Limitaciones expresivas y fundamentación: la teoría ingenua de conjuntos basada en *LP*[†]

Luis Estrada González

Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

loisayaxsegrob@gmail.com

Introducción

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio en el que investigo la matematicidad. Como veo el problema, parte de entender qué es la matemática requiere entender las conexiones entre la matemática clásica y la matemática no clásica. Sin embargo, aquí no hablaré de la matematicidad en general y sólo hablaré de las conexiones entre la matemática clásica y la no clásica tangencialmente para concentrarme en una pregunta un tanto menos ambiciosa: dado que parece que la teoría de conjuntos es central para la matemática tanto clásica como no clásica, ¿cuáles son las consecuencias conceptuales y filosóficas para una $\mathscr{L}$-matemática de resultados limitativos para la $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos, donde $\mathscr{L}$ es una lógica dada, especialmente una no clásica?

Como puede notarse, esta pregunta es acerca de las conexiones entre la teoría de conjuntos basada en $\mathscr{L}$ y el resto de la $\mathscr{L}$-matemática.[1] Por ejemplo, ¿qué pasaría con la matemática constructiva en caso de que hubiera una teoría de conjuntos constructiva distinguida y ésta tuviera serias limitaciones como, digamos, no tener recursos expresivos suficientes para definir alguna noción conjuntista que pareciera indispensable? ¿Dicha limitación se trasladaría *ipso facto* de la teoría constructiva de conjuntos a la matemática constructiva en general? Argumentaré que cualquier respuesta a la pregunta principal de este trabajo involucra diferentes posturas acerca del rol de una teoría de conjuntos dentro de la matemática.

Para que la discusión sea un tanto menos abstracta, me concentraré en un caso particular: la evaluación filosófica de los resultados limitativos probados por Morgan (antes Nick) Thomas para la teoría ingenua de conjuntos basada en la lógica *LP* y en otras lógicas relacionadas. Estos resultados son importantes porque, a primera vista, parecen golpes duros contra los prospectos de hacer matemática inconsistente o, por lo menos, matemática basada en *LP* y lógicas relacionadas.

[1] Para simplificar la discusión, estoy suponiendo que, como en la matemática clásica, en cualquier $\mathscr{L}$-matemática hay una teoría de conjuntos distinguida, por las razones que fuere, y me refiero a ella como 'la $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos', pero esto no debe leerse como implicando la existencia de una sola $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos.

Asumo que quien lea esto conoce la lógica clásica de primer orden y los rudimentos de teoría clásica de conjuntos, por ejemplo, ZF, así como ciertas convenciones notacionales asociadas (como que '$\neg(x=y)$' y '$(x\neq y)$' son intercambiables). El plan del artículo es como sigue. En la primera sección presento algunos preliminares conjuntistas necesarios para el resto del trabajo; básicamente, se trata de una rápida presentación de los rasgos centrales de una teoría ingenua de conjuntos. En la segunda sección presento los preliminares lógicos: algunas propiedades importantes de la lógica *LP* y de las *LP* mínimamente inconsistentes. En la tercera sección introduzco algunas características básicas de la teoría ingenua de conjuntos basada en *LP*. En la cuarta sección presento los resultados de Thomas para, en la quinta, evaluarlos lógica y matemáticamente, pero sobre todo filosóficamente.

1. Preliminares conjuntistas

Una *teoría de conjuntos ingenua* (basada en una lógica $\mathcal{L}$, lo que denotaré con '$\mathcal{L}$-NS') es una teoría de conjuntos en la que valen los siguientes dos principios:

Extensionalidad $\forall x\forall y(\forall z((z\in x)\equiv(z\in y))\supset(x=y))$

Comprehensión $\exists x\forall y((y\in x)\equiv A)$ (con x no libre en A)

Hay dos hechos más o menos bien conocidos acerca de $\mathcal{L}$-NS. El primero es el teorema de Russell, a saber, que si $\mathcal{L}$ es la lógica clásica, $\mathcal{L}$-NS es inconsistente y, con ello, trivial. El segundo es que no basta cualquier lógica no clásica para evitar la inconsistencia o la trivialidad de $\mathcal{L}$-NS.

