Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Notas de Probabilidad

Apuntes y ejercicios seleccionados

Carlos E Martínez-Rodríguez
Academia de Matemáticas
Plantel Casa Libertad
carlos.martinez@uacm.edu.mx

2026

Índice

1. Presentación

La revisión y actualización del programa de estudios de Probabilidad I nace de la necesidad de replantear el enfoque que debe tomar el área de Probabilidad y Estadística atendiendo al avance de la tecnología y de las herramientas que la ciencia pone a la disposición de la sociedad. La ciencia de datos, el aprendizaje automático y el uso de software para la automatización de tareas son sin lugar a dudas los temas actuales que las y los estudiantes deben comenzar a utilizar como parte fundamental de su formación académica.

El curso de Probabilidad I es el primer contacto que las y los estudiantes tienen con el estudio formal de la Probabilidad, y posteriormente, con la Estadística. Es por esta razón la importancia de desarrollar de forma explícita los temas y subtemas que son necesarios cubrir a lo largo de dieciséis semanas. En esta revisión, además de los temas de probabilidad que las y los estudiantes deben de cubrir a lo largo del semestre, se discutió la importancia en la utilización de algún software especializado de distribución libre, como por ejemplo, R o Python como un primer acercamiento computacional para el estudio de la probabilidad.

Como parte fundamental de este trabajo se encuentran la reorganización y desarrollo de contenidos con respecto a la versión original. Por ejemplo, el tema de funciones generadoras de momentos se consideró importante incorporar al final de la unidad dos. También se agregaron dos unidades destinadas al estudio de las variables aleatorias especiales tanto para el caso discreto y el caso continuo.

Es importante resaltar que todos los temas originales están considerados en esta nueva versión, además de que durante el estudio de los temas de probabilidad se está considerando el uso de algún software estadístico como una herramienta fundamental en el estudio de esta área y como elemento fundamental en la formación de las y los estudiantes de modelación matemática.

El nivel de profundidad con el que se describen los temas y subtemas están descritos en los objetivos específicos de cada unidad temática mismos que deben ser considerados como una guía para quienes impartirán el curso. Finalmente se hace notar que la bibliografía se ha enriquecido a través de libros que se consideran importantes para su consulta, revisión y estudio.

1.1. Metodología

Se recomienda que las definiciones, resultados y teoremas sean abordados con rigor matemático y con un enfoque que permita que las y los estudiantes comprendan las demostraciones de ciertos teoremas fundamentales así como de sus aplicaciones a través de ejemplos específicos.

Se recomienda trabajar una variedad de ejemplos en distintas áreas de conocimiento: salud, transporte, telecomunicaciones, servicios, etc., que permitan al estudiante comprender con profundidad los conceptos de probabilidad y de la importancia del uso de algún software estadístico como facilitador del conocimiento. Por esta razón se recomienda que el curso sea impartido tanto en aula como en el laboratorio de cómputo por lo menos una vez a la semana.

1.2. Programa del curso

1. **Espacio de probabilidad (5 semanas)**

    1.1 Espacio muestral y eventos

    1.2 Elementos de análisis combinatorio

    1.2.1 Principio de multiplicación
    1.2.2 Ordenaciones
    1.2.3 Permutaciones
    1.2.4 Combinaciones

    1.3 Definición de probabilidad

    1.3.1 Axiomas de la función de probabilidad
    1.3.2 Propiedades de la función de probabilidad

    1.4 Conceptos y teoremas básicos de probabilidad

    1.4.1 Probabilidad condicional e independencia
    1.4.2 Teorema de probabilidad total
    1.4.3 Teorema de Bayes

2. **Variables aleatorias (5 semanas)**

    2.1 Definición y ejemplos: caso discreto y continuo

    2.2 Función de probabilidad y función de densidad

    2.3 Función de distribución

    2.4 Esperanza y varianza

    2.4.1 Propiedades de la esperanza
    2.4.2 Propiedades de la varianza

    2.5 Teorema de cambio de variable

    2.6 Función generadora de momentos

    2.7 Función generadora de probabilidad

3. **Variables aleatorias discretas especiales (3 semanas)**

    3.1 Distribución Uniforme

    3.2 Distribución Bernoulli

    3.3 Distribución Binomial

    3.4 Distribución Binomial negativa

    3.5 Distribución Geométrica

3.6 Distribución Hipergeométrica

3.7 Distribución Poisson

4. **Variables aleatorias continuas especiales (3 semanas)**

4.1 Distribución Uniforme

4.2 Distribución Normal

4.2.1 Aproximación de distribuciones a la distribución normal

4.3 Distribución Exponencial

4.4 Distribución Gamma

4.5 Distribución Beta

4.6 Otras distribuciones

1.3. Temas y subtemas / Objetivos específicos

- **1. Espacio de Probabilidad (Tiempo recomendado: 5 semanas)**: – El/La estudiante conocerá la definición formal de espacio de probabilidad. – Comprenderá los conceptos y teoremas básicos de la teoría de probabilidad y los aplicará en cálculos de probabilidades específicas.

1.1 **Espacio muestral y eventos**: – Identificará y podrá definir el espacio muestral de un experimento aleatorio y podrá definir espacios muestrales tanto discretos como continuos utilizando la Teoría de conjuntos.

1.2 **Elementos de análisis combinatorio**: – El/La estudiante aplicará las técnicas de conteo para determinar los resultados y el número de éstos en un experimento aleatorio discreto. – Distinguirá en qué casos es conveniente utilizar cada método.

1.2.1 Principio de multiplicación

1.2.2 Ordenaciones

1.2.3 Permutaciones

1.2.4 Combinaciones

1.3 **Definición de probabilidad**: – Conocerá los axiomas que definen una probabilidad. – Demostrará algunas propiedades de la probabilidad derivadas de los axiomas básicos. – Identificará y aplicará los axiomas y propiedades de la probabilidad para el cálculo de probabilidades específicas. – El/La estudiante utilizará R u otro software estadístico para realizar simulaciones del experimento adecuado para obtener la aproximación de la probabilidad de que ocurra un evento específico.

1.3.1 Axiomas de la función de probabilidad

1.3.2 Propiedades de la función de probabilidad

1.4 **Conceptos y teoremas básicos de probabilidad**: – El/La estudiante conocerá la definición de probabilidad condicional y de eventos independientes. – Conocerá y aplicará el teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes en problemas específicos.

1.4.1 Probabilidad condicional e independencia

1.4.2 Teorema de probabilidad total

1.4.3 Teorema de Bayes

- **2. Variables aleatorias (Tiempo recomendado: 5 semanas)**: – Comprenderá el concepto de variable aleatoria y su importancia en el estudio formal de la probabilidad y de la estadística.

2.1 **Definición y ejemplos, caso discreto y continuo**: – Diferenciará entre variables aleatorias discretas y continuas considerando ejemplos ilustrativos de cada caso.

2.2 **Función de probabilidad y función de densidad**: – Conocerá la definición y las propiedades de la función de densidad o de probabilidad de una variable aleatoria.

2.3 **Función de distribución**: – Conocerá la definición y las propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

2.4 **Esperanza y Varianza**: – Conocerá la definición, las propiedades de la esperanza y la varianza de una variable aleatoria y podrá calcularlas para una variedad de ejemplos discretos o continuos.

2.4.1 Propiedades de la esperanza

2.4.2 Propiedades de la varianza

2.5 **Teorema de cambio de variable**: – Aplicará la técnica de cambio de variable en ejemplos ilustrativos y determinará la función de distribución resultante.

2.6 **Función generadora de momentos**: – Conocerá las propiedades de la Función Generadora de Momentos. – Utilizará la función generadora de momentos para determinar los momentos de una variable aleatoria.

2.7 **Función generadora de probabilidad**: – Aplicará el concepto de función generadora de probabilidad para describir distribuciones discretas y sus propiedades.

- **3. Variables aleatorias discretas especiales (Tiempo recomendado: 3 semanas)**: – Para las distribuciones discretas especiales, el/la estudiante conocerá la definición y los parámetros que definen a cada una de ellas. – Será capaz de calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y funciones generadoras de cada distribución en una gran cantidad de ejemplos. – Identificará la distribución discreta que es adecuada para modelar y resolver un problema específico. – Conocerá los comandos básicos de R u otro software estadístico para visualizar las funciones de probabilidad y de distribución, así como para realizar cálculos y/o simulaciones en ejemplos concretos.

3.1 Distribución Uniforme

3.2 Distribución Bernoulli

3.3 Distribución Binomial

3.4 Distribución Binomial negativa

3.5 Distribución Geométrica

3.6 Distribución Hipergeométrica

3.7 Distribución Poisson

- **4. Variables aleatorias continuas especiales (Tiempo recomendado: 3 semanas)**: – Para las distribuciones continuas especiales, el/la estudiante conocerá la definición y los parámetros que definen a cada una de ellas. – Será capaz de calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y funciones generadoras de cada distribución en una gran cantidad de ejemplos. – Identificará la distribución continua que es adecuada para modelar y resolver un problema específico. – Conocerá las aproximaciones que existen entre algunas de ellas. – Conocerá los comandos básicos de R u otro software estadístico para visualizar las funciones de densidad y de distribución, así como para realizar cálculos y/o simulaciones en ejemplos concretos.

    1. Distribución Uniforme
    2. Distribución Normal
        a) Aproximación de distribuciones a la distribución normal
    3. Distribución Exponencial
    4. Distribución Gamma
    5. Distribución Beta
    6. Otras Distribuciones

1.4. Indicadores para la certificación

- **Unidad 1:**
    - Aplicar técnicas combinatorias y teoremas fundamentales.
- **Unidad 2:**
    - Definir variables aleatorias y calcular esperanza y varianza.
- **Unidad 3:**
    - Identificar distribuciones discretas y utilizar software estadístico.
- **Unidad 4:**
    - Identificar distribuciones continuas y aplicar simulaciones.

