Tema 3: Programación lineal

1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Consideramos conveniente revisar los conceptos relacionados con las inecuaciones lineales, ya que su uso va a ser continuado en este tema.

Ya sabemos que las expresiones de la forma $ax + by = c$ se denominan ecuaciones lineales con dos incógnitas y su representación gráfica es una recta (ver apuntes del curso pasado).

Si en las ecuaciones lineales con dos incógnitas cambiamos el signo igual por uno de los cuatro signos de desigualdad ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$), obtenemos una inecuación lineal con dos incógnitas.

Una **inecuación lineal con dos incógnitas**, es toda inecuación equivalente a una de las siguientes:

$$ax + by + c > 0, \qquad ax + by + c \geq 0, \qquad ax + by + c < 0, \qquad ax + by + c \leq 0$$

es decir, cuando, después de reducirla, tiene dos incógnitas de grado uno.

Es conocido que los valores que satisfacen la ecuación $ax + by = c$ son los puntos situados sobre una recta. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. Estos semiplanos van a constituir las soluciones de las inecuaciones asociadas a $ax + by = c$.

El **conjunto de soluciones** de una inecuación, es decir, el **semiplano** de soluciones de la inecuación, se determina de la forma siguiente:

- Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos.
- Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto que no pertenezca a la recta, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no a la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

Ejercicio de aplicación

1 Encuentra y representa gráficamente el conjunto de soluciones de la inecuación siguiente: $x + y < 2$.

Solución:

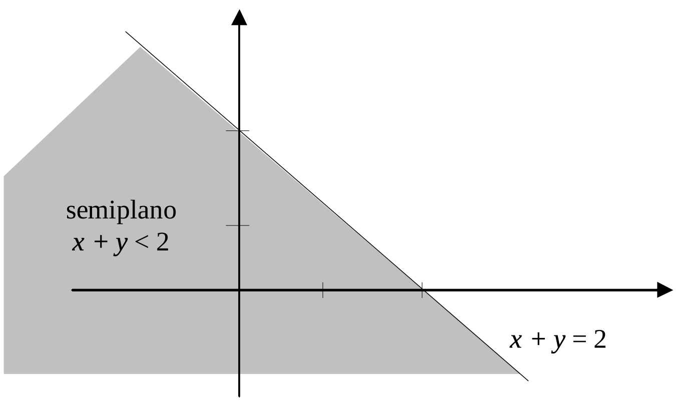

Figura 1

En la figura 1 puede verse como la gráfica de la recta de ecuación $x + y = 2$ divide al plano en dos regiones. Elegimos el punto $(0, 0)$ que no pertenece a la recta y se encuentra situado por debajo de la misma. Introduciendo las coordenadas de este punto en la inecuación $x + y < 2$, vemos que se satisface. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por debajo de la recta $x + y = 2$.

Ø *Sistemas de inecuaciones lineales*

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben satisfacerse a la vez.

Para su resolución se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado, es decir se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.
- El **conjunto solución** del sistema, también llamado **región factible**, está formado por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Como ocurría con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso que exista conjunto solución puede ser acotado o no.

Conviene destacar que, en el caso en el que el conjunto solución es una **región acotada**, sus puntos estarán encerrados por un **polígono convexo**.

Ejercicio de aplicación

2 Dibuja las regiones factibles de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

Solución:

En cada uno de los casos representamos las rectas asociadas a cada inecuación.

Buscamos para cada una de las inecuaciones su semiplano de soluciones y, por último, la región común a todos los semiplanos. En las representaciones gráficas que siguen puede verse la región factible o región de soluciones de cada uno de los sistemas.

a) Solución acotada en polígono convexo (Figura 2)

b) Solución no acotada (Figura 3)

c) No posee solución (Figura 4)

