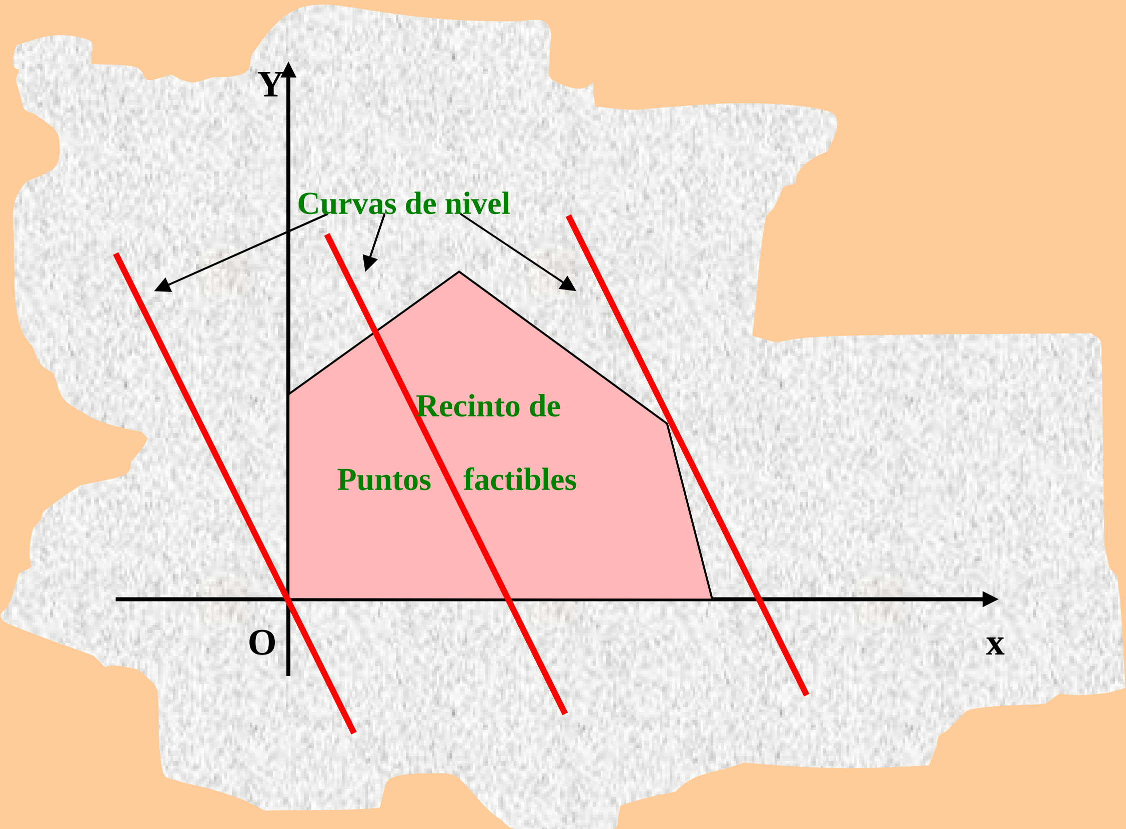
INTRODUCCION

A LA

PROGRAMACION

LINEAL



Prof. ANA COLO HERRERA **Prof. HECTOR PATRITTI**

INTRODUCCION

A LA

PROGRAMACION

LINEAL

Ejercicios resueltos

PROF. ANA COLÓ HERRERA PROF. H. PATRITTI

Publicación inscrita en la Biblioteca Nacional el 11 de julio del 2003 en el libro No.29 con el No. 1749 habiéndose realizado los aportes legales correspondientes según Art.7º. de la le No. 9739 sobre derechos de autor.

Email: anacolo @ adinet.com.uy hpatritti @ yahoo.com.ar

Telefax: 7120680 Montevideo-Uruguay

INDICE

PROLOGO

AL ESTUDIANTE

Esta publicación tiene por objetivo poner a tu disposición un conjunto de ejercicios , con su correspondiente resolución , introductorios al tema de Programación Lineal.
En modo alguno pretende sustituir los ejercicios que el docente que dicta el curso de matemática en la orientación que has elegido te proponga.
Nuestra intención es agregar a ellos un material adicional que esperamos te resulte útil durante el desarrollo del curso como también eventualmente en la preparación del examen correspondiente.
Hemos dividido la publicación en 2 capítulos y una Introducción.
En ésta , básicamente, desarrollamos con algún detalle la resolución de un ejercicio tipo a fin de que refresques aquellos conocimientos adquiridos en el curso y que deberás aplicar directamente.
En el Capítulo (1) te proponemos ejercicios sobre resolución de inecuaciones lineales en dos variables y de sistemas de inecuaciones lineales en dos variables.
En el Capítulo (2) los primeros ocho ejercicios se refieren a la maximización y/o minimización de funciones lineales de dos variables, mientras que del ejercicio nueve en adelante te proponemos situaciones problemáticas genuinas.
Si logras convencerte que con los conocimientos adquiridos en este primer curso de Matemática de los Bachilleratos Tecnológicos estás capacitado para resolver ejercicios introductorios sobre Programación Lineal habrás dado un paso adelante, pero si además de ello eres capaz de resolverlos, enhorabuena.

LOS AUTORES.

INTRODUCCION

La Programación Lineal es una técnica matemática utilizada para dar solución a problemas que se plantean muy comúnmente en diversas disciplinas como Economía , Ingeniería , Sociología , Biología , etc.
En esencia trata de maximizar y/o minimizar una función lineal de dos o más variables teniendo en cuenta que las mismas deben cumplir determinadas exigencias derivadas de la escasez de recursos disponibles en la realidad.
El problema de asignar convenientemente recursos escasos es un problema conocido desde la antigüedad , especialmente en el mundo de la economía , aunque una solución matemática al mismo es relativamente reciente.
Fue en la década de los años 40 del siglo XX que a través del trabajo de equipos formados por matemáticos, economistas y físicos, entre los cuales merece especial destaque George B. Dantzing , se sentaron las bases para la resolución de problemas de Programación Lineal y No Lineal.
Entendemos que nada mejor para comprender la esencia del tema que plantearte un ejercicio, que iremos desarrollando para que recuerdes los conocimientos matemáticos necesarios para su resolución y puedas entonces dedicarte a los ejercicios que te proponemos en esta publicación.

Ejercicio No. 0

Una tapicería está dedicada al tapizado de dos tipos de sillones a los que denominaremos tipo (A) y tipo (B).
Cada unidad del sillón tipo (A) necesita 10 metros de tela de tapicería y 12 horas de trabajo , mientras cada unidad de los del tipo (B) necesita 15 metros de tela y 16 horas de trabajo.
La tapicería dispone semanalmente de 300 m de tela y 336 horas de trabajo.
Los sillones del tipo (A) dan a la empresa una utilidad de $ 1500 , y los del tipo (B) una utilidad de $ 2100.
Suponiendo que todos los sillones tapizados se venden y que no existe escasez de otros elementos como hilo, clavos , tachuelas ,etc, se desea saber cuántos sillones de cada tipo deben tapizarse para que la empresa obtenga **máxima ganancia**

En todo problema de Programación Lineal encontraremos una tarea que debe realizarse con la máxima "efectividad" , que en nuestro caso será lograr que la ganancia de la empresa expresada en $/semana sea máxima.

Esa ganancia , que llamaremos G, deberemos expresarla como función lineal de dos variables.

A tales efectos llamaremos:

x al número de unidades de sillones tapizados por semana , tipo (A)

y al número de unidades de sillones tapizados por semana , tipo (B)

Como las utilidades de la venta son 1500 y 2100 pesos por unidad respectivamente, la función G será tal que:

$$\mathbf{G(x,y) = 1500\,x + 2100\,y} \qquad (\$ / \text{sem.})$$

La escasez de recursos, en nuestro caso los metros de tela de que dispone por semana la tapicería (300 m) y las horas de trabajo posibles por semana (336 horas), imponen limitaciones a nuestras variables, limitaciones a las que denominaremos "restricciones " y que se traducen matemáticamente por inecuaciones <u>lineales</u>.

En efecto:

Si cada sillón del tipo (A) necesita 10m de tela y cada sillón del tipo (B) necesita 15m de tela, deberá cumplirse

$$\mathbf{10\,x + 15\,y \leq 300} \qquad (1)$$

Por otra parte si cada sillón del tipo (A) insume 12 horas de trabajo para su tapizado y cada sillón del tipo (B) insume 16 horas deberá cumplirse:

$$\mathbf{12\,x + 16\,y \leq 336} \qquad (2)$$

El propio significado físico de las variables impone además que:

$$\mathbf{x \geq 0} \quad (3) \qquad\qquad \mathbf{y \geq 0} \quad (4)$$

En resumen el modelo matemático adoptado para resolver el ejercicio propuesto consiste en maximizar la función G tal que **G(x,y) = 1500x + 2100y** debiendo las variables cumplir con las restricciones:

$$\begin{cases} \mathbf{10\,x + 15\,y \leq 300} & (1) \\ \mathbf{12\,x + 16\,y \leq 336} & (2) \\ \mathbf{x \geq 0} & (3) \\ \mathbf{y \geq 0} & (4) \end{cases}$$

Tratando de encontrarle solución al ejercicio podrías pensar , teniendo en cuenta que los sillones del tipo (B) dan mayor ganancia, en tapizar sólo ese tipo de sillones.

En ese caso tendríamos $x = 0$ y deberíamos hallar el máximo valor de "y" que cumpla las restricciones dadas , lo que nos daría $y = 300 / 15 = 20$ ya que si tomáramos $y = 336 / 12 = 21$ se incumpliría la restricción (1).

La ganancia de la empresa sería entonces: $G(0; 20) = 2100 \cdot 20 = 42000$ \$ / sem.

Sin embargo podrías pensar que, siendo menor el tiempo de tapizado de los sillones tipo (A) , lo conveniente sería dedicarse sólo a ese tipo de sillones pues la cantidad de ellos sería mayor.

En estas condiciones tendríamos entonces: $y = 0$ y deberíamos hallar el valor máximo de "x" lo que nos conduciría a $x = 336 /12 = 28$.

La ganancia sería entonces : $G(28; 0) = 1500 \cdot 28 = 42000$ \$ / sem.

El resultado estaría indicando que en el problema propuesto y desde el punto de vista de la ganancia de la empresa sería indiferente una u otra de las soluciones.

Nos surge sin embargo la duda de si no existirá la posibilidad de tapizar ambos tipos de sillones logrando con ello una ganancia superior a 42000 \$ / sem.

Una vez resuelto el problema matemáticamente , según veremos a continuación , obtendremos la solución correcta.

Los problemas de Programación Lineal en dos variables que tratamos en esta publicación admiten una resolución gráfica sencilla .

Tratemos de llevarla adelante paso a paso.

Lo primero que debes recordar es la resolución gráfica de inecuaciones lineales en dos variables que has visto en el curso.

Tomemos la restricción número (1) de nuestro ejercicio.

$$10\,x + 15\,y \leq 300$$

Resolver la inecuación significa hallar el conjunto de parejas (x,y) que verifiquen la doble condición:

$10x + 15y = 300$

$10x + 15\,y < 300$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (XOY).

Las infinitas parejas (x , y) que cumplen la primera condición son coordenadas de los infinitos puntos de la recta de ecuación $10x + 15y = 300$.

Debemos ahora encontrar las infinitas parejas que verifican la segunda condición.
La recta anterior divide al plano en dos semiplanos y desde el punto de vista gráfico uno de ellos es la solución de la inecuación $10x + 15y < 300$.
Queda por determinar cuál de los dos es la solución. Para ello basta que tomemos un punto arbitrario del plano no perteneciente a la recta que hemos considerado y verifiquemos si sus coordenadas verifican o no la inecuación.
Si la verifican , el semiplano al cual pertenece el punto será el buscado, en caso de que no verifiquen el semiplano buscado será el opuesto. Si nuestra recta no pasa por el origen de coordenadas el punto más sencillo para efectuar el tanteo es justamente el (0,0).
Tendremos entonces: $10.(0) + 15.(0) = 0 < 300$.
El origen de coordenadas verifica pues la desigualdad y el semiplano que lo contiene representará gráficamente la solución buscada.
La unión de la recta y el semiplano hallado es la solución de la restricción número (1) de nuestro ejercicio.
En forma similar resolvemos las restantes restricciones. Las figuras siguientes nos muestran las soluciones .

