Teorema de Medida Producto

Carlos E Martinez Rodriguez

3 de diciembre de 2010

Uniforme y Binomial

Ejemplo

Sea X variable aleatoria, tal que $X \sim U(0,1)$, si $X = x$, se lanza una moneda con probabilidad x de obtener cara. Esta se lanza de manera independiente n veces. Si definimos una nueva variable aleatoria como el número de caras obtenidas en esos n lanzamientos, encontrar la probabilidad de haber obtenido exactamente k caras.

Sea Y la variable aleatoria definida como el número de caras obtenidas, entonces se busca encontrar $\mathbb{P}[Y = k]$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Entonces sea $\Omega_1 = [0,1]$ con $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}([0,1])$ y $P_X(A) = \int_A dx$ la medida de lebesgue de A, para $A \in \mathcal{F}$.

Dado $x \in \Omega_1$, se define $P(X,B) = P[Y \in B|X = x]$, para $B \in \mathcal{F}_2$, donde $\Omega_2 = \{0,1,2,\ldots,k\}$ con $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$. Para $x_1 \in \Omega_1$ se tiene que $P[\text{cara}|X = x] = x$ y por lo tanto $P[\text{águila}|X = x] = 1 - x$, entonces

$$\begin{aligned} P(X,B) &= P[Y \in B|X = x] \\ &= \sum_{x \in B} P[Y = B|X = x] \\ &= \sum_{x \in B} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Entonces $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = [0,1] \times \{1,2,\ldots,n\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, entonces por el teorema de Medida Producto, existe una única medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A \times B) = \int_A P(x, B)\, P_1(dx_1) = \int_A P(x, B)\, dx \\
&= \int_A \sum_{x \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx \\
&= \sum_{x \in B} \int_A \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx \\
&= \sum_{x \in B} \binom{n}{k} \int_A x^k (1-x)^{n-k}\, dx
\end{aligned}
$$

Sean las variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$, dadas por $X(x,y) = x$ y $Y(x,y) = y$. Si además consideramos $A = [0,1]$, entonces

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{x \in B} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \int_{[0,1]} x^k (1-x)^{n-k} \, dx$$

Si hacemos $\alpha = k+1 \Rightarrow k = \alpha - 1$ y $\beta = n-k+1 \Rightarrow n-k = \beta - 1$, por tanto $\alpha + \beta = n+2$, retomando

$$\begin{aligned} &= \sum_{x \in B} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \int_{[0,1]} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx \\ &= \sum_{k \in B} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} Be(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \\ &= Be(k+1, n-k+1) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Ahora bien, recordemos que buscamos la probabilidad de que $Y = k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\mathbb{P}[\Omega_1 \times \{k\}] = \mathbb{P}[Y \in \{k\}] = \mathbb{P}[Y = k] = \frac{1}{n+1}$$

Sucesión de Uniformes

Ejemplo

Sea X_1 una variable aleatoria que se distribuye de manera uniforme en el intevalo $(0,1)$, es decir, $X \sim U(0,1)$; si $X_1 = x_1$, sea X_2 variable aleatoria que se distribuye de manera uniforme en el intevalo $(0, x_1)$, procediendo de manera sucesiva se tiene que la $k-$ésima variable aleatoria así obtenida se distribuye de manera uniforme en el intevalo $(0, x_{k-1})$, es decir, $X_k \sim U(0, x_{k-1})$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Encontremos la distribución conjunta para el caso $n = 2$ y $n = 3$.

Para el caso $n = 2$:
Sean $\Omega_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y sea $P_1 = \text{Medida de Lebesgue}$, es decir, si $A \in \mathcal{F}_1, P1(A) = \int_A dx$.

Entonces, dado $x_1 \in (0,1)$, sea $P(x_1, B)$ definida en el espacio $(\Omega_2 = \mathbb{R}, \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, medida uniformemente $\sigma-$finita, tal que si $B \in \mathcal{F}_2$, entonces $P(x_1, B)$ es una función Borel medible en x_1; esta función está definida por

$$P(x_1, B) := \int_{B \cap (0, x_1)} \frac{1}{x_1} P_1(dx_2) \tag{1}$$

$$= \int_{B \cap (0, x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 = \frac{1}{x_1} m(B \cap (0, x_1)) \tag{2}$$

Sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, y sean $\xi, \omega \in (0,1)$. Definamos las variables aleatorias X_1, X_2 definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ por $X_i(x_1, x_2) = x_i$, para $i = 1, 2$. También defínanse $A = (0, \omega)$ y $B = (0, \xi)$, entonces, el teorema de la medida producto dice que existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que si $C \in \mathcal{F}$, con $C = A \times B$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[C\right] &= \mathbb{P}\left[A \times B\right] = \mathbb{P}\left[X_1 \in A, X_2 \in B\right] \\
&= \mathbb{P}\left[(0,\omega) \times (0,\xi)\right] \\
&= \int_{(0,\omega)} P\left(x_1, (0,\xi)\right) P_1\left(dx_1\right) \\
&= \int_{(0,\omega)} \frac{1}{x_1} m\left((0,\xi) \cap (0,x_1)\right) dx_1
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\mathbb{P}\left[(0,\omega) \times (0,\xi)\right] = \int_{(0,\omega)} \frac{1}{x_1} m\left((0,\xi) \cap (0,x_1)\right) dx_1 \tag{3}
$$

Se tienen dos casos

(a) $\omega < \xi$. Entonces la ecuación (3) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(3) &= \int_{(0,\omega)}\int_{(0,x_1)}\frac{1}{x_1}dx_2dx_1 = \int_{(0,\omega)}\frac{1}{x_1}(x_1)\,dx_1\\ &= \omega\end{aligned}$$

(b) Ahora supongamos $\omega \geq \xi$, entonces

$$\begin{aligned}(3) &= \int_{(0,\omega)}\int_{(0,x_1)}\frac{1}{x_1}dx_2dx_1 + \int_{(\xi,\omega)}\int_{(0,x_1)}\frac{1}{x_1}dx_2dx_1\\ &= \int_{(0,\omega)}dx_1 + \int_{(\xi,\omega)}\frac{\xi}{x_1}dx_1\\ &= \xi + \xi\ln\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left[(0,\omega)\times(0,\xi)\right]=\begin{cases}\omega & \omega<\xi\\ \xi+\xi\ln\left(\frac{\omega}{\xi}\right) & \omega\geq\xi\end{cases}\tag{4}$$

Ahora veamos el caso $n=3$:
Se tiene lo mismo que antes, pero ahora si $X_2=x_2$, entonces se define una nueva variable aleatoria X_3 que se distribuye de manera uniforme en el intervalo $(0,x_2)$; además esta nueva variable aleatoria está definida en $\Omega_3=\Omega_1$ y $\mathcal{F}_3=\mathcal{F}_1$. Dado $B\in\mathcal{F}_3$, se define $P\left(x_1,x_2,B\right)\frac{1}{x_2}=\int_{B\cap(0,x_2)}dx_3$. Ahora nuestro espacio producto es $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3$ y $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_3$.

Análogamente que l caso $n = 2$, se definen las variables aleatorias: $X_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ para $i = 1, 2, 3$ y sea $\mathbb{P}$ la medida de probabilidad inducida por $P_1, P(x_1, \cdot)$ y $P(x_1, x_2, \cdot)$, tal que si $D = A \times B \times C$, está definida por

$$\mathbb{P}(D) = \int_A dx_1 \int_{B \cap (0, x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{C \cap (0, x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \qquad (5)$$

donde si $\omega, \xi, \eta \in (0, 1)$ con $A = (0, \omega)$, $B = (0, \xi)$ y $C = (0, \eta)$, la ecuación (5) queda de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(D) = \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi) \cap (0, x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,\eta) \cap (0, x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \qquad (6)$$

Dado que $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (0,x_1)$ y $x_3 \in (0,x_2)$, entonces se tiene que:

$$m\left((0,\eta) \cap (0,x_2)\right) = \begin{cases} x_2 & \xi < \eta \\ x_2 \mathbb{1}_{x_2 \in (0,\eta)} + \eta \mathbb{1}_{x_2 \in (\eta,\xi)} & \xi \geq \eta \end{cases} \tag{7}$$

$$m\left((0,\xi) \cap (0,x_1)\right) = \begin{cases} x_1 & \omega < \xi \\ x_1 \mathbb{1}_{x_1 \in (0,\xi)} + \xi \mathbb{1}_{x_1 \in (\xi,\omega)} & \omega \geq \xi \end{cases} \tag{8}$$

Se tienen los siguientes posibles casos:

(i) Si $\omega < \xi < \eta$, entonces la ecuación (6) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(6) &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \\ &= \int_{(0,\omega)} dx_1 = \omega\end{aligned}$$

