Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Notas de Optimización

Apuntes y ejercicios seleccionados

Carlos E Martínez-Rodríguez
Academia de Matemáticas
Plantel Casa Libertad
carlos.martinez@uacm.edu.mx

2026

Índice

1. Contenido del curso

Los temas a cubrir en el curso son los siguientes:

I Formulación matemática de un problema de Optimización con restricciones

II Condiciones de optimalidad de primero y segundo orden

III Interpretación geométrica

IV Programación lineal: el método simplex y el de puntos interiores

V Programación cuadrática

El propósito general del curso es que **el/la estudiante comprenda y aplique la teoría, técnicas y métodos para resolver problemas de optimización con restricciones**.

1.1. Metodología del curso

El curso consistirá en 3 sesiones a la semana en las que se desarrollarán y revisarán los contenidos del curso, las sesiones serán teóricas y se complementarán con prácticas en `R`, a través de scripts en formato `Rmd` los cuales se compilarán en un único documento al que se le denominará `Portafolio`. Además del estudio de los contenidos del curso, el/la estudiante desarrollará a lo largo del curso 4 biografías de una lista de 52 científicos prominentes en la historia de la ciencia. La evaluación de los contenidos del curso será a través de tres evaluaciones formativas en las cuales se deberá de demostrar el dominio de los temas revisados en clase. La asistencia será importante para poder ser evaluado con estos tres elementos, el requisito de porcentaje de asistencia es del 85 %, en caso de no contar con este porcentaje mínimo de asistencia para poder certificar la materia deberá de presentar el examen de certificación, mismo que será elaborado por el comité de certificación.

1.2. Evaluación del curso

La calificación final del curso se obtiene de la suma de los siguientes porcentajes: *Calificación Final* = *Portafolio* (30 %) + *Biografías* (10 %) + *Evaluaciones* (60 %).

1.3. Científicos prominentes

- Euclides
- Arquimedes
- Galileo
- Kepler
- Fermat
- Pascal
- Newton
- Leibniz
- Bernoulli
- Jacobi
- Euler
- Lagrange
- Laplace
- Gauss
- Moebius
- Poisson

- Bolzano
- Cauchy
- Abel
- Galois
- Riemann
- Cantor
- Planck
- Bohr
- Poincare
- Hilbert
- Russell
- Ramanujan
- Schrodinger
- Einstein
- Courant
- Pauli
- Heisenberg
- Fermi
- Dirac
- Neumann
- Kolmogorov
- Oppenheimer
- Godel
- Chandrasekhar
- Turing
- Erdos
- Feynman
- Nash
- Grothendieck
- Higgs
- Penrose
- Kleinrock
- Knuth
- Hawking
- Simon
- Perelman

2. Fundamentos

Definición 1 (Valores y vectores propios)**.** *Sea A una matrix de $n \times n$, v vector de dimensión n y λ escalar. Se dice que v es un vector propio de A y λ es vector propio de A si se cumple*

$$Av = \lambda v$$

Nota 1. *De la igualdad anterior se tiene $Av - \lambda v = (A - I\lambda)\, v = 0$, ecuación que siempre tiene como solución $v = 0$, para cualquier λ. Si $(A - I\lambda)$ es invertible, la única solución es $v = 0$. Para tener soluciones no triviales, se requiere que λ sea tal que $(A - I\lambda)$ no sea invertible, entonces*

$$det\,(A - I\lambda) = 0$$

Teorema 1. *Sea A matriz de $n \times n$, λ es un valor propio de A si y sólo si*

$$p\,(\lambda) = det\,(A - I\lambda) = 0$$

Definición 2. *La ecuaciíon $p\,(\lambda) = 0$ se denomina polinomio característico de A.*

Teorema 2. *Sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores característicos de A con vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Entonces los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.*

Definición 3. *Sea λ valor propio de A, la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ.*

Propiedades 1 (Matrices)**.**

Definición 4. *Semejantes Sean A y B matrices de $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que*

$$B = C^{-1}AC. \tag{1}$$

Teorema 3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica*

i) Los valores propios de A son reales.

ii) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Definición 5 (Diagonalizacion)**.** *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.*

Proposición 1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular, tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ donde $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal.*

Teorema 4. *Diagonalizacion Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n valores propios linealmente independientes, en este caso la matriz diagonal D tiene como elementos en la diagona los n valores propios de A. Entonces $D = C^{-1}AC$.*

Teorema 5. *Sea A matriz simétrica real de $n \times n$, entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales.*

Definición 6. *Se dice que A matriz de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t AQ = D$, donde $D = diag\left(\lambda_1, \lambda 2, \ldots, \lambda_n\right)$ son los valores propios de A.*

Teorema 6. *Sea A matriz real de $n \times n$, entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.*

Definición 7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se denomina **menor de orden k de la matriz** A al determinante que se obtiene de eliminar $(n-k)$ filas y las mismas $(n-k)$ columnas.*

Definición 8. *Formas Cuadráticas*

i) *Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.*

ii) *Una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma $F\left(x, y\right) = ax^2 + bxy + cy^2$, donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.*

Definición 9. *Sobre formas cuadráticas Sea A matriz simétrica, entonces se define la forma cuadrática $F\left(x, y\right) = Av \cdot v$.*

Ejemplo 1. *Si $F\left(x, y\right) = ax^2 + bxy + cy^2$ es forma cuadrática, sea $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix}$ entonces $Av \cdot v = d$.*

Definición 10. *Una forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$ es una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi\left(x\right) = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$ es una matriz $n \times n$ y simétricade la forma: $\varphi\left(x\right) = x^t Ax$.

Nota 2. *La matriz A asociada a una forma cuadrática es $n \times n$ y simétrica, por tanto diagonalizable ortogonalmente, es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $D = Q^t AQ$, donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios λ_i de A, y la columnas de Q son los vectores propios de A.*

De donde

$$D = Q^t AQ, \text{ por tanto } A = QDQ^t, \text{ entonces la forma cuadrática queda de la forma}$$
$$\varphi\left(x\right) = x^t Ax = x^t QDQ^t x = \left(x^t Q\right) D \left(Q^t x\right) = \left(Q^t x\right)^t D \left(Q^t x\right), \text{ haciendo } \tilde{x} = Q^t x$$
$$\varphi\left(x\right) = \tilde{\varphi}\left(\tilde{x}\right) = \tilde{x}^t D\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}^2.$$

Se dice que $\tilde{\varphi}\left(\tilde{x}\right)$ es la forma canónica o forma diagonal de la forma cuadrática $\varphi\left(x\right)$.

Teorema 7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y real; sean $A_i, 1 \leq 1 \leq n$ los menores principales de orden i de la matriz n, entonces*

i) *A es definida positiva si y sólo sí todos los menores principales son positivos.*

ii) *A es definida negativa sí y sólo sí los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos.*

iii) *Si A es semidefinida positiva o negativa, entonces $det(A) = 0$.*

iv) *Si $A_1 > 0$, $A_2 > 0, \ldots, A_n > 0$ y $det(A) = 0$, entonces A es semidefinida positiva.*

v) *Si $A_1 < 0$, $A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots,$ y $det(A) = 0$, entonces A es semidefinida negativa.*

vi) *A es semidefinida positiva sí y sólo sí todos los menores de la matriz A son mayores o iguales a cero.*

vii) *A es semidefinida negaiva sí y sólo sí los menores de la matriz A de orden impar son menores o iguales a cero y los de orden par son mayores o iguales a cero.*

viii) *Si no se cumplen estas condiciones, la matriz A es indefinida.*

Definición 11 (Segmento)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se llama **segmento** de extremos x e y al conjunto de puntos $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $z = ax + (1-\alpha)\,y$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Definición 12 (Convexo)**.** *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in S$ y $\forall \alpha \in [0,1]$ se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)\,y \in S$.*

