

# Programación Lineal: Modelación y Conceptos

Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM

10 de enero de 2011

## Índice

1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Ejemplo 1: Compañía de pinturas . . . . .	1
1.3. Ejemplo 2: Compañía maquiladora . . . . .	4
1.4. Ejemplo 3: Oficina postal . . . . .	5
1.5. Ejemplo 4: El problema de SunCo . . . . .	6
1.6. Ejemplo 5: el problema de la dieta . . . . .	9
1.7. Linealidad . . . . .	10
1.8. LP . . . . .	11
1.9. Región factible . . . . .	11

### 1.1. Introducción

En esta lectura daremos una introducción a la modelación de problemas mediante programación lineal; pondremos énfasis en las etapas que componen la modelación. Cerraremos estos ejemplos con algunos conceptos generales sobre el tipo de problemas que nos interesa resolver.

### 1.2. Ejemplo 1: Compañía de pinturas

La compañía de pinturas **Manchita** produce tres tipos de pintura adicionando a una pintura base cuatro productos o aditivos químicos ( $Q_1$  a  $Q_4$ ). Se tiene abundante pintura base disponible y cuyo costo ya fue cubierto. La compañía desea determinar la cantidad de toneladas de cada tipo de pintura que debe producir de manera que maximice la ganancia total. Las únicas restricciones se deben a la disponibilidad de los aditivos químicos requeridos. Las ganancias obtenidas por las toneladas de pintura producida aparecen en la tabla siguiente.

Aditivo	Kg. de aditivo químico requerido por tonelada			disponible
	Pintura interior	Pintura exterior	Pintura especial	
$Q_1$	1	2	2	2 kg
$Q_2$	2	1	1	1 kg
$Q_3$	1	5	1	3 kg
$Q_4$	0	0	1	0.8 kg
Ganancia por tonelada	15,000	25,000	19,000	

#### Solución

En la metodología de solución a los problemas de investigación de operaciones, el primer paso consiste en establecer las acciones a tomar por la empresa para alcanzar sus objetivos. En este caso, la compañía tiene como meta determinar el plan productivo de máxima ganancia. En este caso, tal plan se determina indicando el número de toneladas de cada pintura que debe producir. Esto define lo que se conoce como las **variables de decisión**:

- $x$  = número de toneladas de pintura interior

- $y$  = número de toneladas de pintura exterior
- $z$  = número de toneladas de pintura especial

El siguiente paso es determinar la **función objetivo**. Ésta debe ir acorde con la meta de la empresa y debe estar en función de las variables de decisión: *La compañía desea maximizar la ganancia*. Un elemento clave en los modelos de programación lineal es el supuesto de **aditividad**: La ganancia total de la compañía es la suma de las ganancias por separado de la venta de cada uno de los productos. Esto descartaría momentáneamente situaciones donde las ganancias están condicionadas ante ventas combinadas de productos. Otro supuesto importante es el de **proporcionalidad**: La contribución de cada producto es directamente proporcional a la cantidad de producto. Si suponemos que toda la pintura producida es vendida, por aditividad

$$\text{Ganancia total} = \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Interior} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Exterior} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Especial} \end{array}$$

y por proporcionalidad

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Interior} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{Precio venta} \\ \text{por tonelada} \\ \text{pintura interior} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Total toneladas} \\ \text{pintura} \\ \text{interior} \end{array} \\ &= \left(15,000 \frac{\text{dólares}}{\text{ton}}\right) \times x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Exterior} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{Precio venta} \\ \text{por tonelada} \\ \text{pintura exterior} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Total toneladas} \\ \text{pintura} \\ \text{exterior} \end{array} \\ &= \left(25,000 \frac{\text{dólares}}{\text{ton}}\right) \times y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{Ganancia} \\ \text{Pintura} \\ \text{Especial} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{Precio venta} \\ \text{por tonelada} \\ \text{pintura especial} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Total toneladas} \\ \text{pintura} \\ \text{especial} \end{array} \\ &= \left(19,000 \frac{\text{dólares}}{\text{ton}}\right) \times z \end{aligned}$$

