

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Notas de Optimización

Apuntes y ejercicios seleccionados

Carlos E Martínez-Rodríguez
Academia de Matemáticas
Plantel Casa Libertad
`carlos.martinez@uacm.edu.mx`

Índice

1. Contenido del curso	1
1.1. Metodología del curso	1
1.2. Evaluación del curso	1
1.3. Científicos prominentes	1
2. Fundamentos	3
3. Introducción	7

1. Contenido del curso

Los temas a cubrir en el curso son los siguientes:

- I Formulación matemática de un problema de Optimización con restricciones
- II Condiciones de optimalidad de primero y segundo orden
- III Interpretación geométrica
- IV Programación lineal: el método simplex y el de puntos interiores
- V Programación cuadrática

El propósito general del curso es que **el/la estudiante comprenda y aplique la teoría, técnicas y métodos para resolver problemas de optimización con restricciones.**

1.1. Metodología del curso

El curso consistirá en 3 sesiones a la semana en las que se desarrollarán y revisarán los contenidos del curso, las sesiones serán teóricas y se complementarán con prácticas en **R**, a través de scripts en formato **Rmd** los cuales se compilarán en un único documento al que se le denominará **Portafolio**. Además del estudio de los contenidos del curso, el/la estudiante desarrollará a lo largo del curso 4 biografías de una lista de 52 científicos prominentes en la historia de la ciencia. La evaluación de los contenidos del curso será a través de tres evaluaciones formativas en las cuales se deberá de demostrar el dominio de los temas revisados en clase. La asistencia será importante para poder ser evaluado con estos tres elementos, el requisito de porcentaje de asistencia es del 85 %, en caso de no contar con este porcentaje mínimo de asistencia para poder certificar la materia deberá de presentar el examen de certificación, mismo que será elaborado por el comité de certificación.

1.2. Evaluación del curso

La calificación final del curso se obtiene de la suma de los siguientes porcentajes: $Calificación\ Final = Portafolio\ (30\%) + Biografías\ (10\%) + Evaluaciones\ (60\%)$.

1.3. Científicos prominentes

- | | | | |
|--------------|-----------|-------------|-----------|
| ■ Euclides | ■ Fermat | ■ Bernoulli | ■ Laplace |
| ■ Arquimedes | ■ Pascal | ■ Jacobi | ■ Gauss |
| ■ Galileo | ■ Newton | ■ Euler | ■ Moebius |
| ■ Kepler | ■ Leibniz | ■ Lagrange | ■ Poisson |

▪ Bolzano	▪ Hilbert	▪ Dirac	▪ Nash
▪ Cauchy	▪ Russell	▪ Neumann	▪ Grothendieck
▪ Abel	▪ Ramanujan	▪ Kolmogorov	▪ Higgs
▪ Galois	▪ Schrodinger	▪ Oppenheimer	▪ Penrose
▪ Riemann	▪ Einstein	▪ Godel	▪ Kleinrock
▪ Cantor	▪ Courant	▪ Chandrasekhar	▪ Knuth
▪ Planck	▪ Pauli	▪ Turing	▪ Hawking
▪ Bohr	▪ Heisenberg	▪ Erdos	▪ Simon
▪ Poincare	▪ Fermi	▪ Feynman	▪ Perelman

2. Fundamentos

Definición 1 (Valores y vectores propios). Sea A una matriz de $n \times n$, v vector de dimensión n y λ escalar. Se dice que v es un vector propio de A y λ es vector propio de A si se cumple

$$Av = \lambda v$$

Nota 1. De la igualdad anterior se tiene $Av - \lambda v = (A - I\lambda)v = 0$, ecuación que siempre tiene como solución $v = 0$, para cualquier λ . Si $(A - I\lambda)$ es invertible, la única solución es $v = 0$. Para tener soluciones no triviales, se requiere que λ sea tal que $(A - I\lambda)$ no sea invertible, entonces

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

Teorema 1. Sea A matriz de $n \times n$, λ es un valor propio de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - I\lambda) = 0$$

Definición 2. La ecuación $p(\lambda) = 0$ se denomina polinomio característico de A .

Teorema 2. Sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valores característicos de A con vectores propios v_1, v_2, \dots, v_m . Entonces los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

Definición 3. Sea λ valor propio de A , la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ .

Propiedades 1 (Matrices).

Definición 4. Semejantes Sean A y B matrices de $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC. \quad (1)$$

Teorema 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz simétrica

- i) Los valores propios de A son reales.
- ii) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Definición 5 (Diagonalización). Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D .

Proposición 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal.