1.5. Evaluación del Curso

el curso consistirá en 3 sesiones a la semana en las que se desarrollarán y revisarán los contenidos del curso, las sesiones serán teóricas y se complementarán con prácticas en `R`, a través de scripts en formato `Rmd` los cuales se compilarán en un único documento al que se le denominará `Portafolio`. Además del estudio de los contenidos del curso, el/la estudiante desarrollará a lo largo del curso 4 biografías de una lista de 52 científicos prominentes en la historia de la ciencia. La evaluación de los contenidos del curso será a través de tres evaluaciones formativas en las cuales se deberá de demostrar el dominio de los temas revisados en clase. La asistencia será importante para poder ser evaluado con estos tres elementos, el requisito de porcentaje de asistencia es del 85 %, en caso de no contar con este porcentaje mínimo de asistencia para poder certificar la materia deberá de presentar el examen de certificación, mismo que será elaborado por el comité de certificación.

Evaluación del curso: La calificación final del curso se obtiene de la suma de los siguientes porcentajes: *Calificación Final* = *Portafolio* (30 %) + *Biografías* (10 %) + *Evaluaciones* (60 %).

1.6. Científicos prominentes

- Euclides
- Arquimedes
- Galileo
- Kepler
- Fermat
- Pascal
- Newton
- Leibniz
- Bernoulli
- Jacobi
- Euler
- Lagrange
- Laplace
- Gauss
- Moebius
- Poisson
- Bolzano
- Cauchy
- Abel
- Galois
- Riemann
- Cantor
- Planck
- Bohr
- Poincare
- Hilbert
- Russell
- Ramanujan
- Schrodinger
- Einstein
- Courant
- Pauli
- Heisenberg
- Fermi
- Dirac
- Neumann
- Kolmogorov
- Oppenheimer
- Godel
- Chandrasekhar
- Turing
- Erdos
- Feynman
- Nash
- Grothendieck
- Higgs
- Penrose
- Kleinrock
- Knuth
- Hawking
- Simon
- Perelman

1.7. Repositorio del curso

Repositorio GitHub del curso

2. Fundamentos

Definición 1. *Parámetro es una Característica de la población medias y varianzas en la distribución normal o binomial. Si se conocen sus valores o se puede aproximar con suficiente precisión, se puede responder cualquier pregunta sobre la población.*

Definición 2. *Un Estadístico es Cualquier función de la muestra, por ejemplo la media o varianza muestral.*

Definición 3. *Los Estimadores son estadísticos independientes de los parámetros de la población y se utilizan para aproximar. Si θ es el parámetro de interés, su estimador es denotado por $\hat{\theta}$. Por ejemplo en la distribución normal para μ s tiene que $\bar{X} = \hat{\mu}$ y para σ^2, $S^2 = \hat{\sigma}^2$. en este sentido $\bar{X}$, S^2 son estimadores puntuales de μ y σ^2 para la distribución normal.*

Definición 4. *Muestreo: Se considerará el muestreo aleatorio simple para determinar el tamaño de la muestra, n.*

Los estimadores se obtienen a partir de una Muestra Aleatoria Simple (MAS), X_1, X_2, ..., X_n. de la variable aleatoria X. Para cada muestreo los resultados serán diferentes, es decir, por ser realizados a partir de una muestra aleatoria, los estimadores son aleatorios y por tanto tienen una distribución, a la que se le denomina distribución de muestreo.

Ejemplo 1. ***Distribución Binomial***: *Supóngase que $X \sim Bin(n,p)$, con $p = P\{X = 1\}$ y n = tamaño de la muestra. Para determinar p se selecciona una MAS $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de v.a. $Bin(1,p) = Bern(p)$. La proporción muestral está dada por:*

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \tag{1}$$

la proporción muestral $\hat{p}$ es una v.a. para n suficientemente grande

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \text{ (Teorema Central del Límite)} \tag{2}$$

El error típico definido por

$$ET(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \tag{3}$$

p desconocido y por tanto $ET(\hat{p})$ también, para encontrar una aproximación se puede sustituir el valor de p por el de $\hat{p}$. Por ejemplo, si $X \sim Bin(15,p)$ y se quiere estimar p, se toman 500 muestras de tamaño 100 ($X_1^i, X_2^i, \ldots, X_{100}^i$, $i = 1, 2, \ldots, 500$) y se calcula la proporción muestral en cada una de ellas obteniendo 500 valores para $\hat{p}$ ($\hat{\mu} = 0{,}7$ y $\hat{\sigma}^2 = 0{,}7 \times 0{,}3/100$).

Ejemplo 2. ***Distribución Normal*** *estándar: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, busquemos un estimador de μ: considérese $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sup. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ MAS, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.*

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad T.O. \tag{4}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{1}$$

Esto es válido si la varianza pob. σ^2 *es conocida.*

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad ET(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \textit{ejemplo } n = 20, 100 \textit{ y } 500 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 4/n) \tag{6}$$

Si σ^2 *es desconocida,*

$$\hat{\sigma}^2 \leftarrow S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{2}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{3}$$

En (1) $\sigma^2 \to s^2$*:*

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} t_{n-1}, & n \leq 30 \\ N(0,1), & n > 30 \end{cases} \tag{7}$$

y

$$ET(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n-1}} \simeq \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \textit{(error residual)} \tag{8}$$

1) σ^2 *conocida:*

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{9}$$

2) σ^2 *desc.,* $n > 30$*:*

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{10}$$

3) σ^2 *desc.,* $n \leq 30$*:*

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \tag{11}$$

3) Est. de varianza σ^2*:*

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *MAS de v.a.* $N(\mu, \sigma^2)$*, entonces*

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n \qquad o \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{12}$$

Para n pequeña.

Si n es suf. grande se puede aprox χ^2_n *por* $N(n, 2n)$*.*

Un estimador de un parámetro pob es función de la muestra.

Es preciso dar una definición de las prop. para que el estimador sea bueno.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una MAS de tamaño n, se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador de θ si es estadístico calculado p/ cualquier dicho parámetro desconocido es ese.

$$\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{13}$$

3) Sea X v.a. con dist. $F_X(x)$, $F_X(x;\theta)$, θ parámetro desconocido.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ MAS de tamaño n. A $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se le llama estimador puntual de θ, $\hat{\theta}$ es una v.a. por ser función de v.a. y por tanto tiene dist.

Al seleccionar una muestra, $\hat{\theta}$ toma un valor llamado estimación puntual.

Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ si

$$E(\hat{\theta}) = \theta \tag{14}$$

Si $\hat{\theta}$ no es insesgado $\Rightarrow$

$$E(\hat{\theta}) - \theta \tag{15}$$

es el sesgo del estimador.

De los posibles estimadores, el de menor varianza es considerado mejor estimador (MVUE). Si es insesgado $\Rightarrow$ (UMVUE) es mejor estimador de θ.

Para $X_1, X_2, \ldots, X_n$ MAS de $N(\mu, \sigma^2)$, μ es UMVUE.

Para $X_1, X_2, \ldots, X_n$ MAS de $N(\mu, \sigma^2)$,

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})} \tag{16}$$

El error estándar.

Para MAS $N(\mu, \sigma^2)$,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{con error estándar} \tag{17}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{18}$$

Def. 1. Dado un espacio de probabilidad

$$(\Omega, \mathcal{A}, P), \tag{19}$$

una variable aleatoria.

Una v.a. X es una función

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad A_x = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Def. 2. Sea Ω espacio muestral, y v.a. La función de prob inducida por Y es

$$P_Y(y = y_i) = P[Y = y_i] = P_\Omega\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}. \tag{21}$$

El espacio muestral para Y es

$$S_Y = \{y_i \in \mathbb{R} \mid \exists s \in \Omega,\ Y(s) = y_i\}. \tag{22}$$

Def. La población es el conjunto (grupo) de elementos de los cuales se desea tener información. La muestra es una parte de la población bajo estudio.

Def. La función distribución acumulada (CDF) de la v.a. X es

$$F_X(x) = P[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P\{\omega : X(\omega) \leq x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Prop. de la FDA (CDF) $F_X(\cdot)$:

a)

$$F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad F_X(\infty) = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1. \tag{25}$$

b) $F_X(\cdot)$ es monótona no decreciente, i.e.

$$F_X(a) \leq F_X(b), \quad \text{para } a < b. \tag{26}$$

c) $F_X(\cdot)$ es continua por la derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x). \tag{27}$$

Def. Sea X v.a.

a) X es una v.a. discreta si sólo puede tomar una cantidad finita o numerable de valores distintos, i.e. su rango es discreto.

Def. de prob.: Sea $\mathcal{A}$ σ-álgebra en Ω, $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ es una función de conjuntos t.q.

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ son eventos mutuamente excluyentes,

$$A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \quad \text{para } \alpha \neq \alpha^{'}, \tag{28}$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} P(A_\alpha). \tag{29}$$

Def. Si X es una v.a. discreta con valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, la función $f_X(\cdot)$ definida por

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j], & x = x_j, \quad j = 1, 2, \ldots \\ 0, & x \neq x_j \end{cases} \tag{30}$$

es llamada función de densidad discreta de X.

Los valores x_j son llamados puntos de masa de X y $f_X(x_j)$ son las masas asociadas a los puntos de masa x_j.

Teo. Si X es una v.a. discreta, $F_X(\cdot)$ puede obtenerse de $f_X(\cdot)$ y viceversa.

Nota: La CDF $F_X(\cdot)$ es una función escalón.

Def.

Def. Una v.a. X es continua si existe una función $f_X(\cdot)$ t.q.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Def. Si X es una v.a. continua, la función

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \tag{32}$$

es llamada función de densidad de probabilidad de X.

Teo. Si X tiene densidad $f_X(\cdot)$, entonces

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x). \tag{33}$$

Def.

Def. Sea X v.a., la media de X, μ_X, $E[X]$ se define por

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_X(x_j) \qquad \text{VAD} \tag{34}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \qquad \text{VAC} \tag{35}$$

Si g es una función de $\bar{X}$, entonces

$$E[g(X)] = \sum_{x:g(x)\geq 0} g(x)\,f_X(x) \tag{36}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx \tag{37}$$

siempre que la integral exista.

Def. Si $E[X^2]$ existe, entonces la varianza de la v.a. X es

$$\mathrm{Var}(X) = V[X] = E\big[X - (E[X])^2\big] \tag{38}$$

y la desviación estándar

$$SD(X) = \sqrt{V[X]}. \tag{39}$$

Si $E[X^2]$ no existe, la varianza no existe.

Teo.