Finalmente, el objetivo queda

$$\text{Max } w = 15x + 25y + 19z \text{ (en miles de dólares)}$$

El siguiente paso es determinar las **restricciones** que son condicionamientos a los valores que **deben cumplir** las variables de decisión. En general, los condicionamientos pueden ser muy diversos y podrían estar asociados a los recursos de la empresa, a las demandas del mercado o bien controles de calidad, por citar algunos ejemplos. En nuestro ejemplo, los recursos disponibles referentes a los aditivos químicos son los que condicionan el plan productivo. Nuevamente, como en la función objetivo, las dos suposiciones de aditividad y proporcionalidad son una exigencia en los modelos de programación lineal: para cada aditivo,

- el total consumido es la suma de lo consumido por separado en cada producto y
- el total consumido por cada producto es directamente proporcional a la cantidad de producto

El sentido común indica que, para el aditivo 1, se debe cumplir:

$$\begin{array}{c} \text{Total} \\ \text{utilizado} \\ \text{aditivo 1} \end{array} \leq \begin{array}{c} \text{Total} \\ \text{disponible} \\ \text{aditivo 1} \end{array}$$

Bajo el supuesto de aditividad se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Total} & & \text{Total} & & \text{Total} & & \text{Total} \\ \text{utilizado} & = & \text{utilizado} & + & \text{utilizado} & + & \text{utilizado} \\ \text{aditivo 1} & & \text{aditivo 1} & & \text{aditivo 1} & & \text{aditivo 1} \\ & & \text{en pintura interior} & & \text{en pintura exterior} & & \text{en pintura especial} \end{array}$$

Bajo el supuesto de proporcionalidad se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \text{Total} & & \text{Total} & & \text{Total toneladas} \\ \text{utilizado} & & \text{requerido} & & \text{pintura} \\ \text{aditivo 1} & = & \text{aditivo 1} & \times & \text{interior} \\ \text{en pintura interior} & & \text{por tonelada} & & \\ & & \text{en pintura interior} & & \\ & = & \left(1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}}\right) \times (x) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Total} & & \text{Total} & & \text{Total toneladas} \\ \text{utilizado} & & \text{requerido} & & \text{pintura} \\ \text{aditivo 1} & = & \text{aditivo 1} & \times & \text{exterior} \\ \text{en pintura exterior} & & \text{por tonelada} & & \\ & & \text{en pintura exterior} & & \\ & = & \left(2 \frac{\text{kg}}{\text{ton}}\right) \times (y) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Total} & & \text{Total} & & \text{Total toneladas} \\ \text{utilizado} & & \text{requerido} & & \text{pintura} \\ \text{aditivo 1} & = & \text{aditivo 1} & \times & \text{especial} \\ \text{en pintura especial} & & \text{por tonelada} & & \\ & & \text{en pintura especial} & & \\ & = & \left(2 \frac{\text{kg}}{\text{ton}}\right) \times (z) & & \end{array}$$

Resumiendo, las restricciones quedan:

- Aditivo 1:

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} x + 2 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} y + 2 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} z \leq 2 \text{ kg}$$

- Aditivo 2:

$$2 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} x + 1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} y + 1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} z \leq 2 \text{ kg}$$

- Aditivo 3:

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} x + 5 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} y + 1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} z \leq 3 \text{ kg}$$

- Aditivo 4:

$$0 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} x + 0 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} y + 1 \frac{\text{kg}}{\text{ton}} z \leq 0.8 \text{ kg}$$

Si regresamos a la naturaleza de nuestro problema, razonamos que las cantidades de pintura a producir deben ser mayor o igual que cero: por tanto,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  y  $z \geq 0$ . En términos puramente matemáticos, el problema de la empresa **Manchita** consiste en determinar  $x$ ,  $y$  y  $z$  para **maximizar** la función:

$$f(x, y, z) = 15x + 25y + 19z$$

sujeto a las condiciones:

