**Universidad Autónoma de la Ciudad de México**

# Notas de Probabilidad

*Apuntes y ejercicios seleccionados*

Carlos E Martínez-Rodríguez
Academia de Matemáticas
Plantel Casa Libertad
carlos.martinez@uacm.edu.mx

2026

# Índice

# 1. Presentación

La revisión y actualización del programa de estudios de Probabilidad I nace de la necesidad de replantear el enfoque que debe tomar el área de Probabilidad y Estadística atendiendo al avance de la tecnología y de las herramientas que la ciencia pone a la disposición de la sociedad. La ciencia de datos, el aprendizaje automático y el uso de software para la automatización de tareas son sin lugar a dudas los temas actuales que las y los estudiantes deben comenzar a utilizar como parte fundamental de su formación académica.

El curso de Probabilidad I es el primer contacto que las y los estudiantes tienen con el estudio formal de la Probabilidad, y posteriormente, con la Estadística. Es por esta razón la importancia de desarrollar de forma explícita los temas y subtemas que son necesarios cubrir a lo largo de dieciséis semanas. En esta revisión, además de los temas de probabilidad que las y los estudiantes deben de cubrir a lo largo del semestre, se discutió la importancia en la utilización de algún software especializado de distribución libre, como por ejemplo, R o Python como un primer acercamiento computacional para el estudio de la probabilidad.

Como parte fundamental de este trabajo se encuentran la reorganización y desarrollo de contenidos con respecto a la versión original. Por ejemplo, el tema de funciones generadoras de momentos se consideró importante incorporar al final de la unidad dos. También se agregaron dos unidades destinadas al estudio de las variables aleatorias especiales tanto para el caso discreto y el caso continuo.

Es importante resaltar que todos los temas originales están considerados en esta nueva versión, además de que durante el estudio de los temas de probabilidad se está considerando el uso de algún software estadístico como una herramienta fundamental en el estudio de esta área y como elemento fundamental en la formación de las y los estudiantes de modelación matemática.

El nivel de profundidad con el que se describen los temas y subtemas están descritos en los objetivos específicos de cada unidad temática mismos que deben ser considerados como una guía para quienes impartirán el curso. Finalmente se hace notar que la bibliografía se ha enriquecido a través de libros que se consideran importantes para su consulta, revisión y estudio.

## 1.1. Metodología

Se recomienda que las definiciones, resultados y teoremas sean abordados con rigor matemático y con un enfoque que permita que las y los estudiantes comprendan las demostraciones de ciertos teoremas fundamentales así como de sus aplicaciones a través de ejemplos específicos.

Se recomienda trabajar una variedad de ejemplos en distintas áreas de conocimiento: salud, transporte, telecomunicaciones, servicios, etc., que permitan al estudiante comprender con profundidad los conceptos de probabilidad y de la importancia del uso de algún software estadístico como facilitador del conocimiento. Por esta razón se recomienda que el curso sea impartido tanto en aula como en el laboratorio de cómputo por lo menos una vez a la semana.

## 1.2. Programa del curso

1. **Espacio de probabilidad (5 semanas)**

    1.1 Espacio muestral y eventos

    1.2 Elementos de análisis combinatorio

    1.2.1 Principio de multiplicación

    1.2.2 Ordenaciones

    1.2.3 Permutaciones

    1.2.4 Combinaciones

    1.3 Definición de probabilidad

    1.3.1 Axiomas de la función de probabilidad

    1.3.2 Propiedades de la función de probabilidad

    1.4 Conceptos y teoremas básicos de probabilidad

    1.4.1 Probabilidad condicional e independencia

    1.4.2 Teorema de probabilidad total

    1.4.3 Teorema de Bayes

2. **Variables aleatorias (5 semanas)**

    2.1 Definición y ejemplos: caso discreto y continuo

    2.2 Función de probabilidad y función de densidad

    2.3 Función de distribución

    2.4 Esperanza y varianza

    2.4.1 Propiedades de la esperanza

    2.4.2 Propiedades de la varianza

    2.5 Teorema de cambio de variable

    2.6 Función generadora de momentos

    2.7 Función generadora de probabilidad

3. **Variables aleatorias discretas especiales (3 semanas)**

    3.1 Distribución Uniforme

    3.2 Distribución Bernoulli

    3.3 Distribución Binomial

    3.4 Distribución Binomial negativa

    3.5 Distribución Geométrica

3.6 Distribución Hipergeométrica

3.7 Distribución Poisson

4. **Variables aleatorias continuas especiales (3 semanas)**

4.1 Distribución Uniforme

4.2 Distribución Normal

4.2.1 Aproximación de distribuciones a la distribución normal

4.3 Distribución Exponencial

4.4 Distribución Gamma

4.5 Distribución Beta

4.6 Otras distribuciones

## 1.3. Temas y subtemas / Objetivos específicos

- **1. Espacio de Probabilidad (Tiempo recomendado: 5 semanas)**: – El/La estudiante conocerá la definición formal de espacio de probabilidad. – Comprenderá los conceptos y teoremas básicos de la teoría de probabilidad y los aplicará en cálculos de probabilidades específicas.