Definición 13 (Funciones convexas)**.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

a) *f es convexa en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in [0,1]$.*

b) *f es estrictamente convexa en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

c) *f es cóncava sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$, $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in [0,1]$.*

d) *f es cóncava sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) > \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x)$, $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

Teorema 8. *Sobre funciones convexas Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.*

i) *f es convexa en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida positiva $\forall x \in D$.*

ii) *f es cóncava en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida negativa $\forall x \in D$.*

iii) *Si la matriz* $Hf(x)$ *es definida positiva* $\forall x \in D$*, entonces* f *es estríctamente convexa en* D

iii) *Si la matriz* $Hf(x)$ *es definidanegativa* $\forall x \in D$*, entonces* f *es estríctamente cóncava en* D

La matrix $Hf(x)$ *se denomina matriz Hessiana de la función* f*:*

$$Hf(x) = Hf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f^{(2)}_{x_1x_1} & \cdots & f^{(2)}_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(2)}_{x_nx_1} & \cdots & f^{(2)}_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Propiedades 2 (Funciones convexas)**.** *i)* *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$*. Si* f *es cóncava (convexa) en* D*, entonces es continua en el interior de* D*.*

ii) *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto convexo no vacío.*

a) *Si* f *es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en* D*, entonces* f *es convexa (cóncava) en* D*.*

b) f *es convexa (estrictamente convexa) en* D *si y sólo si* $-f$ *es cóncava (estrictamente cóncava) en* D*.*

c) *Si* f *es convexa (cóncava) en* D *y* $\alpha \geq 0$*, entonces* αf *es convexa (cóncava) en* D*.*

d) *Si* $f(x) > 0$ *y cóncava en* D*, entonces* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ *es convexa en* D*.*

iii) *Sean* $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto convexo no vacío, funciones convexas (cóncavas) en* D*.*

a) *La suma de dichas funciones es una función convexa (cóncava) en* D*.*

b) *Si* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *son escalares no negativos, entonces* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$ *es una función convexa (cóncava) en* D*.*

iv) *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto convexo no vacío.*

a) *Si* f *es convexa en* D*, entonces* $S_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ *es un conjunto convexo para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

b) *Si* f *es cóncava en* D*, entonces* $T_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ *es un conjunto convexo para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

v) *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto convexo no vacío y sea* $g : E \to \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{Im} f \subset E \subset \mathbb{R}$*.*

a) *Si* f *es convexa y* g *es creciente y convexa, entonces* $g \circ f$ *es convexa en* D*.*

b) *Si* f *es convexa y* g *es decreciente y cóncava, entonces* $g \circ f$ *es cóncava en* D*.*

c) *Si* f *es cóncava y* g *es decreciente y convexa, entonces* $g \circ f$ *es convexa en* D*.*

) *Si* f *es cóncava y* g *es creciente y cóncava, entonces* $g \circ f$ *es cóncava en* D*.*

3. Introducción

Definición 14 (Extremos locales y globales). *i) Una función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ alcanza un máximo relativo o local en un punto $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ de su dominio si se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo punto x perteneciente a una vecindad de x_0.*

ii) Una función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ alcanza un mínimo relativo o local en un punto $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ de su dominio si se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo punto x perteneciente a un entorno de x_0.

Observación 1. *Si las desigualdades de las definiciones anteriores se cumplen para todos los puntos x pertenecientes al dominio de la función f, entonces f alcanza un máximo absoluto o global (o mínimo absoluto o global) en el punto x_0.*

Un problema de optimización sin restricciones se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Optimizar } f(x) \text{ donde } f : D \to \mathbb{R}, \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

2.1.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 9. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$. Si en $x_0 \in D$ la función f presenta un óptimo local, entonces $\nabla f(x_0) = 0$, es decir, $f'_{x_1}(x_0) = 0, \dots, f'_{x_n}(x_0) = 0$.*

Definición 15. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$ y $x_0 \in D$. Se dice que x_0 es un punto crítico de f si $\nabla f(x_0) = 0$.*

Teorema 10. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^2(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Se cumple lo siguiente:*

(i) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida positiva, entonces f presenta en x_0 un mínimo local.

(ii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida negativa, entonces f presenta en x_0 un máximo local.

(iii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es indefinida, entonces f presenta en x_0 un punto silla.

Observación: Si x_0 es un punto crítico de f pero f no tiene un óptimo local en x_0, se dice que x_0 es un *punto silla* o *punto de ensilladura* de f.

Es decir, x_0 es un punto silla de f si y sólo si existen puntos x e y en un entorno de x_0 que verifican

$$f(x) < f(x_0) < f(y).$$

2.1.5 Condición suficiente de optimalidad global

Teorema 12: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f \in C^1(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Se verifica:

(i) Si f es convexa en D, entonces f presenta en x_0 un mínimo global.

(ii) Si f es estrictamente convexa en D, entonces f presenta en x_0 un mínimo global único.

(iii) Si f es cóncava en D, entonces f presenta en x_0 un máximo global.

(iv) Si f es estrictamente cóncava en D, entonces f presenta en x_0 un máximo global único.

Observación: Si f es cóncava (convexa) en D, con D abierto y convexo y $f \in C^1(D)$, la condición $\nabla f(x_0) = 0$ para $x_0 \in D$ es necesaria y suficiente para que la función f alcance en x_0 un máximo (mínimo) global.

2.1.6 Composición de funciones

Proposición 13: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $g : A \to \mathbb{R}$ de manera que $\mathrm{Im}\, f \subset A \subset \mathbb{R}$. $f \in C^1(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Se verifica:

(i) Si g es creciente, entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza máximos (mínimos) en D.

(ii) Si g es decreciente, entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza mínimos (máximos) en D.

2.1.7 Análisis de sensibilidad

Consideremos el siguiente problema:

$$\max_x f(x, a) \qquad (P)$$

donde $f \in C^1(D)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a \in \mathbb{R}$ (parámetro).

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a \in A$ existe $x^*(a) = (x_1^*(a), \ldots, x_n^*(a))$ solución óptima del problema (P) con x^* una función C^1.

Si definimos la función objetivo indirecta o función valor como

$$\varphi(a) = f(x^*(a), a),$$

se verifica:

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = \frac{\partial f(x^*(a), a)}{\partial a}.$$

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la Envolvente**.

2.2 Optimización con restricciones de igualdad

Un programa matemático con restricciones de igualdad se formula de la siguiente manera ($m < n$):

$$(P) \quad \begin{cases} \text{opt } z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a. } g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

o bien en forma resumida:

$$\text{opt } z = f(x) \quad \text{s.a. } g(x) = b.$$

En este caso el conjunto de soluciones factibles es

$$S = \{x \in D \mid g_i(x) = b_i,\ 1 \leq i \leq m\}.$$

2.2.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 14 (Teorema de Lagrange): Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i : D \to \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$), $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_i \in C^1(D)$. Sea $x_0 \in S$ tal que

$$\text{rg}[Jg(x_0)] = m.$$

Si el problema (P) presenta en x_0 un óptimo local, entonces existen números reales únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ soluciones del sistema:

$$\nabla f(x_0) - \lambda_1 \nabla g_1(x_0) - \cdots - \lambda_m \nabla g_m(x_0) = 0.$$

Definición 13: Los números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se denominan *multiplicadores de Lagrange* asociados al punto x_0.
Definición 14: Un punto del conjunto factible S que verifique la condición de Lagrange se denomina *punto crítico del programa.*

SEGUNDA PARTE: OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA

Autoras: María José Bianco y Verónica García Fronti

2.1. Optimización sin restricciones

Extremos locales y globales

Una función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ alcanza un *máximo relativo o local* en un punto

$$x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

de su dominio si se verifica que

$$f(x) \leq f(x_0)$$

para todo punto x perteneciente a un entorno de x_0.

