

Un Modelo Probabilista para un Sistema de Transporte Colectivo

XLIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
San Luis Potosí, SLP.

Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Carlos E. Martinez Rodriguez

Asesores: Dr. Raúl Montes de Oca Machorro y
Dra Patricia Saavedra Barrera

Doctorado en Matemáticas, UAM-Iztapalapa
Octubre, 2011

Datos Relevantes

Notación

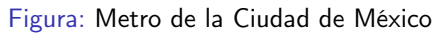
Modelo Global

Supuestos

Proposiciones

Modelo Fantasma

Conclusiones



Datos Relevantes

- ▶ El metro de la Ciudad de México es uno de los sistemas más grandes del mundo en cuanto al número de pasajeros que transporta, como a la longitud del mismo.
- ▶ El metro de la Ciudad de México cuenta actualmente con 11 líneas.
- ▶ Cada línea tiene tres distintos tipos de estaciones: Terminales, Normales y de Correspondencia.
- ▶ El número de estaciones por línea es variable: la línea dos es la más grande con 24 estaciones, mientras que la línea A sólo cuenta con 10 estaciones.
- ▶ Actualmente se cuenta con 355 trenes de 6 o 9 vagones, cuya capacidad máxima de pasajeros es de 1020 y 1530 respectivamente.
- ▶ Cada línea tiene asignado en principio un número fijo de trenes: la línea 3 cuenta con 58, mientras que la línea 4 dispone solamente de 13.
- ▶ Para cada intervalo, cada línea tiene definida la frecuencia con la que circulan los trenes, es decir, la cantidad de trenes por hora.

Notación

- ▶ El metro cuenta con un total de \mathcal{L} líneas.
- ▶ Cada día se divide en s periodos de tiempo, la longitud de cada segmento es T_s y $\tau_s = T_1 + T_2 + \cdots + T_{s-1}$.
- ▶ Además cada línea del metro tiene asociada un tiempo establecido entre dos trenes consecutivos, variables de control, los cuales se denotarán por $\mu_{l,s}$. Al vector de variables de control se les denotará por $\mu = (\mu_{l,s}, l = 1, \dots, \mathcal{M}, s = 1, 2, \dots, S)$.
- ▶ El par (o, d) denotará una única sucesión de plataformas por origen-destino.
- ▶ El término $\lambda(o, d)$ es la tasa demanda para el recorrido (o, d) .
- ▶ Denotaremos por p cualquier plataforma de la l -ésima línea, L_l .
- ▶ $V_k(p)$ es el tiempo de salida del k -ésimo tren de la plataforma p .

Notación

- ▶ S_k^m es el tiempo de llegada del k -ésimo tren de la plataforma p_m .
- ▶ $\{\delta_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza conocidas.
- ▶ P_k^m es el número de pasajeros de transferencia en el k -ésimo tren de la línea m .
- ▶ $\hat{D}(p_k, p_{k+1})$ es la distancia entre las plataformas k y $k + 1$.
- ▶ v es la velocidad promedio del tren.
- ▶ $D_o(p_m, p)$ es el conjunto de los destinos a partir del origen o que requieren un transbordo de p_m a p .
- ▶ $\eta_m(\cdot)$ es el proceso de conteo de llegadas de los trenes de la línea L_m en la estación donde está ubicada la plataforma p_m .
- ▶ $N_o(\cdot)$ es un Proceso Poisson acumulado, de todas las llegadas del origen p con tiempos de llegada S_k^o .

Modelo Global

- El costo de operación promedio del sistema por día está dado por:

$$K(\bar{\mu}) = \sum_{s=1}^S k_l \frac{T_s}{\mu_{l,s}}, \quad (1)$$

donde k_l es el costo por viaje en cualquier tren de la línea L_l .