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &\leq 2 \\2x + y + z &\leq 2 \\x + 5y + z &\leq 3 \\z &\leq 0.8\end{aligned}$$

con  $x, y, z \geq 0$

### 1.3. Ejemplo 2: Compañía maquiladora

Una compañía fabrica dos tipos de productos, el tipo **A** y el tipo **B**. Un producto **A** se vende en \$27 y requiere materia prima por un costo de \$10. El costo de mano de obra de cada producto **A** es de \$14. Por otro lado, un producto **B** se vende en \$21 y requiere materia prima por un costo de \$9. El costo de mano de obra de cada producto **B** es de \$10. La manufactura de los productos **A** y **B** requiere dos tipos de labor: carpintería y acabado. Cada producto **A** requiere 2 horas de acabado y 1 de carpintería, mientras que un producto **B** requiere 1 hora de acabado y 1 hora de carpintería. Cada semana la compañía dispone de 100 horas para acabado y 80 horas para carpintería. Mientras que la demanda de productos **B** es ilimitada, se estima que la compañía vende a lo más 40 productos **A** por semana. La compañía desea hacer un plan de producción semanal que maximice la ganancia.

#### Solución

Sigamos los pasos de la metodología planteada en el problema anterior.

#### 1 Variables de decisión

- $x$  = Cuántos productos **A** por semana deben producirse y
- $y$  = cuántos productos **B** por semana deben producirse.

#### 2 Función Objetivo Bajo los supuestos de aditividad y proporcionalidad:

$$\begin{aligned}\text{Ganancia} &= \text{Ventas} - \text{Costos} \\ \text{Ventas} &= 27 \frac{\text{dólares}}{\text{producto A}} \times x + 21 \frac{\text{dólares}}{\text{producto B}} \times y \\ \text{Costos} &= \text{CostoMateria Prima} + \text{CostoMano Obra} \\ \text{CostoMateria Prima} &= 10 \frac{\text{dólares}}{\text{producto A}} \times x + 9 \frac{\text{dólares}}{\text{producto B}} \times y \\ \text{CostoMano Obra} &= 14 \frac{\text{dólares}}{\text{producto A}} \times x + 10 \frac{\text{dólares}}{\text{producto B}} \times y\end{aligned}$$

Así, la función a maximizar es:

$$\text{Ganancia} = 3x + 2y \text{ dólares}$$

#### 3 Restricciones

- (Recurso) Horas de carpintería:

$$2 \frac{\text{horas}}{\text{producto A}} \times x + 1 \frac{\text{hora}}{\text{producto B}} \times y \leq 100 \text{ horas}$$

- (Recurso) Acabado:

$$1 \frac{\text{hora}}{\text{producto A}} \times x + 1 \frac{\text{hora}}{\text{producto A}} \times y \leq 80 \text{ horas}$$

- (Condiciones de Mercado) Demanda:

$$x \leq 40 \text{ productos A}$$

- Naturales:  $x, y \geq 0$  y  $x$  y  $y$  enteros.

Resumiendo, el problema matemático asociado a la fábrica consiste en determinar los valores de  $x$  y de  $y$  que **maximizan** la función:

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

y que cumplen las restricciones:

$$\begin{array}{rcl} 2x & + & y \leq 100 \\ x & + & y \leq 80 \\ x & & \leq 40 \end{array}$$

con  $x$  y  $y \geq 0$  y ambos enteros.

### 1.4. Ejemplo 3: Oficina postal

Una oficina postal requiere un cierto número mínimo de empleados de tiempo completo dependiendo del día de la semana. La siguiente tabla muestra los requisitos. La unión de trabajadores establece que un trabajador de tiempo completo debe trabajar 5 días consecutivos y descansar los siguientes 2. Formule el problema de determinar el número de empleados de tiempo completo mínimo que debe tener la oficina postal.

Día	Empleados de tiempo completo requeridos
Día <sub>1</sub> = Lunes	17
Día <sub>2</sub> = Martes	13
Día <sub>3</sub> = Miércoles	15
Día <sub>4</sub> = Jueves	14
Día <sub>5</sub> = Viernes	16
Día <sub>6</sub> = Sábado	16
Día <sub>7</sub> = Domingo	11

#### Solución

##### Variables de decisión

Una primera tentación es definir una variable de decisión como el total de empleados, pero desde el punto de vista del departamento de personal el problema no se resuelve conociendo el total de empleados contratados sino con la especificación de rol de trabajos; es decir, cuántos inician qué día de la semana. Entonces observamos que ésa es la clave para definir las variables de decisión:

- $x_i$  = el número de empleados que inicial su semana laboral el día  $i$  (1=lunes, 2=martes, etc)

Note que entonces el total de empleados contratados es la suma de los  $x_i$ .

