Cálculo Diferencial: Aplicaciones de la Derivada - Primera parte

Carlos Ernesto Martinez

07 de Noviembre de 2023

Definición de Valores Extremos:

Un valor extremo de una función es un valor máximo o mínimo de la función dentro de un cierto intervalo. Formalmente, se dice que $f(x)$ tiene un *valor máximo* en $x = c$ si para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c, se cumple que $f(x) \leq f(c)$. De manera similar, $f(x)$ tiene un *valor mínimo* en $x = c$ si para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c, se cumple que $f(x) \geq f(c)$.

Definición de Puntos Críticos:

Un punto crítico de una función $f(x)$ es un valor de x en el dominio de la función donde la derivada de $f(x)$ es igual a cero o no está definida, es decir, donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Los puntos críticos pueden ser máximos, mínimos o puntos de inflexión, y son importantes para el análisis de la función.

1. Encuentre los valores extremos y puntos críticos

   (a) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x + 1$
   (b) $f(x) = -2x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$
   (c) $f(x) = 5x^2 - 2x^6 + 9x - 10$
   (d) $f(x) = x^3 - 4x^5 + 6x^2 - 5x + 3$
   (e) $f(x) = 2x^6 - 9x^4 + 7x^3 + 10x - 12$

2. Encuentre los valores extremos y puntos críticos

   (a) $f(x) = (x+3)^4(4-x)^2$
   (b) $f(x) = (2x-1)^5(6+x)^3$
   (c) $f(x) = (x-5)^2(3+x)^6$
   (d) $f(x) = (4x+2)^3(7-x)^4$
   (e) $f(x) = (-x+1)^2(8+x)^5$

3. Encuentre los valores extremos y puntos críticos

   (a) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x - 3}$
   (b) $f(x) = \sqrt{5x^2 + 7x + 2}$
   (c) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 5}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
   (e) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 8x + 3}$

4. Encuentre los valores extremos y puntos críticos

   (a) $f(x) = \frac{3x^3+5x^2+6x-3}{x^2-x-1}$
   (b) $f(x) = \frac{2x^3-6x^2+4x-2}{x^2-x-1}$
   (c) $f(x) = \frac{5x^3-3x^2+7x+2}{x^2-x-1}$
   (d) $f(x) = \frac{6x^3+4x^2-6x+3}{x^2-x-1}$
   (e) $f(x) = \frac{x^3-7x^2+3x-2}{x^2-x-1}$

5. Encuentre los valores extremos y puntos críticos

(a) $f(x) = \cos^2(3x-2)$

(b) $f(x) = \tan^2(4x-1)$

(c) $f(x) = \sec^2(2x+2)$

(d) $f(x) = \csc^2(3x-4)$

(e) $f(x) = \cot^2(5x-3)$

Teoremas Importantes

Teorema de Rolle

Dada una función $f(x)$ que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

1. Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 3]$.

   Solución: Para aplicar el Teorema de Rolle, primero verificamos que $f(x)$ sea continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Ambas condiciones se cumplen. Luego, observamos que $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$ y $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$, lo que significa que $f(1) = f(3)$. Por lo tanto, según el Teorema de Rolle, existe al menos un número c en el intervalo $(1, 3)$ donde $f'(c) = 0$, lo que implica que hay al menos una raíz en ese intervalo.

2. Encuentra un valor de c en el intervalo $[0, 2]$ para la función $f(x) = e^x - 1$ tal que $f'(c) = 1$.

   Solución: La función $f(x) = e^x - 1$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Además, $f(0) = e^0 - 1 = 0$ y $f(2) = e^2 - 1 \approx 6.39$. Como $f(0) \neq f(2)$, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Según el teorema, existe al menos un número c en el intervalo $(0, 2)$ donde $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{6.39}{2} \approx 3.195$.

3. Muestra que la función $f(x) = \sin x$ tiene al menos un valor c en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donde $f'(c) = \frac{1}{2}$.

   Solución: La función $f(x) = \sin x$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$. Observamos que $f(0) = \sin(0) = 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Como $f(0) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, aplicamos el Teorema de Rolle. Según el teorema, existe al menos un número c en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ donde $f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366$.

4. Encuentra un número c en el intervalo $[1, 5]$ para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tal que $f'(c) = -\frac{1}{9}$.

   Solución: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[1, 5]$ y derivable en $(1, 5)$. Notamos que $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ y $f(5) = \frac{1}{5} = 0.2$. Dado que $f(1) \neq f(5)$, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Según el teorema, existe al menos un número c en el intervalo $(1, 5)$ donde $f'(c) = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{0.2-1}{4} = -\frac{0.8}{4} = -\frac{1}{5} = -0.2$.

