

# Notas sobre Regresión Lineal y Logística

## Derivaciones, Comentarios y Optimización

Carlos Leonardo

April 9, 2025

### Agradecimientos

Estas notas fueron escritas a partir del estudio autodidacta y reflexión matemática sobre los modelos de regresión lineal y logística. Se agradece el aporte teórico de textos clásicos como *The Elements of Statistical Learning* de Hastie, Tibshirani y Friedman, así como artículos de Komurek (2004), Hasmer y Temeeshou (2000).

## Contents

# 1 Introducción

Se exploran los fundamentos teóricos y computacionales de la regresión lineal (simple y multivariada), regresión polinomial y regresión logística. Se incluyen derivaciones completas del gradiente, matriz Hessiana, verosimilitud y funciones de pérdida, además de métodos de optimización como Newton-Raphson.

## 2 Regresión Lineal

### 2.1 Modelo Simple y Multivariado

Dado un conjunto de observaciones  $y_i$  y predictores  $x_i$ :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Para el caso multivariado:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nd} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$$

### 2.2 Modelo Lineal Centrado

Utilizando la transformación  $x_i - \bar{x}$  se obtiene que  $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$  y

$$\beta_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

## 3 Regresión Logística

### 3.1 Fundamentos

El modelo se basa en una variable binaria  $y_i \in \{0, 1\}$  con probabilidad  $\pi_i = P(y_i = 1 | x_i)$ :

$$\pi_i = \frac{1}{1 + e^{-x_i^\top \beta}} \quad \text{o bien} \quad \log \left( \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = x_i^\top \beta$$

### 3.2 Función de Log-Verosimilitud

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n y_i \log(\pi_i) + (1 - y_i) \log(1 - \pi_i)$$

### 3.3 Gradiente

$$\nabla_{\beta} \ell(\beta) = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \pi_i) = X^{\top} (y - \pi)$$

### 3.4 Hessiano

$$\nabla_{\beta}^2 \ell(\beta) = -X^{\top} V X \quad \text{con} \quad V = \text{diag}(\pi_i(1 - \pi_i))$$

## 4 Newton-Raphson para Regresión Logística

Actualización iterativa:

$$\beta^{(c+1)} = \beta^{(c)} + (X^{\top} V X)^{-1} X^{\top} (y - \pi)$$

## 5 Regularización

La log-verosimilitud regularizada es:

$$\ell_{\lambda}(\beta) = \sum_{i=1}^n \left[ y_i x_i^{\top} \beta - \log(1 + e^{x_i^{\top} \beta}) \right] - \frac{\lambda}{2} \|\beta\|^2$$

## 6 Función de Pérdida y Desviación

Se define la desviación como:

$$\text{DEV}(\beta) = -2\ell(\beta)$$

## 7 Referencias

- Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning*.
- Komurek, J. (2004). *Efficient Logistic Regression Methods*.
- Hasmer, Temeeshou (2000).
- Malouf (2002), Minka (2003).