

# Resumen Matemático Ampliado: Logistic Regression in Data Analysis: An Overview (Maalouf, 2011)

Carlos – Compilado con ayuda de ChatGPT

## Modelo de regresión logística

Para una variable binaria  $y_i \in \{0, 1\}$ , el modelo de regresión logística predice la probabilidad:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-x_i\beta}}$$

## Función de verosimilitud

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}$$

## Log-verosimilitud

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i \ln(p_i) + (1 - y_i) \ln(1 - p_i)]$$

## Derivadas

Gradiente:

$$\nabla_{\beta} \ell(\beta) = X^{\top} (y - p)$$

Hessiano (segunda derivada):

$$\nabla_{\beta}^2 \ell(\beta) = -X^{\top} V X, \quad V = \text{diag}(p_i(1 - p_i))$$

## Regularización Ridge (L2)

Se añade un término penalizado:

$$\ell_{\lambda}(\beta) = \ell(\beta) - \frac{\lambda}{2} \|\beta\|^2$$

Gradiente regularizado:

$$\nabla_{\beta} \ell_{\lambda}(\beta) = X^{\top}(y - p) - \lambda\beta$$

Hessiano regularizado:

$$\nabla_{\beta}^2 \ell_{\lambda}(\beta) = -X^{\top} V X - \lambda I$$

## TR-IRLS (Trust Region IRLS)

Actualización generalizada del paso de Newton:

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + s$$

Donde  $s$  es solución de:

$$(X^{\top} V X + \lambda I) s = X^{\top} V z - \lambda \beta$$

## Eventos raros y correcciones

### Ajuste del intercepto (King & Zeng)

$$\tilde{\beta}_0 = \hat{\beta}_0 - \ln \left[ \left( \frac{1 - \tau}{\tau} \right) \left( \frac{\hat{y}}{1 - \hat{y}} \right) \right]$$

## Muestreo estratificado

Peso para observación  $i$ :

$$w_i = \frac{Q_i}{H_i}$$

Verosimilitud ponderada:

$$\ell_w(\beta) = \sum_{i=1}^n w_i \ln \left( \frac{e^{x_i \beta}}{1 + e^{x_i \beta}} \right)$$

## Corrección de Firth

Se basa en el ajuste de penalización de tipo Jeffreys:

$$\ell^*(\beta) = \ell(\beta) + \frac{1}{2} \log |I(\beta)|$$

## Regla de decisión

$$\hat{y}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \geq c \\ 0 & \text{si } p_i < c \end{cases} \quad (\text{usualmente } c = 0.5)$$