5. Demuestra que la función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

   Solución: La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Además, $f(0) = \sqrt{0} = 0$ y $f(1) = \sqrt{1} = 1$, lo que significa que $f(0) \neq f(1)$. Por lo tanto, aplicamos el Teorema de Rolle, que garantiza que existe al menos un número c en el intervalo $(0, 1)$ donde $f'(c) = 0$, lo que implica que hay al menos una raíz en ese intervalo.

Teorema del Valor Medio

Dada una función $f(x)$ que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

1. Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ cumple con las condiciones del TVM en el intervalo $[1, 3]$ y encuentra el valor de c que satisface el teorema.

   Solución: La función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Usando el TVM, tenemos:

   $$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 3 - (1^2 - 4 \cdot 1 + 3)}{3 - 1} = \frac{6 - (-2)}{2} = 4.$$

   Por lo tanto, existe al menos un número c en el intervalo $(1, 3)$ donde $f'(c) = 4$.

2. Encuentra un valor de c en el intervalo $[0,2]$ para la función $f(x) = e^x - 1$ que satisface el TVM.

   Solución: La función $f(x) = e^x - 1$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Usando el TVM, tenemos:

   $$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{e^2 - 1 - (e^0 - 1)}{2} = \frac{e^2 - e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

   Entonces, existe al menos un número c en el intervalo $(0,2)$ donde $f'(c) = \frac{e^2-1}{2}$.

3. Muestra que la función $f(x) = \sin x$ cumple con las condiciones del TVM en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y encuentra el valor de c que satisface el teorema.

   Solución: La función $f(x) = \sin x$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$. Usando el TVM, tenemos:

   $$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

   Por lo tanto, existe al menos un número c en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ donde $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

4. Encuentra un número c en el intervalo $[1,5]$ para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que satisface el TVM.

   Solución: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[1,5]$ y derivable en $(1,5)$. Usando el TVM, tenemos:

   $$f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{5} - 1}{4} = -\frac{4}{5}.$$

   Por lo tanto, existe al menos un número c en el intervalo $(1,5)$ donde $f'(c) = -\frac{4}{5}$.

5. Demuestra que la función $f(x) = \sqrt{x}$ cumple con las condiciones del TVM en el intervalo $[0,1]$ y encuentra el valor de c que satisface el teorema.

   Solución: La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$. Usando el TVM, tenemos:

   $$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{1} = 1.$$

   Por lo tanto, existe al menos un número c en el intervalo $(0,1)$ donde $f'(c) = 1$.

Criterio de la Primera Derivada

Función Creciente y Función Decreciente

Una función $f(x)$ se considera creciente en un intervalo (a,b) si, para cualquier par de números x_1 y x_2 en ese intervalo, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Una función $f(x)$ se considera decreciente en un intervalo (a,b) si, para cualquier par de números x_1 y x_2 en ese intervalo, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Criterio de la Primera Derivada

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a,b):

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a,b), entonces la función $f(x)$ es creciente en (a,b).
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a,b), entonces la función $f(x)$ es decreciente en (a,b).
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a,b), entonces la función $f(x)$ es constante en (a,b).
4. Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en $x = c$, entonces c es un máximo relativo de $f(x)$.
5. Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en $x = c$, entonces c es un mínimo relativo de $f(x)$.
6. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x = c$, entonces c es un punto de inflexión o una meseta en $f(x)$.

Ejercicios

1. Para las siguientes funciones aplica el criterio de la primera derivada:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12.$
(b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x.$
(c) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x.$
(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2.$
(e) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x.$
(f) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x.$

2. Aplica el criterio de la primera derivada para las siguientes funciones

(a) $f(x) = 2x\sqrt{3 - 2x}.$
(b) $f(x) = -3x\sqrt{5 + 4x}.$
(c) $f(x) = 4x\sqrt{2 - 3x}.$
(d) $f(x) = -2x\sqrt{6 - 2x}.$
(e) $f(x) = 5x\sqrt{4 + 3x}.$
(f) $f(x) = -x\sqrt{1 - 4x}.$

3. Aplicar el criterio de la primera derivada para las funciones

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 7x^{1/3}.$
(b) $f(x) = -4x^{3/4} + 5x^{2/3}.$
(c) $f(x) = 2x^{3/5} + 6x^{1/4}.$
(d) $f(x) = -5x^{1/3} + 4x^{2/5}.$
(e) $f(x) = 8x^{1/4} + 2x^{1/6}.$
(f) $f(x) = -x^{5/7} + 3x^{1/2}.$

4. Aplicar el criterio de la primera derivada para las funciones

(a) $f(x) = \frac{3x+4}{2x^2-x-1}$
(b) $f(x) = \frac{-2x-1}{3x^2+2x+5}$
(c) $f(x) = \frac{4x+2}{5x^2-3x+1}$
(d) $f(x) = \frac{x-3}{-2x^2+4x-5}$
(e) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+5x+2}$
(f) $f(x) = \frac{-x+2}{3x^2-2x-4}$

