Desarrollo de la Regresión Lineal
(Hojas 02 y 03)

1. Desarrollo de la derivada del costo respecto a θ_0

Recordamos que la función de costo es:

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2$$

Donde:

$$h_\theta(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x^{(i)}$$

Sustituimos h_θ:

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left(\theta_0 + \theta_1 x^{(i)} - y^{(i)} \right)^2$$

Derivamos respecto a θ_0:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_0} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} 2 \left(\theta_0 + \theta_1 x^{(i)} - y^{(i)} \right) \cdot 1$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\theta_0 + \theta_1 x^{(i)} - y^{(i)} \right)$$

2. Derivada del costo respecto a θ_1

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} 2 \left(\theta_0 + \theta_1 x^{(i)} - y^{(i)} \right) \cdot x^{(i)}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\theta_0 + \theta_1 x^{(i)} - y^{(i)} \right) x^{(i)}$$

3. Vector Gradiente y Descenso por Gradiente

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_0}$$
$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_1}$$

donde α es la tasa de aprendizaje.

4. Forma Vectorial

Si se define:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x^{(N)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Entonces el vector de predicciones es:

$$\boldsymbol{h}_\theta = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta}$$

Y la función de costo es:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2N} \left\| \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{y} \right\|^2$$

El gradiente vectorial es:

$$\nabla_\theta J = \frac{1}{N} \boldsymbol{X}^\top (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{y})$$