Una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ alcanza un *mínimo relativo o local* en un punto

$$x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

de su dominio si se verifica que

$$f(x) \geq f(x_0)$$

para todo punto x perteneciente a un entorno de x_0.

Observación: Si las desigualdades de las definiciones anteriores se cumplen para todos los puntos x pertenecientes al dominio de la función f, entonces f alcanza un *máximo absoluto o global* (o *mínimo absoluto o global*) en el punto x_0.

—

Un programa matemático sin restricciones se formula de la siguiente manera:

$$\text{Optimizar } f(x) \quad \text{siendo } f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$$

En este tipo de programas, el conjunto de soluciones factibles coincide con el dominio D de la función objetivo.

2.1.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 10: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$. Si en $x_0 \in D$ la función f presenta un óptimo local, entonces

$$\nabla f(x_0) = 0$$

(es decir, $f'_{x_1}(x_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(x_0) = 0$).

Definición 12: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$ y $x_0 \in D$. Se dice que x_0 es un *punto crítico* de f si

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

2.1.2 Condición suficiente para la existencia de óptimos locales

Teorema 11: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^2(D)$ y sea $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Se verifica:

(i) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida positiva, entonces f presenta en x_0 un mínimo local.

(ii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es definida negativa, entonces f presenta en x_0 un máximo local.

(iii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(x_0)$ es indefinida, entonces f presenta en x_0 un punto silla.

Observación: Si x_0 es un punto crítico de f pero f no tiene un óptimo local en x_0, se dice que x_0 es un *punto silla* o *punto de ensilladura* de f.

Es decir, x_0 es un punto silla de f si y sólo si existen puntos x e y en un entorno de x_0 tales que

$$f(x) < f(x_0) < f(y).$$

2.1.3 ¿Cuándo falla?

- *Matriz Hessiana semidefinida en un punto crítico.* El Teorema 2.2 no da información sobre un punto donde la forma cuadrática sea semidefinida positiva o negativa. En esos casos habrá que hacer un estudio de la función en un entorno del punto.

- *Función no derivable en un punto perteneciente al dominio de la función.* Un punto crítico es un candidato a óptimo local. Otros candidatos serían todos aquellos puntos que pertenecen al dominio de la función, pero en los cuales la función no es derivable.

2.1.4 Paso a paso

1. Hallar el dominio de la función objetivo.

2. Calcular el gradiente de la función.

3. Buscar los puntos que anulan el gradiente (puntos críticos).

4. Fijarse si existen puntos pertenecientes al dominio de la función donde la función no es derivable.

5. Hallar la matriz Hessiana.

6. Reemplazar cada uno de los puntos críticos en la matriz Hessiana y definir el carácter de cada uno.

7. Si en alguno de los puntos críticos la matriz Hessiana es semidefinida (positiva o negativa), realizar un estudio local.

Ejemplo 15

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 10y + 5$$

Derivadas primeras:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = 2y + x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-2, 6)$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Menores principales:

$$|H_1| = 2 > 0, \qquad |H_2| = \det Hf = 3 > 0$$

Luego $(-2, 6)$ es un mínimo relativo.

Ejemplo 16

$$f(x,y) = 2 - 3x^2 + 3x^2y + y^3 - 3y^2$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (0,2),\ P_3 = (1,1),\ P_4 = (-1,1)$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6+6y & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

Clasificación:

$$P_1 : \text{máximo}, \quad P_2 : \text{mínimo}, \quad P_3, P_4 : \text{puntos silla}$$

Ejemplo 17

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

Punto crítico:

$$(0,0)$$

Hessiana:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{mínimo relativo}$$

Ejemplo 18

$$f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

Puntos críticos:

$$P_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{4}\right), \quad P_2 = (0,1,0)$$

Clasificación:

$$P_1 : \text{máximo relativo}, \quad P_2 : \text{punto silla}$$

2.1.5 Condición suficiente de optimalidad global

Teorema 12: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con D abierto y convexo, $f \in C^1(D)$ y x_0 punto crítico.

(i) f convexa $\Rightarrow$ mínimo global.

(ii) f estrictamente convexa $\Rightarrow$ mínimo global único.

(iii) f cóncava $\Rightarrow$ máximo global.

(iv) f estrictamente cóncava $\Rightarrow$ máximo global único.

2.1.6 Composición de funciones

Proposición 13: Si g es creciente (decreciente), los máximos y mínimos de f coinciden con los de $g \circ f$ (cambiando máximo por mínimo si g es decreciente).

2.1.7 Análisis de sensibilidad

Problema:

$$\max_x f(x, a)$$

Función valor:

$$\varphi(a) = f(x^*(a), a)$$

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = \frac{\partial f(x^*(a), a)}{\partial a}$$

Teorema de la Envolvente.

(b) La matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa si y sólo si los $n - m$ últimos menores principales de $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ alternan signo comenzando por el signo $(-1)^{m+1}$.

(c) Si las condiciones a) y b) no se cumplen y los determinantes son distintos de cero entonces la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es indefinida.

Teorema 15: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_i \in C^2(D)$. Sea x_0 un punto crítico del programa (P) con λ_0 multiplicadores de Lagrange asociados.

(i) Si la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida positiva entonces el problema (P) presenta en x_0 un mínimo local.

(ii) Si la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa entonces el problema (P) presenta en x_0 un máximo local.

2.2.3 ¿Cuándo falla?

- No se verifica la condición de regularidad. Si esto sucede la condición de Lagrange no tiene que verificarse necesariamente. Como consecuencia, para resolver un problema con restricciones de igualdad, siempre hay que tener en cuenta los puntos del conjunto de soluciones factibles que no cumplen la condición de regularidad.

- No existencia de extremos del programa. Si la hipótesis de funciones C^1 se cumple y la condición de regularidad se verifica, pero no existen puntos críticos, entonces el problema planteado carece de extremos locales.

- Matriz hessiana orlada semidefinida en un punto crítico. En esos casos habrá que hacer un estudio de la función en un entorno del punto.

2.2.4 Paso a paso

1. Hallar el dominio de la función objetivo y el conjunto de soluciones factibles.
2. Plantear la función de Lagrange.
3. Calcular el gradiente de la función de Lagrange.
4. Buscar los puntos que anulan el gradiente (puntos críticos).
5. Fijarse si existen puntos pertenecientes al conjunto de soluciones factibles donde no se cumpla la condición de regularidad. En caso afirmativo realizar un estudio local.
6. Hallar la matriz hessiana orlada.
7. Reemplazar cada uno de los puntos críticos en la matriz hessiana orlada y definir el carácter de cada uno de ellos.
8. Si en alguno de los puntos críticos la matriz hessiana es semidefinida (positiva o negativa) realizar un estudio local.

Ejemplo 21

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(12 - x - y)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 12 - x - y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = y, \quad \lambda = x \Rightarrow y = x$$

Reemplazando:

$$12 - x - x = 0 \Rightarrow x = 6,\ y = 6,\ \lambda = 6$$

Punto crítico $P = (6,6)$.
Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $n = 2$, $m = 1$ entonces $n - m = 1$.
Para máximo relativo:

$$|\bar{H}| > 0$$

Como $\det(\bar{H}) = 2 > 0$, el problema presenta en $P = (6,6)$ un máximo relativo.