1.1 **Espacio muestral y eventos**: – Identificará y podrá definir el espacio muestral de un experimento aleatorio y podrá definir espacios muestrales tanto discretos como continuos utilizando la Teoría de conjuntos.

1.2 **Elementos de análisis combinatorio**: – El/La estudiante aplicará las técnicas de conteo para determinar los resultados y el número de éstos en un experimento aleatorio discreto. – Distinguirá en qué casos es conveniente utilizar cada método.

1.2.1 Principio de multiplicación

1.2.2 Ordenaciones

1.2.3 Permutaciones

1.2.4 Combinaciones

1.3 **Definición de probabilidad**: – Conocerá los axiomas que definen una probabilidad. – Demostrará algunas propiedades de la probabilidad derivadas de los axiomas básicos. – Identificará y aplicará los axiomas y propiedades de la probabilidad para el cálculo de probabilidades específicas. – El/La estudiante utilizará R u otro software estadístico para realizar simulaciones del experimento adecuado para obtener la aproximación de la probabilidad de que ocurra un evento específico.

1.3.1 Axiomas de la función de probabilidad

1.3.2 Propiedades de la función de probabilidad

1.4 **Conceptos y teoremas básicos de probabilidad**: – El/La estudiante conocerá la definición de probabilidad condicional y de eventos independientes. – Conocerá y aplicará el teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes en problemas específicos.

1.4.1 Probabilidad condicional e independencia

1.4.2 Teorema de probabilidad total

1.4.3 Teorema de Bayes

- **2. Variables aleatorias (Tiempo recomendado: 5 semanas)**: – Comprenderá el concepto de variable aleatoria y su importancia en el estudio formal de la probabilidad y de la estadística.

2.1 **Definición y ejemplos, caso discreto y continuo**: – Diferenciará entre variables aleatorias discretas y continuas considerando ejemplos ilustrativos de cada caso.

2.2 **Función de probabilidad y función de densidad**: – Conocerá la definición y las propiedades de la función de densidad o de probabilidad de una variable aleatoria.

2.3 **Función de distribución**: – Conocerá la definición y las propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

2.4 **Esperanza y Varianza**: – Conocerá la definición, las propiedades de la esperanza y la varianza de una variable aleatoria y podrá calcularlas para una variedad de ejemplos discretos o continuos.

2.4.1 Propiedades de la esperanza

2.4.2 Propiedades de la varianza

2.5 **Teorema de cambio de variable**: – Aplicará la técnica de cambio de variable en ejemplos ilustrativos y determinará la función de distribución resultante.

2.6 **Función generadora de momentos**: – Conocerá las propiedades de la Función Generadora de Momentos. – Utilizará la función generadora de momentos para determinar los momentos de una variable aleatoria.

2.7 **Función generadora de probabilidad**: – Aplicará el concepto de función generadora de probabilidad para describir distribuciones discretas y sus propiedades.

- **3. Variables aleatorias discretas especiales (Tiempo recomendado: 3 semanas)**: – Para las distribuciones discretas especiales, el/la estudiante conocerá la definición y los parámetros que definen a cada una de ellas. – Será capaz de calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y funciones generadoras de cada distribución en una gran cantidad de ejemplos. – Identificará la distribución discreta que es adecuada para modelar y resolver un problema específico. – Conocerá los comandos básicos de R u otro software estadístico para visualizar las funciones de probabilidad y de distribución, así como para realizar cálculos y/o simulaciones en ejemplos concretos.