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2. \tag{40}$$

Def. Sea X v.a., $\mu_X = E[X]$, la varianza σ_X^2 se define por

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \mu_X)^2\,f_X(x_j) \tag{41}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \, f_X(x) \, dx. \tag{42}$$

Teo. Sea X v.a. entonces
i) $E[c] = c$, c constante.
ii) $E[cg(X)] = c\, E[g(X)]$.
iii) $E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]$.
iv) $E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$ si $g_1(x) \leq g_2(x)$ $\forall x$.
Teo. Sea X v.a. con $g(\cdot) \geq 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P[g(X) \geq k] \leq \frac{E[g(X)]}{k}, \qquad \forall k > 0. \tag{43}$$

(Chebyshov)
Corolario: (Des. Chebyshev) Si X v.a. con varianza finita,

$$P\left(|X - \mu_X| \geq r\sigma_X\right) = P\left((X - \mu_X)^2 \geq r^2 \sigma_X^2\right) \leq \frac{1}{r^2}, \quad r > 0. \tag{44}$$

Obs.

$$P\left(|X - \mu_X| < r\sigma_X\right) \geq 1 - \frac{1}{r^2}. \tag{45}$$

Teo.

$$V[aY + b] = a^2 V[Y]. \tag{46}$$

Def. La FGM de la v.a. X es

$$M(t) = E[e^{tY}] \tag{47}$$

y por Taylor alrededor,

$$\mu_r = E[X^r] = \sum \int e^{ty} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y) \, dy. \tag{48}$$

La función característica (CF) de $\bar{X}$

$$C(t) = E\left[e^{itX}\right], \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{49}$$

Prop. Sea X v.a. con MGF $M_X(t)$ que existe para $|t| < b$, $b > 0$. Entonces

$$C(t) = M_X(it). \tag{50}$$

Def. Sean X, Y v.a., X, Y son v.a.i.d. $X \sim Y$ o $Y \sim F_X$ si $F_Y(y) = F_X(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Prop. Sean X, Y v.a., X y Y son idénticamente distribuidas si se cumple cualquiera de las sig. condiciones:
a) $F_X(y) = F_Y(y) \quad \forall y$
b) $f_X(y) = f_Y(y) \quad \forall y$
c) $C_X(t) = C_Y(t) \quad \forall t$
d) $M_X(t) = M_Y(t) \quad \forall t$ en una vecindad de cero.

Def. El k-ésimo momento de X es $E[X^k]$ y su k-ésimo momento central es

$$E\big[(X - E[X])^k\big]\,. \tag{51}$$

Teo. Sup. MGF $m(t)$ existe para $|t| < b$, b constante positiva. Sup. k-ésima derivada $m^{(k)}(t)$ existe para $|t| < b$. Entonces

$$E[X^k] = m^{(k)}(0). \tag{52}$$

Def. El q-ésimo cuantil de una v.a. $\bar{X}$, q_α, es el mínimo valor ξ t.q.

$$F_X(\xi) \geq q. \tag{53}$$

Def. La mediana de una v.a. $\bar{X}$, $\mathrm{Med}_X = \xi_{0,5}$.

Nota. El 3er momento sobre la media es llamada medida de simetría o sesgo.

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{54}$$

es el coeficiente de sesgo.

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \tag{55}$$

coeficiente de exceso de kurtosis.

Def. Sea $f(y) = f_Y(y \mid \theta)$ la PDF de Y v.a.

$$\mathcal{Y} = \{y \mid f(y) > 0\} \tag{56}$$

es el soporte de valores de Y.

Sea Θ el conjunto de parámetros θ de interés.

$\mathcal{H}$ es el espacio de parámetros de Y.

Def. La función indicadora

$$\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}(x \in A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{57}$$

Nota: Algunas PMF / PDF / CDF están restringidas solamente en el soporte. Apéndice 2.

Def. Sea $f_Y(y)$ PDF de Y v.a. Sup.

$$f_Y(y \mid \theta) = c(\theta)\, k(y \mid \theta), \tag{58}$$

entonces $k(y \mid \theta)$ es el kernel de f_Y y $c(\theta) > 0$ es el término constante que hace que f_Y sume / integre 1. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y \mid \theta)\, dy = \frac{1}{c(\theta)}. \tag{59}$$

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} k(y \mid \theta) = \frac{1}{c(\theta)}. \tag{60}$$

Sup. Y es v.a. con $f_Y(\cdot)$ PDF,

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(y \mid \theta)\, dy = \int_{y \in \text{soporte}} g(y)\, f(y \mid \theta)\, dy. \tag{61}$$

Sup. que desp. de operaciones,

$$E[g(Y)] = a\, c(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} k(y \mid \theta)\, dy, \quad a \text{ cte.} \tag{62}$$

De manera similar si f_Y es PMF,

$$E[g(Y)] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)\, f(y \mid \theta), \tag{63}$$

y soporte de Y.

Sup. que desp. operaciones algebraicas,

$$E[g(Y)] = a\, c(\theta) \sum_{y \in \mathcal{Y}} k(y \mid \tau), \quad a \text{ cte.} \tag{64}$$

$$\Rightarrow \quad E[g(Y)] = a\, c(\theta) \sum_{y \in \mathcal{Y}} \frac{c(\tau)}{c(\tau)}\, k(y \mid \tau) \tag{65}$$

$$= a\, \frac{c(\theta)}{c(\tau)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} c(\tau)\, k(y \mid \tau) = a\, \frac{c(\theta)}{c(\tau)}. \tag{66}$$

Ej. La función $\zeta(v)$ tiene PMF

$$f(y) = P[Y = y] = \frac{1}{y^v\, \zeta(v)}, \qquad v > 1,\ y = 1, 2, 3, \ldots \tag{67}$$

$$\zeta(v) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^v}. \tag{68}$$

Luego, para $v > 1$,

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{\infty} y\, \frac{1}{\zeta(v)}\, \frac{1}{y^v} = \frac{1}{\zeta(v)} \sum_{y=1}^{\infty} y^{1-v} \tag{69}$$

$$= \frac{\zeta(v-1)}{\zeta(v)} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^{v-1}} = \frac{\zeta(v-1)}{\zeta(v)}. \tag{70}$$

Mezclas de distribuciones

Def. La dist. de una v.a. $\bar{X}$ es una mezcla si la CDF de $\bar{X}$ es de la forma

$$F_{\bar{X}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, F_{X_i}(x), \qquad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad k \geq 2, \tag{71}$$

y $F_{X_i}(x)$ es la CDF de una v.a. X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Def. Sea $\bar{X}$ v.a. con CDF $F_{\bar{X}}(x)$. Sea h función t.q. $E[h(\bar{X})]$ existe. Entonces

$$E[h(\bar{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_{\bar{X}}(x). \tag{72}$$

Prop.
a) Si $\bar{X}$ es una v.a. discreta con PMF $f_{\bar{X}}(x)$, tiene soporte $\mathcal{Y}$, entonces

$$E[h(\bar{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_{\bar{X}}(x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} h(y)\, f_{\bar{X}}(y). \tag{73}$$

b) Si $\bar{X}$ es una v.a. continua con CDF $F_{\bar{X}}(x)$ y PDF $f_{\bar{X}}(x)$, entonces

$$E[h(\bar{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_{\bar{X}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_{\bar{X}}(x)\, dx. \tag{74}$$

c) Si $\bar{X}$ es una v.a. con dist. mezcla y

$$F_{\bar{X}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, F_{X_i}(x), \tag{75}$$

entonces

$$E[h(\bar{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_{\bar{X}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, E_{X_i}[h(X_i)]. \tag{76}$$

Ej. Sup. CDF de X es

$$F_X(x) = (1-\varepsilon)\,\Phi(x) + \varepsilon\,\Phi(x \mid k), \tag{77}$$

$0 < \varepsilon < 1$ y $\Phi(x)$ es la CDF de $W_1 \sim N(0,1)$, entonces

$$\Phi(x \mid k) \tag{78}$$

es la CDF de $W_2 \sim N(0,k^2)$.
$E[Y] =?$ Usar $h(y) = y$. Entonces

$$E[Y] = (1-\varepsilon)E[W_1] + \varepsilon E[W_2] = (1-\varepsilon)0 + \varepsilon(0) = 0. \tag{79}$$

Para encontrar $E[Y^2]$ utilizar $h(y) = y^2$.

$$E[Y^2] = (1-\varepsilon)E[W_1^2] + \varepsilon E[W_2^2] = (1-\varepsilon)1 + \varepsilon k^2 = 1 - \varepsilon + \varepsilon k^2. \tag{80}$$

Entonces

$$V[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = 1 - \varepsilon + \varepsilon k^2. \tag{81}$$

Distribución discreta.
1)

$$f(x) = f(x;N) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x = 1,2,\ldots,N, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{82}$$

X v.a. uniforme.

$$E[X] = \frac{N+1}{2}, \qquad V[X] = \frac{N^2-1}{12}. \tag{83}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=1}^{N} e^{tx}\,\frac{1}{N}. \tag{84}$$

2) Si X v.a. con

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \begin{cases} p\,x^{p-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \qquad 0 \leq p \leq 1, \tag{85}$$

$$F_X(x) = \int_0^x p\,t^{p-1}\,dt = x^p, \qquad 0 < x < 1. \tag{86}$$

Sea $X \sim \text{Beta}(p)$.

$$E[X] = p, \qquad V[X] = \frac{p(1-p)}{(p+1)}. \tag{87}$$

3) Sea X v.a. con

$$f_X(x) = f_X(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n. \tag{88}$$

$X \sim \text{Bin}(n,p)$.

$$E[X] = np, \qquad V[X] = np(1-p). \tag{89}$$

4) Sea X v.a. con

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \tag{90}$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$E[X] = \lambda, \qquad V[X] = \lambda. \tag{91}$$

5) Sea X v.a. con

$$f_X(x;\mu,n) = \frac{\left(\frac{n}{\mu}\right)^n x^{n-1} e^{-nx/\mu}}{(n-1)!}, \quad x > 0. \tag{92}$$

$X \sim \text{Gamma}(n,\mu)$.

$$E[X] = \mu, \qquad V[X] = \frac{\mu^2}{n}. \tag{93}$$

6) Sea X v.a. con

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, \quad x > 0. \tag{94}$$

$X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$.

