.

[33] Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Academia de Matemáticas. Programa de estudios: Optimización I. Technical report, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2012. Programa oficial de la asignatura Optimización I (Licenciatura en Modelación Matemática).

[34] Edith Vargas-García and Andreas Wachtel. Notas de programación lineal: Fundamentos, método simplex, dualidad y puntos interiores. Notas de curso / technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, 2020. Accedido: 2026-01-28.

[35] Yinyu Ye. Linear Programming Standard Equality Form and Solution Properties.