3.1 Distribución Uniforme

3.2 Distribución Bernoulli

3.3 Distribución Binomial

3.4 Distribución Binomial negativa

3.5 Distribución Geométrica

3.6 Distribución Hipergeométrica

3.7 Distribución Poisson

- **4. Variables aleatorias continuas especiales (Tiempo recomendado: 3 semanas)**: – Para las distribuciones continuas especiales, el/la estudiante conocerá la definición y los parámetros que definen a cada una de ellas. – Será capaz de calcular probabilidades, esperanzas, varianzas y funciones generadoras de cada distribución en una gran cantidad de ejemplos. – Identificará la distribución continua que es adecuada para modelar y resolver un problema específico. – Conocerá las aproximaciones que existen entre algunas de ellas. – Conocerá los comandos básicos de R u otro software estadístico para visualizar las funciones de densidad y de distribución, así como para realizar cálculos y/o simulaciones en ejemplos concretos.

    1. Distribución Uniforme
    2. Distribución Normal
        *a*) Aproximación de distribuciones a la distribución normal
    3. Distribución Exponencial
    4. Distribución Gamma
    5. Distribución Beta
    6. Otras Distribuciones

## 1.4. Indicadores para la certificación

- **Unidad 1:**
    - Aplicar técnicas combinatorias y teoremas fundamentales.
- **Unidad 2:**
    - Definir variables aleatorias y calcular esperanza y varianza.
- **Unidad 3:**
    - Identificar distribuciones discretas y utilizar software estadístico.
- **Unidad 4:**
    - Identificar distribuciones continuas y aplicar simulaciones.

## 1.5. Evaluación del Curso

el curso consistirá en 3 sesiones a la semana en las que se desarrollarán y revisarán los contenidos del curso, las sesiones serán teóricas y se complementarán con prácticas en `R`, a través de scripts en formato `Rmd` los cuales se compilarán en un único documento al que se le denominará `Portafolio`. Además del estudio de los contenidos del curso, el/la estudiante desarrollará a lo largo del curso 4 biografías de una lista de 52 científicos prominentes en la historia de la ciencia. La evaluación de los contenidos del curso será a través de tres evaluaciones formativas en las cuales se deberá de demostrar el dominio de los temas revisados en clase. La asistencia será importante para poder ser evaluado con estos tres elementos, el requisito de porcentaje de asistencia es del 85 %, en caso de no contar con este porcentaje mínimo de asistencia para poder certificar la materia deberá de presentar el examen de certificación, mismo que será elaborado por el comité de certificación.

**Evaluación del curso**: La calificación final del curso se obtiene de la suma de los siguientes porcentajes: *Calificación Final* = *Portafolio* (30 %) + *Biografías* (10 %) + *Evaluaciones* (60 %).

## 1.6. Científicos prominentes

- Euclides
- Arquimedes
- Galileo
- Kepler
- Fermat
- Pascal
- Newton
- Leibniz
- Bernoulli
- Jacobi
- Euler
- Lagrange
- Laplace
- Gauss
- Moebius
- Poisson
- Bolzano
- Cauchy
- Abel
- Galois
- Riemann
- Cantor
- Planck
- Bohr
- Poincare
- Hilbert
- Russell
- Ramanujan
- Schrodinger
- Einstein
- Courant
- Pauli
- Heisenberg
- Fermi
- Dirac
- Neumann
- Kolmogorov
- Oppenheimer
- Godel
- Chandrasekhar
- Turing
- Erdos
- Feynman
- Nash
- Grothendieck
- Higgs
- Penrose
- Kleinrock
- Knuth
- Hawking
- Simon
- Perelman

## 1.7. Repositorio del curso

*Repositorio GitHub del curso*

# 2. Introducción

## 2.1. Preliminares

**Definición 1.** ***Conjunto*** *Es una colección de elementos con una o varias propiedades en común, lo denotaremos por $\Omega$.*

**Definición 2.** ***Conjunto vacío*** *Es el conjunto que no tiene elementos, se denota por $\emptyset$.*

**Definición 3.** ***Conjunto potencia:*** *El conjunto potencia de $\Omega$ , denotado por $2^{\Omega}$ es aquel conjunto conformado por todos los subconjuntos posibles de $\Omega$.*

**Ejemplo 1.** *El conjunto potencia de $\Omega = \{a, b, c\}$ es*

$$2^{\Omega} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}.$$

**Definición 4.** ***Subconjunto*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos no vacíos, se dice que $A$ es un subconjunto de $B$ si para cualquier elemento de $A$, este pertenece a $B$, es decir, si $x \in A$ entonces $x \in B$, se denota por $A \subset B$.*

**Definición 5.** ***Conjuntos iguales*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos no vacíos, se dice que $A$ y $B$ son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$, se denota por $A = B$.*