##### Función objetivo

El objetivo de la empresa es claro: minimizar el total de empleados contratados:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^7 x_i$$

##### Restricciones

Nuestras restricciones se relacionan con cumplir con la operatividad de la oficina postal en cada día de la semana: debemos garantizar que en cada día de la semana el número de empleados que estén laborando (no sólo los que inician su semana laboral tal día) son al menos los requeridos. Por ejemplo, contemos el total de empleados que están laborando el día lunes. Seguro están todos los que inician su semana el lunes ( $x_1$ ) (ellos descansan sábado y domingo), pero también están todos los que la iniciaron el domingo ( $x_7$ ) (ellos descansan viernes y sábado), todos los que la iniciaron el sábado ( $x_6$ ) (ellos descansan jueves y viernes), todos los que la iniciaron el viernes ( $x_5$ ) (ellos descansan miércoles y jueves), y todos los que la iniciaron el jueves ( $x_4$ ) (ellos descansan martes y miércoles). Todos los que inician en martes descansan domingo y lunes, y los que inician en miércoles descansan lunes y martes. Resumiendo

$$\text{total de trabajadores en lunes} = x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$$

Siguiendo un análisis semejante para cada uno de los días restantes concluimos que se requiere:

$$\text{total de trabajadores en martes} = x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$$

$$\text{total de trabajadores en miércoles} = x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$$

$$\text{total de trabajadores en jueves} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 14$$

$$\text{total de trabajadores en viernes} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 16$$

$$\text{total de trabajadores en sábado} = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$$

y

$$\text{total de trabajadores en domingo} = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

Además, los valores de las variables  $x_i$  deben ser enteros. En términos puramente matemáticos, el problema de la oficina postal consiste en determinar los valores de  $x_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 7$  tal que **minimizan** la función

$$z = \sum_i^7 x_i$$

y que cumplen las condiciones:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 17 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 15 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & \geq & 14 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \geq & 16 \\ & & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \geq & 16 \\ & & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 11 \end{array}$$

con  $x_i \geq 0$  y  $x_i$  entero para  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

## 1.5. Ejemplo 4: El problema de SunCo

**Sunco Oil** produce tres tipos de gasolinas (G1, G2 y G3). Cada tipo es producido combinando tres tipos de crudo (C1, C2 y C3). Las ventas en dólares por barril de gasolina son: G1 en 70, G2 en 60 y G3 en 50. Los costos en dólares por barril de crudo son: C1 en 45, C2 en 35 y C3 en 25. **Sunco** puede comprar hasta 5000 barriles de cada tipo de crudo al día. Los tres tipos de gasolina difieren en octanaje y en porcentaje de azufre. Para producir G1 la combinación de crudos debe tener en promedio un octanaje al menos de 10 y contener no más de 1 % de azufre. Para producir G2, el octanaje promedio es de al menos 8 y contener no más de 2 % de azufre. Para producir G3, el octanaje promedio es de al menos 6 y contener no más de 1 % de azufre. C1 posee un octanaje de 12 y 0.5 % azufre, C2 posee un octanaje de 6 y 2.0 % de azufre, y C3 posee un octanaje de 8 y 3.0 % de azufre. El costo de transformación de un barril de crudo en uno de gasolina es de 4 dólares. **Sunco** puede producir a lo más 14,000 barriles de gasolina al día. Los clientes de **Sunco** requieren 3,000 barriles de G1, 2,000 barriles de G2, y 1,000 barriles de G3 por día. **Sunco** considera una obligación satisfacer estos requerimientos. Es un hecho que la publicidad estimula la demanda de sus productos. Cada dolar gastado en la publicidad de uno de sus productos aumenta la demanda diaria en 10 barriles. Formule un modelo de PL que permita a **Sunco** maximizar sus ganancias diarias.

