Redes de Sistemas de Visitas Cíclicas: Estabilidad, Aproximación y Simulación

Universidad Autónoma Metropolitana

Carlos E. Martinez Rodriguez

9 de Febrero de 2012

Introducción:Los Sistemas de Visitas

- Sistema de Visitas (*Polling Systems*):

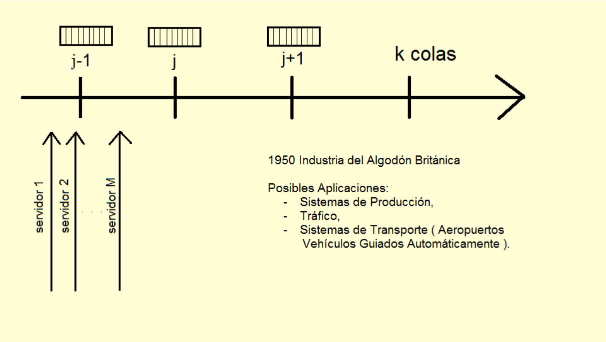

Figura : Sistema de Visitas

Descripción de los Sistema de Visitas

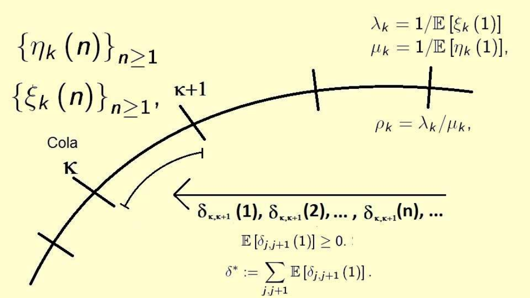

Figura : Sistema de Visitas Cíclicas

Modelo de flujo

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.
El estado del sistema al tiempo t es:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X es una estado Markoviano para el modelo de visitas, que evoluciona en el espacio de estados:
$\mathtt{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Modelo de flujo

Dado una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Además, sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse de la cola k.
Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right)$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$.

Modelo de Flujo

Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**. El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0, \tag{3}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \overline{T}_{m,k}(\cdot) \tag{4}$$

es no decreciente, para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

Teorema de Estabilidad

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^{0}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t, \tag{5}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde se cumplen los siguientes supuestos

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$\begin{aligned} P(\xi_k(1) \geq x) &> 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (6)\\ P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) &\geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \quad (7)\\ \int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 & \quad (8)\end{aligned}$$

En [2] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema de Estabilidad

Teorema

Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:

i) *Para alguna constante* κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\overline{lim}_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p \tag{9}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

Teorema de Estabilidad

Teorema

ii) *Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r \tag{10}$$

para $r=1,\ldots,p$ *y* $k=1,\ldots,K$.

iii) *El primer momento converge con razón* t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{11}$$

Teorema de Estabilidad

Teorema

iv) *Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:*

$$lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{12}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema

i) *Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (2.1) se cumple.*

Simulación

Consideremos el sistema de visitas conformado por las colas Q_1, Q_2, Q_3 de capacidad infinita de almacenamiento, un sólo servidor que las visita para dar servicio de manera cíclica, además la política de servicio con la cual atiende el servidor es de tipo exhaustiva. Finalmente se está asumiendo que los tiempos de traslado entre colas se distribuyen exponencialmente.

Se hará uso de la simulación para determinar los tiempos de espera promedio en cada una de las colas, los tiempos promedio de intervisita en cada una de las colas, es decir, los tiempos que hay entre la partida y la llegada del próximo servidor, así como el primer y segundo momento.

Con información sobre los procesos de llegada, de servicio y de traslado es posible encontrar expresiones cerradas para las medidas de desempeño del sistema arriba mencionadas, de acuerdo a las siguientes ecuaciones.

Casa abierta al tiempo

Simulación[5]

$$\mathbb{E}W_i = \frac{\mathbb{E}I_i^2}{2\mathbb{E}I_i} + \frac{\lambda_i \mu_i^{(2)}}{2\left(1-\rho_i\right)} \tag{13}$$

donde

$$\mathbb{E}I_i = \frac{\left(1-\rho_i\right) r}{\left(1-\rho\right)} \tag{14}$$

y

$$\mathbb{E}I_i^2 = r_{i-1}^2 - \left(r_{i-1}^{(1)}\right)^2 + \frac{1-\rho_i}{\rho_i} \sum_{i \neq j, j=1}^{N} r_{ij} + \left(\mathbb{E}I_i\right)^2 \tag{15}$$

r_{ij} se define como el intervalo de tiempo entre instantes sucesivos cuando el servidor abandona la cola $i-1$ y la cola i.

Simulación

El conjunto $\{r_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, N\}$ se calcula resolviendo el sistema de N^2 ecuaciones lineales
para $j < i$

$$r_{ij} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}\left(\sum_{m=i+1}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{i-1} r_{jm}\right), \tag{16}$$

para $j > i$

$$r_{ij} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}\left(\sum_{m=i+1}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{i-1} r_{jm}\right), \tag{17}$$

para $j = i$

$$r_{ij} = \frac{r_{i-1}^{(2)}}{(1-\rho_i)^2} + \frac{\lambda_i b_i^{(2)} \mathbb{E} I_i}{(1-\rho_i)^3} + \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \sum_{j=1, i \neq j}^{N} r_{ij} \tag{18}$$

Casa abierta al tiempo

Se realizó la simulación de un sistema de colas cíclicas con las siguientes características:

- Los procesos de arribos se comportan conforme a un proceso poisson con razón $\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$, para las colas 1,2 y 3 respectivamente.

- Los tiempos de servicio para cada una de las colas se distribuyen exponencialmente con media $1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

- Los tiempos de traslados entre las colas se distribuyen exponencialmente con media $1, 2$ y 3.

Los resultados son los siguientes:

Bibliografía

- D. Down, On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, Vol. 35, pp 925-935, 1998.
- Jim G. Dai and Sean P. Meyn, Stability and convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, November 1995.
- Jean G. Dai, On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, Vol. 5, No. 1, Feb 1995, pp. 49-77.
- Jim G. Dai and G. Weiss, 1996, Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, Vol. 21, No. 1.

Casa abierta al tiempo

- Sean P. Meyn, Transience of Multiclass Queueing Networks via fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 4, nov. 1995, pp.946-957.
- Christine Fricker and M.R. Jaïbi, Stability of multi-server polling models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Enero 1998.
- Christine Fricker and M.R. Jaïbi, Monoticity and Stability of Periodic Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.
- Felisa J. Vazquez, Lourdes Zubieta, Ghost Simulation Model for the Optimization of an Urban Subway System, Discrete Dynamic System: Theory and Applications, 15,207-235, 2005.
- Roubos Alex, Polling systems and their Applications, vrije Universiteit amsterdam, 2007.

Casa abierta al tiempo