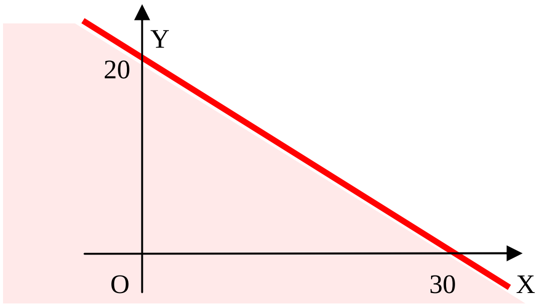


Fig. (1)

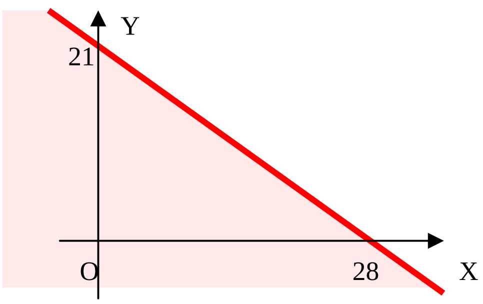


Fig. (2)

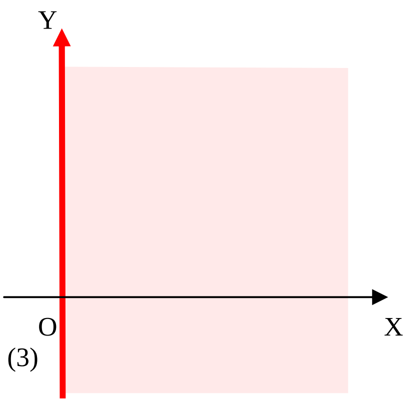


Fig. (3)

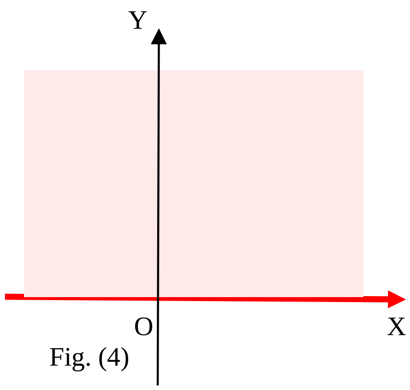


Fig. (4)

Estamos ahora en condiciones de hallar las infinitas parejas de números reales (x , y) que verifican todas las restricciones impuestas.

Basta para ello hallar el conjunto intersección de los cuatro semiplanos que hemos representado en las figuras anteriores.

Ello nos conduce al polígono convexo OABC de la Fig. (5), al que denominaremos **“recinto de puntos factibles**”, queriendo significar con ello que cualquier punto perteneciente a él tiene por coordenadas una pareja de números (x ,y) que verifican el sistema de inecuaciones formado por las restricciones, mientras que las coordenadas de cualquier punto del plano **no** perteneciente al recinto **no** verifican el sistema.

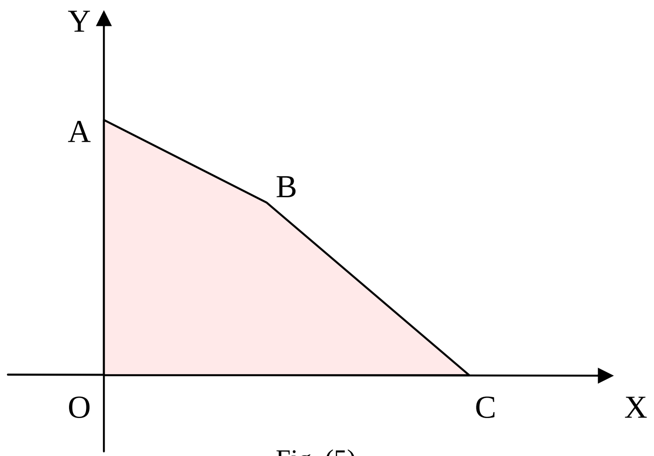


Fig. (5)

O (0,0) A (0 , 20) B(12 , 12) C(28 , 0)

Si tomamos por ejemplo el punto P (5,6) que evidentemente pertenece al recinto podemos concluir que la empresa puede decidir tapizar 5 sillones del tipo (A) y 6 sillones del tipo B a la semana pues sus recursos escasos no se lo impiden.

En ese caso la ganancia que obtendría sería :

G(5; 6) = 1500.(5) +2100 .(6) = 20100 $ /sem.

Si bien se trata de una opción posible para la empresa claramente no resulta conveniente. Recuerda que las parejas (0 , 20) y (28 , 0) daban una ganancia mayor.

Por otro lado, si tomamos por ejemplo el punto (20 ,30) que claramente es exterior al polígono , teóricamente la empresa podría obtener una ganancia de :

G(20; 30) = 1500. (20) + 2100.(30) = 93000 $ / sem.

Sin embargo la tapicería no estaría en condiciones de tapizar 20 sillones tipo (A) y 30 sillones tipo (B) a la semana pues no contaría con la tela ni con las horas de trabajo necesarias para ello.

Desde el punto de vista matemático la pareja (20; 30) viola las restricciones (1) y (2).

Si bien seguimos sin saber aún cuál o cuales parejas solucionan nuestro problema hemos avanzado en su resolución pues conocemos el conjunto de las parejas posibles.

Para dar solución definitiva al ejercicio haremos uso ahora de las **curvas de nivel** de la función G.

Recuerda que llamamos curvas de nivel de una función **f** de variables **x , y** a la familia de curvas del plano XOY que cumplen que

$$\mathbf{f(x,y) = k} \qquad \mathbf{con} \quad \mathbf{k \in R}$$

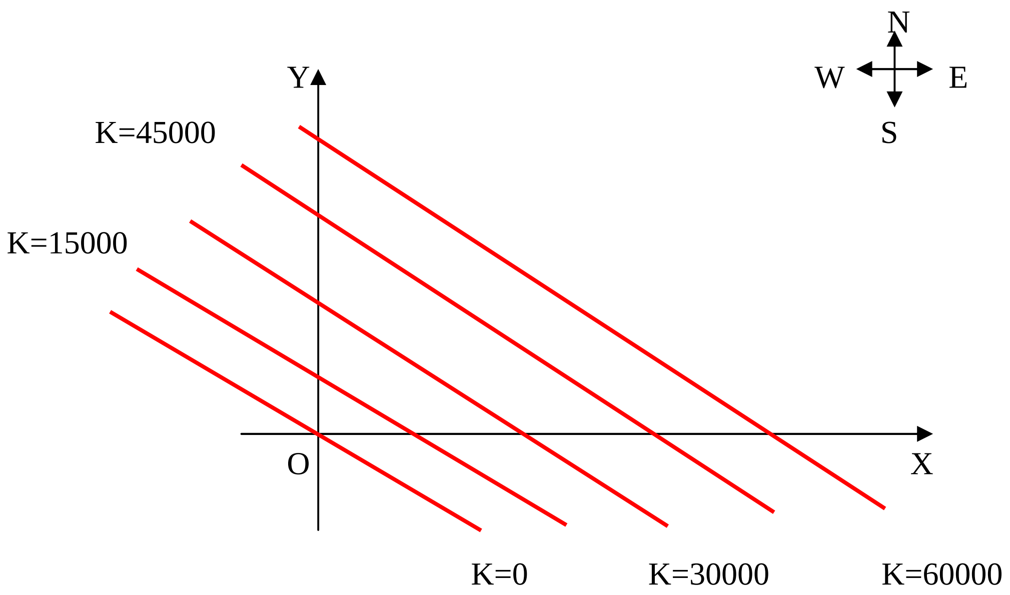
En nuestro caso las curvas de nivel de la función G cumplirán:

$$\mathbf{1500\,x + 2100\,y = k}$$

Como puedes reconocer fácilmente se trata de una familia de rectas de coeficiente angular $m = -\dfrac{1500}{2100} = -\dfrac{5}{7}$ y ordenada en el origen $n = \dfrac{k}{2100}$.

Las rectas serán por consiguiente paralelas entre sí.

En la figura (6) representamos algunas de ellas para distintos valores de **k**.



Observa que al aumentar **k** la recta se traslada en la dirección noreste alejándose del origen de coordenadas.

Podemos preguntarnos porqué utilizar el concepto de curvas de nivel en la resolución de nuestro ejercicio. ¿Qué propiedad tienen las curvas de nivel que vuelve pertinente su aplicación?

Considera por ejemplo la recta de la fig. (5) correspondiente a K=30000. Cualquier punto de esa recta tiene por coordenadas parejas de números reales (x,y) que verifican la ecuación de la misma , es decir la ecuación : $1500x + 2100y = 30000$.

Como el primer miembro de la ecuación es la expresión analítica de la función ganancia G, la conclusión es que si la empresa tapizara un número <u>**x**</u> de sillones del tipo (A) e <u>**y**</u> sillones del tipo (B) siendo la pareja (x , y) coordenadas de un punto cualquiera de esa recta , la ganancia que obtendría sería de 30000 \$ / sem.

En este sentido podríamos decir que cada curva de nivel , en nuestro caso cada recta, es una "<u>recta de ganancia constante</u>" y la ganancia está dada justamente por el valor de **k**.

Cada una de las recta está indicando entonces una posible ganancia a obtener por la empresa , por lo menos teóricamente .

Porqué afirmamos "por lo menos teóricamente". Pues porque no debemos olvidarnos del "recinto de puntos factibles" que ya teníamos determinado.

Permitiéndonos cierta libertad en el lenguaje podemos afirmar que la empresa no tendrá la opción de elegir cualquier recta de nivel para trabajar sino sólo aquellas que contengan puntos del recinto de puntos factibles.

En la fig. (6) hemos graficado dos rectas de distinta ganancia. Si observas la recta de k = 30000 podrás concluir que para obtener esa ganancia semanal la empresa sólo podrá trabajar en puntos del segmento MN , no pudiendo en cambio trabajar en ningún punto de la recta de k = 60000 ya que ésta no contiene ningún punto del recinto.

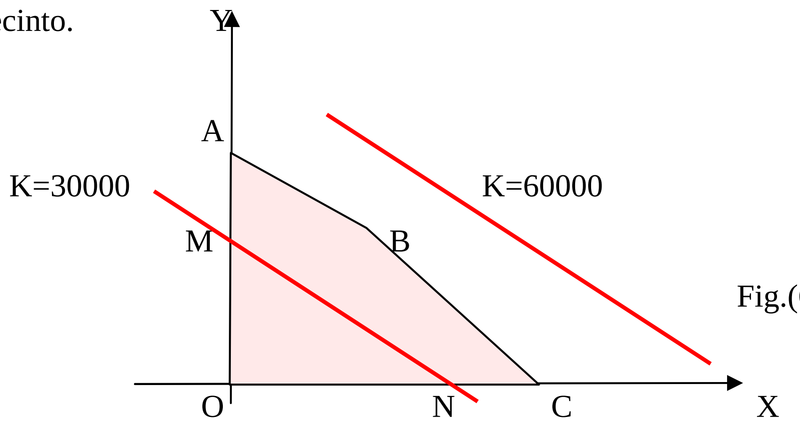


Fig.(6)

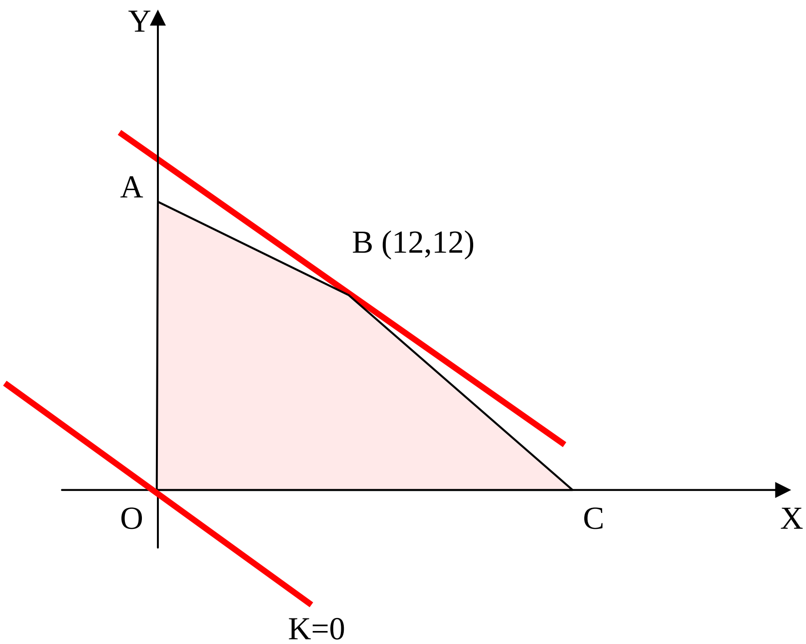
Estamos a un paso de hallar la solución del ejercicio planteado y seguros estamos que ya has deducido como encontrarla.

Deberemos buscar la recta de nivel correspondiente al mayor valor de **k** que contenga algún punto del recinto de puntos factibles.

Para lograrlo te sugerimos dibujar alguna de ellas, por ejemplo la correspondiente a k=0 que obviamente pasará por el origen de coordenadas, y luego trasladarla en la dirección y sentido correctos (en nuestro caso en la dirección noreste) hasta encontrar el punto buscado.

Obtenemos así el vértice B del polígono de puntos factibles, vértice cuyas coordenadas eran (12 , 12).

En la Fig. (6) hemos representado la recta de nivel que nos da la solución buscada.



Hemos alcanzado finalmente la solución a nuestro ejercicio: **la empresa deberá tapizar 12 sillones del tipo (A) y 12 sillones del tipo (B) y obtendrá por ello una ganancia de** 1500.(12) + 2100.(12) = 43200 $ / sem.