Ejemplo 22

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x + 2y \\ 2x^2 + 3y^2 = 210 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 3x + 2y + \lambda(210 - 2x^2 - 3y^2)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} 3 - 4\lambda x = 0 \\ 2 - 6\lambda y = 0 \\ 210 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = \frac{3}{4x} = \frac{1}{3y} \Rightarrow y = \frac{4}{9}x$$

Reemplazando en la restricción:

$$2x^2 + 3\left(\frac{4}{9}x\right)^2 = 210 \Rightarrow x^2 = 81$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (9,4),\ \lambda = \frac{1}{12} \qquad P_2 = (-9,-4),\ \lambda = -\frac{1}{12}$$

Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}$$

Evaluando:

$$\det \bar{H}(P_1) = 840 > 0 \Rightarrow \text{máximo relativo}$$

$$\det \bar{H}(P_2) = -840 < 0 \Rightarrow \text{mínimo relativo}$$

Ejemplo 23

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2 - x - y)$$

Ejemplo 24

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 2z \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 2z + \lambda_1(25 - x^2 - y^2) + \lambda_2(-x - y - z)$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (5,0,-5), \quad P_2 = (-5,0,5)$$

Clasificación:

$$P_1 : \text{mínimo relativo}, \quad P_2 : \text{máximo relativo}$$

Ejemplo 25

$$\begin{cases} f(x,y) = x^4 + y^4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(-x + y)$$

Punto crítico:

$$P = (0,0)$$

Como $\det \bar{H}(P) = 0$, no se puede concluir. Se requiere estudio local.

2.2.5 Condiciones suficientes de optimalidad global

Teorema 16: Si f es convexa (estrictamente convexa) en S convexo, entonces el problema (P) presenta un mínimo global (único).

Teorema 17: Si f es cuasiconvexa (cuasicóncava) en S convexo, entonces el problema (P) presenta un mínimo (máximo) global.

IMPORTANTE:

- Si f es convexa o cuasiconvexa en S convexo, la condición de Lagrange es necesaria y suficiente para optimalidad global.
- El conjunto de soluciones factibles es convexo si y sólo si las restricciones son lineales.

Ejemplo 27

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{x^2+y^2} \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$P = (2,-1)$$

Presenta un mínimo relativo (y global).

2.2.7 Análisis de sensibilidad

Teorema 19 (Interpretación de los multiplicadores de Lagrange):

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b_j} = \lambda_j$$

IMPORTANTE:

- $\lambda_j > 0$: aumentar b_j aumenta el valor óptimo.
- $\lambda_j < 0$: aumentar b_j disminuye el valor óptimo.
- $\lambda_j = 0$: no hay información de primer orden.

Económicamente, λ_j representa el *valor sombra de la restricción.*

$$f_N \simeq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, \Delta b_j + f_{opt}$$

Ejemplo 28

Consideremos el Ejemplo 23, el problema presenta en el punto

$$P = (1, 1, 0) \quad (\text{con } \lambda = 2)$$

un mínimo relativo, siendo el valor mínimo de la función

$$f_{\text{mín}} = f(1, 1, 0) = 2.$$

Si ahora consideramos el problema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

sin resolver nuevamente se podría encontrar el valor óptimo aproximado de este problema de la siguiente forma:

$$f_N \simeq 2(3 - 2) + 2 = 4.$$

Consideremos el siguiente problema:

$$(Pa) \quad \begin{cases} \text{opt } z = f(x, a) \\ \text{s.a. } g(x, a) = b \end{cases}$$

donde $f \in C^1$ con $x \in \mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a \in \mathbb{R}^k$ (parámetros).

Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a = (a_1, \ldots, a_k) \in A$ existe

$$x^*(a) = \big(x_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, x_n^*(a_1, \ldots, a_k)\big)$$

solución óptima del problema (Pa) con multiplicadores de Lagrange asociados

$$\lambda^*(a) = (\lambda_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, \lambda_m^*(a_1, \ldots, a_k)),$$

siendo x^* y λ^* funciones C^1.

Si definimos la función objetivo indirecta o función valor como

$$\varphi(a) = f(x^*(a); a),$$

se verifica:

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(a); \lambda^*(a))}{\partial a_i}, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

donde $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange asociada al problema (Pa).

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la Envolvente**.

Ejemplo 29

Consideremos una empresa que compra sus insumos productivos capital (K) y trabajo (L) en mercados perfectamente competitivos a precios r y w respectivamente, y sea $f(L, K)$ la función de producción de la empresa.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \text{mín}\, C(L, K) = wL + rK \\ \text{s.a. } f(L, K) = Q \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda[Q - f(L, K)]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_L = w - \lambda f'_L(L, K) = 0 \\ \mathcal{L}'_K = r - \lambda f'_K(L, K) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = Q - f(L, K) = 0 \end{cases}$$

Al despejar (si tuviéramos la forma explícita de la función de producción) obtendríamos:

$$L^* = L^*(w, r, Q), \qquad K^* = K^*(w, r, Q), \qquad \lambda^* = \lambda^*(w, r, Q).$$

Reemplazando en la función de costo se obtiene la función de costo indirecta:

$$C_{\text{mín}} = C(L^*, K^*) = C(w, r, Q).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial w} = L^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial r} = K^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial Q} = \lambda^*.$$

Estas derivadas indican cómo impactan cambios en w, r y Q en el costo mínimo.

Observación: De las ecuaciones anteriores se desprende que las funciones de demanda condicionadas de los insumos L y K de la empresa son:

$$L^* = \frac{\partial C(w, r, Q)}{\partial w}, \qquad K^* = \frac{\partial C(w, r, Q)}{\partial r}.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Shepard**.

Ejemplo 30

Consideremos un individuo que consume dos bienes X e Y en un mercado perfectamente competitivo a precios p_x y p_y respectivamente, con una renta monetaria M.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \max U = U(x,y) \\ \text{s.a. } p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda[M - p_x x - p_y y]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} U'_x(x,y) - p_x\lambda = 0 \\ U'_y(x,y) - p_y\lambda = 0 \\ M - p_x x - p_y y = 0 \end{cases}$$

Al despejar:

$$x^* = x^*(p_x, p_y, M), \quad y^* = y^*(p_x, p_y, M), \quad \lambda^* = \lambda^*(p_x, p_y, M).$$

La utilidad indirecta queda:

$$U_{\text{máx}} = U(x^*, y^*) = U(p_x, p_y, M).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_x} = -x^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_y} = -y^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial M} = \lambda^*.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Roy**.

2.3 Optimización con restricciones de desigualdad

Un programa matemático con restricciones de desigualdad se formula como:

$$(P1) \begin{cases} \max z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \end{cases} \qquad (P2) \begin{cases} \min z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es:

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \leq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P1)$$

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \geq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P2)$$

Se dice que x_0 *satura* la restricción j-ésima si $g_j(x_0) = b_j$.

Observación:

- Si $x_0 \in \text{Int}(S)$, ninguna restricción se satura en x_0.
- Si $x_0 \in \text{Fr}(S)$, algunas restricciones se saturan en x_0.

2.3.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 20 (Kuhn–Tucker): Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $g_j : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea $x_0 \in S$ y supongamos que las restricciones activas son las p primeras. Si el problema presenta en x_0 un óptimo local, entonces existen $\lambda_j \geq 0$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0 \\ \lambda_j [b_j - g_j(x_0)] = 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Definición 15: Un punto factible que verifica las condiciones de Kuhn–Tucker se denomina *punto crítico del programa.*

Definición 16: Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se denominan *multiplicadores de Lagrange.*

2.3.3 Cuadro resumen

P1	**P2**
$\max f(x)$	$\min f(x)$
$g(x) \leq b$	$g(x) \geq b$

Condiciones necesarias:

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_\lambda \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Condiciones suficientes:

- f cóncava (P1), convexa (P2).
- g convexa (P1), cóncava (P2).