Una idea común es que, puesto que lo que trivializa a $\mathcal{L}$-NS es una contradicción –la existencia de un conjunto de Russell– y la lógica clásica es explosiva, esto es, que permite inferir cualquier proposición a partir de una contradicción, una lógica paraconsistente podría evitar la trivialización. Sin embargo, el teorema de Curry dice que si $\mathcal{L}$ satisface Transitividad, Separación (para el condicional, esto es, *Modus Ponens*), Prueba Condicional o Contracción, entonces $\mathcal{L}$-NS es trivial. Pero estos principios son centrales a muchas lógicas no clásicas, incluidas muchas paraconsistentes –notablemente las lógicas C*n* de da Costa y las lógicas de la relevancia *E* y *R*–, por lo que las esperanzas de desarrollar una teoría ingenua de conjuntos no trivial se reducen bastante. Sin embargo, la lógica *LP*, propuesta primero por González Asenjo (1966) y redescubierta y ampliamente aplicada por Priest (1979, 2006), al no satisfacer *Modus Ponens*, parece un candidato viable para hacer teoría de conjuntos ingenua no trivial.

2. Preliminares lógicos: *LP*

Hay varias maneras de presentar la lógica *LP*; aquí usaré una presentación modelo-teórica bivalente pero no veritativo-funcional. Usaré un lenguaje de primer orden típico, con colecciones de variables individuales (*Var*), constantes individuales (*Cons*), símbolos de funciones *n*-arias ($Func_n$) y símbolos de relaciones *n*-arias (Rel_n), las últimas dos para todo *n*. Las colecciones de términos (*Térm*) y fórmulas (*Form*) se forman de la manera usual. Una interpretación para este lenguaje es un par $M = <D, d>$, donde *D* es un dominio no vacío de interpretación y *d* una función de denotación tal que

para toda $c \in Cons$, $\quad d(c) \in D$;

para toda $f \in Func_n$, $\quad d(f): D^n \rightarrow D$

para toda $R \in Rel_n$, $\quad d(R) = <E^+, E^-> $ donde $E^+ \cup E^- = D^n$

Escribiré 'E^+' y 'E^-' como '$d^+(R)$' y '$d^-(R)$' y los llamaré *la extensión* y *la antiextensión* de *R*, respectivamente. Intuitivamente, son las colecciones de cosas que satisfacen *R*, en un caso, y su negación, en el otro. Los valores de verdad son, como en el caso clásico, sólo dos: $V = \{\perp < \top\}$, interpretados como "falso" y "verdadero", respectivamente.

Dada una interpretación *M* y una función $s: Var \rightarrow D$ que especifica la denotación de cada variable, se define la denotación de cada término *t*, $den(t)$, de la manera usual:

si $t \in Var$, $\quad den(t) = s(t)$;

si $t \in Cons$, $\quad den(t) = d(t)$;

si $f \in Func_n$ y $t_1, \ldots, t_n \in Térm$, $\quad den(f(t_1 \ldots t_n)) = d(f(den(t_1) \ldots den(t_n)))$

Una evaluación, *v*, es un subconjunto de $(F \times D^{Var}) \times \{\perp, \top\}$ definida por las siguientes cláusulas recursivas, donde $t_1, \ldots, t_n \in Térm$ y $R \in Rel_n$:

$v((Rt_1 \ldots t_n, s), \top)$ si y sólo si $<den(t_1) \ldots den\ (t_n)> \in d^+(R)$

$v((Rt_1 \ldots t_n, s), \perp)$ si y sólo si $<den(t_1) \ldots den\ (t_n)> \in d^-(R)$

$v((\neg A, s), \top)$ si y sólo si $v((A, s), \perp)$

$v((\neg A, s), \perp)$ si y sólo si $v((A, s), \top)$

$v((A \wedge B, s), \top)$ si y sólo si $v((A, s), \top)$ y $v((B, s), \top)$

$v((A \wedge B, s), \perp)$ si y sólo si $v((A, s), \perp)$ o $v((B, s), \perp)$

$v((A \vee B, s), \top)$ si y sólo si $v((A, s), \top)$ o $v((B, s), \top)$

$v((A \vee B, s), \perp)$ si y sólo si $v((A, s), \perp)$ y $v((B, s), \perp)$

$v((A \supset B, s), \top)$ si y sólo si $v((A, s), \perp)$ o $v((B, s), \top)$

$v((A \supset B, s), \perp)$ si y sólo si $v((A, s), \top)$ y $v((B, s), \perp)$

$v((\forall xA, s), \top)$ si y sólo si para todo $a \in D$, $v((A, s(x/a)), \top)$