**Definición 6.** ***Complemento*** *Sea $A$ un conjunto, el complemento de $A$ se define por $A^c = \{x \in \Omega | x \notin A\}$.*

**Definición 7.** ***Unión*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos, la unión de $A$ y $B$ se define como $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \vee x \in B\}$*

**Definición 8.** ***Intersección*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos, la unión de $A$ y $B$ se define como $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \wedge x \in B\}$*

**Definición 9.** *El producto cartesianos de dos conjuntos $A$ $Y$ $B$, denotado por $A \times B$, se define como. la colección de de todas las parejas ordenadas $(a, b)$ donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir:*

$$A \times B = \{(a, b,) | a \in A, \ y \ b \in B\}$$

**Definición 10.** ***Diferencia*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos, la diferencia de $A$ y $B$ se define como: $A - B = \{x \in \Omega | x \in A \wedge x \notin B\}$.*

**Definición 11.** ***Conjuntos excluyentes*** *Dados $A$ y $B$ conjuntos, se dice que son mutuamente excluyentes si la intersección es el conjunto vacío.*

**Definición 12.** ***Exhaustivos*** *Dados $A$ y $B$ conjuntos, se dice que son exhaustivos si $A \cup B = \Omega$.*

**Teorema 1.** ***Operaciones entre conjuntos*** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos, tales que $A, B, C \subset \Omega$, entonces se cumplen las siguientes propiedades*

- ***Conmutatividad**: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.*

- ***Asociatividad de la unión***: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- ***Asociatividad de la intersección***: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ***Distributividad de la intersección sobre la unión***: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ***Distributividad de la unión sobre la intersección***: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ***Complemento de la unión***: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- ***Complemento de la intersección***: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- ***Diferencia simétrica***: $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

**Teorema 2.** *Dado $A$ un conjunto, se cumple que $(A^c)^c = A$.*

**Teorema 3.** *Sea $A$ conjunto, $A \subset \Omega$, entonces*

| | | |
|---|---|---|
| *i)* $A \cap \Omega = A$ | *iv)* $A \cup \emptyset = A$ | *vii)* $A \cap A = A$ |
| *ii)* $A \cup \Omega = \Omega$ | *v)* $A \cap A^c = \emptyset$ | |
| *iii)* $A \cap \emptyset = \emptyset$ | *vi)* $A \cup A^c = \Omega$ | *viii)* $A \cup A = A$ |

**Teorema 4.** *Sean $A$ y $B$ conjuntos, entonces*

$$A - B = A \cap B^c$$

**Teorema 5.** *Sean $A, B$ y $C$ conjuntos, entonces:*
$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.
$A^c - B^c = B - A$.
$A \cap B^c = A - (A \cap B)$.
$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$.
$(A - B) - C = A - (B - C)$.
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

De los conceptos anteriores se tiene lo siguiente:

**Definición 13.** *Sea $\Lambda$un conjunto de índices $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \{A_\lambda\}$ una colección de subconjuntos de $\Omega$ indexado por $\Lambda$. El conjunto de puntos que consiste en todos los puntos que pertenecen a $A_\lambda$ para al menos un $\lambda$ se le llama* union *de conjuntos $\{A_\lambda\}$ y se denota por*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

*El conjunto de puntos que pertenecen a $A_\lambda$ para cualquier valor de $\lambda$, se le llama intersección de los conjuntos $\{A_\lambda\}$ y se denota por*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

*Si $\Lambda$ es vacío, entonces se define*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset, \ y \ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \Omega.$$

**Teorema 6.** *Sea $\Lambda$ un conjunto de índices y $\{A_\lambda\}$ una colección de subconjuntos de $\Omega$ indexado por $\Lambda$. Entonces*

- $$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}.$$

- $$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}.$$

**Definición 14.** *Dos conjuntos $A$ y $B$ de $\Omega$ se dice que son* mutuamente excluyentes *o* disjuntos *si*

$$A \cap B = \emptyset.$$

*Los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes si*

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad para\ cada\ i \neq j.$$

**Teorema 7.** *Si $A$ y $B$ son subconjuntos de $\Omega$, entonces*

- $$A = (A\cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

- $$(A\cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset.$$

**Teorema 8.** *Si $A \subset B$, entonces*

$$A\cap B = A, \ y \ A\cup B = B.$$

## 2.2. Fundamentos

Sea $\Omega$ un conjunto no vacío. Una clase de eventos de $\Omega$ es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de $\Omega$.

**Propiedades 1.** *Dado $\Omega$ conjunto no vacío, se cumplen las siguientes propiedades:*

*(i)* $\Omega \in \mathcal{C}$.