(ii) Si $\omega < \eta < \xi$, entonces

$$
\begin{aligned}
(6) \quad &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \left[\frac{1}{x_2}\left(x_2 \mathbb{1}_{x_2\in(0,\eta)} + \eta \mathbb{1}_{x_2\in(\eta,\xi)}\right)\right] \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\eta)} \frac{x_1}{x_1} \left[\frac{x_2}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(0,\eta)} + \frac{\eta}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(\eta,\xi)}\right] dx_2 \\
&+ \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(\eta,\xi)} \frac{x_1}{x_1} \left[\frac{x_2}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(0,\eta)} + \frac{\eta}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(\eta,\xi)}\right] dx_2 \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\eta)} dx_2 + \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(\eta,\xi)} \frac{\eta}{x_2} dx_2 \\
&= \omega\eta + \omega\eta \ln\left(\xi/\eta\right)
\end{aligned}
$$

(iii) $\xi < \omega < \eta$:

$$\begin{aligned}
(6) &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \left[\mathbb{1}_{x_1\in(0,\xi)} + \frac{\xi}{x_1} \mathbb{1}_{x_1\in(\xi,\omega)} \right] \\
&= \int_{(0,\xi)} dx_1 + \int_{(\xi,\omega)} \frac{\xi}{x_1} dx_1 \\
&= \xi + \xi \ln(\xi/\omega)
\end{aligned}$$

(iv) $\xi < \eta < \omega$:

$$\begin{aligned}
(6) &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,\eta)\cap(0,x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \left[\mathbb{1}_{x_1 \in (0,\xi)} + \frac{\xi}{x_1} \mathbb{1}_{x_1 \in (\xi,\omega)} \right] \\
&= \xi + \xi \ln(\xi/\omega)
\end{aligned}$$

(v) $\eta < \xi < \omega$:

$$
\begin{aligned}
(6) \quad &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,\eta)\cap(0,x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \left[\mathbb{1}_{x_2\in(0,\eta)} + \frac{\eta}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(\eta,\xi)} \right] \\
&= \int_{(0,\omega)} \left[\int_{(0,\eta)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 + \int_{(\eta,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{\eta}{x_1 x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&= \int_{(0,\xi)} \frac{x_1}{x_1} \left[\int_{(0,\eta)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 + \int_{(\eta,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{\eta}{x_1 x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&+ \int_{(\xi,\eta)} \frac{\xi}{x_1} \left[\int_{(0,\eta)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 + \int_{(\eta,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{\eta}{x_1 x_2} dx_2 \right] dx_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(0,\xi)} \int_{(0,\eta)} dx_2 dx_1 + \int_{(0,\xi)} \int_{(\eta,\xi)} \frac{\eta}{x_2} dx_2 dx_1 \\
&= \xi\eta + \int_{(0,\xi)} \eta \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right) dx_1 \\
&= \xi\eta + \xi\eta \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right)
\end{aligned}
$$

(vi) $\eta < \omega < \xi$:

$$
\begin{aligned}
(6) &= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \int_{(0,\eta)\cap(0,x_2)} \frac{1}{x_2} dx_3 \\
&= \int_{(0,\omega)} dx_1 \int_{(0,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 \left[\mathbb{1}_{x_2\in(0,\eta)} + \frac{\eta}{x_2} \mathbb{1}_{x_2\in(\eta,\xi)} \right] \\
&= \int_{(0,\omega)} \left[\int_{(0,\eta)\cap(0,x_1)} \frac{1}{x_1} dx_2 + \int_{(\eta,\xi)\cap(0,x_1)} \frac{\eta}{x_1 x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&= \int_{(0,\omega)} \left[\int_{(0,\eta)} \frac{1}{x_1} dx_2 + \int_{(\eta,\xi)} \frac{\eta}{x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&= \int_{(0,\omega)} \left[\frac{x_1 \eta}{x_1} + \frac{x_1 \eta}{x_1} \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \right] dx_1 \\
&= \omega\eta + \omega\eta \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right)
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left[D\right] = \begin{cases} \omega & \omega < \xi < \eta \\ \omega\eta + \omega\eta \ln\left(\xi/\eta\right) & \omega < \eta < \xi \\ \xi + \xi \ln\left(\xi/\omega\right) & \xi < \omega < \eta \\ \xi + \xi \ln\left(\xi/\omega\right) & \xi < \eta < \omega \\ \xi\eta + \xi\eta \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right) & \eta < \xi < \omega \\ \omega\eta + \omega\eta \ln\left(\frac{\xi}{\eta}\right) & \eta < \omega < \xi \end{cases}$$

Modelos Jerárquicos

Ejemplo

Un insecto deposita una cantidad de huevos, cada uno con probabilidad de sobrevivir igual a p. ¿En promedio cuantos huevos logran sobrevivir?