$$E[X] = \beta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad V[X] = \beta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]. \tag{95}$$

Distribuciones continuas

6) Binomial negativa

$$P(X = x \mid r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots \tag{96}$$

$$E[X] = \frac{r}{p}, \qquad \text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}, \tag{97}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^t}\right)^r. \tag{98}$$

7) Distribución geométrica

$$P(X = x \mid p) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, \ldots \tag{99}$$

$$E[X] = \frac{1}{p}, \qquad \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}, \tag{100}$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}. \tag{101}$$

8) Distribución uniforme

$$f(x \mid a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{102}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \tag{103}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}. \tag{104}$$

9) Distribución gamma

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \qquad x > 0. \tag{105}$$

$$E[X] = \alpha\beta, \qquad \text{Var}[X] = \alpha\beta^2, \tag{106}$$

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \qquad t < \frac{1}{\beta}. \tag{107}$$

10) Distribución exponencial $\quad (\alpha = 1)$

$$f(x \mid \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \qquad x > 0. \tag{108}$$

$$E[X] = \beta, \qquad \mathrm{Var}[X] = \beta^2, \tag{109}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t}, \qquad t < \frac{1}{\beta}. \tag{110}$$

5) Distribución Weibull
Sea $Y = X^{1/r}$.

$$f_Y(y \mid \beta) = \frac{r}{\beta^r} \, y^{r-1} e^{-(y/\beta)^r}, \qquad y > 0, \; r > 0, \; \beta > 0 \tag{111}$$

$$E[Y] = \beta \, \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right), \qquad \mathrm{Var}[Y] = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{r}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right] \tag{112}$$

6) Distribución normal general

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{113}$$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{114}$$

$$E[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2, \qquad M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \tag{115}$$

7) Distribución Beta

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1, \; \alpha > 0, \; \beta > 0 \tag{116}$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{117}$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{118}$$

8) Distribución Gamma

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \qquad x > 0 \tag{119}$$

$$E[X] = \alpha\beta, \qquad \mathrm{Var}[X] = \alpha\beta^2 \tag{120}$$

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \qquad t < \frac{1}{\beta} \tag{121}$$

9) Dist. Lognormal
Sea X v.a. y sea $Y = \log X$ v.a.

$$\log X \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{122}$$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x > 0 \tag{123}$$

$$E[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}, \qquad \mathrm{Var}[X] = \big(e^{\sigma^2} - 1\big)e^{2\mu+\sigma^2} \tag{124}$$

10) Dist. Doble exponencial

$$f(x \mid \mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-|x-\mu|/b}, \qquad x \in \mathbb{R},\ b > 0 \tag{125}$$

$$E[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}[X] = 2b^2 \tag{126}$$

11) Distribución logística

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{e^{-(x-\alpha)/\beta}}{\beta\big(1 + e^{-(x-\alpha)/\beta}\big)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \beta > 0 \tag{127}$$

$$E[X] = \alpha, \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{\pi^2}{3}\beta^2 \tag{128}$$

12) Dist. Pareto

$$f(x \mid x_0, \theta) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}}, \qquad x \geq x_0,\ \theta > 0 \tag{129}$$

$$E[X] = \frac{\theta x_0}{\theta - 1}, \qquad \theta > 1 \tag{130}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}, \qquad \theta > 2 \tag{131}$$

13) Dist. Gumbel

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta} - e^{-(x-\alpha)/\beta}\right), \qquad \beta > 0 \tag{132}$$

Distribución Normalizada
Sea

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz \tag{133}$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z_1^2+z_2^2)/2}\, dz_1\, dz_2 \tag{134}$$

Cambio a coordenadas polares:

$$z_1 = r\cos\theta, \qquad z_2 = r\sin\theta, \qquad dz_1\, dz_2 = r\, dr\, d\theta \tag{135}$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \, dr \, d\theta \tag{136}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} \, dr \tag{137}$$

Sea

$$u = \frac{r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad du = r \, dr \tag{138}$$

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} \, dr = \int_0^{\infty} e^{-u} \, du = 1 \tag{139}$$

$$I^2 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{2\pi} \tag{140}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz = 1 \tag{141}$$

Sea X v.a. con f.d.p. $f(x)$.
I)

$$f(x) = x e^{-x^2/2}, \qquad x > 0 \tag{142}$$

II)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{143}$$

III)

$$f(x) = \frac{4}{\pi} x^2 e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{144}$$

IV)

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{145}$$

V)

$$f(x) = 2x e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{146}$$

VI)

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{147}$$

VII)

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{148}$$

VIII)

$$f(x) = 2x^3 e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{149}$$

IX)

$$f(x) = c e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{150}$$

X)

$$f(x) = k x^2 e^{-x^2}, \qquad x > 0 \tag{151}$$

—
Sea
$$I = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz \tag{152}$$
$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(z_1^2+z_2^2)}\, dz_1\, dz_2 \tag{153}$$
Cambio a coordenadas polares:
$$z_1 = r\cos\theta, \qquad z_2 = r\sin\theta, \qquad dz_1 dz_2 = r\, dr\, d\theta \tag{154}$$
$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \tag{155}$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr \tag{156}$$
Sea
$$u = r^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2r\, dr \tag{157}$$
$$\int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1}{2} \tag{158}$$
$$I^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{159}$$
$(X)\, dx \sim X$ i.s.
$$\frac{k}{T} = \theta = \left(\frac{2k}{T}, \frac{k}{T}\right) = \theta \leq \frac{2k}{T} = 0 \qquad k = n \tag{160}$$
$$\frac{2k}{T} = 0 \leq \frac{2k}{T} = \frac{2k}{2} = \left(\frac{y}{T}\right) - \frac{2k}{2} = E[Y] \tag{161}$$
$$\frac{2k}{2} = \frac{k}{T} = M_X(1) \tag{162}$$
$$M_X(t) = \frac{2(x-t)}{2x(x-t)} = \frac{(x-t)}{2x(x-t)} \tag{163}$$
$$\frac{2(x-t)}{x} \tag{164}$$
$$M_X(t) = \frac{x-t}{x} \tag{165}$$
$$M_X(t) = \frac{2(x-t)}{x} \tag{166}$$
$$M_X(t) = \frac{x-t}{x} \tag{167}$$

$$M_X(t) = \frac{x-t}{x} \tag{168}$$

$$M'_X(t) = -\frac{1}{x} \tag{169}$$

$$M''_X(t) = \frac{2(x-t)}{x^2} \tag{170}$$

$$M'_X(1) = -\frac{1}{x} \tag{171}$$

$$\int_0^\infty e^{-(x-t)x}\,dx \tag{172}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx \tag{173}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx \tag{174}$$

$$E[X] = \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx \tag{175}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx \tag{176}$$

$$K(X|\theta) \sim \exp(\theta) \tag{177}$$

$$K(X|\theta) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{178}$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \tag{179}$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \tag{180}$$

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx \tag{181}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \tag{182}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx \tag{183}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \tag{184}$$

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2} \tag{185}$$

$$f(x) = ke^{-2x}, \quad x > 0 \tag{186}$$

$$\int_0^\infty ke^{-2x}\,dx \tag{187}$$

$$k = \frac{1}{2} \tag{188}$$

$$E[X] = \int_0^\infty x\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx \tag{189}$$

$$= \frac{1}{4} \tag{190}$$

$$\theta = \frac{1}{\lambda} \tag{191}$$

$$\theta = \frac{X}{2} \tag{192}$$

$$\theta = \frac{X}{2} \tag{193}$$

$$K(\theta|X) \sim \exp(k) \tag{194}$$

(24)

$$\theta = (\mu, \sigma^2) \tag{195}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \tag{196}$$

$$X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{197}$$

$$f_X(x;\theta) \tag{198}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mu = \frac{1}{\lambda} \\ \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix} \tag{199}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0 \tag{200}$$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx \tag{201}$$

$$u = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}dx \tag{202}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-u}\,du = 1 \tag{203}$$

$$E[X] = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty x\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx \tag{204}$$

$$u = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2u \tag{205}$$

$$E[X] = \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du \tag{206}$$

$$= 2\int_0^\infty ue^{-u}\,du \tag{207}$$

$$= 2 \tag{208}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx \tag{209}$$

$$= \int_0^\infty 4u^2e^{-u}\,du \tag{210}$$

$$= 4\int_0^\infty u^2e^{-u}\,du \tag{211}$$

$$= 8 \tag{212}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 8 - 4 = 4 \tag{213}$$

$$\mu = 2, \qquad \sigma^2 = 4 \tag{214}$$

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx \tag{215}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{x(t-1/2)}\,dx \tag{216}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1/2-t)}\,dx \tag{217}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x(1/2-t)}\,dx \tag{218}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1/2-t)} \tag{219}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1-2t} \tag{220}$$

$$t < \frac{1}{2} \tag{221}$$

$$f_X(x) = x^{n-1} e^{-x/\lambda} \tag{222}$$

$$f_X(x) = x^{n-1} e^{-x/\lambda} \tag{223}$$

$$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \tag{224}$$

$$\mathbb{E}[X] = n\lambda, \qquad \text{Var}(X) = n\lambda^2 \tag{225}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-\lambda t)^n} \tag{226}$$

Supongamos ahora

$$f_X(x) = c\, x e^{-x^2}, \qquad x \geq 0 \tag{227}$$

Averiguar c.

$$\int_0^\infty c\, x e^{-x^2}\, dx = 1 \tag{228}$$

Sea $u = x^2$, entonces $du = 2x\, dx$.