*(ii)* *Si* $A \in \mathcal{C}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{C}$.

*(iii)* *Si* $A \in \mathcal{C}$ *entonces existen* $\{B_j : j \in J_n\} \subset \mathcal{C}$ *ajenos por parejas, tales que*

$$A^c = \bigcup_{j \in J_n} B_j.$$

*(iv)* *Si* $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ *son tales que* $A_1 \subset A_2$, *entonces* $A_2 - A_1 \in \mathcal{C}$.

*(v)* *Si* $\{A_j : j \in J_n\} \subset \mathcal{C}$ *entonces*

$$\bigcup_{j \in J_n} A_j \in \mathcal{C}.$$

*(vi)* *Si* $\{A_j : j \in J_n\} \subset \mathcal{C}$ *entonces*

$$\bigcap_{j \in J_n} A_j \in \mathcal{C}.$$

*(vii)* *Si* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ *entonces*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

*(viii)* *Si* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ *son tales que* $A_n \subset A_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

*(ix)* *Si* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ *son tales que* $A_{n+1} \subset A_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

**Definición 15.** ***Álgebra*** *Sea $\Omega$ un conjunto, y $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos en $\Omega$. $\mathcal{A}$ es una álgebra de conjuntos si se cumplen las siguientes propiedades:*

*i)* $\Omega \in \mathcal{A}$,

*ii)* *Si* $A \in \mathcal{A}$*, entonces* $A^c \in \mathcal{A}$*,*

*iii)* *Si* $A_1 \in \mathcal{A}$ *y* $A_2 \in \mathcal{A}$*, entonces* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$*.*

**Teorema 9.** $\emptyset \in \mathcal{A}$.

**Teorema 10.** *Si* $A_1$ *y* $A_2 \in \mathcal{A}$*, entonces* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$*.*

**Teorema 11.** *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$*, entonces tanto* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *como* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$*.*

**Definición 16.** ***σ-Álgebra*** *Sea* $\mathcal{A}$ *colección de conjuntos definidos sobre* $\Omega$*,* $\mathcal{A}$ *es una* $\sigma$*-álgebra si se cumplen las condiciones siguientes:*

*i)* $\Omega \in \mathcal{A}$*,*

*ii)* *Si* $A \in \mathcal{A}$*, entonces* $A^c \in \mathcal{A}$*,*

*iii)* *Si* $\{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{A}$*, entonces* $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$*.*

**Definición 17.** *La pareja* $(\Omega, \mathcal{A})$ *se le denomina espacio medible, y a los elementos de* $\mathcal{A}$ *se les llama eventos o conjuntos medibles.*

**Ejemplo 2.** *Sea* $\Omega$ *conjunto cualquiera no vacío, entonces las siguientes colecciones son* $\sigma$*-álgebra:*

*i)* $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.

*ii)* $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

*iii)* $\mathcal{F}_3 = 2^{\Omega}$.

*iv)* *Sean* $A$ *y* $B$ *subconjuntos de* $\Omega$ *tales que* $A \subset B$*, entonces*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, B - A, (A - B)^c, \Omega\}$$

*es una* $\sigma$*-álgebra.*

**Proposición 1.** *Sea* $\mathcal{F}$ *una* $\sigma$*-álgebra de subconjuntos de* $\Omega$*, entonces*

*i)* $\emptyset \in \mathcal{F}$

*ii)* *Si* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$*, entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

*iii)* *Si* $A$ *y* $B \in \mathcal{F}$*, entonces* $A - B \in \mathcal{F}$*, y además* $A \triangle B \in \mathcal{F}$*.*

**Proposición 2.** *La intersección de dos* $\sigma$*-álgebras es una* $\sigma$*-álgebra.*

**Proposición 3.** *La intersección finita, infinita numerable o arbitraria de* $\sigma$*-álgebras es nuevamente una* $\sigma$*-álgebra.*

**Definición 18** ($\sigma$-álgebra generada)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una colección no vacía de subconjuntos de* $\Omega$*. La* $\sigma$*-álgebra generada por* $\mathcal{C}$*, denotada por* $\sigma(\mathcal{C})$ *es la colección*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \textit{ es } \sigma - \textit{álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}$$

**Definición 19.** *Sea* $S = (-\infty, \infty)$ *la recta real, entonces* $\beta$ *se elige de manera que contiene todos los elementos de la forma:* $[a, b], [a, b]), (a, b]$ *y* $(a, b)$