Ejemplo 32

$$\begin{cases} \text{mín}\, f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2 \\ \text{s.a. } 2x + y \geq 10 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + (y + 5)^2 + \lambda(10 - 2x - y)$$

Condiciones:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2(y + 5) - \lambda = 0 \\ \lambda(10 - 2x - y) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$x = 6, \quad y = -2, \quad \lambda = 6.$$

Luego el punto crítico es $(6, -2)$.

$$f_N \simeq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, \Delta b_j + f_{opt}$$

Ejemplo 28

Consideremos el Ejemplo 23, el problema presenta en el punto

$$P = (1, 1, 0) \quad (\text{con } \lambda = 2)$$

un mínimo relativo, siendo el valor mínimo de la función

$$f_{\text{mín}} = f(1, 1, 0) = 2.$$

Si ahora consideramos el problema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

sin resolver nuevamente se podría encontrar el valor óptimo aproximado de este problema de la siguiente forma:

$$f_N \simeq 2(3 - 2) + 2 = 4.$$

Consideremos el siguiente problema:

$$(Pa) \qquad \begin{cases} \text{opt } z = f(x, a) \\ \text{s.a. } g(x, a) = b \end{cases}$$

donde $f \in C^1$ con $x \in \mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a \in \mathbb{R}^k$ (parámetros).

Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a = (a_1, \ldots, a_k) \in A$ existe

$$x^*(a) = \big(x_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, x_n^*(a_1, \ldots, a_k)\big)$$

solución óptima del problema (Pa) con multiplicadores de Lagrange asociados

$$\lambda^*(a) = (\lambda_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, \lambda_m^*(a_1, \ldots, a_k)),$$

siendo x^* y λ^* funciones C^1.

Si definimos la función objetivo indirecta o función valor como

$$\varphi(a) = f(x^*(a); a),$$

se verifica:

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(a); \lambda^*(a))}{\partial a_i}, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

donde $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange asociada al problema (Pa).

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la Envolvente**.

Ejemplo 29

Consideremos una empresa que compra sus insumos productivos capital (K) y trabajo (L) en mercados perfectamente competitivos a precios r y w respectivamente, y sea $f(L,K)$ la función de producción de la empresa.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \text{mín}\, C(L,K) = wL + rK \\ \text{s.a. } f(L,K) = Q \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = wL + rK + \lambda[Q - f(L,K)]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_L = w - \lambda f'_L(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_K = r - \lambda f'_K(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = Q - f(L,K) = 0 \end{cases}$$

Al despejar (si tuviéramos la forma explícita de la función de producción) obtendríamos:

$$L^* = L^*(w,r,Q), \qquad K^* = K^*(w,r,Q), \qquad \lambda^* = \lambda^*(w,r,Q).$$

Reemplazando en la función de costo se obtiene la función de costo indirecta:

$$C_{\text{mín}} = C(L^*,K^*) = C(w,r,Q).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial w} = L^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial r} = K^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial Q} = \lambda^*.$$

Estas derivadas indican cómo impactan cambios en w, r y Q en el costo mínimo.

Observación: De las ecuaciones anteriores se desprende que las funciones de demanda condicionadas de los insumos L y K de la empresa son:

$$L^* = \frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial w}, \qquad K^* = \frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial r}.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Shepard**.

Ejemplo 30

Consideremos un individuo que consume dos bienes X e Y en un mercado perfectamente competitivo a precios p_x y p_y respectivamente, con una renta monetaria M.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \text{máx}\, U = U(x,y) \\ \text{s.a. } p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda[M - p_x x - p_y y]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} U'_x(x, y) - p_x\lambda = 0 \\ U'_y(x, y) - p_y\lambda = 0 \\ M - p_x x - p_y y = 0 \end{cases}$$

Al despejar:

$$x^* = x^*(p_x, p_y, M), \quad y^* = y^*(p_x, p_y, M), \quad \lambda^* = \lambda^*(p_x, p_y, M).$$

La utilidad indirecta queda:

$$U_{\text{máx}} = U(x^*, y^*) = U(p_x, p_y, M).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_x} = -x^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_y} = -y^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial M} = \lambda^*.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Roy**.

2.3 Optimización con restricciones de desigualdad

Un programa matemático con restricciones de desigualdad se formula como:

$$(P1) \begin{cases} \text{máx}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \end{cases} \qquad (P2) \begin{cases} \text{mín}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es:

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \leq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P1)$$

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \geq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P2)$$

Se dice que x_0 *satura* la restricción j-ésima si $g_j(x_0) = b_j$.
Observación:

- Si $x_0 \in \text{Int}(S)$, ninguna restricción se satura en x_0.
- Si $x_0 \in \text{Fr}(S)$, algunas restricciones se saturan en x_0.

2.3.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 20 (Kuhn–Tucker): Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $g_j : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea $x_0 \in S$ y supongamos que las restricciones activas son las p primeras. Si el problema presenta en x_0 un óptimo local, entonces existen $\lambda_j \geq 0$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0 \\ \lambda_j [b_j - g_j(x_0)] = 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Definición 15: Un punto factible que verifica las condiciones de Kuhn–Tucker se denomina *punto crítico del programa.*

Definición 16: Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se denominan *multiplicadores de Lagrange.*

2.3.3 Cuadro resumen

P1	**P2**
$\max f(x)$	$\min f(x)$
$g(x) \leq b$	$g(x) \geq b$

Condiciones necesarias:

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_\lambda \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Condiciones suficientes:

- f cóncava (P1), convexa (P2).
- g convexa (P1), cóncava (P2).

Ejemplo 32

$$\begin{cases} \text{mín } f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2 \\ \text{s.a. } 2x + y \geq 10 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + (y + 5)^2 + \lambda(10 - 2x - y)$$

Condiciones:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2(y + 5) - \lambda = 0 \\ \lambda(10 - 2x - y) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$x = 6, \quad y = -2, \quad \lambda = 6.$$

Luego el punto crítico es $(6, -2)$.

$$f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2, \qquad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana es definida positiva, por lo tanto la función es estrictamente convexa. Además, $g(x, y) = 2x + y$ es una función lineal, por lo tanto es cóncava y convexa. Concluimos que el problema presenta en el punto $(6, -2)$ un mínimo global único.

Interpretación geométrica

En el ejercicio anterior se pretende minimizar la función

$$f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2$$

en el dominio indicado.

Para ello trazamos las curvas de nivel de la función:

$$x^2 + (y + 5)^2 = k.$$

Se busca el mínimo valor de k de manera que la curva de nivel interseque la región factible.

Adición de restricciones de no negatividad en el problema

Consideremos ahora los siguientes problemas:

$$(P1) \begin{cases} \text{máx}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P2) \begin{cases} \text{mín}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Podríamos resolver estos problemas como antes considerando la restricción de no negatividad como una nueva restricción que lleva su propio multiplicador en la función de Lagrange.

Otra forma es la siguiente:

$$(P1) \begin{cases} \text{máx}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P2) \begin{cases} \text{mín}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda[b - g(x)]$$

Condiciones necesarias P1

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x \leq 0 \\ x\, \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \leq 0 \\ \lambda\, \mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ x \geq 0, \ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Condiciones necesarias P2

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x \geq 0 \\ x\,\mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \geq 0 \\ \lambda\,\mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ x \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Condiciones suficientes P1

- f cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava.
- g convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa.

Condiciones suficientes P2

- f convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa.
- g cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava.

Ejemplo 33

$$\begin{cases} \text{mín}\, f(x,y) = x^2 + (y+5)^2 \\ \text{s.a. } 2x + y \geq 10 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + (y+5)^2 + \lambda(10 - 2x - y)$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda \geq 0 \\ 2(y+5) - \lambda \geq 0 \\ 10 - 2x - y \leq 0 \\ x[2x - 2\lambda] = 0 \\ y[2(y+5) - \lambda] = 0 \\ \lambda[10 - 2x - y] = 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene el punto crítico:

$$(5,0) \quad \text{con } \lambda = 5.$$

Condiciones suficientes:

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La Hessiana es definida positiva, por lo tanto la función es estrictamente convexa. Como $g(x,y) = 2x + y$ es lineal, concluimos que el problema presenta en $(5,0)$ un mínimo global único.

Interpretación geométrica

Partimos de $\lambda = 0$ y obtenemos los puntos $(0, -5)$ y $(0, 0)$. Luego, para $\lambda > 0$ obtenemos los puntos $(0, 10)$, $(6, -2)$ y el punto $(5, 0)$, donde el problema presenta el mínimo.