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1}{2} \tag{229}$$

Por lo tanto,

$$c = 2 \tag{230}$$

Luego,

$$f_X(x) = 2x e^{-x^2}, \qquad x \geq 0 \tag{231}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{232}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \tag{233}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4} \tag{234}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{235}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \tag{236}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}\, dr \tag{237}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \tag{238}$$

Def. Sea X una v.a. con función de distribución $F_X(x)$. Se define la función de probabilidad acumulada para X como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \tag{239}$$

Definición:

$$F_X(a, b) = \mathbb{P}(a < X \leq b). \tag{240}$$

Las funciones acumuladas $F_X(x)$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$F_X(b) = \mathbb{P}(X \leq b), \qquad F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a). \tag{241}$$

Entonces

$$F_X(a, b) = F_X(b) - F_X(a). \tag{242}$$

Caso discreto
Def. Sean (X_1, X_2) v.a. discretas. Se define la función de distribución conjunta como

$$F_{X_1,X_2}(x, y) = \mathbb{P}(X_1 \leq x,\ X_2 \leq y). \tag{243}$$

Def. La función de densidad de probabilidad conjunta de X_1, X_2 se denota por $f_{X_1,X_2}(x, y)$. La función de densidad marginal de X_1 es

$$f_{X_1}(x) = \sum_y f_{X_1,X_2}(x, y). \tag{244}$$

La función de densidad marginal de X_2 es

$$f_{X_2}(y) = \sum_x f_{X_1,X_2}(x, y). \tag{245}$$

Def. La función de densidad condicional de X_1 dado $X_2 = y$ es

$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f_{X_1,X_2}(x, y)}{f_{X_2}(y)}, \qquad f_{X_2}(y) > 0. \tag{246}$$

Análogamente,

$$f_{X_2|X_1}(y|x) = \frac{f_{X_1,X_2}(x, y)}{f_{X_1}(x)}, \qquad f_{X_1}(x) > 0. \tag{247}$$

Def. Decimos que X, Y son continuas si existen funciones $f_{X,Y}(x, y)$ tales que

$$\forall A \subset \mathbb{R}^2, \qquad \mathbb{P}\{(X, Y) \in A\} = \iint_A f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy. \tag{248}$$

$f_{X,Y}(x, y)$ es función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y.

La densidad de X se obtiene observando

$$\mathbb{P}\{X \in \Delta\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\Delta} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\Delta} f_X(x)\,dx. \tag{249}$$

De donde

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy. \tag{250}$$

Análogamente,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx. \tag{251}$$

Def. La densidad condicional de X dado $Y = y$ es

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) > 0. \tag{252}$$

La densidad condicional de Y dado $X = x$ es

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x) > 0. \tag{253}$$

Nota: La variable $X_1, \ldots, X_k$ se dice k-dimensional si

$$(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{254}$$

Si existe una función de densidad conjunta $f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k)$, entonces

$$\mathbb{P}\{(X_1, \ldots, X_k) \in A\} = \int \cdots \int_A f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k)\,dx_1 \cdots dx_k. \tag{255}$$

Def. La variable aleatoria $(X_1, \ldots, X_k)$ es absolutamente continua si existe $f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k)$ tal que

$$\mathbb{P}\{(X_1, \ldots, X_k) \in A\} = \int \cdots \int_A f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k)\,dx_1 \cdots dx_k, \quad \forall A. \tag{256}$$

Nota: Sean (X_1, X_2) v.a. continuas en $\mathbb{R}^2$, sea $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ su densidad conjunta.

$$\mathbb{P}\{(X_1, X_2) \in A\} = \iint_A f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{257}$$

Sea

$$R = \{(x_1, x_2) : a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_2 \leq x_2 \leq b_2\}. \tag{258}$$

Entonces

$$\mathbb{P}\{a_1 \leq X_1 \leq b_1,\ a_2 \leq X_2 \leq b_2\} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{259}$$

Ej. Considere

$$f(x,y) = k(x+y), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \tag{260}$$

y $f(x,y)=0$ en otro caso.

Primero,

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy. \tag{261}$$

Luego,

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 y\,dx \right) dy. \tag{262}$$

Se obtiene

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2. \tag{263}$$

Por lo tanto,

$$f(x,y) = 2(x+y). \tag{264}$$

Calcular:

$$\mathbb{P}\{X < \tfrac{1}{2}\} = \int_0^{1/2} \int_0^1 2(x+y)\,dy\,dx. \tag{265}$$

Además,

$$\int_0^{1/2} \int_0^1 2(x+y)\,dy\,dx = \frac{3}{8}. \tag{266}$$

$$\text{Vale } y = x + y. \tag{267}$$

Teo: Sean X, Y v.a.c.c. y $f_{X,Y}(x,y)$ su densidad conjunta. Se procede a obtener $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

Def:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx. \tag{268}$$

Def: Sean X, Y v.a.c.c. con densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$. Entonces, para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \int_A \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \right) dx. \tag{269}$$

Análogamente,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx. \tag{270}$$

Teo: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes. Entonces la densidad conjunta es

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \qquad x_i \geq 0. \tag{271}$$

Ej: Sea

$$f_{X,Y}(x,y) = 2(x+y), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1. \tag{272}$$

Entonces

$$f_X(x) = \int_0^1 2(x+y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_0^1 2(x+y)\,dx. \tag{273}$$

Además,

$$\int_0^1 2(x+y)\,dy = 2x+1. \tag{274}$$

$$\int_0^1 2(x+y)\,dx = 2y+1. \tag{275}$$

Obs:

$$\int_0^1 f_X(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 f_Y(y)\,dy = 1. \tag{276}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty (x+y)\,dy\right) dx = \int_0^\infty \left[x + \frac{y^2}{2}\right]_0^\infty dx \tag{277}$$

$$f_X(x) = \int_0^\infty (x+y)\,dy \tag{278}$$

$$= \int_0^\infty x\,dy + \int_0^\infty y\,dy \tag{279}$$

$$= x\int_0^\infty dy + \int_0^\infty y\,dy \tag{280}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty (x+y)\,dx \tag{281}$$

$$= \int_0^\infty x\,dx + y\int_0^\infty dx \tag{282}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{283}$$

Ej: Una fábrica produce cuerdas que se venden y que se miden en metros. Sean X y Y las longitudes respectivas.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{3}(2x+3y), \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \tag{284}$$

a)

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(2x+3y)\,dy \tag{285}$$

$$= \frac{2}{3}\left[2xy + \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 \tag{286}$$

$$= \frac{2}{3}\left(2x + \frac{3}{2}\right) \tag{287}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{2}{3}(2x+3y)\,dx \tag{288}$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^2 + 3xy\right]_0^2 \tag{289}$$

$$= \frac{2}{3}(4 + 6y) \tag{290}$$

Sol:
a)

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 1) \tag{291}$$

Ej:
Se seleccionan al azar 2 refrescos. Probabilidad de que ambos sean rojos.
Sean $X = \#$ de refrescos verdes, $Y = \#$ de refrescos rojos.
a)

$$\mathbb{P}\big((X, Y) \in \Delta\big) =? \tag{292}$$

$$\Delta = \{(x, y) : x + y \leq 1\} \tag{293}$$

Sol:

$$\mathbb{R}^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\} \tag{294}$$

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} \tag{295}$$

$$f(0,1) = \frac{(2)(1)(3)}{(3)(7)} \tag{296}$$

$$= \frac{6}{21} \tag{297}$$

$$f(0,0) = \frac{(3)(2)}{(5)(7)} \tag{298}$$

$$= \frac{6}{35} \tag{299}$$

$$\frac{(3)(2)}{(5)(7)} = \frac{6}{35} \tag{300}$$

$$f_{X,Y}(x, y) \tag{301}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} X\backslash Y & 0 & 1 & 2 & I \\ \hline 0 & \frac{7}{28} & \frac{3}{14} & \frac{7}{28} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{4}{28} & \frac{3}{14} & 0 & \frac{15}{28} \\ 2 & \frac{3}{28} & 0 & 0 & \frac{3}{28} \\ \hline & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{28} & \end{array} \tag{302}$$

$$f_X(x) \tag{303}$$

$$\sum_{x,y} f_{X,Y}(x,y) \tag{304}$$

$$\sum_{x} f_X(x) \tag{305}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \tag{306}$$

Ej: Definamos

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{5}(2x+3y), \qquad \mathbf{1}_{\{0\leq x\leq 1\}}\mathbf{1}_{\{0\leq y\leq 1\}} \tag{307}$$

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy \tag{308}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy \tag{309}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{310}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx \tag{311}$$

Def:
Sea X, Y v.a. con Δ dist. continua.
Dado que $X = x$ se tiene

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x) > 0 \tag{312}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) > 0 \tag{313}$$

Notas:

$$\mathbb{P}(a < X < b \mid Y = y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)\,dx \tag{314}$$

Ej: 3.18 (libro)

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{7} \tag{315}$$

$$f_{X,Y}(x,1) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} \tag{316}$$

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{3}{7} \tag{317}$$

$$f_{X|Y}(x|1) = f_{X,Y}(x,1) + f_{X,Y}(2,1) \tag{318}$$

$$= \frac{3}{7} \tag{319}$$

Nota:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_X(x) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \tag{320}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = 10xy^2\,\mathbf{1}_{\{0\le x\le 1\}}\mathbf{1}_{\{0\le y\le 1\}} \tag{321}$$

$$f_X(x) = ? \tag{322}$$

$$f_Y(y) = ? \tag{323}$$

Ej: Sea X, Y v.a.