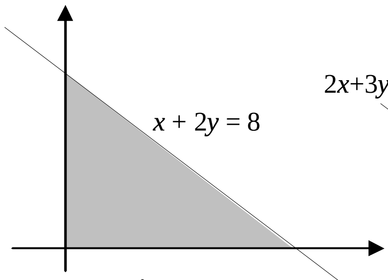

Figura 2

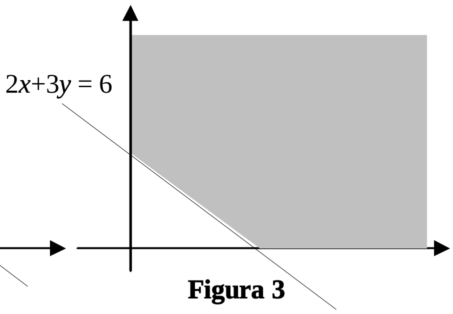

Figura 3

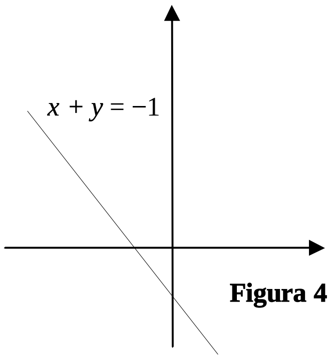

Figura 4

2. Programación lineal. Definiciones

A finales de la década de los años cuarenta se desarrolló la técnica algebraica denominada programación lineal para resolver problemas de asignación de recursos entre distintas actividades de ámbito económico. Las aplicaciones a otros tipos de problemas han sido numerosas.

Veamos la formulación algebraica del **problema** o **modelo de programación lineal**, llamado también **programa lineal**.

Se llama **programa lineal** a la formulación algebraica que pretende resolver la situación siguiente:

Optimizar (maximizar o minimizar) una **función objetivo**, función lineal de varias variables, sujeta a una serie de **restricciones**, expresadas por ecuaciones e inecuaciones lineales.

Ø *Programación lineal para dos variables. Métodos de solución*

Todas las situaciones que se estudian en este tema presentan dos variables, en el caso en el que los programas lineales tengan dos variables, que llamamos x e y, la formulación algebraica de los problemas de máximos y mínimos es como sigue:

Maximizar $f(x,y)=ax+by$ sujeto a: $$\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y\le b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y\le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x+a_{m2}y\le b_m \\ x\ge 0,\quad y\ge 0 \end{array}$$	Minimizar $f(x,y)=ax+by$ sujeto a: $$\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y\ge b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y\ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x+a_{m2}y\ge b_m \\ x\ge 0,\quad y\ge 0 \end{array}$$

En los programas lineales anteriores llamamos:

- **Variables de decisión** a los términos *x*, *y*.
- **Restricciones** a las inecuaciones lineales expresadas en las variables de decisión.
- **Función objetivo** a la función $f(x,y)=ax+by$, función lineal que hay que optimizar.

ü *Etapas en la formulación de un programa lineal*

Con objeto de simplificar la formulación de un programa lineal, es conveniente realizar el planteamiento algebraico de un enunciado a través de los pasos o etapas siguientes:

1. **Recoger la información** relativa a los elementos del problema **en una tabla**.
2. **Determinar las variables de decisión** y darles nombre: *x*, *y*.
3. **Expresar analíticamente la función objetivo**, función lineal de las variables de decisión *x* e *y*, que hay que optimizar.
4. **Escribir las restricciones**, expresadas como inecuaciones lineales de las variables de decisión.

ü *Método gráfico para la obtención de soluciones*

Para la obtención de soluciones, por el denominado **método gráfico**, de un programa lineal de dos variables ya formulado, realizaremos los pasos siguientes:

1. Hallamos la región factible a que dan lugar las restricciones.

2. Igualamos la función objetivo a cero: $ax + by = 0$ y representamos gráficamente la recta asociada, llamada **recta de beneficio nulo**.

3. Recorremos la región factible mediante rectas paralelas a la anterior, realizando un “barrido” de la misma. Estas rectas son de la forma $ax + by = k$ y se llaman **rectas de beneficio constante** o **líneas de nivel**.

4. De todas esas líneas, buscar la que corresponde al valor óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el caso de solución única, la línea de nivel que solamente toque en un punto a la región factible es la que proporciona la solución buscada del programa lineal correspondiente. Cuando el programa lineal presenta solución múltiple, la recta de nivel puede tocar en todos los puntos de un segmento o lado de la región factible.

ü *Método analítico para la obtención de soluciones*

El siguiente resultado, denominado teorema fundamental de la programación lineal, nos permite conocer otro método de solucionar un programa lineal con dos variables.

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un **punto extremo (vértice) de la región factible** acotada, nunca en el interior de dicha región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento o lado que determinan. En el caso de que la región factible es no acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los **vértices de la región**.

La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible nos va a permitir encontrar el valor óptimo (máximo o mínimo) en alguno de ellos.