5. Aplica el criterio de la primera derivada a las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$
(b) $f(x) = \frac{-2}{3x-4}$
(c) $f(x) = \frac{4}{5x+2}$
(d) $f(x) = \frac{5}{-6x+3}$
(e) $f(x) = \frac{-1}{2x-5}$
(f) $f(x) = \frac{2}{4x+1}$

6. Aplica el criterio de la primera derivada a las siguientes funciones

(a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$
(b) $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12x + 1$
(c) Valores de a para los cuales $h(x) = ax^2 - 4x + 7$ es creciente
(d) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 8$
(e) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$
(f) $h(x) = 4x^4 - 16x^3 + 12x^2$
(g) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
(h) $g(x) = \frac{1}{x^3} - 3x^2 + 6x$
(i) Valores de a para los cuales $h(x) = ae^{2x} - 4e^x$ es decreciente

7. Aplicar el criterio de la primera derivada para las funciones

(a) $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{4x-3}$
(b) $f(x) = \frac{-3x^2+7x-2}{2x+1}$
(c) $f(x) = \frac{5x^2-3x+4}{-2x-5}$
(d) $f(x) = \frac{4x^2+8x-3}{3x+2}$
(e) $f(x) = \frac{-x^2-2x+6}{3x-4}$
(f) $f(x) = \frac{3x^2-6x+2}{-4x-1}$

Criterio de la Segunda Derivada

función cóncava hacia arriba Una función $ f(x) $ es cóncava hacia arriba en el intervalo $ [a, b] $ si, para todos los $ x_1 $ y $ x_2 $ en ese intervalo y para cualquier $ t $ entre 0 y 1, se cumple:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Función Cóncava hacia abajo Una función $ f(x) $ es cóncava hacia abajo en el intervalo $ [a, b] $ si, para todos los $ x_1 $ y $ x_2 $ en ese intervalo y para cualquier $ t $ entre 0 y 1, se cumple:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Teorema de la Segunda Derivada: Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable en un intervalo (a, b). Entonces, la función es:

- **Cóncava hacia arriba** en (a, b) si y solo si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b).
- **Cóncava hacia abajo** en (a, b) si y solo si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b).

Definición de Punto de Inflexión: Un punto (x_0, y_0) en la gráfica de una función $f(x)$ se denomina *punto de inflexión* si la función cambia de concavidad en ese punto. Es decir, $f(x)$ tiene un punto de inflexión en (x_0, y_0) si y solo si $f''(x_0) = 0$, y el signo de $f''(x)$ cambia al pasar de $x < x_0$ a $x > x_0$.

Teorema del Criterio de la Segunda Derivada para Extremos Relativos: Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto que contiene $x = c$.

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un *mínimo relativo* local en $x = c$.

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un *máximo relativo* local en $x = c$.

Es decir, si la primera derivada de la función es igual a cero en un punto crítico c y la segunda derivada en ese punto es positiva, entonces ese punto crítico corresponde a un mínimo relativo. Si la segunda derivada en el punto crítico es negativa, entonces corresponde a un máximo relativo.

Ejercicios de Aplicación del Criterio de la Segunda Derivada:

1. Aplica el criterio de la segunda derivada a las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$
   (b) $g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2.$
   (c) $h(x) = 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 1.$
   (d) $h(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3.$
   (e) $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 8x^2 + 2x - 1.$
   (f) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 10.$
   (g) $h(x) = x^7 - 7x^6 + 12x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x - 8.$

2. Aplica el criterio de la segunda derivada a las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = -\frac{4}{2x-11}$
   (b) $f(x) = \frac{6}{3x-4}$
   (c) $f(x) = \frac{3}{-4x+3}$
   (d) $f(x) = -\frac{7}{5x+1}$
   (e) $f(x) = \frac{4}{-6x+12}$
   (f) $f(x) = \frac{6}{8x-7}$

3. Aplica el criterio de la segunda derivada a las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = \frac{2x+3}{3x^2-4x+1}$
   (b) $f(x) = \frac{-3x-2}{4x^2+5x+1}$
   (c) $f(x) = \frac{4x+1}{2x^2-7x-3}$
   (d) $f(x) = \frac{5x-2}{6x^2+3x-1}$
   (e) $f(x) = \frac{-x-3}{3x^2+2x+5}$
   (f) $f(x) = \frac{2x+5}{4x^2-6x-2}$

4. Aplica el criterio de la segunda derivada a las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}$

   (b) $f(x) = \frac{-x^2+2x-5}{3x+4}$

   (c) $f(x) = \frac{4x^2+7x-1}{5x-2}$

   (d) $f(x) = \frac{2x^2-3x+6}{-3x+2}$

   (e) $f(x) = \frac{-x^2-4x+3}{2x+5}$

   (f) $f(x) = \frac{5x^2+6x-2}{-4x-3}$

Aplicación de Máximos y Mínimos