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy \tag{324}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 10xy^2\,dy \tag{325}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{326}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 10xy^2\,dx \tag{327}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{328}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{1/2}^1 f_{X|Y}(x|y)\,dx \tag{329}$$

Observa:

$$f_{X|Y}(x|0) \tag{330}$$

$$f_{X|Y}(x|1) \tag{331}$$

$$f_{X|Y}(x|2) \tag{332}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{15}{28}, & y = 0 \\ \frac{3}{7}, & y = 1 \\ \frac{3}{28}, & y = 2 \end{cases} \tag{333}$$

$$f_X(0) = \frac{15}{28} \tag{334}$$

$$f_X(1) = \frac{3}{7} \tag{335}$$

$$f_X(2) = \frac{3}{28} \tag{336}$$

$$f_{X|Y}(y) = f_X(x|y) \tag{337}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{338}$$

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{339}$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{2} < X < 1 \mid Y = \frac{1}{2}\right\} = \int_{1/2}^{1} f_{X|Y}(x|y)\,dx \tag{340}$$

Ejercicios

$$3{,}40,\ 3{,}41,\ 3{,}42,\ 3{,}43,\ 3{,}44 \tag{341}$$

$$3{,}45,\ 3{,}49,\ 3{,}50,\ 3{,}53,\ 3{,}63 \tag{342}$$

$$3{,}68 \tag{343}$$

Marque verdaderas

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{500} \quad 0 \leq x \leq y \leq 200 \tag{344}$$

Ejercicio

$$\mathbb{P}\{1 \leq X \leq 2\} \tag{345}$$

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \tag{346}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{347}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{348}$$

Ej:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy \tag{349}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx \tag{350}$$

$$f_{X|Y}(x|y) \tag{351}$$

Continúa Nota 1

$$\begin{array}{c|ccc} & f_{Y|X}(y|x) & f_X(x) & f_{X,Y}(x,y) \\ \hline x=0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{14} & \frac{3}{28} \\ x=1 & \frac{3}{5} & \frac{15}{28} & \frac{15}{28} \\ x=2 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{array} \tag{352}$$

$$f_X(0) = \frac{3}{14} \tag{353}$$

$$f_X(1) = \frac{15}{28} \tag{354}$$

$$f_X(2) = \frac{3}{28} \tag{355}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2x}{3}, \qquad x \in (0,2) \tag{356}$$

$$f_X(x) = \int_0^2 f_{X|Y}(x|y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_0^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx \tag{357}$$

$$f_{X|Y}(x|y) \tag{358}$$

$$f_{Y|X}(y|x) \tag{359}$$

Teorema

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) \neq 0 \tag{360}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x) \neq 0 \tag{361}$$

Ejemplos, Muestreos y Ejercicios

$$\text{Ejs: } 4{,}4,\ 4{,}6,\ 4{,}8,\ 4{,}9,\ 4{,}10 \tag{362}$$

Proposición

$$f_{Y|X}(y|x) \text{ es una función de densidad condicional} \tag{363}$$

$$\text{cuando } x \text{ es un número fijo} \tag{364}$$

$$\text{y para todo } x \text{ cumple con las propiedades de una densidad.} \tag{365}$$

Proposición

$$f_{Y|X}(\cdot|x) \text{ es positiva (no negativa)} \tag{366}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\, dy = 1 \tag{367}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, dy = 1 \tag{368}$$

$$\frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = 1 \tag{369}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \tag{370}$$

Nota: En $f_{Y|X}(\cdot|x)$, x es fija y permite considerarla como una distribución acumulada.
Def: Función de dist. acumulada condicional
Si X, Y son V.A.C.C., la dist. acumulada condicional de Y dado $X = x$ se define por

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R},\ f_X(x) > 0. \tag{371}$$

Sup:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}. \tag{372}$$

Ej:

$$f_{Y|X}(y|x) = \int_{0}^{y} \frac{2x+t}{x+\frac{1}{2}}\, dt, \qquad 0 \leq y \leq 1. \tag{373}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \int_{0}^{y} (2x+t)\, dt = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right). \tag{374}$$

Recordando:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}. \tag{375}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x). \tag{376}$$

Si X y Y son independientes, entonces

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \tag{377}$$

$$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y). \tag{378}$$

$$f_{Y|X}(y|x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy. \tag{379}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx. \tag{380}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \tag{381}$$

Def: Sean X, Y V.A.D.C. o V.A.C.C. con densidades $f_{X,Y}(x,y)$ y marginales $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

X y Y son estocásticamente independientes si y solo si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y). \tag{382}$$

Ej: Retomar Ej. 3 p. 20 y 3 p. 24 y verificar si X, Y son independientes.

Def: Sean $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ V.A. discretas o continuas. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son estocásticamente independientes si

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_k}(x_k). \tag{383}$$

Def: Sean $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ V.A. discretas o continuas. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son estocásticamente independientes si

$$f_{X_i|X_j}(x_i|x_j) = f_{X_i}(x_i), \qquad i \neq j. \tag{384}$$

Ej: Inferir

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(2x)}\,e^{-(y)}, \qquad x > 0,\; y > 0. \tag{385}$$

Luego:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \qquad \text{(VERIFICAR)} \tag{386}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \tag{387}$$

Def: Sean X, Y VADC o VACC con $f_{X,Y}(x,y)$ y densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. X, Y son estocásticamente independientes si y solo si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \tag{388}$$

Ej: Probar si 3 R.V. X_1, X_2, X_3 son independientes. Verificar si

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\,f_{X_3}(x_3). \tag{389}$$

Def: Sean $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio. Son estocásticamente independientes si

$$f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_{X_i}(x_i). \tag{390}$$

Def: Sean $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ V.A. discretas. Son estocásticamente independientes si

$$p_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} p_{X_i}(x_i). \tag{391}$$

Ej: Sea

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}. \tag{392}$$

Teo: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ V.A. independientes y $g_1(\cdot), g_2(\cdot), \ldots, g_k(\cdot)$ sean funciones tales que $Y_i = g_i(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces $Y_1, \ldots, Y_k$ son independientes.

Esperanza

Def: Sean X, Y V.A. con densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Se define

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy. \tag{393}$$

Teo: Si $g(X, Y) = X$, entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx. \tag{394}$$

Ej: Sea

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0,\ y > 0. \tag{395}$$

Calcular

$$\mathbb{E}[X]. \tag{396}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int_0^{\infty} xe^{-x} \left(\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy \right) dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx. \tag{397}$$

$$\mathbb{E}[X] = 1. \tag{398}$$

Ej: Sea

$$g(X, Y) = X + Y. \tag{399}$$

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]. \tag{400}$$

$$\mathbb{E}[X + Y] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x + y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x + y)e^{-(x+y)}\, dx\, dy = 2. \tag{401}$$

Prop:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]. \tag{402}$$

Teo: Sean X, Y V.A. independientes. Sea $g(X,Y) = g(X)h(Y)$. Entonces

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]. \tag{403}$$

Dem:

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \tag{404}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\, f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \tag{405}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)\,dy\right) \tag{406}$$

$$= \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]. \tag{407}$$

Sup:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{408}$$

Ej:

$$\mathbb{E}[X+Y] = \tag{409}$$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]. \tag{410}$$

Def: (Covarianza)
Sean X, Y V.A. con varianzas finitas.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \tag{411}$$

donde $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ y $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$.
Def: (Correlación)
El coeficiente de correlación de X y Y se define por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \tag{412}$$

donde $\sigma_X > 0$ y $\sigma_Y > 0$.
Nota:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \tag{413}$$

$$\mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big] = \mathbb{E}[XY] - \mu_Y\mathbb{E}[X] - \mu_X\mathbb{E}[Y] + \mu_X\mu_Y \tag{414}$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \tag{415}$$

Nota: Si X, Y son independientes, entonces

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0. \tag{416}$$

Ej: Funcional para X, Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = (x+y)\,\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\,\mathbf{1}_{(0,1)}(y). \tag{417}$$

Def: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ funciones aleatorias con

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{418}$$

Los momentos centrales están definidos por

$$\mathbb{E}\big[(X_1-\mu_1)\cdots(X_k-\mu_k)\big]. \tag{419}$$

Def: (Función generadora de momentos)

$$M_{X_1,\ldots,X_k}(t_1,\ldots,t_k) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k} t_i X_i\right)\right]. \tag{420}$$

Nota: Las funciones generadoras satisfacen

$$\mathbb{E}\big[g(X,Y)\big] = \iint g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy. \tag{421}$$

Ej:
Sea $X = \mathbf{1}_A$, con $A \in \mathcal{F}$.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = P(A). \tag{422}$$

$$X^2 = X \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X). \tag{423}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = P(A) - P(A)^2 = P(A)\big(1-P(A)\big). \tag{424}$$

Prop: Sean $X_1, \ldots, X_n$ V.A. independientes.

a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

b) $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$.

c) $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Prop:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i). \tag{425}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0, \qquad i \neq j. \tag{426}$$

Corolario:
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ V.A. independientes. Entonces

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i). \tag{427}$$

Def: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ V.A. independientes i.i.d. Entonces

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{428}$$

es una V.A. y se llama *media muestral*.

Prop: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son V.A. i.i.d. con

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \tag{429}$$

entonces:

a) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$.

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

c) $\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Def:

b)

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{430}$$

c)

$$\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X}) = \mathrm{Cov}\left(X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{431}$$

Corolario:

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ V.A. independientes. Entonces

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i). \tag{432}$$

Def: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ V.A. i.i.d. Entonces

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{433}$$

es una V.A. y se llama *media muestral*.

Prop: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son V.A. i.i.d. con

$$\mu = \mathbb{E}(X), \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X), \tag{434}$$

entonces:

a) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$.

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

c) $\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Def:

b)

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{435}$$

c)

$$\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X}) = \mathrm{Cov}\left(X_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{436}$$

$$\iint h(y)\, f_Y(y)\, f_X(x)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f_Y(y)\, f_X(x)\, dx\, dy \tag{437}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx\right) dy \tag{438}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f_Y(y)\, dy \tag{439}$$

Sea Z = X + Y.

$$X, Y \text{ V.A. indep.} \quad \Rightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \tag{440}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \tag{441}$$

Propiedades

$$\text{Traslación} \quad u \text{ unid.} \tag{442}$$

$$\text{Proporcionalidad} \quad u/n \text{ unid.} \tag{443}$$

$$\text{Prácticas} \quad 2q/n \text{ unid.} \tag{444}$$

$$\frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_j\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_j, X_j) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{445}$$

$$\frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_i\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 \tag{446}$$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_i\right) - \frac{\sigma^2}{n} = 0 \tag{447}$$

$$\text{para todo valor válido.} \tag{448}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{449}$$

n.e. la f.d.p. de la convolución

$$X + Y \tag{450}$$

Definimos

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{451}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{452}$$

Ej:

$$X, Y \sim U(0,1) \tag{453}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{454}$$

$$\text{si } 0 < a < 1 \tag{455}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{0}^{a} 1\, dy \tag{456}$$

$$= a \tag{457}$$

$$\text{si } 1 < a < 2 \tag{458}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^{1} 1\, dy \tag{459}$$

$$= 2 - a \tag{460}$$

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a, & 0 < a < 1, \\ beginequation4pt]2 - a, & 1 < a < 2. \end{cases} \tag{461}$$

$$a \in (0,1) \qquad a \in (1,2) \tag{462}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{463}$$

n.e. la f.d.p. de la convolución

$$X+Y \tag{464}$$

Definimos

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{465}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{466}$$