En resumen, para resolver los problemas de Programación Lineal que te proponemos en esta publicación deberás:

1) Elegir las incógnitas del problema y hallar la expresión analítica de la función que se te pide maximizar y/o minimizar que en todos los casos será una <u>función lineal</u> de dos variables.

2) Deberás expresar en forma de inecuaciones las limitaciones a que quedarán sometidas las variables sea por su propio significado como por la escasez de recursos disponibles. Las inecuaciones serán siempre lineales.
3) Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones formado, obteniendo así el recinto de puntos factibles.
4) Utilizar las rectas de nivel de la función en cuestión para hallar el vértice (o lado) del recinto de puntos factibles donde se produce el máximo y/o mínimo buscado.
5) Usando las coordenadas del punto hallado calcular el valor funcional correspondiente si el problema lo requiere.

Observaciones.

- La resolución gráfica que hemos desarrollado exige de tu parte especial cuidado a la hora de representar las rectas involucradas en el problema, sean lados del recinto de puntos factibles como curvas de nivel de la función. Cualquier error o falta de precisión en la representación puede provocar un cambio en las pendientes de las rectas y conducirte a un vértice equivocado. Muchas veces esas pendientes son muy cercanas y exigen especial atención.
- El hecho de que la función ganancia de nuestro ejercicio se maximizara en un vértice del polígono de puntos factibles no ha sido casual. Recuerda del curso que es posible demostrar la siguiente proposición: " El valor máximo y/o mínimo de la función objetivo, en un problema de programación lineal de dos variables, ocurre siempre en uno de los vértices o lado del recinto poligonal convexo de puntos factibles, sea este recinto acotado o no acotado".
- Cuando la pendiente de las curvas de nivel de la función coincida con la pendiente de uno de los lados del recinto de puntos factibles la función se maximizará o minimizará en todos los puntos de ese lado. Entre los ejercicios que te proponemos encontrarás alguno en que este hecho se produce.
- Aceptando la proposición que hemos enunciado líneas arriba podemos resolver nuestro ejercicio sin recurrir al método gráfico. Esta forma de resolución la utilizaremos en algunos de nuestros ejercicios.

Resolvamos ahora nuevamente el ejercicio No.0 sin recurrir a la representación gráfica.
Debemos en primer lugar determinar los vértices del recinto de puntos factibles.

Los vértices del recinto serán puntos de intersección de rectas definidas por las restricciones aunque no todos los puntos de intersección serán vértices.

Estos últimos serán los puntos de intersección cuyas coordenadas verifiquen todas las restricciones impuestas.

Una vez determinados los vértices sólo restará hallar los valores funcionales de la función objetivo y decidir entonces cual o cuales corresponden a las solución buscada.

En el cuadro siguiente sintetizamos todos los cálculos necesarios.

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértices	Valor funcional
10x+15y=300 12x+16y=336	(12,12)	Ninguna	B	43200
10x+15y=300 x = 0	(0, 20)	Ninguna	A	42000
10x+15y=300 y = 0	(30, 0)	(2)	---	--------
12x+16y=336 x = 0	(0, 21)	(1)	---	-------
12x+16y=336 y = 0	(28, 0)	Ninguna	C	42000
x = 0 y = 0	(0,0)	Ninguna	O	0

Comparando los valores funcionales concluímos que el máximo se produce en el vértice B o sea que la solución de nuestro problema es : x = 12   y = 12   y la ganancia de la empresa alcanza a 43200 ($ / sem) resultado al que habíamos llegado anteriormente.

Observa en el cuadro que los vértices A y C corresponden a iguales ganancias lo que indica que ambos pertenecen a una misma curva de nivel de la función G y ello ocurre porque los coeficientes angulares de la recta AC y de las rectas de nivel son iguales como fácilmente puedes comprobar. El valor común es m = - 5/7.

Como comentario final de esta introducción mencionaremos que los problemas de programación lineal suelen ser generalmente de más de dos variables y con un número de restricciones que suelen superar a veces largamente las cuatro que hemos utilizado en nuestros ejercicios

Ya para tres variables el método gráfico, si bien es aplicable, se vuelve inconveniente (debemos trabajar en el espacio en lugar del plano) y para un número mayor de variables obviamente deja de tener sentido.

El método de cálculo al que recurrimos como segunda alternativa se vuelve extremadamente laborioso, por lo que aparecen nuevos métodos que resuelven esos problemas pero que están fuera de lo pretendido por el programa de la asignatura.

Los ejercicios que te proponemos son sólo una introducción al tema.

Es posible que en cursos posteriores o por interés personal desees profundizar sobre programación lineal y no lineal por la relevancia que el tema posee.

C A P I T U L O 1

E N U N C I A D O S

Ejercicio No.1 (Resolución pag.19)

Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $2x - y > 4$

b) $2x - y \geq 4$

Ejercicio No.2 (Resolución pag.19)

Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 4y > 2$

b) $2x + 4y \geq 2$

Ejercicio No.3 (Resolución pag. 20)

Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $x > 2$

b) $y \leq 3$

Ejercicio No.4 (Resolución pag. 20)

Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x < 3 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \geq 0 \\ 3x + y > 6 \end{cases}$

Ejercicio No.5 (Resolución pag. 22)

Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y \geq 2 \\ 2x + y > 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + y \geq 1 \\ -6x + 3y \leq 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ -x + 2y < 0 \end{cases}$

Ejercicio No.6 (Resolución pag. 23)

Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio No.7 (Resolución pag. 24)

Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 5x + 6y \leq 2400 \\ 3x + y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.8 (Resolución pag. 25)

Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 5y \leq 60 \\ 2x + 10y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.9 (Resolución pag. 25)

Resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - 10 \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio No.10 (Resolución pag. 25)

Graficar las rectas de ecuación**:** **$2x - y = n$** en un mismo sistema de ejes para

a) $n = 0$
b) $n = 1$
c) $n = 3$
d) $n = -1$
e) $n = -2$

Ejercicio No.11 (Resolución pag. 26)

Graficar las rectas de ecuación**:** **$3x + 6y = n$** en un mismo sistema de ejes para:

a) $n = 0$
b) $n = 1$
c) $n = 5$
d) $n = 8$

¿ Qué particularidad presentan las rectas que has graficado ?

Ejercicio No.12 (Resolución pag. 26)

Repite el ejercicio anterior con la recta:

$$\mathbf{4x + 2y = n}$$

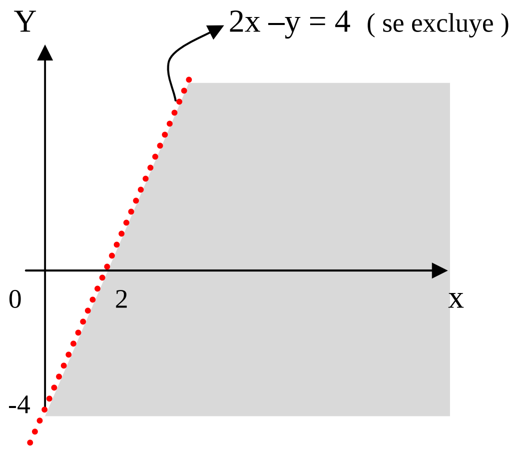
CAPITULO 1

RESOLUCIONES

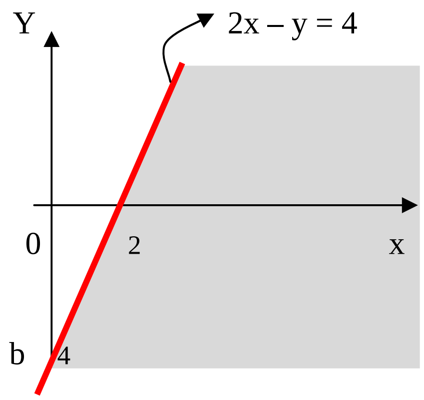
Ejercicio No. 1

a) La solución es uno de los semiplanos determinados por la recta de ecuación $2x - y = 4$.

Probando en la desigualdad dada con cualquier punto del plano no perteneciente a la recta, concluimos que la solución es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas



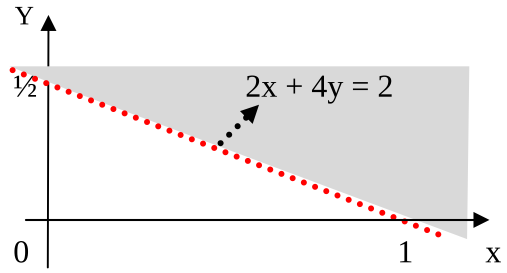
b) La única diferencia con la parte **a)** es que en este caso la recta $2x - y = 4$ es parte del conjunto solución.



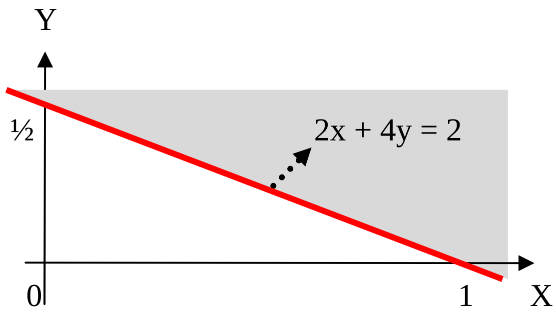
Ejercicio No. 2

Razonando en forma similar al ejercicio anterior las soluciones son:

a)

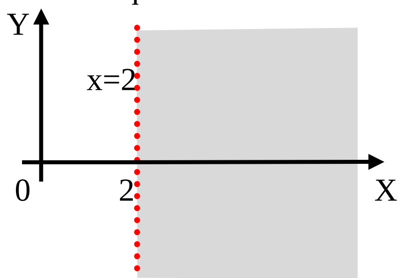


b) La misma solución incluyendo la recta $2x + 4y = 2$.

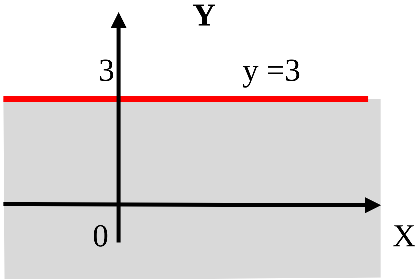


Ejercicio No. 3

a) Se deduce fácilmente que la solución es la indicada.



b) Idem

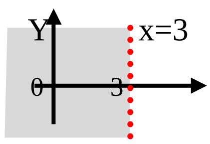


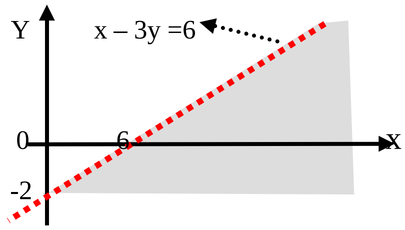
Ejercicio No. 4

a) Para resolver el sistema representaremos separadamente ambas inecuaciones y luego en un mismo sistema de ejes buscaremos la intersección de ambos conjuntos solución.

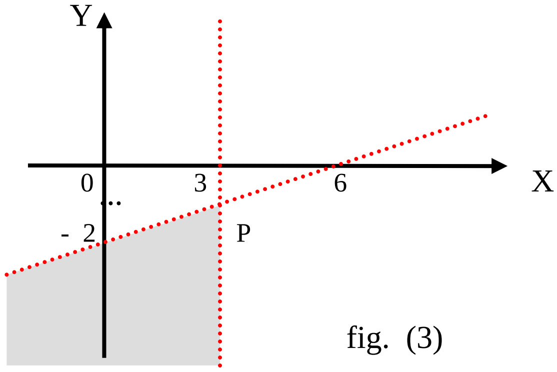
Fig. (2)

Fig. (1)





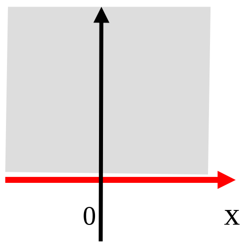
De las soluciones anteriores concluyes que la solución del sistema es la indicada en la figura (3).



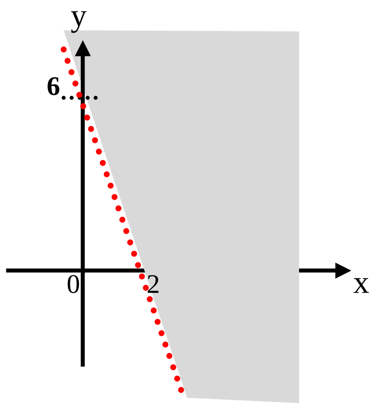
Punto P(3, -1) fig. (3)

b)

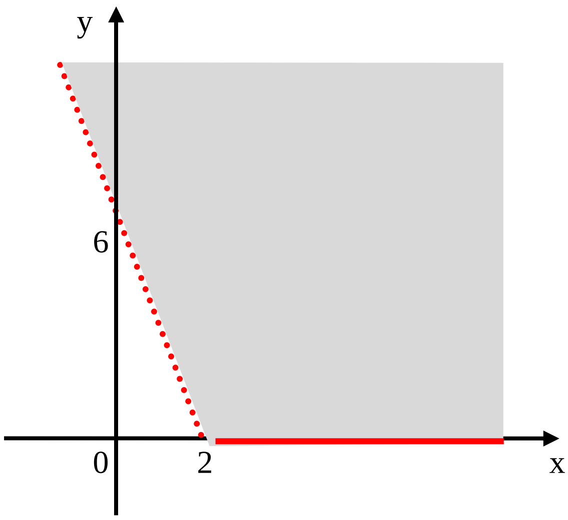
$y \geq 0$



$3x + y > 6$



La solución será entonces:



Ejercicio No. 5

a)

$x - y \geq 2$

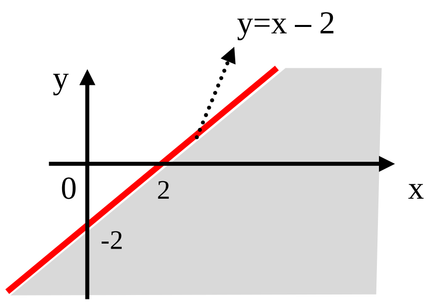


fig (1).