$v((\forall xA, s), \bot)$ si y sólo si para algún $a \in D$, $v((A, s(x/a)), \bot)$

$v((\exists xA, s), \top)$ si y sólo si para algún $a \in D$, $v((A, s(x/a)), \top)$

$v((\exists xA, s), \bot)$ si y sólo si para todo $a \in D$, $v((A, s(x/a)), \bot)$

donde $x \in Var$ y $s(x/a)$ es como s excepto que su valor en x es a. Finalmente, '=' es una relación binaria particular tal que

$d^+(=) = \{<x, x> | x \in D\}$

y $d^-(=)$ debe ser tal que $d^+(=) \cup d^-(=) = D^2$.

Usaré '$\Gamma \vDash_{\mathfrak{L}} C$' para denotar que el argumento con premisas Γ y conclusión C es válido en $\mathfrak{L}$. La definición de 'validez' es la usual:

Validez: $\Gamma \vDash_{LP} C$ si y sólo si para cualquier v, si $\top \in v(P)$ para toda $P \in \Gamma$, $\top \in v(C)$.

La única diferencia con la lógica clásica, y por lo cual las segundas cláusulas en las condiciones de satisfacibilidad anteriores no son redundantes, es que las interpretaciones no tienen que ser funciones, sino que pueden ser relaciones.

LP tiene las siguientes características:

$\vDash_{LP} C$ si y sólo si $\vDash_{LC} C$

Si $\Gamma \vDash_{LP} C$ entonces $\Gamma \vDash_{LC} C$

Es decir, *LP* tiene exactamente las mismas verdades lógicas que la lógica clásica y, si un argumento es válido en *LP* es válido, también lo es en lógica clásica. Sin embargo, la recíproca de lo anterior no es cierta, pues en *LP* se tiene que

Paraconsistencia: $A, \neg A \nvDash_{LP} B$; esto es, falla el *Principio de Explosión*

No separabilidad de $\supset$: $A, A \supset B \nvDash_{LP} B$; esto es, falla *Modus Ponens*

Como contraejemplo tanto al *Principio de Explosión* como a *Modus Ponens*, considérese la evaluación $v((A, s), \{\bot, \top\})$ y $v((B, s), \bot)$. En ambos casos, $\top$ pertenece a la evaluación de todas las premisas y, sin embargo, la conclusión es sólo falsa ($\{\bot\}$).

En una *LP mínimamente inconsistente*, se miden cuán inconsistentes son diferentes modelos de LP el uno respecto al otro (según cierta medida de inconsistencia), y se restringen los modelos de una teoría a los modelos mínimamente inconsistentes. Aunque interesante, presentar las construcciones precisas de las medidas de inconsistencia, de las comparaciones entre modelos y de las restricciones a los modelos mínimamente inconsistentes (según la medida establecida) no es necesario para los propósitos del trabajo. Para lo que resta del texto, basta con que el lector conozca la idea general de las *LP* mínimamente inconsistentes tal como la he presentado; los detalles pueden consultarse en Priest (1991) y Crabbé (2011).

3. *LP*-NS

LP-NS, la teoría de conjuntos ingenua basada en *LP*, tiene algunas propiedades interesantes. Entre los teoremas notables de *LP*-NS están los axiomas

Pares $\forall w\forall z\exists x\forall y((y\in x)\equiv((y=w)\vee(y=z)))$

Potencia $\forall w\exists x\forall y((y\in x)\equiv\forall z((z\in x)\supset(z\in w)))$

Unión $\forall w\exists x\forall y((y\in x)\equiv\exists z((z\in w)\wedge(y\in z)))$

Separación $\forall w\exists x\forall y((y\in x)\equiv((y\in w)\wedge Py)))$

Reemplazo $\forall w\exists x\forall y((y\in x)\equiv \exists z((z\in w)\wedge((Pz)=y)))$

Conjunto vacío $\exists x\neg\exists y(y\in x)$

Infinito $\exists x((y\in x)\wedge\forall z((z\in x)\supset\exists w((z\in w)\wedge(w\in x))))$

La prueba de que los primeros cinco son teoremas de *LP*-NS es bastante sencilla: todos ellos son instancias de *Comprehensión* poniendo alguna condición en lugar de *A* y generalizando universalmente. Por ejemplo, *Pares* resulta de sustituir '*A*' por '$((y=w)\vee(y=z))$'; *Potencia*, de sustituir '*A*' por '$\forall z((z\in x)\supset(z=w))$', etcétera.