- Los pasajeros esperan en cualquier plataforma $p \in L_l$, sin importar de donde vengan, entre dos salidas de trenes consecutivos en p .
- Al total de espera se le denotará por $W_j(p)$, que es el tiempo total de espera de los pasajeros en la plataforma p de la línea L_l para tomar el j -ésimo tren, a este valor se le llamará *costo social*.
- Si $M_p(\cdot)$ denota el proceso de conteo de salida de los trenes de la plataforma en p , en un determinado intervalo de tiempo, entonces

$$F(\bar{\mu}) = K(\bar{\mu}) + \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L \sum_{p \in L_l} \mathbb{E} \left[\sum_{j=M_p(\tau_s)+1}^{M_p(\tau_s+T_s)} W_j(p) \right]. \quad (2)$$

Modelo Global

- ▶ Los procesos de llegada de los pasajeros de transferencia de la línea $L_m \neq L_l$ en la estación donde está la plataforma $p \in L_l$ ubicada, dependen de los procesos de salida en las plataformas anteriores a la plataforma de transferencia en la línea L_m , así como de posibles transferencias.
- ▶ El costo esperado de la red, $F(\mu)$, es el costo esperado de operación por día, más el tiempo de espera total acumulado de los pasajeros en las plataformas.
- ▶ Calcular directamente el gradiente del costo esperado por día puede ser altamente complicado en términos computacionales.
- ▶ Es por medio de técnicas de simulación que el cálculo de las derivadas se puede simplificar haciendo estos cálculos por plataforma, es decir, el modelo global se estudia localmente, es decir, se calculan los tiempos de espera en cada una de las plataformas.

Modelo Global

Consideremos cualquier plataforma p en una línea L_I , y supongamos que el segmento del día s se alarga al infinito, es decir, los procesos Poisson de llegada se asumen estacionarios con parámetros constantes, además las frecuencias se consideran invariantes con respecto al tiempo.

El tiempo total de espera para los pasajeros que abordan el tren j en la plataforma p se puede escribir como

$$W_j(p) = \sum_{n=N_o(V_{j-1})+1}^{N_o(V_j)} (V_j - S_n^o) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m(V_j)} P_k^{(m)} (V_j - S_k^m). \quad (3)$$

Modelo Global

Sean las plataformas $p \in L_I$ y $p_m \in L_m$ en la misma estación. Los trenes que parten de p_m en tiempos $V_k(p_m)$, corresponden a los procesos de llegada de transferencia $N_m(\cdot)$ en la plataforma $p \in L_I$ y a los pasajeros que se moverán de p_m a p .

Si $p_i \in L_I$ y $p_k \notin L_I$, entonces los procesos de salida correspondientes se asume que son independientes bajo el supuesto de no sincronización.,

Los procesos de llegada de los pasajeros en cada plataforma están compuestos por un proceso Poisson de pasajeros, que abordan desde fuera del sistema, más los que llegan de otras líneas de transferencia.

Supuestos

Suposición

Los pasajeros con destino la plataforma d , llegan al andén origen, o , conforme a un proceso Poisson con parámetro $\lambda(o, d)$. Todos los procesos de llegada Poisson son independientes entre sí e independientes de los procesos de salida de los trenes en la plataforma.

Suposición

Para cada plataforma $p \in L_I$ y para cada línea L_I , el tiempo de salida del tren en la plataforma inicial $p_1 \in L_I$, sigue la siguiente forma recursiva:

$$V_j(p_1) = V_{j-1}(p_1) + \mu_I(1 + \delta_j(p)). \quad (4)$$

Supuestos

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ y plataformas p_k y p_{k+1} ; el tiempo de salida del j -ésimo tren de la plataforma p_{k+1} está dada por

$$V_j(p_{k+1}) = V_j(p_k) + \frac{D_k(p_k, p_{k+1})}{v} + \mu_l \delta_j(p_{k+1}). \quad (5)$$

Los tiempos de llegada de los pasajeros en cualquier plataforma están completamente determinadas por las llegadas de los pasajeros, conforme a su correspondiente proceso Poisson, con intensidad $\lambda(0, d)$ y su traslado a lo largo de la red para lograr su destino.