$2x + y > 4$

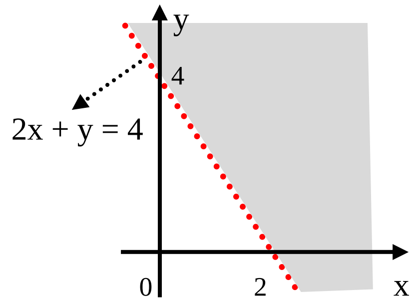


fig. (2)

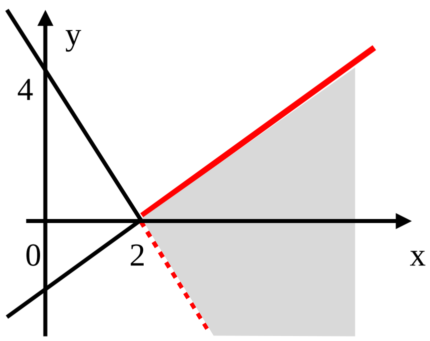
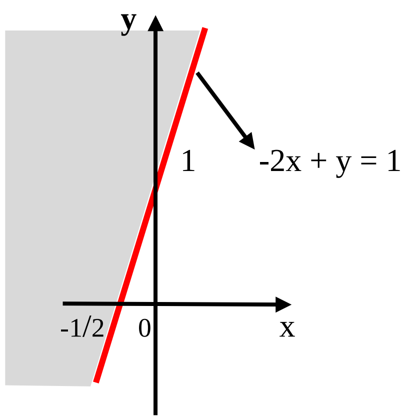
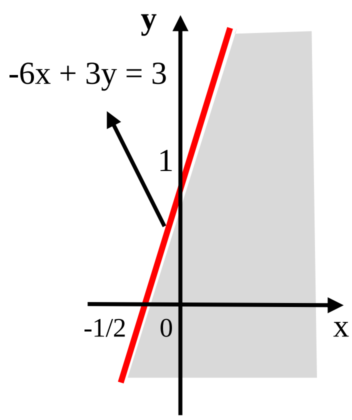


fig. (3)

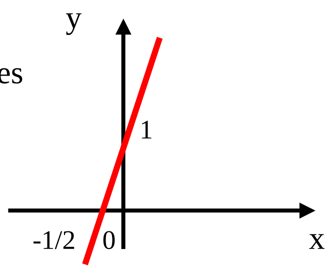
La solución del sistema planteado es la indicada en la fig. (3).

b)

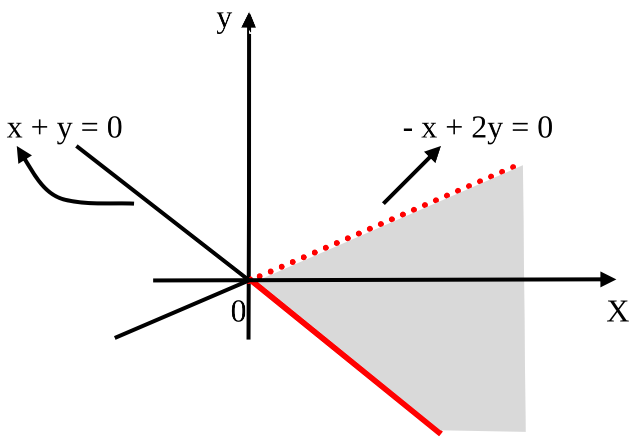




Como ambas rectas son coincidentes (coeficientes proporcionales), la solución está expresada gráficamente por la recta.

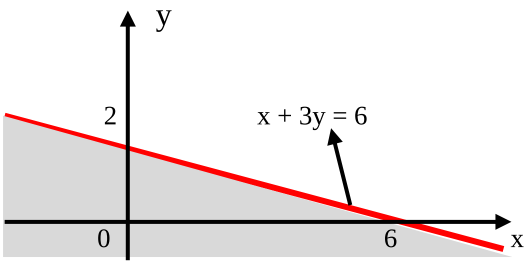


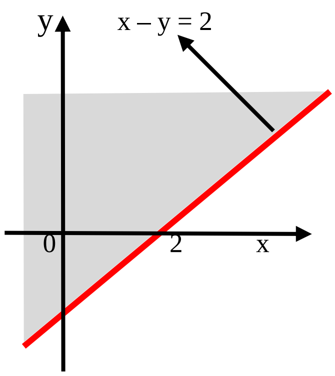
c) La solución gráfica del sistema de inecuaciones será:

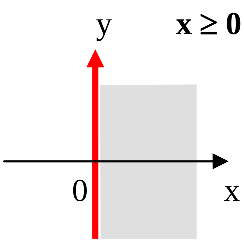


Ejercicio No. 6

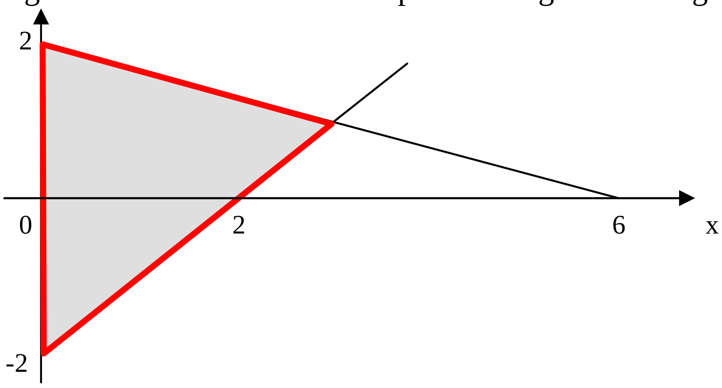
a) $\mathbf{x + 3y \le 6}$ $\mathbf{x - y \le 2}$



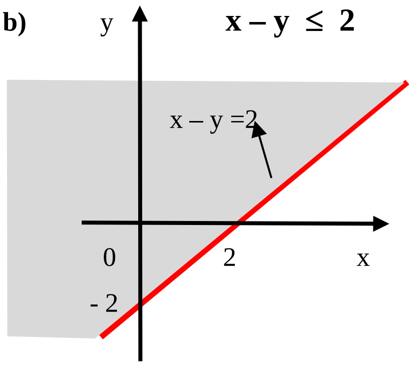


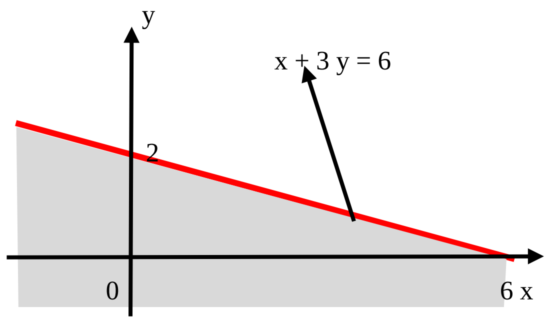


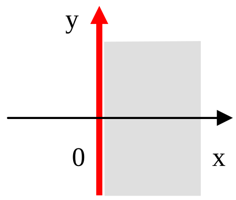
La solución gráfica del sistema está dada por el triángulo de la figura.

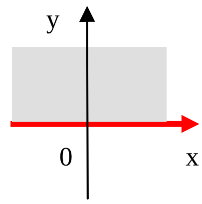


b) **$x - y \leq 2$** **$x + 3y \leq 6$**



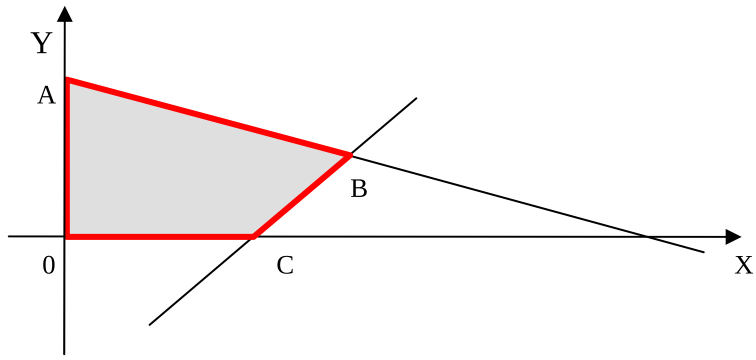






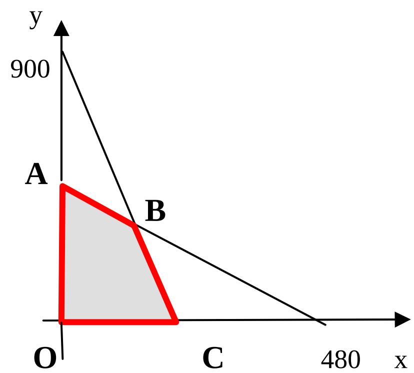
$x \geq 0$ **$y \geq 0$**

La intersección de los cuatro semiplanos nos da el cuadrilátero convexo de la figura, solución del sistema.



Los vértices tienen por coordenadas : O(0,0) A(0,2) B(3,1) C(2,0) .

Ejercicio No.7

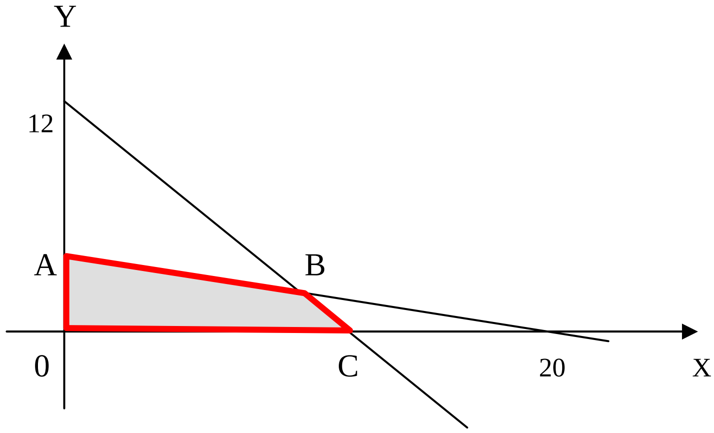


La solución gráfica del sistema está dada por el cuadrilátero convexo OABC de la figura cuyos vértices tienen por coordenadas :

O (0,0) A (0 , 400) B $\left(\frac{3000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$ C (300,0)

Ejercicio No. 8

La solución gráfica del sistema está representada por los puntos del cuadrilátero convexo OABC de la figura.

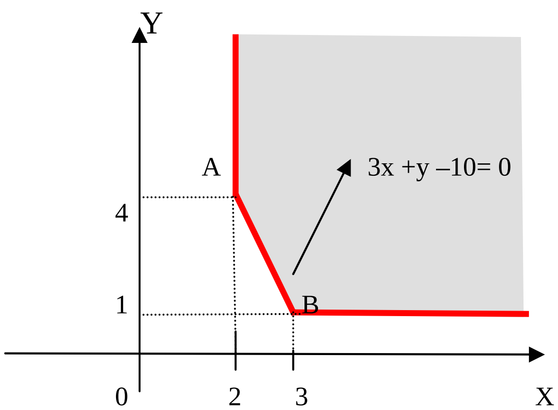


Los vértices tienen por coordenadas:

O(0,0) A(0,4) B(10,2) C(12,0) .

Ejercicio No. 9

La solución es la zona sombreada de la figura. Repara en el hecho que se trata de un recinto no acotado.

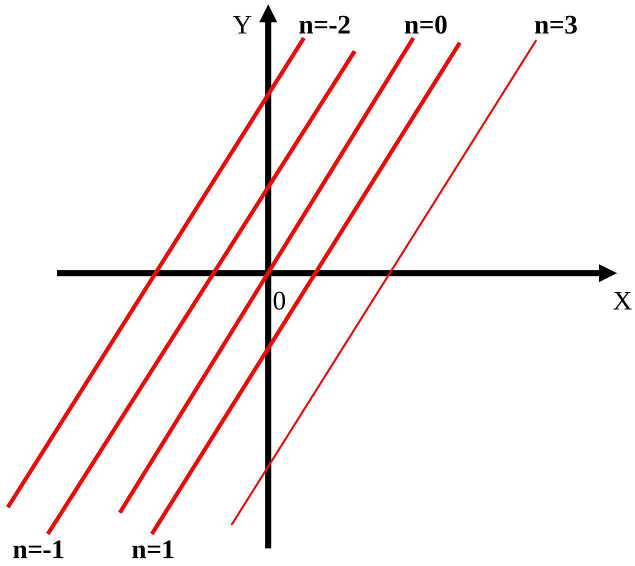


Ejercicio No. 10

Considera la función f : f(x , y) = 2x – y. En este ejercicio te estamos pidiendo que grafiques algunas de sus **curvas de nivel,** que es un haz de rectas paralelas.