### Solución

#### Variables de decisión

Notemos que por un lado estamos interesados en saber cuántos barriles de cada gasolina se deben producir, y por otro estamos interesados en cuántos barriles de cada tipo crudo comprar. Sin embargo, aún con estos datos

el departamento encargado de la producción debe decidir cómo se deben mezclar los crudos para producir cada tipo de gasolina. Es decir, que las cantidades totales de gasolina y de crudo no resuelven el problema de la producción. Lo que sí resuelve el problema de la producción es decidir exactamente las cantidades que deben mezclarse de cada uno de los tipos de insumos para producir cada tipo de productos. Los totales pueden obtenerse sumando cada una de las partes. Así, las variables de decisión deben ser

$x_{i,j}$  = cantidad de barriles del **crudo**  $i$  utilizados para producir **gasolina**  $j$

Esto por un lado. Pero otra parte pendiente son las decisiones que debe tomarse en publicidad. Y para ello debemos precisar cuántos dólares se debe invertir en la publicidad de cada tipo de gasolina:

$y_j$  = total de dólares aplicados en la publicidad de la **gasolina**  $j$

Observemos que estas variables de decisión permiten determinar el total de barriles de cada tipo de crudo que debe comprarse y el total de barriles de cada tipo de gasolina que se produce:

- $\sum_{i=1}^3 x_{i,j}$  es el total de barriles de **gasolina**  $j$  a producir.
- $\sum_{j=1}^3 x_{i,j}$  es el total de barriles de **crudo**  $i$  en la producción.
- $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{i,j}$  es el **total de barriles de crudo** a procesar (que será el **total de barriles de gasolina** a producir, suponiendo que un barril de mezcla de crudos se convierte en un barril de gasolina).

### Función objetivo

El objetivo de la empresa es maximizar las ganancias. Las ganancias serán las ventas menos los costos. Los costos en los que se incurre son los referentes a la materia prima, a la transformación y a la publicidad.

- $CT$  = Costo de transformación:

$$CT = 4 \frac{\text{dólares}}{\text{barril}} \times \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{i,j}$$

- $CMP$  = Costo de materia prima:

$$CMP = 45 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de C1}} \times \sum_{j=1}^3 x_{1,j} + 35 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de C2}} \times \sum_{j=1}^3 x_{2,j} + 25 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de C3}} \times \sum_{j=1}^3 x_{3,j}$$

- $V$  = Venta de gasolina:

$$V = 70 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de G1}} \times \sum_{i=1}^3 x_{i,1} + 60 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de G2}} \times \sum_{i=1}^3 x_{i,2} + 50 \frac{\text{dólares}}{\text{barril de G3}} \times \sum_{i=1}^3 x_{i,3}$$

- $P$  = Costo de publicidad:

$$P = y_1 + y_2 + y_3 = \sum_{j=1}^3 y_j$$

La función objetivo queda de la siguiente forma:

$$\text{Max } z = V - (CT + CMP + P)$$

### Restricciones

En este problema las restricciones son de diferente tipo:

- La compañía tiene una capacidad instalada que **no puede exceder**:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{i,j} \leq 14,000$$

- Las compañías que proveen crudo tienen limitaciones; **A lo más** 5 mil barriles de cada crudo están disponibles:

$$\sum_{j=1}^3 x_{i,j} \leq 5,000 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

- Como toda la gasolina producida debe venderse: Para cada gasolina, la totalidad de gasolina producida **debe equiparar** la demanda. Y por otro lado, la demanda será el resultado de la demanda *natural* más la inducida por publicidad:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_{i,1} &= 3,000 + 10 y_1 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i,2} &= 2,000 + 10 y_2 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i,3} &= 1,000 + 10 y_3 \end{aligned}$$

- Cada gasolina producida tiene ciertos criterios de calidad a cuidar: el porcentaje de azufre y el octanaje. Supongamos que el porcentaje en la mezcla es proporcional al porcentaje en los componentes. Así para la **gasolina 1**: El porcentaje de azufre **no se debe exceder** el **1 %**.

El total de **gasolina 1**:  $\sum_{i=1}^3 x_{i,1}$

Aporte de azufre por cada tipo de crudo: C1: 0.5 %, C2: 2.0 % y C3: 3.0 %.