Teorema 4. Diagonalización Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n valores propios linealmente independientes, en este caso la matriz diagonal D tiene como elementos en la diagonal los n valores propios de A . Entonces $D = C^{-1}AC$.

Teorema 5. Sea A matriz simétrica real de $n \times n$, entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales.

Definición 6. Se dice que A matriz de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t A Q = D$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son los valores propios de A .

Teorema 6. Sea A matriz real de $n \times n$, entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Definición 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se denomina **menor de orden k de la matriz A** al determinante que se obtiene de eliminar $(n - k)$ filas y las mismas $(n - k)$ columnas.

Definición 8. Formas Cuadráticas

- i) Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.
- ii) Una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.

Definición 9. Sobre formas cuadráticas Sea A matriz simétrica, entonces se define la forma cuadrática $F(x, y) = Av \cdot v$.

Ejemplo 1. Si $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es forma cuadrática, sea $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ entonces $Av \cdot v = d$.

Definición 10. Una forma cuadrática $\varphi(x)$ es una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática $\varphi(x)$ es una matriz $n \times n$ y simétrica de la forma: $\varphi(x) = x^t A x$.

Nota 2. La matriz A asociada a una forma cuadrática es $n \times n$ y simétrica, por tanto diagonalizable ortogonalmente, es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $D = Q^t A Q$, donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios λ_i de A , y la columnas de Q son los vectores propios de A .

De donde

$D = Q^t A Q$, por tanto $A = Q D Q^t$, entonces la forma cuadrática queda de la forma

$$\varphi(x) = x^t A x = x^t Q D Q^t x = (x^t Q) D (Q^t x) = (Q^t x)^t D (Q^t x), \text{ haciendo } \tilde{x} = Q^t x$$

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x}^t D \tilde{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2.$$

Se dice que $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ es la forma canónica o forma diagonal de la forma cuadrática $\varphi(x)$.

Teorema 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y real; sean $A_i, 1 \leq i \leq n$ los menores principales de orden i de la matriz n , entonces

- i) A es definida positiva si y sólo si todos los menores principales son positivos.
- ii) A es definida negativa si y sólo si los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos.
- iii) Si A es semidefinida positiva o negativa, entonces $\det(A) = 0$.
- iv) Si $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$ y $\det(A) = 0$, entonces A es semidefinida positiva.
- v) Si $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$, y $\det(A) = 0$, entonces A es semidefinida negativa.
- vi) A es semidefinida positiva si y sólo si todos los menores de la matriz A son mayores o iguales a cero.
- vii) A es semidefinida negativa si y sólo si los menores de la matriz A de orden impar son menores o iguales a cero y los de orden par son mayores o iguales a cero.
- viii) Si no se cumplen estas condiciones, la matriz A es indefinida.

Definición 11 (Segmento). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se llama **segmento** de extremos x e y al conjunto de puntos $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Definición 12 (Convexo). Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in S$ y $\forall \alpha \in [0, 1]$ se cumple que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$.

Definición 13 (Funciones convexas). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.

- a) f es convexa en D si y sólo si $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \forall x, y \in D, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- b) f es estrictamente convexa en D si y sólo si $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \forall x, y \in D, \forall \alpha \in (0, 1)$.
- c) f es cóncava si y sólo si $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in D, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- d) f es estrictamente cóncava si y sólo si $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in D, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Teorema 8. Sobre funciones convexas Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.

- i) f es convexa en D si y sólo si la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida positiva $\forall x \in D$.
- ii) f es cóncava en D si y sólo si la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida negativa $\forall x \in D$.

- iii) Si la matriz $Hf(x)$ es definida positiva $\forall x \in D$, entonces f es estrictamente convexa en D
- iii) Si la matriz $Hf(x)$ es definida negativa $\forall x \in D$, entonces f es estrictamente cóncava en D

La matriz $Hf(x)$ se denomina matriz Hessiana de la función f :

$$Hf(x) = Hf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}^{(2)} & \dots & f_{x_1 x_n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}^{(2)} & \dots & f_{x_n x_n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Propiedades 2 (Funciones convexas). i) Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Si f es cóncava (convexa) en D , entonces es continua en el interior de D .

ii) Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.

- a) Si f es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en D , entonces f es convexa (cóncava) en D .
- b) f es convexa (estrictamente convexa) en D si y sólo si $-f$ es cóncava (estrictamente cóncava) en D .
- c) Si f es convexa (cóncava) en D y $\alpha \geq 0$, entonces αf es convexa (cóncava) en D .
- d) Si $f(x) > 0$ y cóncava en D , entonces $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ es convexa en D .

iii) Sean $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq k$), $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío, funciones convexas (cóncavas) en D .