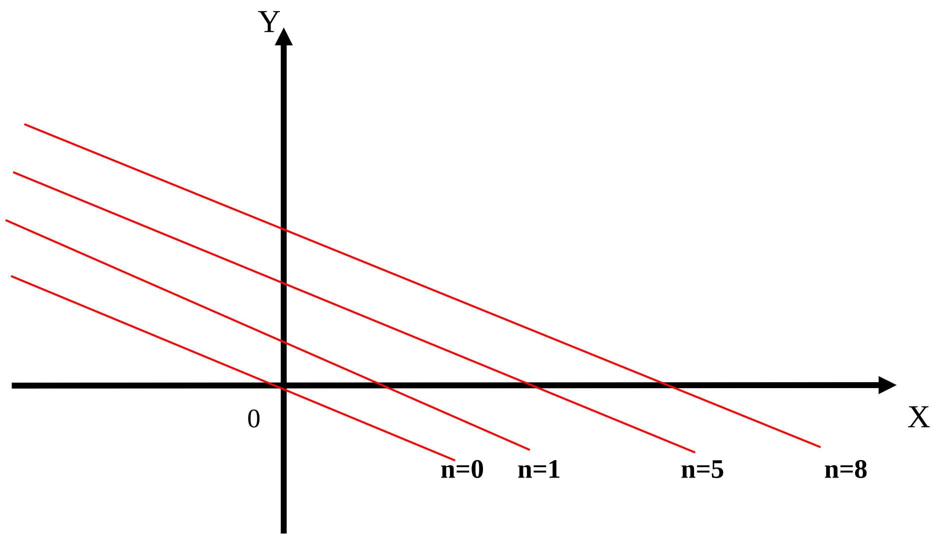
.

Las ecuaciones de esas rectas están dadas por la ecuación : **y = 2x - n**



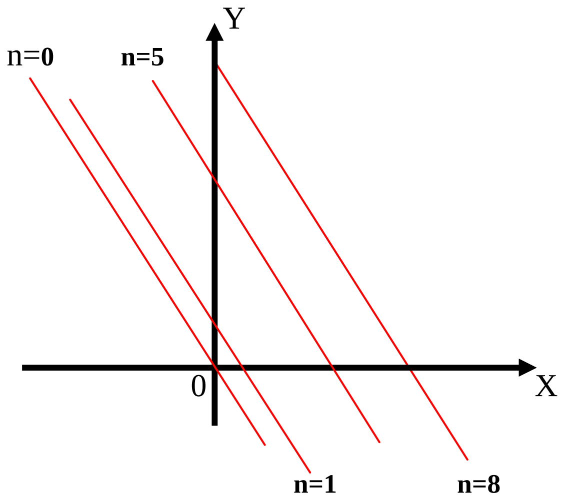
Ejercicio No. 11

Este ejercicio es completamente similar al anterior. Obtendrás rectas paralelas con pendiente negativa igual a -1/2.



Ejercicio No.12

Las rectas paralelas , curvas de nivel de la función f: f (x,y) = 4x + 2y tienen pendiente igual a -2.


Y
n=0
n=5
0
X
n=1
n=8

CAPITULO 2

ENUNCIADOS

Ejercicio No.1 (Resolución pag. 37)

Considera la función: $f(x, y) = 10x + 10y$

Si el polígono de puntos factibles tiene por vértices los puntos:

O(0,0) , A(0,6) , B (6,4) , C(7,3) , D(8,0) te pedimos:

a) Representa el polígono de puntos factibles.

b) Maximiza la función si se admiten como soluciones valores (x , y) **no** necesariamente enteros .

c) ¿Cuántas soluciones con (x) e (y) enteros crees que existen? Indícalas.

Ejercicio No.2 (Resolución pag. 38)

Maximizar la función $f(x,y) = 4x + 5y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.3 (Resolución pag. 40)

Minimizar la función $f(x,y) = 12x + 8y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 1 \\ 4x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.4 (Resolución pag. 41)

a) Maximizar la función **$f(x,y) = 3x + 4y$** sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Con las mismas restricciones que en la parte **a) maximizar** ahora la función:

$$\mathbf{f(x,y) = 4x + 3y}$$

Ejercicio No.5 (Resolución pag. 42)

Dada la función "f " tal que **$f(x,y) = 4x + 4y$** y las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 2.x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representa el polígono de puntos factibles.

b) Determina las coordenadas de cada vértice y el correspondiente valor de la función "f ".

c) Maximiza la función "f " sujeta a las restricciones dadas.

Ejercicio No.6 (Resolución pag. 43)

Repite el ejercicio anterior con la función **$f(x,y) = 5x + 10y$** y las restricciones:

$$\begin{cases} 5x + 5y \leq 60 \\ 2x + 10y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.7 (Resolución pag. 44)

Muestra que el siguiente problema de **maximización** no tiene solución e indica porqué.

Función "f " : $\mathbf{f(x,y) = 5\,x + y}$

Restricciones:
$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 3\,x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.8 (Resolución pag. 44)

Muestra que el siguiente problema de **maximización** no tiene solución e indica porqué.

Función "f ": $\mathbf{f(x,y) = a\,x + b\,y}$ con (a) y (b) números reales positivos.

Restricciones
$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2\,x + 3\,y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio No.9 – Fabricación de juguetes - (Resolución pag. 44)

Una empresa está dedicada a la fabricación de juguetes de plástico de dos tipos diferentes que llamaremos Tipo (I) y Tipo (II).

La fabricación de cada unidad del juguete Tipo (I) necesita 0.5 horas de trabajo de una máquina M_1 y 0.25 horas de otra máquina M_2.

El juguete del Tipo (II) necesita 1 hora de M_1 y 1 hora de M_2 .

El orden en que se efectúan las operaciones en las máquinas es indiferente.

La máquina M_1 está disponible 40 horas por semana y la máquina M_2 , 25 horas por semana.

Cada unidad del juguete Tipo (I) dá una ganancia o utilidad de U$S 10 y cada unidad del juguete Tipo (II) dá una ganancia de U$S 30.

Si se sabe que todos los juguetes fabricados serán vendidos, se desea saber cuántas unidades deben fabricarse por semana de cada uno de los tipos de juguetes para que la empresa obtenga **máxima ganancia**.

Ejercicio No. 10 – Ganancia de empresa (Resolución pag. 46)

Una pequeña empresa está fabricando dos tipos de artículo que llamaremos (A) y (B).

Cada unidad del artículo (A) insume 2 Kg. de materia prima y cada unidad del artículo (B) 3 Kg. La fábrica tiene asegurada una existencia de materia prima de 12 Kg. por día.

El artículo (A) necesita 2 horas de trabajo en máquina, mientras que el artículo (B) necesita 1 hora.

La máquina está disponible 8 horas al día.

El artículo (A) dá una ganancia de 2,5 U$S por unidad , y el artículo (B) de 5 U$S por unidad.

El empresario está fabricando 3 unidades por día del artículo (A) y 2 unidades por día del artículo (B) y te consulta si está trabajando adecuadamente para obtener **máxima ganancia**.

¿ Qué le contestarías al empresario?

Ejercicio No. 11 – Ganancia de empresa (Resolución pag. 47)

Una empresa está fabricando dos tipos de artículos que llamaremos Art.(1) y Art.(2).

El Art.(1) necesita 1 Kg. de plástico y 1.5 Kg. de aluminio, mientras que el Art. (2) necesita 1.5 Kg. de plástico y 1.5 Kg. de aluminio.

El fabricante dispone semanalmente de 50 Kg de plástico y 60 Kg. de aluminio.

Determina las cantidades a fabricar por semana de cada tipo de artículo para obtener **máxima ganancia** si:

a) El artículo (1) dá una ganancia por unidad de U$S 4 y el artículo (2) de U$S 5.

b) ¿Qué ocurre si las utilidades cambian a: 6 U$S por unidad para el Art.(1) y 5 U$S por unidad para el Art.(2)?

Ejercicio No. 12 – Armado de computadoras (Resolución pag. 49)

Un taller de armado de computadoras produce dos modelos de las mismas que llamaremos Mod. (I) y Mod. (II).

El Mod.(I) requiere 1 horas de mano de obra especializada y 2 hora de mano de obra no especializada.

El Mod (II) requiere 1 hora de mano de obra especializada y 1 hora de no especializada .

Se disponen de 120 horas de mano de obra especializada y 200 horas de mano de obra no especializada por semana.

El Mod.(I) produce una utilidad de 60 U$S por unidad y el Mod. (II) de 30 U$S por unidad.

a) Si sólo se admiten soluciones enteras, ¿ cuántas posibilidades de obtener máximas utilidades existen?

b) ¿ Cuál es el **menor** número de unidades del modelo (I) y el correspondiente número de unidades del modelo (II) que deben armarse por semana para obtener máximas utilidades?

c) Cuál es el **mayor** número de unidades del modelo (I) y el correspondiente número de unidades del modelo (II) que deben armarse por semana para obtener máximas utilidades?

Ejercicio No. 13 – Costo de Dieta (Resolución pag. 51)

Una persona debe cumplir una dieta que le exige consumir por semana al menos 1 Kg. de carbohidratos y ½ Kg. de proteínas.

Para ello cuenta con dos alimentos que llamaremos (A) y (B) que están constituídos exclusivamente por carbohidratos y proteínas.

El alimento (A) contiene 90% (en peso) de carbohidratos y el resto de proteínas, mientras que el alimento (B) contiene 60% de carbohidratos y el resto de proteínas.
El alimento (A) cuesta 20 $ / Kg. y el alimento (B), 40 $ / Kg.
¿Qué cantidad de cada alimento deberá consumir la persona para que el costo de su dieta sea **mínimo?**

Ejercicio No. 14 – Confección de prendas (Resolución pag. 52)

Una empresa que confecciona ropa está dedicada a la fabricación de dos tipos de prendas de vestir que denominaremos (I) y (II).
Ambas prendas requieren el uso de dos máquinas M_1 y M_2, siendo indiferente el orden en que se realizan ambas operaciones.
Cada prenda del tipo (I) debe permanecer 5 minutos en la máquina M_1 y 3 minutos en la máquina M_2.
Cada prenda del tipo (II) debe permanecer 6 minutos en M_1 y 2 minuto en M_2.
La máquina M_1 está disponible 40 horas a la semana y la máquina M_2 15 horas por semana.
Si cada prenda del tipo (I) produce una utilidad de $40 y cada prenda del tipo (II) una utilidad de $ 50, te pedimos:
¿ Cuántas unidades de ambas prendas deben confeccionarse semanalmente para que la empresa obtenga máxima ganancia?
)

Ejercicio No. 15 – Fabricación de bibliotecas (Resolución pag. 53)

Una empresa fabrica dos tipos distintos de bibliotecas metálicas que denominaremos como Tipo (I) y Tipo (II).
Ambas requieren la utilización de piezas de dos metales diferentes a las que llamaremos piezas (A) y piezas (B).
Cada unidad de la biblioteca tipo (I) requiere 3 unidades de las piezas (A) y 7 unidades de las piezas (B), mientras que cada unidad de las del Tipo (II) requiere 5 unidades de las piezas (A) y 1 unidad de la pieza (B).

Se dispone en total de 25 unidades de la pieza (A) y 21 unidades de la pieza (B) por semana.

Las bibliotecas del tipo (I) dan una utilidad de U$S 20 y las del tipo (II) de U$S 25.

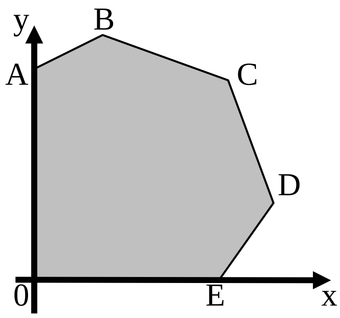
a) Considerando admisibles soluciones fraccionarias, ¿cuántas bibliotecas de cada tipo se deben fabricar para tener utilidad **máxima**? Calcular esa utilidad.

b) Calcular una solución entera redondeando la solución fraccionaria obtenida en **a)**.

c) Calcular la utilidad en todos los vértices del polígono de soluciones factibles. ¿ Es la solución redondeada de la parte **b)** la que dá **máxima** utilidad?.

Ejercicio No. 16 – Ganancia de empresa (Resolución pag. 54)

Después de graficar las restricciones en un problema de programación lineal , se obtiene la región de puntos factibles que se indica en la figura.



O (0,0) , A (0,3), B (1,4), C (3,3) , D(4,1) , E(3,0).

La función ganancia a **maximizar** es:

$$\mathbf{G\ (x,y) = 40\ x + 10\ y}$$

a) Determina el valor máximo de la función (G) , hallando el valor de la misma en cada vértice del polígono.

b) ¿ Cuál es la pendiente de las rectas de nivel de la función (G)?

