Notas sobre Regresión Lineal y Logística

Derivaciones, Comentarios y Optimización

Carlos Leonardo

April 24, 2025

Agradecimientos

Estas notas fueron escritas a partir del estudio autodidacta y reflexión matemática sobre los modelos de regresión lineal y logística. Se agradece el aporte teórico de textos clásicos como *The Elements of Statistical Learning* de Hastie, Tibshirani y Friedman, así como artículos de Komurek (2004), Hasmer y Temeeshou (2000).

Contents

1 Introducción

Se exploran los fundamentos teóricos y computacionales de la regresión lineal (simple y multivariada), regresión polinomial y regresión logística. Se incluyen derivaciones completas del gradiente, matriz Hessiana, verosimilitud y funciones de pérdida, además de métodos de optimización como Newton-Raphson.

2 Regresión Lineal

2.1 Modelo Simple y Multivariado

Dado un conjunto de observaciones y_i y predictores x_i:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Para el caso multivariado:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nd} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$$

2.2 Modelo Lineal Centrado

Utilizando la transformación $x_i - \bar{x}$ se obtiene que $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$ y

$$\beta_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

3 Regresión Logística

3.1 Fundamentos

El modelo se basa en una variable binaria $y_i \in \{0, 1\}$ con probabilidad $\pi_i = P(y_i = 1|x_i)$:

$$\pi_i = \frac{1}{1 + e^{-x_i^\top \beta}} \quad \text{o bien} \quad \log\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) = x_i^\top \beta$$

3.2 Función de Log-Verosimilitud

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\pi_i) + (1 - y_i) \log(1 - \pi_i)$$

3.3 Gradiente

$$\nabla_\beta \ell(\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \pi_i) = X^\top(y - \pi)$$

3.4 Hessiano

$$\nabla^2_\beta \ell(\beta) = -X^\top V X \quad \text{con} \quad V = \operatorname{diag}(\pi_i(1 - \pi_i))$$

4 Newton-Raphson para Regresión Logística

Actualización iterativa:

$$\beta^{(c+1)} = \beta^{(c)} + (X^\top V X)^{-1} X^\top (y - \pi)$$

5 Regularización

La log-verosimilitud regularizada es:

$$\ell_\lambda(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i x_i^\top \beta - \log\left(1 + e^{x_i^\top \beta}\right) \right] - \frac{\lambda}{2} \|\beta\|^2$$

6 Función de Pérdida y Desviación

Se define la desviación como:

$$\mathrm{DEV}(\beta) = -2\ell(\beta)$$

7 Referencias

- Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning.*
- Komurek, J. (2004). *Efficient Logistic Regression Methods.*
- Hasmer, Temeeshou (2000).
- Malouf (2002), Minka (2003).