Proposición 1

Proposición

Sea p plataforma en L_I , ambas fijas. Sea $(L_m)_{m \geq 1}$ colección de líneas con correspondencia en p . Para cada m , sea p_m la plataforma de correspondencia con la línea L_I en la estación donde está ubicada la plataforma p . Para cada p_m los tiempos de llegada entre dos trenes consecutivos están dados por $T_k(p_m) = S_k(p_m) - S_{k-1}(p_m)$, que se abreviará por $T_k^m = S_k^m - S_{k-1}^m$. El número de pasajeros de transferencia procedentes de p_m , con tiempos de llegada S_k^m , cumplen con la condición

$$\mathbb{E}[P_k^m | T_k^m] = \sum_{n=1}^L \sum_{o \in L_n} \lambda(o, d) \mu_n \{ \mathbb{E}[\eta_n(V_j)] - \mathbb{E}[\eta_n(V_{j-1})] \} \mathbb{1}_{d \in D_o(p_m, p)}. \quad (6)$$

para todo tren de la línea que hace correspondencia con la línea I en la plataforma de correspondencia al tiempo V_j , para cualquier j .

Demostración



Figura: Metro de la Ciudad de México

Sean $m \geq 1$ fija y p_m plataforma en L_m que hace correspondencia con p en la estación de transferencia donde también está ubicada la plataforma $p \in L_I$.

$$V_k(o_m) = V_k(p_m) - \frac{\hat{D}(o_m, p_m)}{v} - \mu_m \delta_k(o_m, p_m), \quad (7)$$

Se busca determinar el valor esperado del número de pasajeros que llegarán a la plataforma p_m entre dos trenes consecutivos,

$$\mathbb{E}[P_k^m(o_m, d)] = \lambda(o_m, d) \mu_m \quad (8)$$

Demostración

para todos los pasajeros que tienen como origen una plataforma en la línea L_m y un destino d que requiere hacer una transferencia de p_m a p . Sea L_m cualquier línea de correspondencia con L_l en la misma estación donde está ubicada p .

Sea o plataforma cualesquiera en L_m fija. El número de pasajeros que abordarán el j -ésimo tren de la línea L_l en la plataforma p , es el total de arribos Poisson de pasajeros que lleguen a la misma entre el $j - 1$ y el j -ésimo tren.

El total de trenes que llegan a p_m para subirse al j -ésimo tren en p se estima de la siguiente manera:

$\eta_m(V_{j-1}(p_m))$ es el número de trenes que llegan a p_m al tiempo V_{j-1} , análogamente para $\eta_m(V_j(p_m))$. Entonces el total de estos pasajeros, $\hat{P}_j^m(o, d)$ se puede estimar por:

Demostración

$$\hat{P}_j^m(o, d) = \sum_{k=\eta_m(V_{j-1}(p_m))+1}^{\eta_m(V_j(p_m))} P_k^m(o, d). \quad (9)$$

Sea $Y_j(p_m) = V_j(p_m) - V_{j-1}(p_m)$, y entonces

$$\mathbb{E} \left[\hat{P}_j^m(o, d) \mid Y_j(p) \right] = \mathbb{E} [P_k^m(o, d)] \mathbb{E} [\eta_m(V_j)],$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E} [P_j^m(o, d) \mid Y_j(p)] = \lambda(o, d) \mu_m (\mathbb{E} [\eta_m(V_j)] - \mathbb{E} [\eta_m(V_{j-1})]). \quad (10)$$