ü *Clases de programas lineales para dos variables*

Vamos a considerar las distintas situaciones que se suelen presentar en los programas lineales para dos variables. Describimos, en primer lugar, las clases de programas que nos vamos a encontrar y posteriormente se ejemplifican cada uno de los casos en los ejercicios de aplicación desarrollados.

Los programas lineales para dos variables pueden clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presentan, en los casos siguientes:

- **Factibles con solución única**, cuando presentan un único punto óptimo.
- **Factibles con solución múltiple**, si presentan más de una solución óptima. En estos casos, las soluciones suelen ser todos los puntos de un segmento o lado, es decir, los puntos comprendidos entre dos vértices de la región factible.
- **Factible no acotada**, cuando no existe límite para la función objetivo, es decir, la función objetivo puede hacerse tan grande como se desee en la región factible.
- **No factible**, si no existe el conjunto de soluciones. En estas situaciones, las desigualdades que describen las restricciones son inconsistentes.

Ejercicios de aplicación

3 Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 Kg. de café de tipo C y 800 Kg. de café de tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y 1 de tipo K en la que gana 22 céntimos por kilo y la de tipo B que consta de una parte de tipo C y 2 del tipo K en la que gana 26 céntimos por kilo. Halla la cantidad de mezcla que la casa debe preparar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

Solución:

La información puede verse resumida en la tabla siguiente:

	Mezcla tipo A	Mezcla tipo B	Recursos
Café tipo C (kg)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	700
Café tipo K (kg)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	800
Beneficios	22	26	
Producción	x	y	

El programa lineal correspondiente al enunciado es:

Maximizar la función objetivo: $f(x,y)=22x+26y$ sujeta a las siguientes restricciones: $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\le 700 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\le 800 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$. El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior del polígono convexo limitado por los vértices *OPQR* que queda sombreado en la figura 5.

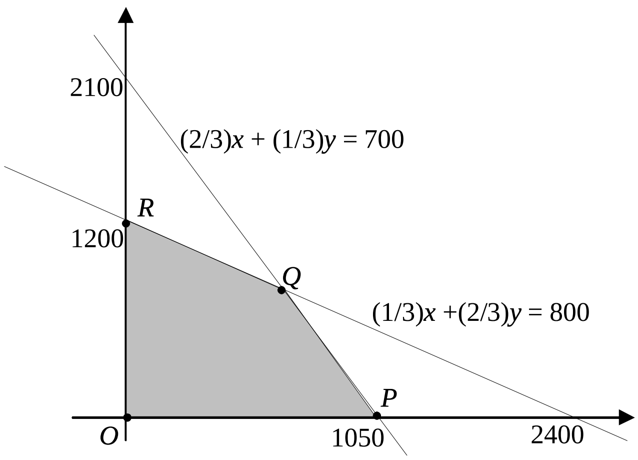

Figura 5

Las coordenadas de los vértices son:

$O(0,0)$, $P(1050,0)$, $Q(600,900)$ y $R(0,1200)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(0,0)=0$, $f(1050,0)=23100$, $f(600,900)=36600$ y $f(0,1200)=31200$

La casa empacadora debe hacer por tanto una mezcla de 600 Kg. de café de tipo A y 900 Kg. de tipo B para que la ganancia sea la máxima posible (31200 céntimos = = 312 €).

4 Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos C_1 y C_2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C_1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 10 euros, y el de C_2 contiene 4 unidades e A y una de B, siendo su precio de 30 euros. ¿Qué cantidades de C_1 y de C_2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Solución:

La información puede verse resumida en la tabla siguiente:

	Compuesto C_1	Compuesto C_2	Unidades
Pienso A	1	4	24
Pienso B	5	1	25
Coste	10	30	
Producción	x	y	

El programa lineal correspondiente al enunciado es:

Minimizar la función objetivo: $f(x, y) = 10x + 30y$ sujeta a las siguientes restricciones: $\left.\begin{array}{l} x+4y \geq 24 \\ 5x+y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

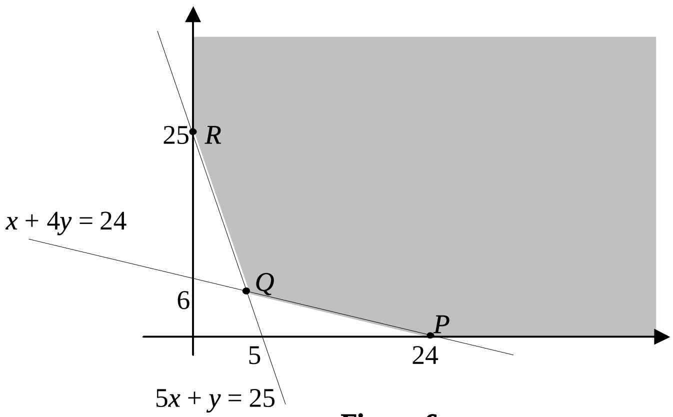

Figura 6

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior de la región convexa de vértices *P*, *Q* y *R* que queda sombreada en la figura 6.