LP-NS difiere de ZF (clásica) en que la primera cuenta con conjunto universal y en que no valida el axioma de Regularidad, $\forall x((x\neq\varnothing)\supset\exists y((y\in x)\wedge\forall z(z\in x\supset\neg(z\in y))))$. Esto último constituye una prueba de la no trivialidad de *LP*-NS: hay por lo menos una fórmula que no es teorema.[2]

Pero validar buena parte de los axiomas usuales junto con *Comprehensión* tiene un costo. Uno de ellos es que ciertas fórmulas parecen significar algo diferente a lo que significan sus contrapartes tipográficamente idénticas en ZF. Por ejemplo, en *LP*-NS es un teorema que $\exists y\exists x(y\neq x)$. Sin embargo, la prueba no deja determinar si hay (al menos) dos objetos distintos en *LP*-NS. En *LP*-NS hay un conjunto de Russell, esto es,

[2] Véase Restall (1992) para una prueba de la no trivialidad de *LP*-NS. Como no podría ser de otro modo, *Elección* es problemático en este contexto. Puede añadirse como axioma junto a *Extensionalidad* y *Comprehensión*. Sin embargo, puede recuperarse a partir de *Comprehensión* si se añade maquinaria lógica a *LP*, como el cálculo ε de Hilbert (véase Leisenring 1969: cap. 4), o si se retira el requisito de que la variable del cuantificador particular en *Comprehensión* no aparezca libre en *A*; véase Routley (1980). Sin embargo, la interpretación del axioma es complicada, del mismo modo que lo son otras fórmulas, como las que se discutirán más abajo. Para una discusión de *Elección* en este contexto, véase Weber (2013).

$\exists r((r\in r)\equiv\neg(r\in r))$; por tanto, $\exists r\neg((r\in r)\equiv(r\in r))$. Así, $\neg\forall z((r\in z)\equiv(r\in z))$, y $\exists x\neg\forall z((r\in z)\equiv(r\in z))$. Pero de eso se sigue que $\exists x\neg(x=x)$, y de esto $\exists y\exists x\neg(y=x)$. Sin embargo, nótese que el teorema se sigue de que hay un objeto distinto de sí mismo. Pero, puesto que todo teorema clásico es un teorema de *LP*, en *LP*-NS vale $\forall x(x=x)$. Pero todo esto es compatible con que haya sólo un conjunto distinto de sí mismo. En cualquier teoría basada en *LP*, A y $\neg A$ se verifican por diferentes procedimientos: si se ha establecido la verdad de $y\neq x$, determinar el valor de $y=x$ es un asunto adicional, pues ambas pueden ser verdaderas.

La siguiente instancia de *Comprehensión* representa un problema similar: $\forall z\exists x\forall y((y\in x)\equiv(x=z))$. Usualmente, ésta sería la expresión de que hay conjuntos unitarios. Sin embargo, no está claro que x en *LP*-NS sea un conjunto unitario: la fórmula $\forall y((y\in x)\equiv(x=z))$ es satisfecha por x si éste es tal que $\forall z((z\in x)\wedge\neg(z\in x))$.

4. Los resultados de Thomas

Éste es precisamente el punto de partida de los resultados que me ocupan en este trabajo. Thomas investiga fórmulas φ que satisfagan ciertos grupos de condiciones con cláusulas de las formas $\mathrm{NS}\vDash_{LP}(\mathrm{c})\varphi$ y $\mathrm{NS}, \varphi, \Gamma \vDash_{LP} \psi$ –donde '$(\mathrm{c})\varphi$' es una cuantificación, ya sea universal o particular, sobre φ que liga todas sus variables– para que definan nociones conjuntistas. Por ejemplo, '$\varphi(x, y)$' con dos variables libres es una *definición de unitario para LP-NS* si y sólo si las siguientes cláusulas se satisfacen:

DU1. $\mathrm{NS}\vDash_{LP}\forall a\exists b\varphi(a, b)$

DU2. $\mathrm{NS}, \varphi(a, b) \vDash_{LP} a\in b$

DU3. $\mathrm{NS}, \varphi, c\in b \vDash_{LP} c=a$

Estas condiciones están formuladas en términos de consecuencia lógica porque, como vimos, las fórmulas podrían no significar lo que uno desearía. La fórmula '$\varphi(a, b)$' se lee "b es el unitario $\{a\}$". Las cláusulas requeridas son que *LP*-NS pruebe que tal conjunto existe para todo a; que cualquier b que satisfaga $\varphi(a, b)$ contiene a a; y que cualquier elemento de tal b es igual a a.

Por último, sea A una fórmula que contiene los términos $\tau_1,\ldots, \tau_n$ y el símbolo de relación n-aria R. Diremos que una teoría T es *casi trivial* si y sólo si, para alguna de sus relaciones n-arias R y todo τ_i, tanto φ como $\neg\varphi$ valen en T.

Los resultados de Thomas son como siguen. Sean $LP^{\circ}\in\{LP, LP_{=}, LP_{\supseteq}\}$ y $LP^{\bullet}\in\{LP_m, LP_{\subseteq}\}$, en tanto que '$LP^*$-NS' denota una *teoría de conjuntos ingenua basada en cualquiera de esas lógicas*. Entonces

- $LP°$-NS no puede probar la existencia de conjuntos unitarios, pares Cartesianos u órdenes infinitamente ascendentes, y
- $LP^{\bullet}$-NS es casi trivial, ya que prueba $\forall x \forall y((x \in y) \wedge (x \notin y))$, y su único modelo es el modelo con un solo elemento, pertenencia inconsistente e igualdad consistente.

5. Evaluación de los resultados de Thomas

A partir de ahora, usaré indistintamente las expresiones '*X* recupera a *Y*', '*X* reproduce a *Y*' y '*X* reconstruye a *Y*', donde *X* y *Y* son teorías matemáticas, y significarán que *X* prueba teoremas tipográficamente idénticos a los de *Y* y que valen en modelos tan parecidos como sea posible a los modelos pretendidos de *Y*.

Thomas (2014: 341s) dice que con sus resultados pretende "(…) sugerir que *LP*-NS no puede reproducir ningún fragmento interesante de la matemática clásica (…)", en particular, que "(…) la carencia de órdenes lineales infinitamente ascendentes sugiere que *LP*-NS no puede construir los números naturales." La implicatura aquí es que *LP*-NS no puede recuperar la aritmética (clásica). Pero dado que las *LP* mínimamente inconsistentes también tienen limitaciones expresivas o son casi triviales, "(…) NS en *LP* mínimamente inconsistente no es "mucho mejor" que [*LP*-NS] como base para la matemática."

Estos parecen golpes duros contra los prospectos de hacer matemática inconsistente, o al menos *LP**-matemática. Sin embargo, el veredicto no es tan claro, pues hay varias razones para no aceptar la solidez de las pruebas de Thomas. La primera es que las pruebas tiene supuestos controvertidos desde un punto de vista puramente lógico o matemático. Thomas asume, por ejemplo, que la igualdad es primitiva, como lo hace Priest en su versión de *LP*-NS, cuando bien podría haberla considerada como definida a la manera usual, como en Restall (1992).[3] Por otro lado, buena parte de su teoría es más clásica de lo que debería. Por ejemplo, la noción de igualdad usada en los modelos es consistente y las pruebas de Thomas proceden por reducción al absurdo, sin haber asegurado que el uso de este método de prueba es paraconsistentemente aceptable en este contexto. Finalmente, las extensiones de *LP* que podrían servir como matemática subyacente para una teoría de conjuntos ingenua no se reducen a las *LP* mínimamente inconsistentes. En Verdée (2013) y Omori (2015) se presentan teorías de conjuntos ingenuas basadas en extensiones de *LP* que no están en el alcance de los resultados de Thomas.

No obstante, incluso concediéndole a Thomas toda la maquinaria formal requerida para sus pruebas e ignorando *LP**-NSs como las de Verdée y Omori, uno no tiene por qué concluir que la *LP*-matemática, y mucho menos la matemática inconsistente, está igual de limitada que *LP**-NS. La opinión contraria parece estar basada en un argumento del siguiente tipo:

[3] Aunque la ganancia podría no ser mucha. La igualdad definida a la manera usual suele conducir, en NS, a cierto tipo de trivialidad, pues es posible probar $\forall x \forall y(x=y)$.