- Supongamos que la probabilidad de sobrevivir de cada huevo es independiente de los restantes.
- La cantidad de huevos depositados es una variable aleatoria con distribución *Poisson de parámetro* λ.
- *Sea* $Y =$*número de huevos que sobreviven.*
- *Sea* $X =$*número de huevos depositados.*

La cantidad de huevos que sobreviven, dado el número depositado tiene una distribución binomial con parametro p, dado el valor que toma X, es decir, si $X = x$, se tiene una nueva variable aleatoria Y con

$$\begin{aligned} Y &\sim Bin(x, p) \text{ y} \\ X &\sim \mathcal{P}_o(\lambda) \end{aligned}$$

En términos del Teorema de la medida producto se tiene lo siguiente

$$\Omega_1 = \{0, 1, 2, \ldots, \}, \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}o(\Omega_1) \text{ con}$$
$$P_1(A) = \sum_{x \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \text{ para } A \in \mathcal{F}_1$$

Entonces se tiene que $\Omega_2 = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ y $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}o\left(\Omega_2\right)$; si $B \in \mathcal{F}_2$ se define la medida

$$\mathbb{P}\left(x, B\right) = \sum_{y \in B} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) p^{y} \left(1 - p\right)^{x-y} \text{ con}$$

Si $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, entonces existe una única medida $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que si $C = A \times B$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \int_A P(x,B)\, P_1(dx) \\
&= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B, y<x} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) p^y (1-p)^{x-y} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right) \\
&= \sum_{x\in A}\sum_{y=0}^{x} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) p^y (1-p)^{x-y} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)
\end{aligned}
$$

Sean las variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ como las proyecciones, es decir, $X(x,y) = x$ y $Y(x,y) = y$, entonces si hacemos $B = \{y\}$ entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A \times \{y\}\right) &= \sum_{x \in A} \binom{x}{y} p^{y} \left(1-p\right)^{x-y} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\right)\\
&= \sum_{x \in A} \binom{x}{y} p^{y} \left(1-p\right)^{x-y} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\right)\\
&= \sum_{x \in A} \frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \left(\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda} p^{y}}{y!}\right)\\
&= \frac{\lambda^{y} e^{-\lambda} p^{y}}{y!} \sum_{x \in A} \frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \lambda^{x-y}\\
&= \frac{\lambda^{y} e^{-\lambda} p^{y}}{y!} \sum_{x-y=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \lambda^{x-y}
\end{aligned}
$$

Si ahora tomamos $A = \Omega_1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Omega_1 \times \{y\}\right) &= \mathbb{P}\left[Y = y\right] \\ &= \frac{(\lambda p)^y e^{-\lambda}}{y!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p}\end{aligned}$$

es decir, se tiene que

$$Y \sim Po\left(\lambda p\right)$$

y por lo tanto, $\mathbb{E}\left[Y\right] = \lambda p$

puesto que

$$\begin{aligned} e^{\lambda(1-p)} &= \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z (1-p)^z}{z!} \Rightarrow \\ 1 &= \sum_{z=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda (1-p))^z}{z!} \end{aligned}$$

Consideremos la colección de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, tales que cada X_i está definida en $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, Q_i)$ espacio de medida, donde $\Omega_i = \Omega$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ y $Q_i = Q$, entonces se tiene que $\Omega = \Omega^\infty$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\infty$.

Defínanse las probabilidades de transición $P_1 = \pi$ y $P(\cdot, B) = Q(B|\cdot)$, entonces se tiene que existe una única medida inducida por $P_1, P(x_1, \cdot), P(x_1, x_2, \ldots, \cdot), \ldots, P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \cdot)$ dada por

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \\
& \int_{\Omega_1} \pi(x_0) \int_{\Omega_2} P(x_0, dx_1) \\
& \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}} (x_0, x_1, \ldots, x_n) P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n) \\
= \quad & \pi(x_0) Q(x_0, x_1) Q(x_1, x_2) \cdots Q(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}
$$