Las coordenadas de los vértices son:

$P(24, 0)$, $Q(4, 5)$ y $R(0, 25)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(24, 0) = 240$, $f(4, 5) = 190$ y $f(0, 25) = 750$

Por tanto, la ganadería debe emplear 4 paquetes de C_1 y 5 de C_2 para preparar su dieta con el mínimo coste de 190 euros.

5 Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por Kg. es para ambos de 3 euros, y cuyo contenido vitamínico por Kg. se recoge en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
P	1 mg	1 mg	20 mg	2 mg
Q	1 mg	3 mg	7,5 mg	0 mg

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

Solución:

Llamando x a los Kg. de P e y a los Kg. de Q, el programa lineal correspondiente al enunciado es:

Minimizar la función objetivo: $f(x, y) = 3x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \\ 2x \geq 2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

. El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior de la región convexa de vértices P, Q, R y S que queda sombreada en la figura 7.

Las coordenadas de los vértices son:

$P(3, 0)$, $Q(1{,}5,\ 0{,}5)$, $R(1{,}2,\ 0{,}8)$ y $S(1,\ 1{,}33)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(3, 0) = 9$, $f(1{,}5,\ 0{,}5) = 6$, $f(1{,}2,\ 0{,}8) = 6$ y $f(1,\ 1{,}33) = 6{,}99$.

Las coordenadas de cualquier punto del segmento de extremos Q y R es solución del problema, proporcionando un gasto mínimo de 6 euros. Habrá por tanto que mezclar los piensos en dos cantidades cualesquiera x e y que cumplan la relación $x + y = 2$.

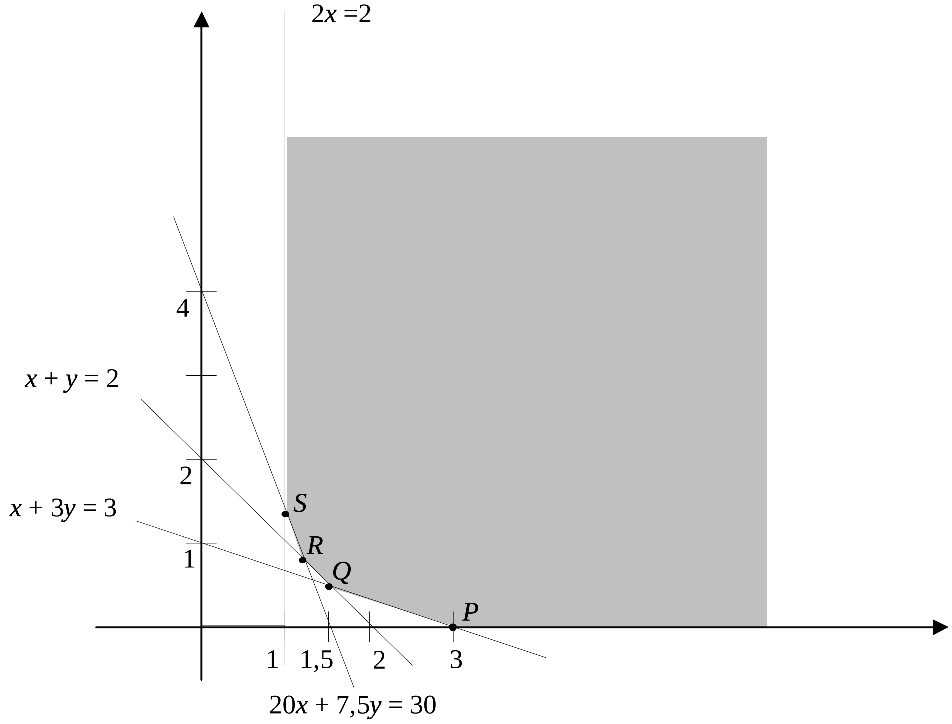

Figura 7

Resuelve tú

1. Los abonos A y B se obtienen mezclando cierto sustrato con dos fertilizantes F_1 y F_2 en las siguientes proporciones:

	F_1	F_2
A	100 g/kg	50 g/kg
B	70 g/kg	80 g/kg

La cantidad disponible de los fertilizantes F_1 y F_2 son 39 kg y 24 kg. El beneficio que producen los abonos A y B son 75 céntimos/kg y 60 céntimos/kg. ¿Cuántos kilos se deben fabricar del abono A y del abono B para maximizar el beneficio?