(1) Si una teoría de conjuntos *S* basada en una lógica $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-*S*, no logra recuperar (al menos una parte significativa de) cierta teoría matemática o construcción clásica, *LC*-*M*, o es suficientemente trivial, entonces $\mathcal{L}$-*S* no es digna de ser considerada.

(2) Si $\mathcal{L}$-*S* no es digna de ser considerada, la $\mathcal{L}$-matemática tampoco es digna de ser considerada.

(3) LP^*-NS o bien falla en recuperar los números naturales (y otros objetos clásicos) o es suficientemente trivial.

(4) LP^*-NS no es digna de ser considerada.

(5) Por tanto, La LP^*-matemática tampoco es digna de ser considerada.

La premisa (1) tiene cierta aceptación entre los teóricos de la paraconsistencia. Priest dice, por ejemplo: "Una condición mínima de adecuación para una teoría paraconsistente de conjuntos parecería ser que podamos obtener de ella por lo menos una parte decente de la teoría estándar, ortodoxa, de conjuntos." (Priest 2006: 248) Nótese que hay una premisa similar a (1) subyacente al trabajo de Thomas: puesto que LP^*-NS no puede reproducir "ningún fragmento interesante de la matemática clásica", LP^*-NS no es una buena base para la matemática. ¿Cómo evitar la pendiente resbaladiza que llevaría de las limitaciones de LP^*-NS a desechar toda la LP^*-matemática?

La primera opción sería rechazar la idea de que una teoría matemática no clásica NC$\mathcal{L}$-T tenga que recuperar, reconstruir o reproducir partes significativas de su contraparte clásica, *LC*-T, pues la teoría no clásica puede o bien generalizar la teoría clásica o tratar de un dominio incomparable al de ésta. En el caso de teoría de conjuntos, la teoría paraconsistente, al considerar objetos como los conjuntos de Russell, podría o bien estar ampliando el dominio de investigación o tratando de un dominio diferente. En cualquier caso, no es claro que la teoría paraconsistente tenga que recuperar teoremas de las teorías clásicas de conjuntos, y ya no digamos "una parte decente" de éstos, como pide Priest. Recuperar la matemática clásica tiene, por supuesto, el atractivo de la conservatividad, pero la apelación a la conservatividad, si no es una petición de principio, sólo desplaza la cuestión: ¿Por qué una teoría tendría que ser conservativa con respecto a otra teoría a la cual generaliza o de cuyo dominio de investigación se separa?

Quizá una $\mathcal{L}$-teoría de conjuntos no clásica no necesariamente tenga que recuperar, reconstruir o reproducir partes significativas de la matemática clásica, pero quizá sí de otras teorías matemáticas basadas en $\mathcal{L}$. El argumento de antes, con la premisa (1) modificada

(1*) Si una teoría de conjuntos *S* basada en una lógica $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-*S*, no logra recuperar (al menos una parte significativa de) otras $\mathcal{L}$-teorías matemáticas, $\mathcal{L}$-*M*, o es suficientemente trivial, entonces $\mathcal{L}$-*S* no es digna de ser considerada.

funcionaría prácticamente igual. ¿Qué podría objetarse ahora, si ya se eliminó la conexión problemática entre una teoría de conjuntos no clásica y la matemática clásica? Sigue habiendo una conexión problemática que, sin embargo, lógicos clásicos y no clásicos por igual dan por sentada: una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos ocupa un lugar privilegiado en la $\mathscr{L}$-matemática. Así, por ejemplo, dice Verdée (2013: 108):

> Asumo que idealmente uno preferiría una teoría de conjuntos (…) con fuerza matemática (…) [tal que] uno debería ser capaz de traducir la mayoría de la matemática a la teoría de conjuntos. Esto significa, por ejemplo, que uno debería ser capaz de expresar todos los teoremas interesantes de la teoría de números complejos dentro de la teoría de conjuntos. Esto puede sonar poco realista, pero es generalmente aceptado que la mayoría de la matemática clásica puede reducirse a la teoría de conjuntos ZFC clásica.