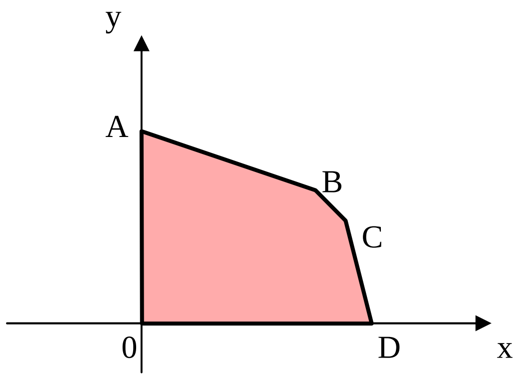
c) ¿ Entre qué valores puede variar la pendiente de las rectas de la parte anterior para que la solución óptima siga correspondiendo al vértice hallado en la parte **a)** ?

CAPITULO 2

RESOLUCIONES

Ejercicio No.1

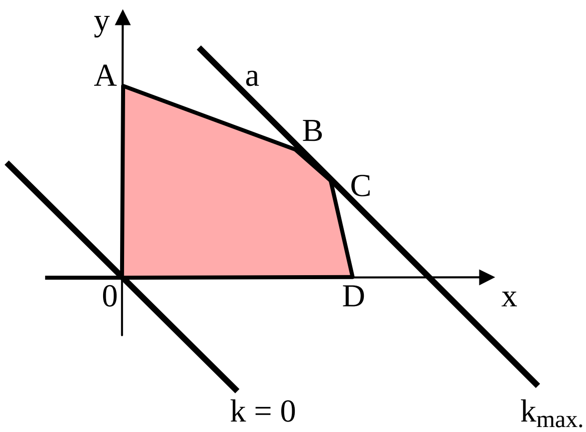
a) Representamos los vértices dados O(0,0) , A (0,6) , B (6,4) , C(7,3) , D (8,0) obteniendo el polígono convexo de la figura, polígono de puntos factibles.



b) Como f(x ,y) = 10x + 10y las curvas de nivel de la función "f" son rectas paralelas de pendiente m = - 1 y de ecuación 10x + 10y = k.

Dado que el lado BC del polígono de puntos factibles también tiene pendiente m = - 1 la recta (a) que corresponde al máximo valor de <u>k que contiene algún punto del recinto coincide con el lado BC.</u>

EL máximo valor de " f " se produce entonces en cualquier punto del **segmento BC**.



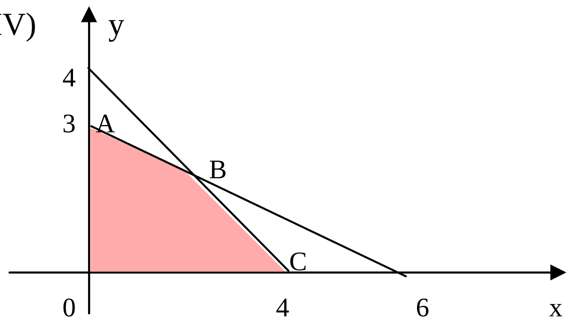
De las infinitas parejas (x ,y) que corresponden a puntos del segmento BC debemos encontrar aquellas que tienen componentes enteras.

Siendo x = 6 la abscisa del punto B y x = 7 la abscisa del punto C concluímos que las únicas soluciones enteras posibles son : (6 , 4) y (7 , 3).El valor **máximo** de la función es: f(6,4) = =10.(6) + 10.(4) = f(7,3) = 10.(7) +10.(3) = 100

Ejercicio No.2

Comencemos por encontrar la solución gráfica del sistema de inecuaciones formado por las restricciones impuestas.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 & \text{(I)} \\ x + y \leq 4 & \text{(II)} \\ x \geq 0 & \text{(III)} \\ y \geq 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

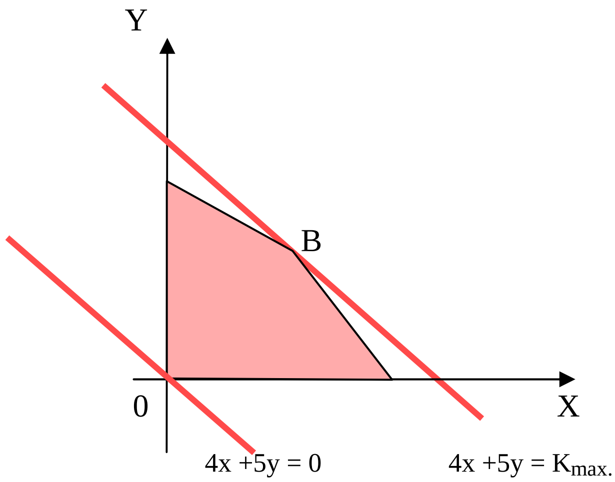


Obtenemos el polígono convexo OABC de la figura, siendo A(0,3) , B(2,2) , C(4,0).

La función a maximizar $f \,/\, f(x,y) = 4x + 5y$ tiene por curvas de nivel rectas de pendiente $-4/5$ y de ecuación $4x + 5y = k$.

Representando la recta correspondiente a $k = 0$, vemos que la recta correspondiente al máximo de la función es la que contiene al vértice B.

En conscuencia la función se maximiza para $(x, y) = (2, 2)$ y su valor **máximo** es $f(2,2) = 4(2) + 5(2) = 18$.



Como te indicábamos en la INTRODUCCION puedes resolver estos ejercicios sin necesidad de recurrir a la representación gráfica.

Admitiendo que los máximos (mínimos) se producen en los vértices o eventualmente lado del polígono convexo de puntos factibles, bastará que calculemos el valor de la función problema en cada uno de los vétices para luego decidir cuál es la solución buscada.

Debemos entonces :

1ro.) Hallar todos los vértices del polígono de puntos factibles.

2do.) Calcular el valor funcional en cada uno de ellos.

Para encontrar los vértices deberemos hallar los puntos de intersección de las rectas definidas por cada una de las restricciones tomadas por parejas y comprobar posteriormente cuales de esos puntos son realmente vértices del polígono de puntos factibles teniendo en cuenta que para serlo deberán verificar cada una de las restricciones dadas.

En nuestro ejercicio tendremos:

Rectas	Pto. Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor func.
$x + 2y = 6$ $x + y = 4$	(2,2)	Ninguna	B	18
$x + 2y = 6$ $x = 0$	(0,3)	Ninguna	A	15
$x + 2y = 6$ $y = 0$	(6,0)	(II)	---	---
$x + y = 4$ $x = 0$	(0,4)	(I)	---	---
$x + y = 4$ $y = 0$	(4,0)	Ninguna	C	16
$x = 0$ $y = 0$	(0,0)	Ninguna	O	0

El máximo se produce en el punto (2,2) y vale 18, resultado al que habíamos llegado gráficamente.

Ejercicio No.3

En este ejercicio se te pide **minimizar** la función f(x,y) = 12x + 8y sujeta a las restricciones:

$3x + 2y \geq 1$ (I)

$4x + y \geq 1$ (II)

$x \geq 0$ (III)

$y \geq 0$ (IV)

Tendremos entonces:

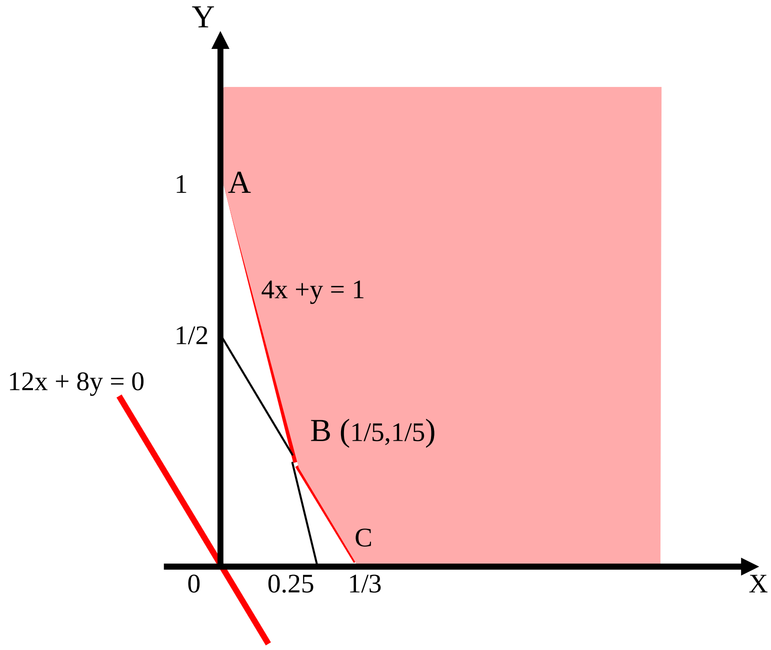
Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
3x +2y=1 4x+y=1	(1/5 , 1/5)	Ninguna	B	4
3x+2y=1 x=0	(0 , ½)	(II)	---	------
3x+2y=1 y=0	(1 / 3 , 0)	Ninguna	C	4
4x+y=1 x=0	(0,1)	Ninguna	A	8
4x+y=1 y=0	(¼ , 0)	(I)	---	------
x=0 y=0	(0,0)	(I) y (II)	---	------

El valor **mínimo** de la función es entonces **4** y como ese valor se produce en los vértices B y C ello indica que se producirá en todos los puntos del lado BC del recinto de puntos factibles.

En la figura representamos ese recinto pudiéndose comprobar que la pendiente de las curvas de nivel de la función "f" cuyo valor es –12 / 8 = - 3 / 2 coincide con la pendiente del lado BC.

Como puedes observar la recta de nivel que corresponde al valor mínimo de la funcion "f" es la recta BC , como así también que el recinto de puntos factibles es un recinto no acotado.

Puedes pensar en este caso qué contestarías si se te pidiéramos que investigaras sobre el valor máximo de la función sujeta a las restricciones dadas.



Ejercicio No.4

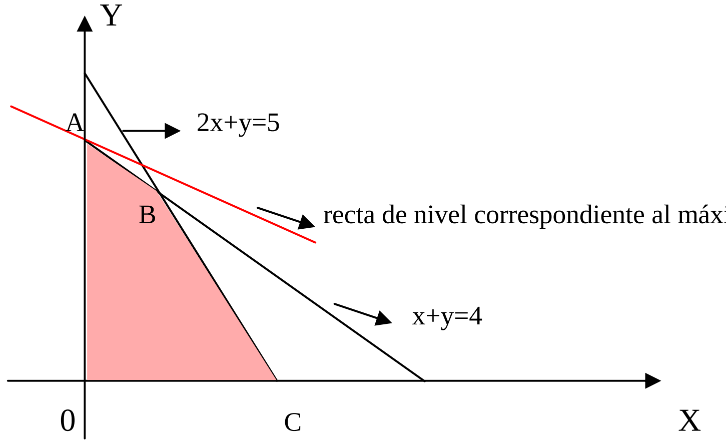
a) f (x,y) = 3x + 4y <u>Restricciones</u>: (I) $x + y \leq 4$ (II) $2x + y \leq 5$

(III) $x \geq 0$ (IV) $y \geq 0$

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
x +y =4 2x + y = 5	(1,3)	Ninguna	B	15
x + y = 4 x = 0	(0,4)	Ninguna	A	16
x + y = 4 y = 0	(4,0)	(II)	----	--------
2x + y = 5 x = 0	(0,5)	(I)	----	--------
2x +y = 5 y = 0	(5/2 ,0)	Ninguna	C	15 / 2
x = 0 y = 0	(0,0)	Ninguna	O	0

De acuerdo a los cálculos el **máximo** de la función se produce en el vértica A (0,4) y su valor es 16.

A efectos de que lo visualices te mostramos en la figura el polígono de puntos factibles y la recta de nivel que corresponde al máximo de la función.



b)

El recinto de puntos factibles es el mismo que en la parte **a)** del ejercicio, cambiando solamente la función a maximizar.

La nueva pendiente de las rectas de nivel de la función vale ahora - 4 / 3.

Calculemos la función en los vértices:

Pto. A (0,4) Valor funcional f(0,4) = 12

Pto. B (1,3) f(1,3) = 13

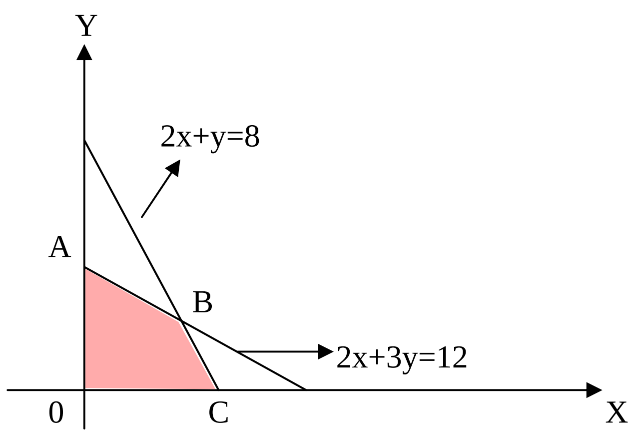
Pto. C (5/2 , 0) f(5/2 , 0) = 10

Pto. O (0,0) f(0,0) = 0

El máximo se produce entonces ahora en el vértice B y su valor es 13.