Ejemplo 34

$$\begin{cases} \text{máx}\, f(x, y) = x + y \\ \text{s.a. } x^2 + 2y^2 \leq 6 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(6 - x^2 - 2y^2)$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x \leq 0 \\ 1 - 4\lambda y \leq 0 \\ 6 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \\ x(1 - 2\lambda x) = 0 \\ y(1 - 4\lambda y) = 0 \\ \lambda(6 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ x \geq 0, \ y \geq 0, \ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

Condiciones suficientes:
$f(x, y) = x + y$ es lineal (cóncava y convexa) y

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

Concluimos que el problema presenta en $(2, 1)$ un máximo global.

Ejemplo 35

La función de producción de una empresa es de tipo Cobb–Douglas:

$$f(K, L) = K^\alpha L^\beta, \qquad \alpha > 0, \ 0 < \beta < 1,$$

donde $K > 0$ es capital y $L > 0$ es trabajo. Los precios son p_K y p_L.

Se desea minimizar el costo con producción al menos $Q_0 > 0$:

$$\begin{cases} \text{mín}\, C(K, L) = p_K K + p_L L \\ \text{s.a. } K^\alpha L^\beta \geq Q_0 \\ K \geq 0, \ L \geq 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda) = p_K K + p_L L + \lambda(Q_0 - K^\alpha L^\beta)$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta \geq 0 \\ p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1} \geq 0 \\ Q_0 - K^\alpha L^\beta \leq 0 \\ K[p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta] = 0 \\ L[p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1}] = 0 \\ \lambda(Q_0 - K^\alpha L^\beta) = 0 \\ K \geq 0,\ L \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Para $K > 0$, $L > 0$ se obtiene:

$$\frac{p_K}{\alpha K^{\alpha-1}L^\beta} = \frac{p_L}{\beta K^\alpha L^{\beta-1}} \Rightarrow K = \frac{\alpha p_L}{\beta p_K}L.$$

Reemplazando en la restricción:

$$L^* = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta p_K}{\alpha p_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}, \quad K^* = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha p_L}{\beta p_K}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Condiciones suficientes:

- La función de costos es lineal $\Rightarrow$ convexa.
- La función de producción Cobb–Douglas es cuasicóncava.

Luego, el problema presenta un mínimo global.
Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial p_K} = K^* > 0, \quad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial p_L} = L^* > 0, \quad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial Q_0} = \lambda^* > 0.$$

Un aumento en p_K, p_L o Q_0 incrementa el costo mínimo.

(b) La matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa si y sólo si los $n - m$ últimos menores principales de $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ alternan signo comenzando por el signo $(-1)^{m+1}$.

(c) Si las condiciones a) y b) no se cumplen y los determinantes son distintos de cero entonces la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es indefinida.

Teorema 15: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_i \in C^2(D)$. Sea x_0 un punto crítico del programa (P) con λ_0 multiplicadores de Lagrange asociados.

(i) Si la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida positiva entonces el problema (P) presenta en x_0 un mínimo local.

(ii) Si la matriz $\bar{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa entonces el problema (P) presenta en x_0 un máximo local.

2.2.3 ¿Cuándo falla?

- No se verifica la condición de regularidad. Si esto sucede la condición de Lagrange no tiene que verificarse necesariamente. Como consecuencia, para resolver un problema con restricciones de igualdad, siempre hay que tener en cuenta los puntos del conjunto de soluciones factibles que no cumplen la condición de regularidad.
- No existencia de extremos del programa. Si la hipótesis de funciones C^1 se cumple y la condición de regularidad se verifica, pero no existen puntos críticos, entonces el problema planteado carece de extremos locales.
- Matriz hessiana orlada semidefinida en un punto crítico. En esos casos habrá que hacer un estudio de la función en un entorno del punto.

2.2.4 Paso a paso

1. Hallar el dominio de la función objetivo y el conjunto de soluciones factibles.
2. Plantear la función de Lagrange.
3. Calcular el gradiente de la función de Lagrange.
4. Buscar los puntos que anulan el gradiente (puntos críticos).
5. Fijarse si existen puntos pertenecientes al conjunto de soluciones factibles donde no se cumpla la condición de regularidad. En caso afirmativo realizar un estudio local.
6. Hallar la matriz hessiana orlada.
7. Reemplazar cada uno de los puntos críticos en la matriz hessiana orlada y definir el carácter de cada uno de ellos.
8. Si en alguno de los puntos críticos la matriz hessiana es semidefinida (positiva o negativa) realizar un estudio local.

Ejemplo 21

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(12 - x - y)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 12 - x - y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = y, \quad \lambda = x \Rightarrow y = x$$

Reemplazando:

$$12 - x - x = 0 \Rightarrow x = 6,\ y = 6,\ \lambda = 6$$

Punto crítico $P = (6, 6)$.
Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $n = 2$, $m = 1$ entonces $n - m = 1$.
Para máximo relativo:

$$|\bar{H}| > 0$$

Como $\det(\bar{H}) = 2 > 0$, el problema presenta en $P = (6, 6)$ un máximo relativo.

Ejemplo 22

$$\begin{cases} f(x, y) = 3x + 2y \\ 2x^2 + 3y^2 = 210 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + 2y + \lambda(210 - 2x^2 - 3y^2)$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} 3 - 4\lambda x = 0 \\ 2 - 6\lambda y = 0 \\ 210 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\lambda = \frac{3}{4x} = \frac{1}{3y} \Rightarrow y = \frac{4}{9}x$$

Reemplazando en la restricción:

$$2x^2 + 3\left(\frac{4}{9}x\right)^2 = 210 \Rightarrow x^2 = 81$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (9, 4),\ \lambda = \frac{1}{12} \qquad P_2 = (-9, -4),\ \lambda = -\frac{1}{12}$$

Matriz Hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}$$

Evaluando:

$$\det \bar{H}(P_1) = 840 > 0 \Rightarrow \text{máximo relativo}$$
$$\det \bar{H}(P_2) = -840 < 0 \Rightarrow \text{mínimo relativo}$$

Ejemplo 23

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2 - x - y)$$

Ejemplo 24

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 2z \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 2z + \lambda_1(25 - x^2 - y^2) + \lambda_2(-x - y - z)$$

Puntos críticos:

$$P_1 = (5,0,-5), \quad P_2 = (-5,0,5)$$

Clasificación:

$$P_1 : \text{mínimo relativo}, \quad P_2 : \text{máximo relativo}$$

Ejemplo 25

$$\begin{cases} f(x,y) = x^4 + y^4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(-x + y)$$

Punto crítico:

$$P = (0,0)$$

Como $\det \bar{H}(P) = 0$, no se puede concluir. Se requiere estudio local.

2.2.5 Condiciones suficientes de optimalidad global

Teorema 16: Si f es convexa (estrictamente convexa) en S convexo, entonces el problema (P) presenta un mínimo global (único).

Teorema 17: Si f es cuasiconvexa (cuasicóncava) en S convexo, entonces el problema (P) presenta un mínimo (máximo) global.

IMPORTANTE:

- Si f es convexa o cuasiconvexa en S convexo, la condición de Lagrange es necesaria y suficiente para optimalidad global.
- El conjunto de soluciones factibles es convexo si y sólo si las restricciones son lineales.

Ejemplo 27

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{x^2+y^2} \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$P = (2, -1)$$

Presenta un mínimo relativo (y global).

2.2.7 Análisis de sensibilidad

Teorema 19 (Interpretación de los multiplicadores de Lagrange):

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b_j} = \lambda_j$$

IMPORTANTE:

- $\lambda_j > 0$: aumentar b_j aumenta el valor óptimo.
- $\lambda_j < 0$: aumentar b_j disminuye el valor óptimo.
- $\lambda_j = 0$: no hay información de primer orden.