Y entonces resulta que la premisa más problemática es en realidad (2):

(2) Si $\mathscr{L}$-*S* no es digna de ser considerada, la $\mathscr{L}$-matemática tampoco es digna de ser considerada.

Sin embargo, no está claro que una teoría de conjuntos ocupe un lugar privilegiado en la matemática en general de manera tal que un problema en la $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos constituya necesariamente un problema para la $\mathscr{L}$-matemática. Pero incluso suponiendo que lo tenga, faltaría aclarar en qué consistiría dicho carácter especial. Mientras esto no se haga, no es claro que resultados limitativos como los de Thomas para *LP**-NS se traduzcan *ipso facto* en limitaciones para la *LP**-matemática y mucho menos para la matemática inconsistente en general.

Así, la valoración del impacto de resultados limitativos para una teoría de conjuntos sobre la matemática en general depende en buena medida de una postura acerca del lugar que aquella tenga en ésta. Sin pretender ser exhaustivo ni atribuirle ninguna de las posturas a individuos en particular para no distraerme con cuestiones exegéticas, presento aquí algunas posturas:

(S-M1) Toda la $\mathscr{L}$-matemática debería ser reducida a (alguna) $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos. De acuerdo con posturas como ésta, todos los objetos matemáticos son en última instancia conjuntos.

(S-M2) Una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos es una entre varias $\mathscr{L}$-teorías matemáticas, pero debería ser capaz de reconstruir toda la $\mathscr{L}$-matemática. Según esta postura, no es necesario que todos los objetos matemáticos sean conjuntos, pero la(s) teoría(s) de conjuntos son *sui generis* de manera tal que ella(s) sirve(n) para expresar teorías acerca de otros objetos matemáticos.

(S-M3) Una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos debería ser capaz de reducir o reconstruir toda la $\mathscr{L}$-matemática elemental –donde 'matemática elemental' se refiere, digamos, a la matemática que se enseña en la primera mitad de una licenciatura en matemática. Hay que hacer dos anotaciones con respecto a esta postura. Primero, hay dos versiones de la misma, que son como (S-M1) y (S-M2) pero restringidas a la matemática elemental: según la primera, que es reduccionista, todos los objetos de la matemática elemental son conjuntos; de acuerdo con la segunda, la(s) teoría(s) de conjuntos son sólo sui generis con respecto a la matemática elemental. Nótese que esta postura es fuertemente contextual, pues incluso suponiendo que la enseñanza superior de la matemática es más o menos uniforme alrededor del mundo en un momento dado, qué cuenta como "matemática elemental" sí que cambia diacrónicamente.

(S-M4) En principio, una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos es una entre varias $\mathscr{L}$-teorías matemáticas, pero si tuviera capacidades expresivas o inferenciales especiales sobre el resto de las $\mathscr{L}$-teorías matemáticas, deberían ser usados. Aquí no es necesario ni que todos los objetos matemáticos sean conjuntos ni que la teoría de conjuntos sea *sui generis* pero, en caso de que lo fuera, esto debería ser aprovechado para unificación conceptual, por ejemplo.

(S-M5) Una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos es sólo una entre varias $\mathscr{L}$-teorías matemáticas. Según esta postura no hay mayor razón para pensar que una teoría de conjuntos tenga un rol fundacional especial sobre, digamos, la geometría, la aritmética o cualquier otra rama de la matemática. De hecho, el proyecto mismo de fundamentación, incluso en las versiones más débiles de unificación conceptual, no tendría mayor importancia matemática.

Este recuento es útil para notar que no todos los resultados limitativos para una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos se traducen en limitaciones para la $\mathscr{L}$-matemática. En el escenario (S-M1), un resultado limitativo para su $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos representativa sí significaría una limitación igual para el resto de la $\mathscr{L}$-matemática, pues todos los objetos matemáticos son en última instancia conjuntos. Aunque el impacto no es tan devastador en (S-M2) y (S-M3), sí es más allá de lo deseable: la $\mathscr{L}$-matemática sería deficiente a causa de las limitaciones de su teoría matemática principal. Pero la situación es diferente para (S-M4) y (S-M5). En estos escenarios, un resultado limitativo para una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos sería un resultado entre otros.