- a) La suma de dichas funciones es una función convexa (cóncava) en D .
- b) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son escalares no negativos, entonces $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ es una función convexa (cóncava) en D .

iv) Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.

- a) Si f es convexa en D , entonces $S_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- b) Si f es cóncava en D , entonces $T_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

v) Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío y sea $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Im } f \subset E \subset \mathbb{R}$.

- a) Si f es convexa y g es creciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en D .
- b) Si f es convexa y g es decreciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en D .
- c) Si f es cóncava y g es decreciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en D .
-) Si f es cóncava y g es creciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en D .

3. Introducción

Definición 14. *Optimización sin restricciones*

Referencias

- [1] Erling Andersen and Knud Andersen. Presolving in linear programming. *Math. Program.*, 71:221–245, December 1995.
- [2] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.
- [3] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.
- [4] Feras Awad. Linear Programming Lecture Notes for Math 373.
- [5] Michael Best and Klaus Ritter. *Linear Programming Active Set Analysis and Computer Programs*. January 1985.
- [6] Omar Antolín Camarena. Math 340: Linear Programming.
- [7] Zhang Chenlin. *OVERVIEW LINEAR PROGRAMMING AND ITS APPLICATION*. August 2022.
- [8] Marco Chiarandini. Linear and Integer Programming Lecture Notes.
- [9] George B Dantzig. Reminiscences about the Origins of Linear Programming.
- [10] George B. Dantzig. Linear Programming. *Operations Research*, 50(1):42–47, February 2002.
- [11] George B. Dantzig and Mukund Narain Thapa. *Linear programming*. Springer series in operations research. Springer, New York, 1997.
- [12] George Bernard Dantzig. Linear Programming and Extensions.
- [13] Departamento de Matemáticas, ITAM. Programación lineal (temario mat-24410). Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2012. Temario de curso de Programación Lineal, MAT-24410.
- [14] Departamento de Matemáticas, ITAM. Temario de programación lineal (mat 24410) – primavera 2022. Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2022. Temario oficial de curso de Programación Lineal.
- [15] Therese Donovan. Linear Programming in R.
- [16] Thomas S Fergusin and M Casquilho. Linear Programming, a concise introduction.
- [17] Richard Fletcher. A review of linear programming and its application to the assessment tools for teaching and learning (asTTle) projects. January 2001.
- [18] Donald Goldfarb and Michael Todd. *Linear programming*, volume 1. October 1989. Journal Abbreviation: Optimization Pages: 170 Publication Title: Optimization.

- [19] Jack E. Graver. On the foundations of linear and integer linear programming I. *Mathematical Programming*, 9(1):207–226, December 1975.
- [20] Christopher Griffin. Linear programming: Penn State Math 484 Lecture Notes.
- [21] Anupam Gupta and Ryan O’Donnell. Lecture notes for CMU’s course on linear programming and semidefinite programming.
- [22] Mr Jana. *Linear Programing Problem (LPP)*. October 2023.
- [23] Rajendra Kunwar and Hari Sapkota. An Introduction to Linear Programming Problems with Some Real-Life Applications. *European Journal of Mathematics and Statistics*, 3:21–27, April 2022.
- [24] Dalgobind Mahto. Linear Programming (Graphical Method). March 2015.
- [25] Steven Miller. An introduction to linear programming. May 2007.
- [26] Dritan Nace. Lecture Notes in Linear Programming modeling.
- [27] Phong Nguyen. *Linear Programming*. May 2003.
- [28] Desmond C. Ong. *14.5 Using R to solve Linear Optimization | Statistics and Analytics for the Social and Computing Sciences*.
- [29] Benjamin Van Roy and Kahn Mason. Formulation and Analysis of Linear Programs.
- [30] Mark Schulze. Linear Programming for Optimization. September 2000.
- [31] Gilbert Strang. Linear Algebra and Its Applications.
- [32] Preeti Tiwari and Dr Agrawal. *A study of linear programming technique*. January 2022.
- [33] Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Academia de Matemáticas. Programa de estudios: Optimización I. Technical report, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2012. Programa oficial de la asignatura Optimización I (Licenciatura en Modelación Matemática).
- [34] Edith Vargas-García and Andreas Wachtel. Notas de programación lineal: Fundamentos, método simplex, dualidad y puntos interiores. Notas de curso / technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, 2020. Accedido: 2026-01-28.
- [35] Yinyu Ye. Linear Programming Standard Equality Form and Solution Properties.