Económicamente, λ_j representa el *valor sombra de la restricción.*

$$f_N \simeq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, \Delta b_j + f_{opt}$$

Ejemplo 28

Consideremos el Ejemplo 23, el problema presenta en el punto

$$P = (1, 1, 0) \quad (\text{con } \lambda = 2)$$

un mínimo relativo, siendo el valor mínimo de la función

$$f_{\text{mín}} = f(1, 1, 0) = 2.$$

Si ahora consideramos el problema

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

sin resolver nuevamente se podría encontrar el valor óptimo aproximado de este problema de la siguiente forma:

$$f_N \simeq 2(3 - 2) + 2 = 4.$$

Consideremos el siguiente problema:

$$(Pa) \quad \begin{cases} \text{opt } z = f(x,a) \\ \text{s.a. } g(x,a) = b \end{cases}$$

donde $f \in C^1$ con $x \in \mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a \in \mathbb{R}^k$ (parámetros).

Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a = (a_1, \ldots, a_k) \in A$ existe

$$x^*(a) = \big(x_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, x_n^*(a_1, \ldots, a_k)\big)$$

solución óptima del problema (Pa) con multiplicadores de Lagrange asociados

$$\lambda^*(a) = (\lambda_1^*(a_1, \ldots, a_k), \ldots, \lambda_m^*(a_1, \ldots, a_k)),$$

siendo x^* y λ^* funciones C^1.

Si definimos la función objetivo indirecta o función valor como

$$\varphi(a) = f(x^*(a); a),$$

se verifica:

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(a); \lambda^*(a))}{\partial a_i}, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

donde $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange asociada al problema (Pa).

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la Envolvente**.

Ejemplo 29

Consideremos una empresa que compra sus insumos productivos capital (K) y trabajo (L) en mercados perfectamente competitivos a precios r y w respectivamente, y sea $f(L,K)$ la función de producción de la empresa.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \min C(L,K) = wL + rK \\ \text{s.a. } f(L,K) = Q \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = wL + rK + \lambda[Q - f(L,K)]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_L = w - \lambda f'_L(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_K = r - \lambda f'_K(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = Q - f(L,K) = 0 \end{cases}$$

Al despejar (si tuviéramos la forma explícita de la función de producción) obtendríamos:

$$L^* = L^*(w,r,Q), \qquad K^* = K^*(w,r,Q), \qquad \lambda^* = \lambda^*(w,r,Q).$$

Reemplazando en la función de costo se obtiene la función de costo indirecta:

$$C_{\text{mín}} = C(L^*, K^*) = C(w, r, Q).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial w} = L^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial r} = K^*, \qquad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial Q} = \lambda^*.$$

Estas derivadas indican cómo impactan cambios en w, r y Q en el costo mínimo.

Observación: De las ecuaciones anteriores se desprende que las funciones de demanda condicionadas de los insumos L y K de la empresa son:

$$L^* = \frac{\partial C(w, r, Q)}{\partial w}, \qquad K^* = \frac{\partial C(w, r, Q)}{\partial r}.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Shepard**.

Ejemplo 30

Consideremos un individuo que consume dos bienes X e Y en un mercado perfectamente competitivo a precios p_x y p_y respectivamente, con una renta monetaria M.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \text{máx}\, U = U(x, y) \\ \text{s.a. } p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda[M - p_x x - p_y y]$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} U'_x(x, y) - p_x \lambda = 0 \\ U'_y(x, y) - p_y \lambda = 0 \\ M - p_x x - p_y y = 0 \end{cases}$$

Al despejar:

$$x^* = x^*(p_x, p_y, M), \quad y^* = y^*(p_x, p_y, M), \quad \lambda^* = \lambda^*(p_x, p_y, M).$$

La utilidad indirecta queda:

$$U_{\text{máx}} = U(x^*, y^*) = U(p_x, p_y, M).$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_x} = -x^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial p_y} = -y^*, \quad \frac{\partial U_{\text{máx}}}{\partial M} = \lambda^*.$$

Estos resultados se conocen como el **Lema de Roy**.

2.3 Optimización con restricciones de desigualdad

Un programa matemático con restricciones de desigualdad se formula como:

$$(P1)\ \begin{cases} \text{máx}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \end{cases} \qquad (P2)\ \begin{cases} \text{mín}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es:

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \leq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P1)$$

$$S = \{x \in D \mid g_j(x) \geq b_j,\ 1 \leq j \leq m\} \quad \text{para } (P2)$$

Se dice que x_0 *satura* la restricción j-ésima si $g_j(x_0) = b_j$.
Observación:

- Si $x_0 \in \text{Int}(S)$, ninguna restricción se satura en x_0.
- Si $x_0 \in \text{Fr}(S)$, algunas restricciones se saturan en x_0.

2.3.1 Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 20 (Kuhn–Tucker): Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $g_j : D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea $x_0 \in S$ y supongamos que las restricciones activas son las p primeras. Si el problema presenta en x_0 un óptimo local, entonces existen $\lambda_j \geq 0$ tales que:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0 \\ \lambda_j [b_j - g_j(x_0)] = 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Definición 15: Un punto factible que verifica las condiciones de Kuhn–Tucker se denomina *punto crítico del programa.*
Definición 16: Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se denominan *multiplicadores de Lagrange.*

2.3.3 Cuadro resumen

P1	**P2**
máx $f(x)$	mín $f(x)$
$g(x) \leq b$	$g(x) \geq b$

Condiciones necesarias:

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_\lambda \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Condiciones suficientes:

- f cóncava (P1), convexa (P2).
- g convexa (P1), cóncava (P2).

Ejemplo 32

$$\begin{cases} \text{mín}\, f(x,y) = x^2 + (y+5)^2 \\ \text{s.a. } 2x + y \geq 10 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + (y+5)^2 + \lambda(10 - 2x - y)$$

Condiciones:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2(y+5) - \lambda = 0 \\ \lambda(10 - 2x - y) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$x = 6, \quad y = -2, \quad \lambda = 6.$$

Luego el punto crítico es $(6, -2)$.

$$f(x,y) = x^2 + (y+5)^2, \qquad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana es definida positiva, por lo tanto la función es estrictamente convexa. Además, $g(x,y) = 2x + y$ es una función lineal, por lo tanto es cóncava y convexa. Concluimos que el problema presenta en el punto $(6, -2)$ un mínimo global único.

Interpretación geométrica

En el ejercicio anterior se pretende minimizar la función

$$f(x,y) = x^2 + (y+5)^2$$

en el dominio indicado.

Para ello trazamos las curvas de nivel de la función:

$$x^2 + (y+5)^2 = k.$$

Se busca el mínimo valor de k de manera que la curva de nivel interseque la región factible.

Adición de restricciones de no negatividad en el problema

Consideremos ahora los siguientes problemas:

$$(P1) \begin{cases} \text{máx}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P2) \begin{cases} \text{mín}\, z = f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Podríamos resolver estos problemas como antes considerando la restricción de no negatividad como una nueva restricción que lleva su propio multiplicador en la función de Lagrange.

Otra forma es la siguiente:

$$(P1)\begin{cases}\text{máx}\, z = f(x)\\ \text{s.a. } g(x) \leq b\\ x \geq 0\end{cases} \qquad (P2)\begin{cases}\text{mín}\, z = f(x)\\ \text{s.a. } g(x) \geq b\\ x \geq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda[b - g(x)]$$

Condiciones necesarias P1

$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x \leq 0\\ x\,\mathcal{L}'_x = 0\\ \mathcal{L}'_\lambda \leq 0\\ \lambda\,\mathcal{L}'_\lambda = 0\\ x \geq 0,\ \lambda \geq 0\end{cases}$$

Condiciones necesarias P2

$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x \geq 0\\ x\,\mathcal{L}'_x = 0\\ \mathcal{L}'_\lambda \geq 0\\ \lambda\,\mathcal{L}'_\lambda = 0\\ x \geq 0,\ \lambda \geq 0\end{cases}$$

Condiciones suficientes P1

- f cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava.
- g convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa.