Por supuesto, cada una de las opciones requiere ser argumentada. En particular, en opciones como (S-M4) y (S-M5) hay que ofrecer una explicación convincente de por qué la casi trivialidad de una teoría de conjuntos sería un resultado entre muchos otros, cuando tal casi trivialidad está muy lejos de las motivaciones ingenuas que motivaron ese otro tipo de teorías en primer lugar. Aquí sólo he querido mostrar que los resultados de Thomas están lejos de haber mostrado una limitación para toda la *LP**-matemática.

Conclusiones

En este trabajo abordé la cuestión de cuáles serían las consecuencias conceptuales y filosóficas para una $\mathscr{L}$-matemática de resultados limitativos para una $\mathscr{L}$-teoría de conjuntos, donde $\mathscr{L}$ es una lógica dada, especialmente una no clásica. Por mor de la concreción, me concentré en la evaluación filosófica de los resultados limitativos probados por Morgan Thomas para la teoría ingenua de conjuntos basada en la lógica *LP* y en otras lógicas relacionadas. A primera vista, dichos resultados parecerían golpes duros contra los prospectos de hacer matemática inconsistente o, por lo menos, matemática basada en *LP* y lógicas relacionadas.

Después de presentar los preliminares lógicos –algunas propiedades importantes de la lógica *LP* y de las *LP* mínimamente inconsistentes– y de la teoría ingenua de conjuntos necesarios para el resto del trabajo, presenté los resultados de Thomas para luego evaluarlos lógica y matemáticamente, pero sobre todo filosóficamente. Presenté algunas posturas acerca del lugar de una teoría de conjuntos en la matemática; según algunas, la teoría de conjuntos es la teoría matemática más importante, mientras que para otras es una más entre las teorías matemáticas. Dependiendo de cuál que sea el lugar que uno concibe para la teoría de conjuntos en la matemática en general, resultados limitativos para aquélla tendrán diferentes implicaciones para ésta.

Referencias

Crabbé, Marcel (2011): "Reassurance for the logic of paradox", *Review of Symbolic Logic* 4(3): 479–485.

González Asenjo, Florencio (1966): "A calculus of antinomies", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 7(1): 103–105.

Leisenring, Albert C. (1969): *Mathematical Logic and Hilbert's ε Symbol*, Londres: MacDonald.

Omori, Hitoshi (2015): "Remarks on naïve set theory based on LP", *Review of Symbolic Logic* 8(2): 279-295.

Priest, Graham (1979): "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic* 8: 219–241.

Priest, Graham (1991): "Minimally inconsistent LP", *Studia Logica* 50(2): 321–331.

Priest, Graham (2006): *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*, segunda edición, Oxford: Oxford University Press.

Restall, Greg (1992): "A note on naïve set theory in LP", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 33(3): 422–432.

Routley, Richard (1980): *Exploring Meinong's Jungle and Beyond. An Investigation of Noneism and the Theory of Items*, Canberra: Research School of Social Sciences, Australian National University.

Thomas, Nick (2014): "Expressive limitations of naïve set theory based in LP and minimally inconsistent LP", *Review of Symbolic Logic* 7(2): 341-350.

Verdée, Peter (2013): "Strong, universal and provably non-trivial set theory by means of adaptive logic", *Logic Journal of the IGPL* 21(1): 108-125.

Weber, Zach (2013): “Notes on inconsistent set theory”, en Koji Tanaka *et al*., eds., *Paraconsistency: Logic and Applications*, Dordrecht: Springer, pp. 315-328.

[†] Este trabajo fue escrito gracias al financiamiento de los proyectos PAPIIT IA401015 “Tras las consecuencias. Una visión universalista de la lógica (I) y Conacyt CCB 2011 166502 “Aspectos filosóficos de la modalidad”. Versiones previas de este trabajo fueron presentadas en el Taller “20 Years of *Inconsistent Mathematics*” (Estambul, junio de 2015) y en la Cuarta Escuela de Lógica y Conjuntos (Ciudad de México, diciembre de 2015). Agradezco a los organizadores de ambos eventos por sus invitaciones y a la audiencia por las discusiones, especialmente a Diderik Batens, David Meza Alcántara, Maarten McKubre-Jordens, Favio Miranda y Hitoshi Omori, y a Elisángela Ramírez Cámara por la corrección de varias infelicidades lingüísticas.