Suponiendo que el porcentaje de azufre en la mezcla obedezca los supuestos de aditividad y proporcionalidad:

$$\frac{\frac{0.5}{100} x_{1,1} + \frac{2.0}{100} x_{2,1} + \frac{3.0}{100} x_{3,1}}{\sum_{i=1}^3 x_{i,1}} \leq \frac{1.0}{100}$$

De donde, *haciendo álgebra* lo anterior se transforma en:

$$(0.5 - 1.0) x_{1,1} + (2.0 - 1.0) x_{2,1} + (3.0 - 1.0) x_{3,1} \leq 0.0$$

De manera análoga, para la **gasolina 2** la condición del azufre se codifica como:

$$(0.5 - 2.0) x_{1,2} + (2.0 - 2.0) x_{2,2} + (3.0 - 2.0) x_{3,2} \leq 0.0$$

y para la **gasolina 3**:

$$(0.5 - 1.0) x_{1,3} + (2.0 - 1.0) x_{2,3} + (3.0 - 1.0) x_{3,3} \leq 0.0$$

- Si ahora suponemos que el octanaje en la mezcla obedece también al aporte proporcional del octanaje de cada crudo: Para la **gasolina 1**: El octanaje debe ser **al menos 10**.  
El octanaje de cada crudo es 12, 6 y 8.

$$\frac{12 x_{1,1} + 6 x_{2,1} + 8 x_{3,1}}{\sum_{i=1}^3 x_{i,1}} \geq 10$$



que *haciendo álgebra* queda:

$$(12 - 10) x_{1,1} + (6 - 10) x_{2,1} + (8 - 10) x_{3,1} \geq 0.0$$

De manera análoga, para la **gasolina 2** la condición de octanaje se codifica como:

$$(12 - 8) x_{1,2} + (6 - 8) x_{2,2} + (8 - 8) x_{3,2} \geq 0.0$$

y para la **gasolina 3**:

$$(12 - 6) x_{1,3} + (6 - 6) x_{2,3} + (8 - 6) x_{3,3} \geq 0.0$$

En términos puramente matemáticos, el problema de **SunCo** consiste en determinar  $x_{i,j}$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, 3$  y  $y_j$  para  $j = 1, 2, 3$  de manera que se **maximice** la función:

$$f = 21 x_{1,1} + 11 x_{1,2} + x_{1,3} + 11 x_{2,3} + 41 x_{3,1} + 31 x_{3,2} + 21 x_{3,3} + 31 x_{2,1} + 21 x_{2,2} - y_3 - y_1 - y_2$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &\leq 14,000 \\ x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 5,000 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 5,000 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &\leq 5,000 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} &= 3,000 + 10 y_1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} &= 2,000 + 10 y_2 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} &= 1,000 + 10 y_3 \\ -0.5 x_{1,1} + 1.0 x_{2,1} + 2 x_{3,1} &\leq 0 \\ -1.5 x_{1,2} + x_{3,2} &\leq 0 \\ -0.5 x_{1,3} + 1.0 x_{2,3} + 2 x_{3,3} &\leq 0 \\ 2 x_{1,1} - 4 x_{2,1} - 2 x_{3,1} &\geq 0 \\ 4 x_{1,2} - 2 x_{2,2} &\geq 0 \\ 6 x_{1,3} + 2 x_{3,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

con  $x_{i,j} \geq 0$  y  $y_j \geq 0$ .

## 1.6. Ejemplo 5: el problema de la dieta

Mi dieta requiere que toda la comida que yo como sea de uno de los 4 *grupos básicos*. (Pastelillos de chocolate, nieve, refresco y pay de queso) Las cuatro comidas están disponibles en las presentaciones: brownies, nieve de chocolate, Cola y pay de queso con piña. Cada brownie cuesta 50 centavos de dolar, cada cucharada de nieve de chocolate cuesta 20 centavos, cada botella de Cola cuesta 30 centavos de dolar y cada rebanada de pay de queso con piña cuesta 80 centavos. Cada día yo debo ingerir al menos 500 calorías, 6 oz de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. La tabla con la información nutrimental se da a continuación. Formule un modelo de programación lineal que se pueda usar para satisfacer los requerimientos a mínimo costo.