Ej:

$$X, Y \sim U(0,1) \tag{467}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\, f_Y(y)\, dy \tag{468}$$

$$\text{si } 0 < a < 1 \tag{469}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a 1\, dy \tag{470}$$

$$= a \tag{471}$$

$$\text{si } 1 < a < 2 \tag{472}$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^{1} 1\, dy \tag{473}$$

$$= 2 - a \tag{474}$$

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a, & 0 < a < 1, \\ beginequation4pt]2 - a, & 1 < a < 2. \end{cases} \tag{475}$$

$$a \in (0,1) \qquad a \in (1,2) \tag{476}$$

Ej 2: X,Y v.a. ind

$$f_{X+Y}(n) \tag{477}$$

$$0 \le k \le n \tag{478}$$

$$\text{Caso } X+Y=n \iff X=k,\ Y=n-k \tag{479}$$

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,\ Y=n-k) \tag{480}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\,P(Y=n-k) \tag{481}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2} \tag{482}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \tag{483}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \tag{484}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \tag{485}$$

$$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2) \tag{486}$$

$$\text{V.A.C.C.} \tag{487}$$

X_1, X_2 V.A.C.C. con densidad$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$(488)
Sup. $\mathrm{Y}_1=g_1(x_1,x_2),\quad Y_2=g_2(x_1,x_2)$ T–Q

$$y_1=y_1(x_1,x_2),\quad y_2=y_2(x_1,x_2) \tag{489}$$

A) se pueden resolver las ecuaciones en forma única

$$\text{para } x_1 \text{ y } x_2 \tag{490}$$

$$x_1=h_1(y_1,y_2),\quad x_2=h_2(y_1,y_2) \tag{491}$$

B) las funciones y_1, y_2 tienen derivadasparciales $\forall(x_1,x_2)$(492)

$$J(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ beginequation1ex]\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{493}$$

Entonces Y_1 y Y_2 son V.A.C.C.

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,|J(x_1,x_2)| \tag{494}$$

$$x_1 = h_1(y_1, y_2), \quad x_2 = h_2(y_1, y_2) \tag{495}$$

Ej:
Sean X i.i.d. V.A. con

$$X \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda), \qquad Y \sim \text{Ga}(\beta, \lambda), \qquad U = X + Y, \qquad V = \frac{X}{X+Y}. \tag{496}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta e^{-\lambda y} y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \tag{497}$$

Sea

$$y_1 = g_1(x, y) = x + y, \qquad y_2 = g_2(x, y) = \frac{x}{x+y}. \tag{498}$$

Entonces

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1, \tag{499}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}. \tag{500}$$

$$U = x + y, \qquad V = \frac{x}{x+y} \Rightarrow x = uv, \qquad y = u(1-v). \tag{501}$$

$$x = uv \tag{502}$$

$$v = \frac{uv}{uv + u(1-v)} = uv \tag{503}$$

$$uv = uv \Rightarrow v = uv + u(1-v) \tag{504}$$

$$uv = u \tag{505}$$

$$v = uv \tag{506}$$

$$\Rightarrow v = uv + u(1-v) \tag{507}$$

$$\Rightarrow y = u(1-v). \tag{508}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \, |J(x_1, x_2)|^{-1} \tag{509}$$

Donde

$$|J(x_1, x_2)|^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{y}{(x+y)^2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} \tag{510}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(x+y)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (x+y) \tag{511}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda u} (uv)^{\alpha-1} \big(u(1-v)\big)^{\beta-1} u \tag{512}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\lambda e^{-\lambda u}\right) \left(u^{\alpha-1} u^{\beta}\right) \left(v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\right) \tag{513}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\lambda e^{-\lambda u}\right) (\lambda u)^{\alpha-1} (\lambda u)^{\beta} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \tag{514}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \tag{515}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \tag{516}$$

$$U \sim \mathrm{Ga}(\alpha+\beta, \lambda), \qquad V \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta). \tag{517}$$

$$\text{Sean } X, Y \text{ v.a. c.c. con densidad} \tag{518}$$

$$Z = XY \tag{519}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},\, y\right)\, dy \tag{520}$$

$$\text{Sean } X, Y \text{ v.a. c.c. con densidad} \tag{521}$$

$$Z = X + Y, \qquad V = X - Y \tag{522}$$

$$x = \frac{z+v}{2}, \qquad y = \frac{z-v}{2} \tag{523}$$

$$f_{Z,V}(z,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \tag{524}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(\frac{z+v}{2},\, \frac{z-v}{2}\right) |J|\, dz\, dv \tag{525}$$

$$f_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\, x-w)\, dx \tag{526}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\, x-v)\, dx \tag{527}$$

$$\text{Sean } X, Y \text{ variables aleatorias i.i.d.} \tag{528}$$

$$\mathrm{Var}(X - Y) \tag{529}$$

$$\text{Entonces:} \tag{530}$$

$$\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) \tag{531}$$

$$\text{y} \tag{532}$$

$$\operatorname{Var}(X-Y) = \mathbb{E}\big[(X-Y)^2\big] - [\mathbb{E}(X-Y)]^2 \tag{533}$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - 2XY + Y^2) - [\mathbb{E}(X-Y)]^2 \tag{534}$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(X-Y)]^2 \tag{535}$$

—

$$\text{Def:} \tag{536}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \tag{537}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \operatorname{Var}(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 \tag{538}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{(i.i.d.)} \tag{539}$$

—

$$\text{Así:} \tag{540}$$

$$\operatorname{Var}(X-Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + [\mathbb{E}(X)]^2 + [\mathbb{E}(Y)]^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))^2 \tag{541}$$

$$= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) \tag{542}$$

—

$$\boxed{\operatorname{Var}(X-Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)} \tag{543}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{E}[XY] = \mu_X\mu_Y + \mu_Y\mathbb{E}[X-\mu_X] + \mu_X\mathbb{E}[Y-\mu_Y] + \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{544}$$

$$\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mu_X\mu_Y + \operatorname{Cov}(X,Y) \tag{545}$$

$$\mathbb{E}\big[(XY)^2\big] = \sim\sim\sim \tag{546}$$

—

$$\text{Cor: Si } X, Y \text{ son indep.} \tag{547}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mu_X \mu_Y \tag{548}$$

$$\text{y} \tag{549}$$

$$\mathrm{Var}(XY) = \mu_Y^2 \, \mathrm{Var}(X) + \mu_X^2 \, \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) \tag{550}$$

—

$$\text{Tarea: } \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \tag{551}$$

—

$$\text{Ej: Sea } X \sim \mathcal{N}(0,1). \quad \text{Sea } Y = X^2 = g(X) \tag{552}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \tag{553}$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\int_0^{\sqrt{y}} \phi(u)\, du \tag{554}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-u^2/2}\, du \tag{555}$$

—

$$u = \sqrt{z} \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 = z \quad \Rightarrow \quad 2u\, du = dz \tag{556}$$

$$du = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \tag{557}$$

$$0 \leq u^2 \leq y \quad \Rightarrow \quad 0 \leq z \leq y \tag{558}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y} \frac{e^{-z/2}}{2\sqrt{z}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y} \frac{e^{-z/2}}{\sqrt{2z}}\, dz \tag{559}$$

—

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{560}$$

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \tag{561}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = 2 \tag{562}$$

$$\Rightarrow \int_0^y \frac{e^{-z/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{2z}}\,dz \tag{563}$$

$$\text{Sea } X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad Y = X^2 \tag{564}$$

—

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx \tag{565}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^2\,dx \tag{566}$$

$$= \Big[-xe^{-x^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \tag{567}$$

$$= 0 + \sqrt{2\pi} \tag{568}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 1 \tag{569}$$

—

$$\text{Por } X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad Y = X^2 \sim \chi^2_{(1)} \tag{570}$$

—

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) \quad , \quad Y_2 = X_1 + X_2 \tag{571}$$

$$\text{(Transformación uno–a–uno)} \tag{572}$$

—

$$\mathbb{E}\Big[e^{t_1 Y_1 + t_2 Y_2}\Big] = \mathbb{E}\Big[e^{t_1(X_1^2+X_2^2)+t_2(X_1+X_2)}\Big] \tag{573}$$

$$= \mathbb{E}\Big[e^{t_1 X_1^2 + t_2 X_1}\Big]\,\mathbb{E}\Big[e^{t_1 X_2^2 + t_2 X_2}\Big] \tag{574}$$

—

$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[e^{t_1(X_1^2+X_2^2)+t_2(X_1+X_2)}\right] \tag{575}$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1^2 + t_2 X_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{t_1 X_2^2 + t_2 X_2}\right] \tag{576}$$

—

$$M(t_1,t_2) = \exp\left(\frac{t_2^2}{2(1-2t_1)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2t_1}} \tag{577}$$

—

$$= \exp\left(\frac{t_2^2}{1-2t_1}\right) \cdot \frac{1}{1-2t_1} \tag{578}$$

—

$$M(t_1, t_2) = \frac{1}{1-2t_1} \exp\left(\frac{t_2^2}{1-2t_1}\right) \tag{579}$$

—

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = e^{2t^2/2} = e^{t^2} \tag{580}$$

$$\Rightarrow \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 2) \tag{581}$$

$$\text{Sea } X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{independientes} \tag{582}$$

$$Z = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \tag{583}$$

—

$$\text{Sea } Y = X_2 - X_1 \tag{584}$$

$$\Rightarrow \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 2) \tag{585}$$

—

$$\text{Por binomiales:} \tag{586}$$

$$M_Y(t) = M_{X_2 - X_1}(t) = M_{X_2}(t)\, M_{-X_1}(t) \tag{587}$$

$$= \left(e^{t^2/2}\right)\left(e^{t^2/2}\right) = e^{t^2} \tag{588}$$

—

$$\Rightarrow \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 2) \tag{589}$$

—

$$\text{Sea } Z = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \tag{590}$$

$$M_Z(t) = \mathbb{E}\left(e^{tZ}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t(X_2 - X_1)/\sqrt{2}}\right) \tag{591}$$

$$= M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = e^{(t/\sqrt{2})^2} = e^{t^2/2} \tag{592}$$

—

$$\Rightarrow \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{593}$$

—

$$\text{Suma de normales} \tag{594}$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t) = e^{\mu_X t + \sigma_X^2 t^2/2}\, e^{\mu_Y t + \sigma_Y^2 t^2/2} \tag{595}$$

$$= e^{(\mu_X+\mu_Y)t + (\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2/2} \tag{596}$$

—

$$\Rightarrow \quad X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_X+\mu_Y,\ \sigma_X^2+\sigma_Y^2) \tag{597}$$

Resultado:
Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ independientes.
Sean $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$i = 1,2,\ldots,m, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{598}$$

Sea $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,m$.
—
Definición:

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} Z_j + \mu_1 \tag{599}$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} Z_j + \mu_2 \tag{600}$$

$$\vdots \tag{601}$$

$$X_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} Z_j + \mu_m \tag{602}$$

En general,

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} Z_j + \mu_k, \qquad k = 1,2,\ldots,m \tag{603}$$

—
Entonces:

$$X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_k,\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2\right) \tag{604}$$

—
Luego:

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_m}(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_m X_m}\right] \tag{605}$$

—

$$M_{\sum_{j=1}^m X_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^m t_j X_j}\right] \tag{606}$$

—

A saber:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^m t_j X_j\right] = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[t_j X_j] = \sum_{j=1}^m t_j \mathbb{E}[X_j] \tag{607}$$

$$= \sum_{j=1}^m t_j \mu_j \tag{608}$$

—

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^m t_j X_j\right) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^m t_j X_j,\ \sum_{j=1}^m t_j X_j\right) \tag{609}$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\, t_i t_j \tag{610}$$

Ejemplo:
Sean X_1, X_2 v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$.
Sea

$$Y = \frac{(X_2 - X_1)^2}{2} \tag{611}$$

y encontrar la distribución de Y.