Condiciones suficientes P2

- f convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa.
- g cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava.

Ejemplo 33

$$\begin{cases}\text{mín}\, f(x,y) = x^2 + (y+5)^2\\ \text{s.a. } 2x + y \geq 10\\ x \geq 0,\ y \geq 0\end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + (y+5)^2 + \lambda(10 - 2x - y)$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda \geq 0 \\ 2(y+5) - \lambda \geq 0 \\ 10 - 2x - y \leq 0 \\ x[2x - 2\lambda] = 0 \\ y[2(y+5) - \lambda] = 0 \\ \lambda[10 - 2x - y] = 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene el punto crítico:

$$(5,0) \quad \text{con } \lambda = 5.$$

Condiciones suficientes:

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La Hessiana es definida positiva, por lo tanto la función es estrictamente convexa. Como $g(x,y) = 2x + y$ es lineal, concluimos que el problema presenta en $(5,0)$ un mínimo global único.

Interpretación geométrica

Partimos de $\lambda = 0$ y obtenemos los puntos $(0,-5)$ y $(0,0)$. Luego, para $\lambda > 0$ obtenemos los puntos $(0,10)$, $(6,-2)$ y el punto $(5,0)$, donde el problema presenta el mínimo.

Ejemplo 34

$$\begin{cases} \text{máx}\, f(x,y) = x + y \\ \text{s.a. } x^2 + 2y^2 \leq 6 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(6 - x^2 - 2y^2)$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x \leq 0 \\ 1 - 4\lambda y \leq 0 \\ 6 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \\ x(1 - 2\lambda x) = 0 \\ y(1 - 4\lambda y) = 0 \\ \lambda(6 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

Condiciones suficientes:
$f(x, y) = x + y$ es lineal (cóncava y convexa) y

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.
Concluimos que el problema presenta en $(2, 1)$ un máximo global.

Ejemplo 35

La función de producción de una empresa es de tipo Cobb–Douglas:

$$f(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}, \qquad \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1,$$

donde $K > 0$ es capital y $L > 0$ es trabajo. Los precios son p_K y p_L.
Se desea minimizar el costo con producción al menos $Q_0 > 0$:

$$\begin{cases} \text{mín}\, C(K, L) = p_K K + p_L L \\ \text{s.a. } K^{\alpha} L^{\beta} \geq Q_0 \\ K \geq 0,\ L \geq 0 \end{cases}$$

Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = p_K K + p_L L + \lambda(Q_0 - K^{\alpha} L^{\beta})$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} p_K - \lambda \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} \geq 0 \\ p_L - \lambda \beta K^{\alpha} L^{\beta-1} \geq 0 \\ Q_0 - K^{\alpha} L^{\beta} \leq 0 \\ K[p_K - \lambda \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}] = 0 \\ L[p_L - \lambda \beta K^{\alpha} L^{\beta-1}] = 0 \\ \lambda(Q_0 - K^{\alpha} L^{\beta}) = 0 \\ K \geq 0,\ L \geq 0,\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Para $K > 0$, $L > 0$ se obtiene:

$$\frac{p_K}{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{p_L}{\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} \Rightarrow K = \frac{\alpha p_L}{\beta p_K} L.$$

Reemplazando en la restricción:

$$L^* = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_K}{\alpha p_L} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}, \quad K^* = Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_L}{\beta p_K} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Condiciones suficientes:

- La función de costos es lineal $\Rightarrow$ convexa.
- La función de producción Cobb–Douglas es cuasicóncava.

Luego, el problema presenta un mínimo global.
Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial p_K} = K^* > 0, \quad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial p_L} = L^* > 0, \quad \frac{\partial C_{\text{mín}}}{\partial Q_0} = \lambda^* > 0.$$

Un aumento en p_K, p_L o Q_0 incrementa el costo mínimo.

Referencias

[1] Erling Andersen and Knud Andersen. Presolving in linear programming. *Math. Program.*, 71:221–245, December 1995.

[2] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.

[3] Dr. Hossein Arsham. Foundation of Linear Programming:. *International Journal of Strategic Decision Sciences*, 3:40–60, September 2014.

[4] Feras Awad. Linear Programming Lecture Notes for Math 373.

[5] Michael Best and Klaus Ritter. *Linear Programming Active Set Analysis and Computer Programs.* January 1985.

[6] Omar Antolín Camarena. Math 340: Linear Programming.

[7] Zhang Chenlin. *OVERVIEW LINEAR PROGRAMMING AND ITS APPLICATION.* August 2022.

[8] Marco Chiarandini. Linear and Integer Programming Lecture Notes.

[9] George B Dantzig. Reminiscences about the Origins of Linear Programming.

[10] George B. Dantzig. Linear Programming. *Operations Research*, 50(1):42–47, February 2002.

[11] George B. Dantzig and Mukund Narain Thapa. *Linear programming.* Springer series in operations research. Springer, New York, 1997.

[12] George Bernard Dantzig. Linear Programming and Extensions.

[13] Departamento de Matemáticas, ITAM. Programación lineal (temario mat-24410). Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2012. Temario de curso de Programación Lineal, MAT-24410.

[14] Departamento de Matemáticas, ITAM. Temario de programación lineal (mat 24410) – primavera 2022. Technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2022. Temario oficial de curso de Programación Lineal.

[15] Therese Donovan. Linear Programming in R.

[16] Thomas S Fergusin and M Casquilho. Linear Programming, a concise introduction.

[17] Richard Fletcher. A review of linear programming and its application to the assessment tools for teaching and learning (asTTle) projects. January 2001.

[18] Donald Goldfarb and Michael Todd. *Linear programming*, volume 1. October 1989. Journal Abbreviation: Optimization Pages: 170 Publication Title: Optimization.

[19] Jack E. Graver. On the foundations of linear and integer linear programming I. *Mathematical Programming*, 9(1):207–226, December 1975.

[20] Christopher Griffin. Linear programming: Penn State Math 484 Lecture Notes.

[21] Anupam Gupta and Ryan O'Donnell. Lecture notes for CMU's course on linear programming and semidefinite programming.

[22] Mr Jana. *Linear Programing Problem (LPP)*. October 2023.

[23] Rajendra Kunwar and Hari Sapkota. An Introduction to Linear Programming Problems with Some Real-Life Applications. *European Journal of Mathematics and Statistics*, 3:21–27, April 2022.

[24] Dalgobind Mahto. Linear Programming (Graphical Method). March 2015.

[25] Steven Miller. An introduction to linear programming. May 2007.

[26] Dritan Nace. Lecture Notes in Linear Programming modeling.

[27] Phong Nguyen. *Linear Programming*. May 2003.

[28] Desmond C. Ong. *14.5 Using R to solve Linear Optimization | Statistics and Analytics for the Social and Computing Sciences*.

[29] Benjamin Van Roy and Kahn Mason. Formulation and Analysis of Linear Programs.

[30] Mark Schulze. Linear Programming for Optimization. September 2000.

[31] Gilbert Strang. Linear Algebra and Its Applications.

[32] Preeti Tiwari and Dr Agrawal. *A study of linear programming technique*. January 2022.

[33] Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Academia de Matemáticas. Programa de estudios: Optimización I. Technical report, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2012. Programa oficial de la asignatura Optimización I (Licenciatura en Modelación Matemática).

[34] Edith Vargas-García and Andreas Wachtel. Notas de programación lineal: Fundamentos, método simplex, dualidad y puntos interiores. Notas de curso / technical report, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, 2020. Accedido: 2026-01-28.

[35] Yinyu Ye. Linear Programming Standard Equality Form and Solution Properties.