Tipo	Calorias	Chocolate(Onzas)	Azúcar(Onzas)	Grasa(Onzas)
Brownie	400	3	2	2
Nieve chocolate (1 cucharada)	200	2	2	4
Cola (1 botella)	150	0	4	1
Pay (1 rebanada)	500	0	4	5

### Variables de decisión

- $x_1$  = número de brownies al día,

- $x_2$  = número de cucharadas de nieve de chocolate al día,
- $x_3$  = número de botellas de Cola al día
- $x_4$  = número de rebanadas de pay de queso con piña al día

### Función Objetivo

Minimizar costo del alimento

$$z = 50 \frac{\text{centavos}}{\text{brownie}} \times x_1 + 20 \frac{\text{centavos}}{\text{cucharada}} \times x_2 + 30 \frac{\text{centavos}}{\text{botella}} \times x_3 + 80 \frac{\text{centavos}}{\text{rebanada}} \times x_4$$

### Restricciones

Se deben cubrir los nutrientes mínimamente:

- Calorías:

$$400 \frac{\text{calorias}}{\text{brownie}} \times x_1 + 200 \frac{\text{calorias}}{\text{cucharada}} \times x_2 + 150 \frac{\text{calorias}}{\text{botella}} \times x_3 + 500 \frac{\text{calorias}}{\text{rebanada}} \times x_4 \geq 500$$

- Chocolate:

$$3 \frac{\text{onzas}}{\text{brownie}} \times x_1 + 2 \frac{\text{onzas}}{\text{cucharada}} \times x_2 \geq 6$$

- Azúcar:

$$2 \frac{\text{onzas}}{\text{brownie}} \times x_1 + 2 \frac{\text{onzas}}{\text{cucharada}} \times x_2 + 4 \frac{\text{onzas}}{\text{botella}} \times x_3 + 4 \frac{\text{onzas}}{\text{rebanada}} \times x_4 \geq 100$$

- Grasa:

$$2 \frac{\text{onzas}}{\text{brownie}} \times x_1 + 4 \frac{\text{onzas}}{\text{cucharada}} \times x_2 + 1 \frac{\text{onzas}}{\text{botella}} \times x_3 + 5 \frac{\text{onzas}}{\text{rebanada}} \times x_4 \geq 8$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$  deben ser enteros y no negativos. En términos puramente matemáticos, el problema de la dieta consiste en determinar los valores de  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  de manera que se minimize la función:

$$z = 50 x_1 + 20 x_2 + 30 x_3 + 80 x_4$$

sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} 400 x_1 + 200 x_2 + 150 x_3 + 500 x_4 &\geq 500 \\ 3 x_1 + 2 x_2 &\geq 6 \\ 2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 + 4 x_4 &\geq 100 \\ 2 x_1 + 4 x_2 + 1 x_3 + 5 x_4 &\geq 8 \end{aligned}$$

donde  $x_i$  debe ser entero y no negativo para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

## 1.7. Linealidad

Veamos ahora algunos conceptos clave en el tipo de expresiones matemáticas que aparecen en el tipo de problemas que nos interesan.

### Definición

Una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es *función lineal* en sus variables, si existen escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tales que:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \dots + c_n \times x_n$$

Y una definición importante para las restricciones que definirán los problemas es la siguiente.

### Definición

Una *desigualdad lineal* en las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una desigualdad de que tiene alguna de las dos posibles formas:

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq b \text{ ó } f(x_1, \dots, x_n) \geq b$$

donde  $f(x_1, \dots, x_n)$  es una función lineal y  $b$  es una constante.

## 1.8. LP

Definiremos ahora el tipo de problemas en el cual estamos interesados:

### Definición

Un *problema de programación lineal* (LP) es un problema de optimización donde:

- Se pretende maximizar o minimizar una función lineal en las variables de decisión. Tal función se llamará *función objetivo*.
- Los valores de decisión deberán satisfacer un conjunto de restricciones. Cada una de las restricciones será una ecuación lineal o una desigualdad lineal en las variables de decisión.
- Asociada a cada variable de decisión puede haber o no una restricción de signo sobre ella especificando si los valores de la variable son no negativos ( $\geq 0$ ).

## 1.9. Región factible

### Definición

La *Región Factible* para un PL es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas son los valores de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones del PL y todas las restricciones de signo.

Para un problema de maximización, una *solución óptima* a un PL es un punto en la región factible con el valor mayor posible de la función objetivo (No existe otro punto en la región factible con una mayor evaluación de acuerdo a la función objetivo). Similarmente, para problemas de minimización una solución óptima es un punto en la región factible con el menor valor posible de la función objetivo.