Solución: 320 kg de abono del tipo A y 100 kg de abono del tipo B.

2. Para abonar una parcela de huerta se necesitan por los menos 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30 céntimos/kg y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo, y cuyo precio es de 40 céntimos/kg. ¿Qué cantidad se deben tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible?

Solución: 20 kg del producto A y 30 kg del producto B

3. Una empresa posee dos fábricas F_1 y F_2 que producen 80 y 100 unidades respectivamente de un determinado producto. Deben abastecer a tres centros de consumo C_1, C_2 y C_3, que necesitan 50, 70 y 60 unidades, respectivamente. El coste del transporte de cada fábrica a cada centro de consumo, en euros por unidad, viene dado en la siguiente tabla:

	C_1	C_2	C_3
F_1	50	100	90
F_2	100	75	120

¿Cómo ha de realizarse el transporte para que sea lo más económico posible?

Solución: Las cantidades a transportar son:

	C_1	C_2	C_3
F_1	50	0	30
F_2	0	70	30

4. Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 3 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos respectivamente y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B. Calcular los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 200 pesetas y uno de B 1.000 pesetas. ¿Puede eliminarse alguna restricción?

Solución: deben emplearse 1,6 kg de A y 0,8 kg de B.

5. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer 60 o más vuelos, pero no más de 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 2000 euros y 1500 por cada viaje del B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

Solución: el consumo de combustible será mínimo si cada avión hace 30 viajes y el beneficio máximo se obtiene si el avión A hace 120 viajes y el B hace 80.

6. Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B. Las cajas del tipo A contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las del tipo B contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Disponemos de 500 kg de chocolate, 400 de cacao y 225 de almendras. Por cada caja del tipo A se ganan 2 euros y por cada caja del tipo B 3 euros. ¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia se máxima?

Solución: hay que fabricar 100 cajas del tipo A y 200 del tipo B.

7. Un laboratorio fabrica los complejos vitamínicos REVIT y VITAL que se venden a 192 euros y 221 euros la caja, respectivamente. La siguiente tabla indica los contenidos en vitaminas A y B por caja de cada producto:

	A	**B**
REVIT	4 gramos	6 gramos
VITAL	7 gramos	3 gramos

El coste de 1 gramo de vitamina A es de 5 euros y el coste de 1 gramo de vitamina B es de 12 euros. Justificar que el beneficio obtenido al vender x cajas de REVIT e y cajas de VITAL es $100x + 150y$. Se dispone de 38 gramos de vitamina A y 42 gramos de vitamina B. ¿Cuántas cajas de REVIT y cuántas cajas de VITAL deben fabricarse para que beneficio $100x + 150$y sea máximo?

Solución: se deben fabricar 6 cajas de REVIT y 2 cajas de VITAL.

8. Disponemos de 21 millones de euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las del tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 13 millones de euros en las del tipo A y como mínimo 600000 euros en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución: la inversión en acciones del tipo A ha de ser de 13 millones de euros y la inversión en acciones del tipo B de 8 millones de euros.

9. Un fabricante de aviones produce en dos fábricas tres tipos de aparatos: el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar mensualmente a un emirato árabe 12 aviones del tipo A, 8 del tipo B y 24 del tipo C. Al fabricante le cuesta 2 millones de euros semanales el funcionamiento de la primera fábrica y 1,6 millones de euros semanales el de la segunda. La primera fábrica produce, en una semana, 6 aviones del tipo A, 2 del tipo B y 4 del tipo C mientras que la segunda produce, respectivamente, 2, 2 y 12. ¿Cuántas semanas al mes debe trabajar cada fábrica para, cumpliendo el contrato del emir, conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento de las fábricas?

Solución: la primera fábrica debe trabajar una semana y la segunda tres semanas.