—

Función generadora de momentos de Y:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{(X_2-X_1)^2}{2} t}\right] \tag{612}$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X_2^2 - 2X_1X_2 + X_1^2}{2}\, t\right)\right] \tag{613}$$

—

Como $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ independientes,

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \tag{614}$$

—

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{2} t\right) \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2 \tag{615}$$

—

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{x_2^2(t-1) + x_1^2(t-1) - 2x_1x_2t}{2} \right) dx_1 dx_2 \tag{616}$$

—

Reordenando términos:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{x_2^2(1-t)}{2} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(1-t)}{2} \left(x_1^2 + \frac{2x_1x_2t}{1-t} \right) \right) dx_1 \right] dx_2 \tag{617}$$

Ejemplo (continuación):

Sean X_1, X_2 v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Sea

$$Y = \frac{(X_2 - X_1)^2}{2} \tag{618}$$

y encontrar la distribución de Y.

—

Función generadora de momentos:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{Yt}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{(X_2-X_1)^2}{2}t} \right] \tag{619}$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X_2^2 - 2X_1X_2 + X_1^2}{2} t \right) \right] \tag{620}$$

—

Como $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ independientes,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{2} t \right) \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) dx_1 dx_2 \tag{621}$$

—

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ \frac{x_2^2(t-1) + x_1^2(t-1) + 2x_1x_2t}{2} \right\} dx_1 dx_2 \tag{622}$$

—

Reescribiendo:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{x_2^2(1-t)}{2} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(1-t)}{2} \left(x_1^2 + \frac{2x_1x_2t}{1-t} \right) \right) dx_1 \right] dx_2 \tag{623}$$

—

Factorizando y completando cuadrados en la integral interna:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{x_2^2(1-t)}{2} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(1-t)}{2} \left(x_1 + \frac{x_2t}{1-t} \right)^2 \right) dx_1 \right] dx_2 \tag{624}$$

—

Evaluando la integral gaussiana:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\frac{1-t-t^2}{1-t}\right) dx_2 \tag{625}$$

—

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2(1-2t)}\right) dx_2 \tag{626}$$

—

Finalmente:

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-1/2}, \qquad t < \frac{1}{2} \tag{627}$$

Teorema. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes t.q. su FGM existe $\forall |t| < h$, p.a. $h > 0$. Sea

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{628}$$

Entonces,

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^{n} X_i t}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t), \qquad |t| < h. \tag{629}$$

Demostración.

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} X_i t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{X_i t}\right] \tag{630}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{X_i t}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t). \tag{631}$$

—

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\mathrm{Ber}(p)$.

$$M_X(t) = pe^t + q, \tag{632}$$

entonces,

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = (pe^t + q)^n. \tag{633}$$

Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Binomial}(n, p). \tag{634}$$

—

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con

$$X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i). \tag{635}$$

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}\left[e^{X_i t}\right] = \exp\left(\lambda_i(e^t - 1)\right). \tag{636}$$

Entonces,

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\bigl(\lambda_i(e^t - 1)\bigr) \tag{637}$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e^t - 1)\right), \quad \text{i.e. } \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Po}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Teorema. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes t.q. su FGM existe $\forall |t| < h$, p.a. $h > 0$. Sea

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{639}$$

Entonces,

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\Bigl[e^{\sum_{i=1}^{n} X_i t}\Bigr] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t), \qquad |t| < h. \tag{640}$$

Demostración.

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} X_i t\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{X_i t}\right] \tag{641}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\bigl[e^{X_i t}\bigr] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t). \tag{642}$$

—

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\text{Ber}(p)$.

$$M_X(t) = pe^t + q, \tag{643}$$

entonces,

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = (pe^t + q)^n, \qquad \text{i.e. } Y = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{644}$$

Se tiene distribución

$$\text{Binomial}(n, p). \tag{645}$$

—

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con

$$X_i \sim \text{Po}(\lambda_i). \tag{646}$$

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}\bigl[e^{X_i t}\bigr] = \exp\bigl(\lambda_i(e^t - 1)\bigr). \tag{647}$$

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\bigl(\lambda_i(e^t - 1)\bigr) \tag{648}$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e^t - 1)\right), \quad \text{i.e. } Y \sim \text{Po}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución Exp(λ). Entonces,

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \tag{650}$$

y por lo tanto,

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n. \tag{651}$$

i.e.

$$Y \sim \text{Ga}(n, \lambda). \tag{652}$$

—

Ejemplo. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes t.q.

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \tag{653}$$

entonces

$$a_i X_i \sim \mathcal{N}(a_i \mu_i, a_i^2 \sigma_i^2), \tag{654}$$

y

$$M_{a_i X_i}(t) = \exp\left(a_i \mu_i t + \frac{1}{2} a_i^2 \sigma_i^2 t^2\right). \tag{655}$$

Entonces,

$$M_{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{a_i X_i}(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 t^2\right). \tag{656}$$

i.e.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right). \tag{657}$$

—

Resultado. Si

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2), \qquad Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2), \tag{658}$$

y X, Y son independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2), \tag{659}$$

$$X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2). \tag{660}$$

Tema: (Teorema Central del Límite) (Tema límite central)
Sea $n \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sean v.a. i.i.d. con media μ_X y varianza σ_X^2 finitas $\forall i$.

Entonces,

$$F_{Z_n}(z) \longrightarrow \Phi(z) \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{661}$$

Donde

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}. \tag{662}$$

Para n fijo, el valor de la FDP de Z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ converge al valor $\phi(z)$.

—

Corolario: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. i.i.d. con media μ_X y varianza σ_X^2 finitas, entonces

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} < b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a). \tag{663}$$

—

Nota: Recordemos que para $Y = g(X)$,

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X\big(g^{-1}(y)\big)\, \mathbf{1}_D(y). \tag{664}$$

Ej: Sup. $X \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$, Â¿cómo se distribuye

$$Y = -\log_e X\,? \tag{665}$$

Se tiene

$$y = -\ln x \;\Rightarrow\; x = e^{-y}, \qquad y = \ln x^{-1} \;\Rightarrow\; e^y = x^{-1}. \tag{666}$$

Luego,

$$x = g^{-1}(y) = e^{-y}, \qquad \frac{dx}{dy} = -e^{-y}. \tag{667}$$

Por la fórmula de transformación,

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X\big(g^{-1}(y)\big). \tag{668}$$

Como

$$f_X(x) = \frac{1}{\mathrm{Be}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \tag{669}$$

entonces

$$f_Y(y) = e^{-y} \frac{1}{\mathrm{Be}(\alpha, \beta)} (e^{-y})^{\alpha-1}(1 - e^{-y})^{\beta-1}. \tag{670}$$

Simplificando,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mathrm{Be}(\alpha, \beta)} e^{-\alpha y}(1 - e^{-y})^{\beta-1}. \tag{671}$$

Si $\beta = 1$, se tiene

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mathrm{Be}(\alpha, 1)} e^{-\alpha y}. \tag{672}$$

Además,

$$\mathrm{Be}(\alpha, 1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}. \tag{673}$$

Por tanto,

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}, \qquad Y \sim \mathrm{Exp}(\alpha). \tag{674}$$

—

Ej: Sea X v.a. con densidad Pareto, i.e.

$$f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}\,\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x), \tag{675}$$

y

$$Y = \log_e X = \ln X. \tag{676}$$

Entonces

$$y = \ln x, \qquad x = e^y, \qquad dx = e^y dy. \tag{677}$$

Luego,

$$f_Y(y) = e^y\,\theta(e^y)^{-\theta-1}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) = \theta e^{-\theta y}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y). \tag{678}$$

Ej: Sean X_1, X_2 v.a. independientes,

$$X_1, X_2 \sim N(0,1). \tag{679}$$

Definimos

$$Y_1 = X_1 + X_2, \qquad Y_2 = \frac{X_1}{X_2}. \tag{680}$$

Entonces,

$$x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2) = \frac{y_1 y_2}{1+y_2}, \qquad x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2) = \frac{y_1}{1+y_2}. \tag{681}$$

Las transformaciones directas son

$$g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \qquad g_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}. \tag{682}$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 1, \tag{683}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}. \tag{684}$$

El jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{vmatrix} = \left| -\frac{x_1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| -\frac{x_1+x_2}{x_2^2} \right|. \tag{685}$$

Por lo tanto,

$$|J| = \frac{x_1+x_2}{x_2^2}. \tag{686}$$

Luego,

$$|J^{-1}| = \frac{x_2^2}{x_1+x_2}. \tag{687}$$

Sustituyendo

$$x_2 = \frac{y_1}{1+y_2}, \qquad x_1 + x_2 = y_1, \tag{688}$$

se obtiene

$$|J^{-1}| = \frac{\left(\frac{y_1}{1+y_2}\right)^2}{y_1} = \frac{y_1}{(1+y_2)^2}. \tag{689}$$