Derivación paso a paso de los coeficientes en Regresión Lineal

Carlos

Objetivo

Dado un conjunto de datos (x_i, y_i) para $i = 1, \ldots, n$, queremos encontrar los coeficientes β_0 y β_1 que minimicen el error cuadrático:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

Es más sencillo resolver este problema usando la forma *centralizada*:

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i$$

donde:

$$\beta_0 = \beta_0^* - \beta_1 \bar{x}$$

Paso 1: Derivada parcial respecto a β_0^*

Queremos minimizar:

$$L(\beta_0^*, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0^* + \beta_1 (x_i - \bar{x}))]^2$$

Calculamos la derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta_0^*} &= \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (\beta_0^* + \beta_1 (x_i - \bar{x}))](-1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0^* - \beta_1 (x_i - \bar{x})] \end{aligned}$$

Igualamos a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0^* - \beta_1 (x_i - \bar{x})] = 0$$

Distribuimos:

$$n\beta_0^* + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

Entonces:

$$n\beta_0^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \Rightarrow \beta_0^* = \bar{y}$$

Paso 2: Derivada parcial respecto a β_1

Nuevamente:

$$L(\beta_0^*, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_0^* - \beta_1(x_i - \bar{x})]^2$$

Derivamos con respecto a β_1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta_1} &= \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - \beta_0^* - \beta_1(x_i - \bar{x})](-1)(x_i - \bar{x}) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_0^* - \beta_1(x_i - \bar{x})](x_i - \bar{x}) \end{aligned}$$

Igualamos a cero:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_0^* - \beta_1(x_i - \bar{x})](x_i - \bar{x}) = 0$$

Sustituimos $\beta_0^* = \bar{y}$:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \bar{y} - \beta_1(x_i - \bar{x})](x_i - \bar{x}) = 0$$

Distribuimos:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) - \beta_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

Despejamos β_1:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

Paso 3: Recuperar β_0

$$\beta_0 = \beta_0^* - \beta_1\bar{x} = \bar{y} - \beta_1\bar{x}$$

Aplicaciones de la Regresión Lineal

- Evaluación de software basado en vectores de código (Hyun-il Lim).
- Clasificación de atributos con peso en MLR para mejorar eficiencia y consumo (Xingang Wang).
- Análisis de sensibilidad en portafolios usando análisis factorial (Zhihao Peng).
- Clasificador CWKLR basado en pesos para categorías de objetos (Qingxiang Feng).
- Predicción de temperatura en interruptores de alto voltaje (Xuan Fang).
- Modelado de fantasías humanas para simulación de antenas (Tadahiko Maeda).
- Códigos de video basados en MLR para codificación intra (Zhaobin Zhang).
- Análisis de resonancia magnética funcional mediante regresión simbólica (Ernest C. Jackson).
- Predicción del dominio psicomotor de estudiantes con datos educativos (R. Harimurti).
- Comparación de métodos de regularización (Lasso, Ridge, Elastic Net) para mejorar predicción en diferentes esquemas de muestreo.
- Predicción del consumo de partes aeronáuticas usando MLR (Yanming Wang).
- Evaluación de manipulación ósea en medicina china (Dejian Wei).
- Predicción de lluvias con modelos MLR (Shekhar).
- Estimación de ventas y comparación con modelos de aprendizaje profundo (Gopakrishnan T.).
- Predicción del tiempo de cultivo del arroz (Liuminto).
- Procesamiento de datos de materiales con regresión (Dehua Wang).
- Modelado de comportamiento de movimiento usando regresión polinómica (Timur Babakeev).
- Predicción de posición con campo sonoro (Francios Giordini).
- Estimación de vida útil de materiales usando regresión con LIBS (Joon-Kyong Hoon).
- Modelado del mercado de electricidad con polinomios y MLR (Ahmed Al-Imam).
- Mejora de la eficiencia computacional en simulaciones grandes reduciendo variables y errores.
- Actualización de modelos de calidad para imágenes médicas (H. Roopa).

- Predicción de rendimiento de cultivos agrícolas con MLR y modelos de bosques aleatorios (Suvdha Jambekar).
- Predicción de clases con clasificación basada en semejanza (Shen-Chuan Tai).