Ejercicio No.5

a)



b)

Vértices	Valor funcional
O(0,0)	0
A(0,4)	16
B(3,2)	20
C(4,0)	16

b) De acuerdo a los valores obtenidos el **máximo** de la función se produce en el punto (3,2) y vale 20.

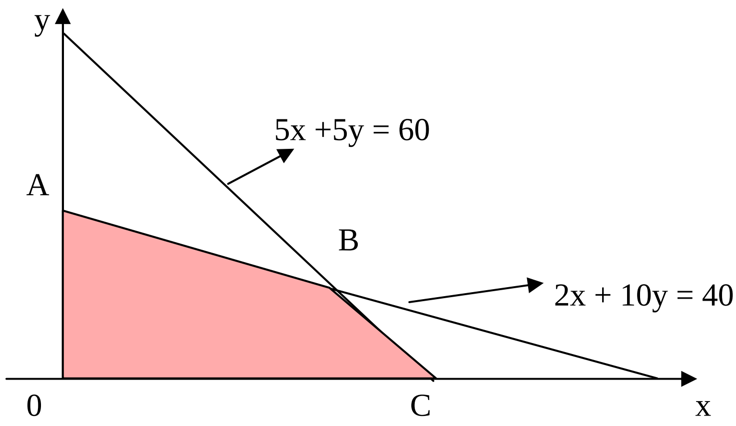
Ejercicio No. 6

f(x,y) = 5x + 10y

Restricciones:

$5x + 5y \leq 60$ (I) $2x + 10y \leq 40$ (II) $x \geq 0$ (III) $y \geq 0$ (IV)

a)



b)

Vértices	Valor funcional
O(0 , 0)	0
A(0 , 4)	40
B(10 , 2)	70
C(12 , 0)	60

c) De acuerdo a los resultados obtenidos el **máximo** se produce en el vértice B y su valor es f(10 ; 2) =70.

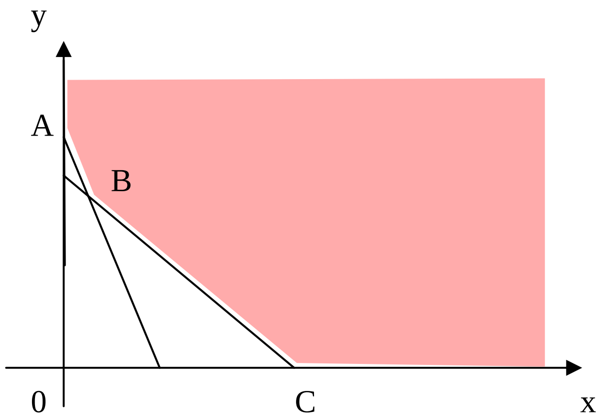
.

Ejercicio No.7

$$f(x,y) = 5x + y$$

Restricciones : $x + y \geq 5$ (I) $3x + y \geq 6$ (II) $x \geq 0$ (III) $y \geq 0$ (IV)

El conjunto de puntos factibles es el indicado en la figura.



La pendiente de las rectas de nivel de la función es - 5. Como el recinto es no acotado la función no tiene máximo.

Ejercicio No. 8

$$f(x,y) = ax + by$$

Restricciones: $x + y \geq 5$ (I) $2x + 3y \leq 6$ (II) $x \geq 0$ (III) $y \geq 0$ (IV)

Al intentar resolver el sistema de inecuaciones dadas comprobarás que el conjunto de puntos factibles es el conjunto vacío por lo que el problema planteado no admite solución.

Ejercicio No. 9

En este ejercicio te pedimos que determines el número de unidades de cada tipo de juguete que se debe fabricar por semana para obtener máxima ganancia.

En este tipo de ejercicio es conveniente, como te decíamos en la introducción, trabajar ordenadamente por la cantidad de datos que el problema involucra.

En primer lugar debes tratar de identificar y luego hallar la expresión analítica de la función a maximizar.

Una vez logrado esto, debes encontrar el sistema de inecuaciones que traduce las restricciones impuestas.

Comencemos:

la función a **maximizar** es la **ganancia** de la empresa , notémosla con “G”.

Intentemos ahora hallar su expresión analítica. Para ello llamemos:

(x) al número de unidades / semana del juguete tipo (I) que se fabrican ,

(y) al número de unidades / semana del juguete tipo (II) que se fabrican.

Como cada unidad del juguete tipo (I) da una ganancia de 10 U$S la fabricación de x unidades por semana dará una ganancia de **10.x** U$S / sem.

En forma similar la ganancia para el juguete tipo (II) será de **30.y** U$S/ sem.

La función ganancia total G tendrá entonces la siguiente expresión analítica:

$$\mathbf{G(x,y) = 10x + 30y}$$

Dediquémonos ahora a las restricciones.

Tenemos la restricción de que la cantidad de horas disponibles para la máquina M_1 es de 40 horas semanales.

Si cada unidad del juguete (I) necesita 0.5 horas de máquina y se fabrican "x" unidades, se necesitarán **0.5 x** horas de máqina. En forma análoga las "y" unidades del juguete del tipo (II) necesitarán **1.y** horas de máquina. Las horas totales de utilización de la máquina M_1 no podrán superar las 40 por lo que podremos escribir:

$$0.5\,x + 1\,y \leq 40 \qquad (1)$$

Razonando en forma completamente similar para la máquina M_2 concluirás que:

$$0.25\,x + 1\,y \leq 25 \qquad (2)$$

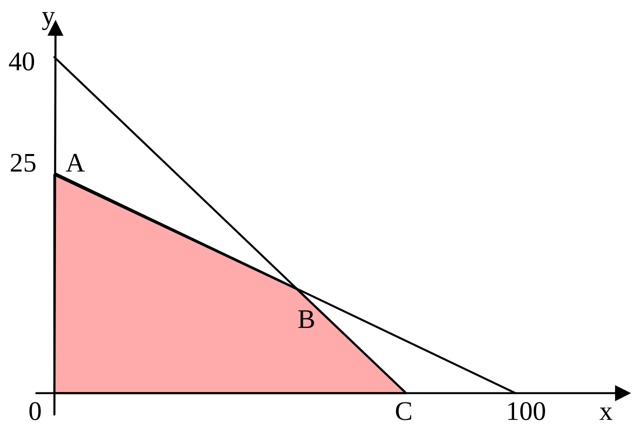
Obviamente además deberán ser: $x \geq 0$ (3) $y \geq 0$ (4)

Las restricciones serán entonces las inecuaciones numeradas del (1) al (4).

A partir de este momento la resolución del problema es similar a los ejercicios que has resuelto con anterioridad.

Puedes optar por la resolución gráfica utilizando curvas de nivel o calculando los valores de la función ganancia en los vértices del recinto de puntos factibles.

A efectos de que visualices el recinto te lo indicamos en la figura.



Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
0.5x + y = 40 0.25x + y =25	(60,10)	Ninguna	B	900
0.5x + y = 40 x = 0	(0,40)	(2)	--------	-------------
0.5x + y = 40 y = 0	(80,0)	Ninguna	C	800
0.25x + y =25 x = 0	(0, 25)	Ninguna	A	750
0.25x + y =25 y = 0	(100,0)	(1)	--------	-------------
x = 0 y = 0	(0 ,0)	Ninguna	O	0

El **máximo** se produce en el vértice B (60,10) y la ganancia máxima es entonces de 900 U$S / semana.

Deberán fabricarse 60 unidades del juguete Tipo (I) y 10 unidades del juguete Tipo (II) semanalmente.

Ejercicio No. 10

Llamemos **x** al número de unidades del artículo (A) e **y** al número de unidades del artículo (B) que se fabrican por día.

Si cada unidad del artículo (A) da una ganancia de U$S 2,5 y cada unidad del artículo (B) una ganancia de U$S 5, la ganancia diaria total será:

$$\mathbf{G (x , y) = 2,5x + 5y}$$

Como cada unidad del artículo (A) insume 2 Kg. de materia prima y cada unidad del artículo (B) , 3Kg. de materia prima y disponiendo la empresa de un máximo de 12 Kg. por día de materia prima deberá cumplirse que:

$$2x + 3y \leq 12 \quad (1)$$

Como el artículo (A) necesita 2 horas de trabajo de máquina y el artículo (B) necesita 1 hora y disponiéndose de la máquina sólo 8 horas diarias deberá cumplirse que:

$$2x + 1y \leq 8 \quad (2)$$

Evidentemente además deberán ser : $x \geq 0$ (3) $y \geq 0$ (4).

Tenemos ya todos los elementos necesarios para resolver el problema y poder dar contestación a la pregunta del empresario.

Rectas	Interseccion	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
$2x + 3y = 12$ $2x + y = 8$	(3,2)	Ninguna	B	17,5
$2x + 3y = 12$ $x = 0$	(0,4)	Ninguna	A	20
$2x + 3y = 12$ $y = 0$	(6,0)	(2)	----	--------------
$2x + y = 8$ $x = 0$	(0,8)	(1)	-----	--------------
$2x + y = 8$ $y = 0$	(4,0)	Ninguna	C	10
$x = 0$ $y = 0$	(0,0)	Ninguna	O	0

El máximo de la función es 20 y se produce en el punto de coordenadas (0,4).
El empresario no está entonces trabajando en forma conveniente ya que al producir 3 unidades del artículo (A) y 2 unidades del artículo (B) obtiene una ganancia de 17,5 U$S / día mientras que si fabricara únicamente 4 unidades del artículo (B) obtendría una ganancia de 20 U$S / día.
Seguramente tu respuesta sería: “ Deje de fabricar el artículo (A) y fabrique 4 unidades del artículo (B)”.
Trata de llegar a esta misma conclusión haciendo la representación gráfica del recinto de puntos factibles y utilizando las curvas de nivel de la función ganancia.

Ejercicio No. 11

Llamemos:

<u>**x**</u> al número de unidades del artículo (1) fabricados por semana.

<u>**y**</u> al número de unidades del artículo (2) fabricados por semana.

a) Siendo la ganancia por unidad de 4 U$S y 5 U$S respectivamente, la función ganancia (G) será: **G(x,y) = 4x + 5y**

Las restricciones serán:

Restricción para el plástico $1.x + 1,5\ y \leq 50$ (1)

Restricción para el aluminio $1,5\ x + 1,5\ y \leq 60$ (2)

Obviamente además será $x \geq 0$ (3)

$y \geq 0$ (4)

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
x + 1.5y =50 1.5x + 1.5y =60	(20 , 20)	Ninguna	B	180
x = 0 x + 1.5y =50	(0, 50/1.5)	Ninguna	A	500 / 3
x + 1.5y = 50 y = 0	(50 , 0)	(2)	-------	-------
1.5x +1.5y = 60 x = 0	(0 , 40)	(1)	-----	-------
1.5x +1.5y =60 y = 0	(40 , 0)	Ninguna	C	160
x = 0 y = 0	(0 , 0)	Ninguna	O	0

La empresa deberá entonces fabricar 20 artículos de cada tipo semanalmente obteniendo una ganancia de U$S 180.

b) Siendo ahora la utilidad del artículo (A) de 6 U$S por unidad y de 5 U$S por unidad la del artículo (B) , la nueva función ganancia será:

G(x,y) = 6x +5y

Como las restricciones no han variado el polígono de puntos factibles sigue siendo el mismo.

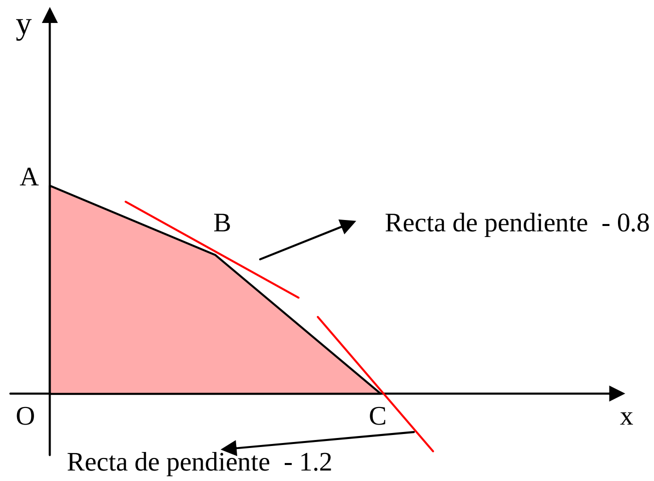
Basta que calculemos los nuevos valores funcionales en los vértices O, A, B y C.

Tendremos: G(0,0) = 0 G(0 , 100 /3) = 500 /3 G(20 , 20) = 220 y finalmente G(40 , 0) = 240.

La ganancia máxima se obtiene entonces fabricando 40 unidades del artículo (A) y ninguna del artículo (B), siendo la misma de U$S 240 semanales.

En la parte **a)** del ejercicio el máximo de la función ganancia se produjo en el vértice B mientras que en la parte **b)** se produjo en el vértice C.