Además cumple con una condición muy importante, la *Propiedad de Markov*:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[X_{n+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x\right] \\ = & \frac{P\left[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x, X_{n+1} = y\right]}{P\left[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right]} \\ = & \frac{P\left(X_0 = x_0\right) P\left(x_0, x_1\right) \cdots P\left(x, y\right)}{P\left(X_0 = x_0\right) P\left(x_0, x_1\right) \cdots P\left(x_{n-1}, x_n\right)} \\ = & P\left(x, y\right) = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = y | X_n = x\right] \end{aligned}$$

V.A. Bernoulli $\rightarrow$ Binomial

Considerense $\Omega_1 = \{0,1\}$ y $\mathcal{P}_o(\Omega_1)$ y sea

$$P_1(\{w_1\}) = \begin{cases} p, & w_1 = 1 \\ 1-p, & w_1 = 0 \end{cases}$$

Si $A_1 \in \mathcal{F}_1$, entonces $P_1(A_1) = \sum_{w_1 \in A_1} P_1(\{w_1\})$. Sea $\Omega_2 = \{0,1\}$ y $\mathcal{P}_o(\Omega_2)$ y

$$P_2(\{w_2\}) = \begin{cases} p, & w_2 = 1 \\ 1-p, & w_2 = 0 \end{cases}$$

Si $A_2 \in \mathcal{F}_2$, entonces $P_2(A_2) = \sum_{w_2 \in B} P_2(\{w_2\})$. Procediendo de manera sucesiva, $\Omega_n = \{0,1\}$ y $\mathcal{P}_o(\Omega_n)$ y

$$P_n(\{w_n\}) = \begin{cases} p, & w_n = 1 \\ 1-p, & w_n = 0 \end{cases}$$

Si $A_n \in \mathcal{F}_n$, entonces $P_n(A_n) = \sum_{w_n \in A_n} P_n(\{w_n\})$.

De acuerdo con el Teorema de la Medida Producto, sea $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega^{\infty}$, donde

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, \dots,), w_i = \{0, 1\}, i = 1, 2\}$$

Y $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}^{\infty}$, por el Teorema de Ionescu-Tulcea se tiene que existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $\Omega, \mathcal{F}$, tal que si $A = A_1 \times A_2 \times \cdots, \times A_n$, entonces $\mathbb{P}(A) = \prod_{j=1}^{n} P_j(A_j)$.
Consideremos las proyecciones:

$$X_j(w_1, w_2, \dots, w_n) = w_j = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1-p \\ 1 & \text{con probabilidad } p \end{cases}$$

Para $\omega \in \Omega$ y si $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] &= \prod_{j=1}^{n} P[X_j = x_j] \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Sea $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, veamos que distribución tiene Y_n, para $n = 2$

$$\mathbb{P}\left[Y_2 = k\right] = \mathbb{P}\left[X_1 + X_2 = k\right]$$

como $X_j = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1-p \\ 1 & \text{con probabilidad } p \end{cases}$, entonces
$Y_n = \{0, 1, 2\}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[Y_n = 0\right] &= (1-p)^2 \\ \mathbb{P}\left[Y_n = 1\right] &= \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 \\ \mathbb{P}\left[Y_n = 2\right] &= \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \end{aligned}$$

en general se tiene que:

$$\mathbb{P}\left[Y_n = k\right] = \left(\begin{array}{c} 2 \\ k \end{array}\right) p^k \left(1-p\right)^{2-k}$$

Ahora veamos el caso de n variables aleatorias, para $k = \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left[Y_n = k\right] = \mathbb{P}\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k\right] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

es decir, $Y \sim Bin\left(n, p\right)$. Bien, ahora, que pasa cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{P}\left[Y_n = k\right] &= lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{P}\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k\right] \\ &= \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k \left(1-p\right)^{n-k} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un evento ocurra en un intervalo de tiempo $[0, t]$ es proporcional a la longitud del mismo; la probabilidad de que ocurran dos o más eventos es cercana a cero, entonces, si dividimos el intervalo en n subintervalos, por ende de longitud t/n, entonces la probabilidad de que ocurran es $1/n\left(\text{factor de proporción}\right) = \frac{t}{n}\lambda$, entonces

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda t}{n} \Rightarrow \lambda t = np \Rightarrow \text{ si } t = 1 \text{ entonces} \\ \lambda &= np \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} & lim_{n\rightarrow\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ = & \; lim_{n\rightarrow\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}} \\ = & \; lim_{n\rightarrow\infty} \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots n-k+1}{k!}\right) \left(\frac{\lambda^k}{n^k}\right) \\ & \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k}} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

es decir, $Y_k \sim \mathcal{P}_o(\lambda)$