Demostración

Sea $r \geq 1$ fija, y sea L_r línea tal que L_r y L_l no tienen plataforma en común, de modo tal que la única manera de dirigirse de $o \in L_r$ a $d \in L_l$ es haciendo por lo menos un cambio de línea.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [P_j^m(o, d) | Y_j(p)] &= \lambda(o, d) \mu_m (\mathbb{E} [\eta_m(V_j)] - \mathbb{E} [\eta_m(V_{j-1})]) \\ &+ \lambda(o, d) \mu_r (\mathbb{E} [\eta_r(V_i)] - \mathbb{E} [\eta_r(V_{i-1})]).\end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga, para los pasajeros de orden superior se tiene

$$\mathbb{E} [P_j^m | Y_j(p)] = \sum_{n=1}^L \sum_{o \in L_n} \lambda(o, d) \mu_n [\mathbb{E} [\eta_n(V_i)] - \mathbb{E} [\eta_n(V_{i-1})]] \mathbb{1}_{d \in D_o(p_m, p)}.$$

con $\eta_m(V_i)$ el proceso de conteo de los trenes que llegan a la plataforma p_n .

Proposición 2

Proposición

Bajo los supuestos (5.1) y (5.2), los tiempos de salida entre dos trenes consecutivos, Y_j en la plataforma $p \in L_I$ sigue una distribución G_μ , donde $\mathbb{E}[Y_j] = \mu$, parámetro de escala de G_μ . Específicamente, si la línea está dada por la sucesión de plataformas $L_1 = (p_1, p_2, \dots, p_L)$, entonces para $q \in \{1, 2, \dots, L\}$ los tiempos de intersalida en la plataforma p_q satisfacen

$$\text{Var}[Y_j] = \mu^2 \{ \text{Var}[\delta_j(p_1)] - 2(q-1) \text{Var}[\delta_j(p)] \} \quad (11)$$

Modelo Fantasma

Recordemos las expresiones referentes tanto al modelo global del sistema de transporte colectivo (2)

$$F(\bar{\mu}) = K(\bar{\mu}) + \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L \sum_{p \in L_l} \mathbb{E} \left[\sum_{j=M_p(\tau_s)+1}^{M_p(\tau_s)+T_s} W_j(p) \right]$$

como la del tiempo total de espera de los pasajeros para abordar el tren j en la plataforma p , (3)

$$W_j(p) = \sum_{n=N_o(V_{j-1})+1}^{N_o(V_j)} (V_j - S_n^o) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m(V_j)} P_k^m (V_j - S_k^m).$$

Dada la alta interdependencia, es difícil estimar la función costo así como el cálculo de las derivadas con respecto al parámetro de control μ , recordemos que lo que se quiere es optimizar la función objetivo (2), entonces

Modelo Fantasma

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{j=M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}})+1}^{M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}}+T_{\mathbf{s}})} W_j(\mathbf{p}) \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}})+1}^{M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}}+T_{\mathbf{s}})} \sum_{n=N_{\mathbf{o}}(V_{j-1})+1}^{N_{\mathbf{o}}(V_j)} (V_j - S_n^{\mathbf{o}}) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\sum_{j=M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}})+1}^{M_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{s}}+T_{\mathbf{s}})} \sum_{m=1}^M \sum_{k=N_{\mathbf{m}}(V_{j-1})+1}^{N_{\mathbf{m}}(V_j)} P_k^{(m)} (V_j - S_k^m) \right] \end{aligned}$$

Conclusiones

1. Trabajo realizado

- ▶ Revisión exhaustiva de los artículos de Felisa ([1]) y ([2]).
- ▶ Clarificación de la notación empleada en los mismos, así como de la proposición principal.

2. Trabajo por hacer:

- ▶ Agregar restricciones de cupo en andenes,
- ▶ Colas Cíclicas;

Bibliografía



Felisa J. Vazquez, Lourdes Zubieta, Distributed Stochastic Approximation for Adaptive Frequency Allocation in Subway Networks, Proceeding of the 39^a IEEE, December, 2000.



Felisa J. Vazquez, Lourdes Zubieta, Ghost Simulation Model for the Optimization of an Urban Subway System, Discrete Dynamic System: Theory and Applications, 15,207-235, 2005.