Tratemos de interpretar gráficamente la razón de ello. El recinto de puntos factibles es el mismo en ambos casos y es el indicado en la figura.



En el caso **a)** la pendiente de las rectas de nivel de la función ganancia es igual a $-4/5 = -0.8$ siendo por tanto el vértice B el correspondiente al máximo.

En el caso **b)** la pendiente de las rectas de nivel de la función ganancia es en cambio igual a $-6/5 = -1.2$ lo que hace que sea el vértice C el correspondiente al máximo.

Ejercicio No. 12

Llamemos : **x** número de computadoras del modelo (I) fabricadas por semana.

y número de computadoras del modelo (II) fabricadas por semana.

Como las utilidades de cada modelo son 60 y 30 U$S / unidad respectivamente, la función ganancia será: $\mathbf{G(x,y) = 60x + 30y}$

Restricción debida a la disponibilidad de mano de obra especializada :

$$\mathbf{1.x + 1.y \leq 120} \qquad (1)$$

Restricción debida a la disponibilidad de mano de obra no especializada:

$$\mathbf{2.x + 1.y \leq 200} \qquad (2)$$

Se cumplirá además: $\mathbf{x \geq 0}$ (3)

$\mathbf{y \geq 0}$ (4)

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
x+y =120 2x+y =200	(80,40)	Ninguna	B	6.000
x+y =120 x = 0	(0,120)	Ninguna	A	3.600
x+y=120 y = 0	(120,0)	(2)	---	--------
2x+y=200 x = 0	(0,200)	(1)	---	--------
2x+y=200 y = 0	(100,0)	Ninguna	C	6000
x = 0 y = 0	(0,0)	Ninguna	O	0

Como puede deducirse del cuadro la ganancia máxima de 6000 U$S por semana corresponde a los vértices B y C del polígono de puntos factibles .

Esto significa que la función ganancia se maximiza en cualquier punto del segmento BC , lado del polígono de puntos factibles.

Ello ocurre porque las rectas de nivel de la función G y la recta BC tienen la misma pendiente cuyo valor, como puedes verificar, es -2.

a) En esta parte del ejercicio se nos exigen soluciones enteras, es decir el armado de las computadoras completas.

Debemos hallar entonces aquellos puntos del segmento BC cuyas coordenadas sean números enteros.

Siendo B (80,40) y C (100,0) bastará encontrar la cantidad de números enteros comprendidos entre 80 y 100 inclusives. La ecuación de la recta BC (y= - 2x+200) asegura que siendo **x** entero lo será también **y** .

La respuesta a la pregunta es entonces : existen 21 posibilidades de fabricación que darán la ganancia máxima de 6000 U$S por semana, como podrían ser , por ejemplo, 90 del modelo (I) y 20 del modelo (II) , o bien 85 del modelo (I) y 30 del modelo (II) , etc.

b) El **menor** número de unidades del modelo (I) será de 80 unidades semanales y del modelo (II) 40 unidades semanales.

c) El **mayor** número de unidades del modelo (I) será de 100 unidades semanales no debiéndose, en este caso, armar ninguna unidad del modelo (II).

Ejercicio No. 13

Llamemos: **x** a la cantidad de Kg. por semana del alimento (A)

y a la cantidad de Kg. por semana del alimento (B)

Determinemos la función Costo (C) de la dieta.

Como el alimento (A) cuesta 20 $ / Kg y el alimento (B) 40 $ /Kg. tendremos:

$$\mathbf{C(x,y) = 20x + 40y} \qquad (\ \$ / \text{semana}\ )$$

Veamos las restricciones impuestas por la exigencia de la dieta que obliga a la persona a consumir por lo menos 1 Kg. de carbohidratos y ½ Kg. de proteínas.

Restricción por carbohidratos:

$$\mathbf{0{,}9x + 0{,}6y \geq 1} \qquad (1)$$

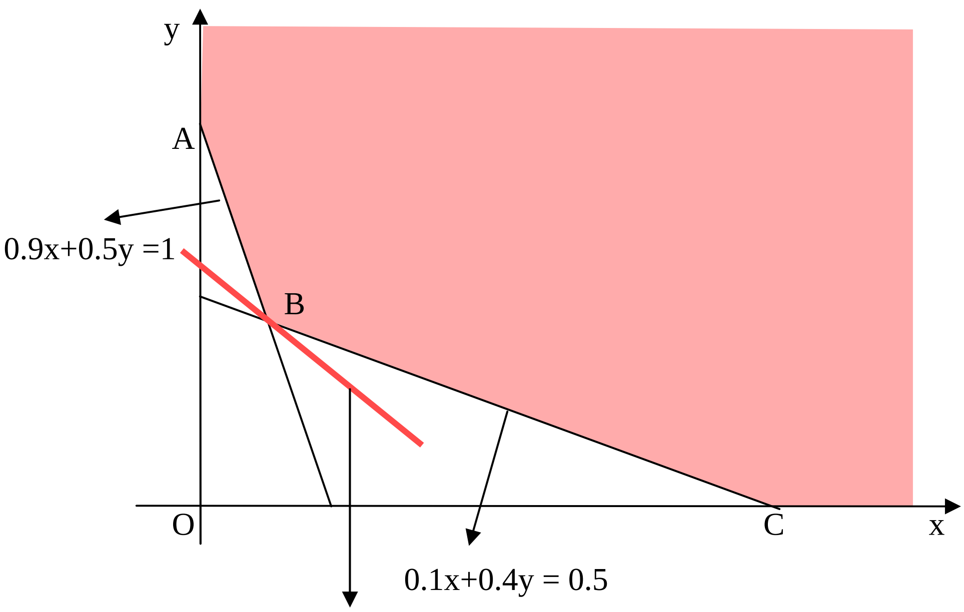
Restricción por proteínas:

$$\mathbf{0{,}1x + 0{,}4y \geq 0{,}5} \qquad (2)$$

Se cumplirá además naturalmente que :

$$\mathbf{x \geq 0} \quad (3) \qquad\qquad \mathbf{y \geq 0} \quad (4)$$

Representemos gráficamente el recinto de puntos factibles.



Recta de nivel correspondiente a costo mínimo.

De la resolución gráfica deducimos que el mínimo de la función costo se produce en el punto B.

La resolución del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas AB y BC indica que las coordenadas del vértice B son: $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$.

El costo mínimo de la dieta será:

$$C_{min} = 20.\frac{1}{3} + 40.\frac{7}{6} = \frac{160}{3} \cong 53{,}3 \quad \frac{\$}{\text{sem.}}$$

La persona deberá consumir 1/3 Kg. del alimento (A) y 7/6 Kg. del alimento (B) por semana.

Ejercicio No.14

Sean: **x** número de prendas fabricadas por semana del tipo (I)

y número de prendas fabricadas por semana del tipo (II)

De acuerdo a las utilidades que producen las ventas de ambos tipos de prendas, la función ganancia G será:

$$\mathbf{G(x,y) = 40x + 50y}$$

Como restricciones tendremos, trabajando en minutos:

Restricción por uso de la máquina M_1 $\mathbf{5x + 6y \leq 2400}$

Restricción por uso de la máquina M_2 $\mathbf{3x + 2y \leq 900}$

En consecuencia:

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
5x+6y=2400 3x+2y=900	$(75, \frac{675}{2})$	Ninguna	B	19875
5x+6y=2400 x = 0	(0 , 400)	Ninguna	A	20000
5x+6y=2400 y = 0	(480 , 0)	(2)	---	-------
3x+2y=900 x = 0	(0 , 450)	(1)	---	-------
3x+6y=900 y = 0	(300 , 0)	Ninguna	C	12000
x = 0 y = 0	(0 , 0)	Ninguna	O	0

De acuerdo a lo indicado en el cuadro anterior solamente deberán fabricarse prendas del modelo (II).

Fabricando semanalmente 400 de ellas se obtendrá la máxima ganancia que asciende a $ 20000 por semana.

Ejercicio No.15

Sean: **x** el número de bibliotecas del tipo (I) fabricadas por semana

y el número de bibliotecas del tipo (II) fabricadas por semana.

De acuerdo a las utilidades que produce la venta delas bibliotecas la función ganancia será:

$$\mathbf{G(x,y) = 20x + 25y}$$

Las restricciones generadas por la existencia de los materiales necesarios serán:

Restricción debida a la existencia de piezas (A): $\mathbf{3x + 5y \leq 25}$ (1)

Restricción debida a la existencia de piezas (B): $\mathbf{7x + 1.y \leq 21}$ (2)

Se cumplirá además: $\mathbf{x \geq 0}$ (3) $\mathbf{y \geq 0}$ (4)

Tendremos entonces:

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértice	Valor funcional
3x+5y=25 7x+y = 21	$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$	Ninguna	B	137,50
3x+5y=25 x = 0	(0 , 5)	Ninguna	A	125
3x+5y=25 y = 0	$(\frac{25}{3}, 0)$	(2)	---	-----
7x+y = 21 x = 0	(0 , 21)	(1)	---	-----
7x+y = 21 y = 0	(3 , 0)	Ninguna	C	60
x = 0 y = 0	(0 , 0)	Ninguna	O	0

a) Como se admite soluciones no enteras el máximo de ganancia se obtendría fabricándose 2,5 bibliotecas del tipo (I) y 3,5 bibliotecas del tipo (II) por semana obteniéndose una ganancia de U$S 137,50.

b) Redondearemos la solución fraccionaria hallada.

x = 2,5   y = 3,5

Podemos pensar en redondear por exceso y por defecto. Obtendremos un conjunto de puntos (x,y) con coordenadas enteras que es necesario verificar si pertenecen o no al recinto de puntos factibles, es decir, si violan o no alguna de las restricciones del problema.

Resumimos las distintas posibilidades en el cuadro siguiente.

x	y	Viola restricción	Ganancia en U$S	Observación
3	4	(1) y (2)	------	Pto. Exterior al polígono
3	3	(2)	-----	Pto. Exterior al polígono
2	4	(1)	-----	Pto. Exterior al polígono
2	3	Ninguna	115	Punto interior al polígono

La solución redondeada consistiría entonces en fabricar 2 unidades de la biblioteca tipo (I) y 3 unidades de la biblioteca tipo (II) lo que generaría una ganancia semanal de U$S 115.

c) Para dar respuesta a la pregunta planteada remitámonos al cuadro del comienzo del ejercicio. De él podemos concluir que si la empresa trabaja fabricando 5 unidades de la biblioteca tipo (II) (Pto. A del polígono de puntos factibles) y ninguna unidad de las bibliotecas tipo (I), la ganancia obtenida será de 125 U$S / sem. Por tanto resulta más conveniente que la situación generada por el redondeo de la parte **b) .**

La exigencia de soluciones enteras nos cambia la solución de un vértice a otro del polígono de puntos factibles en nuestro caso.

Ejercicio No. 16

a) Siendo los vértices O(0,0) , A(0,3) , B(1,4) , C(3,3) , D(4,1) , E(3,0) y la función ganancia G(x,y) = 40x + 30y tendremos:

G(0,0) = 0 G(0,3) = 90 G(1,4) = 160 G(3,3) = 210 G(4,1) = 190 G(3,0) = 120

El valor máximo de la función es entonces 210 y se produce en el punto C(4,1).

b) Siendo la ecuación de las rectas de nivel de la función G:

$$40x + 30y = K \qquad (\text{ K constante})$$

la pendiente será : $m = -\frac{40}{30} = -\frac{4}{3}$

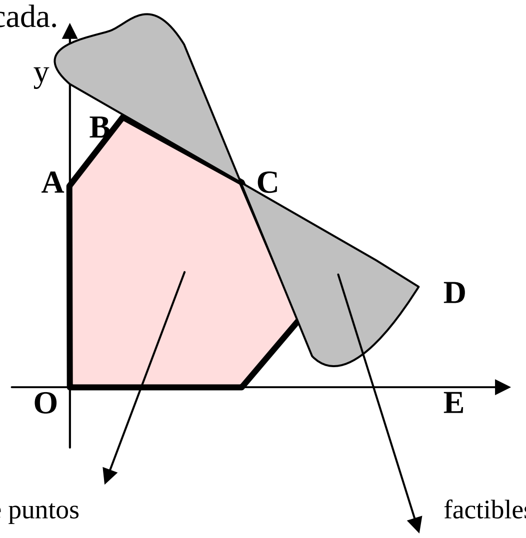
c) Observando el recinto de puntos factibles dado en el ejercicio puedes concluir que el máximo de la función G seguirá produciéndose en el vértice C mientras la pendiente (m) de las rectas de nivel de la función ganancia se encuentre comprendida entre las pendientes de las rectas BC y CD.

Pendiente de la recta BC : $m_{BC} = - ½$

Pendiente de la recta CD: $m_{CD} = - 2$

En consecuencia debe cumplirse que : $-2 \leq m \leq -½$

Gráficamente la recta de nivel que pasa por el vértice C deberá estar incluída en la zona indicada.



Polígono de puntos factibles

zona a la que debe pertenecer la recta de nivel que pasa por C