



Optimización lineal: Resolución gráfica y el Simplex

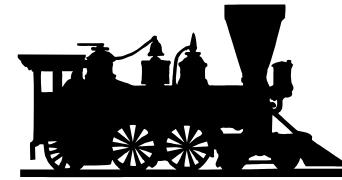
Contenidos

- Solución gráfica
- Método Simplex
- Inicialización del método Simplex
 - Método de las dos fases
 - Método de las penalización (o de la M mayúscula)

Solución gráfica (i)

Ejemplo:

- Un artesano fabrica trenes y camiones de juguete
- Utilizando tornillos, bloques y ruedas como componentes
- En la semana próxima dispone de 8000, 6000 y 6300 componentes respectivas
- Los beneficios por tren y camión son 1.6 euros/unidad y 1.4 euros/unidad



	Tornillos	Bloques	Ruedas
Tren	10	15	18
Camión	20	10	6

Solución gráfica (ii)

Formulación matemática:

$$\text{Max } Z = 1.6 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \rightarrow \text{Maximización del beneficio total}$$

sujeto a :

$$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \leq 8000 \rightarrow \text{Existencias TORNILLOS}$$

$$15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 6000 \rightarrow \text{Existencias BLOQUES}$$

$$18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 6300 \rightarrow \text{Existencias RUEDAS}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

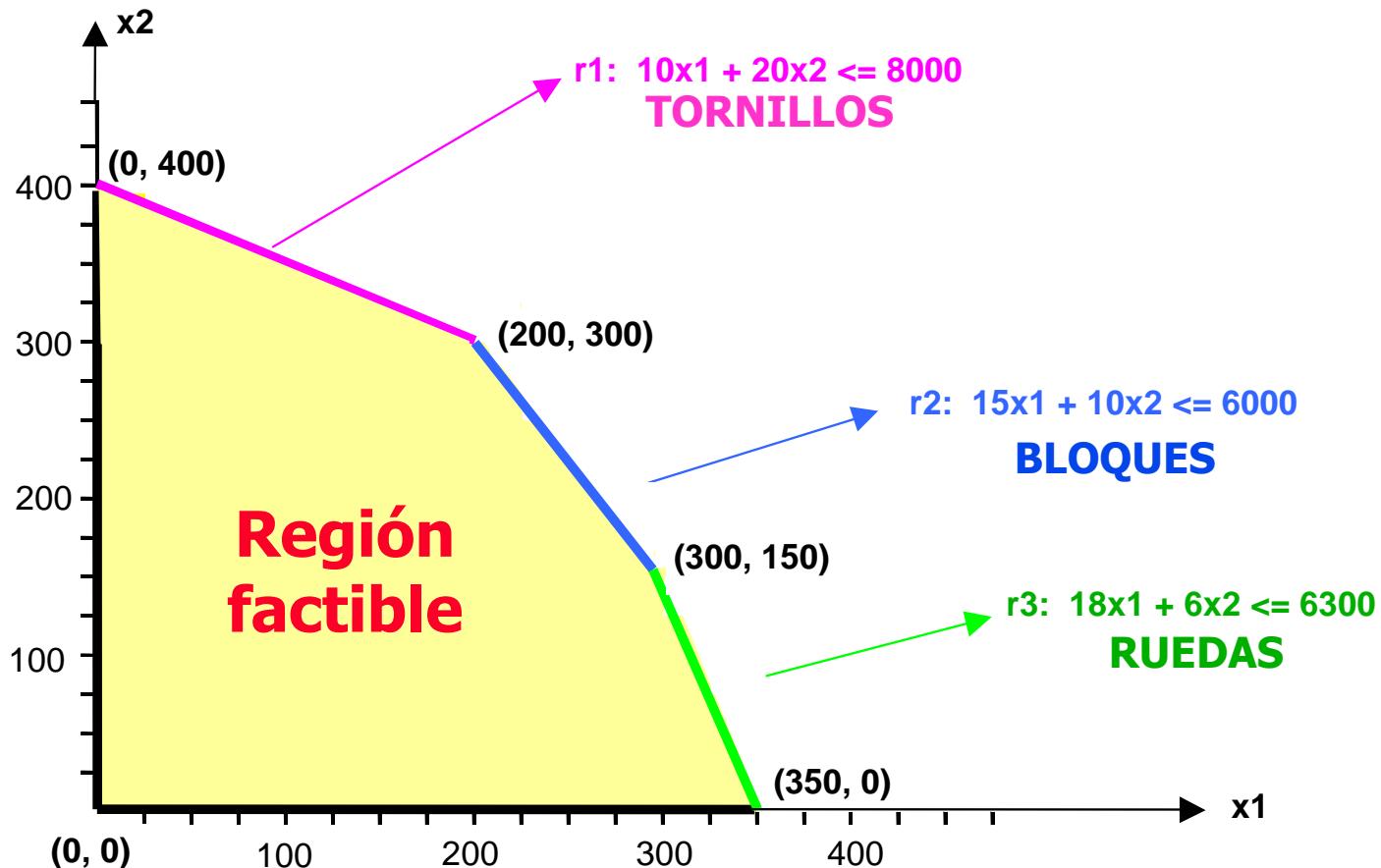
x_1 : Número de **trenes** a fabricar

x_2 : Número de **camiones** a fabricar

Se consideran variables **reales** en primera aproximación

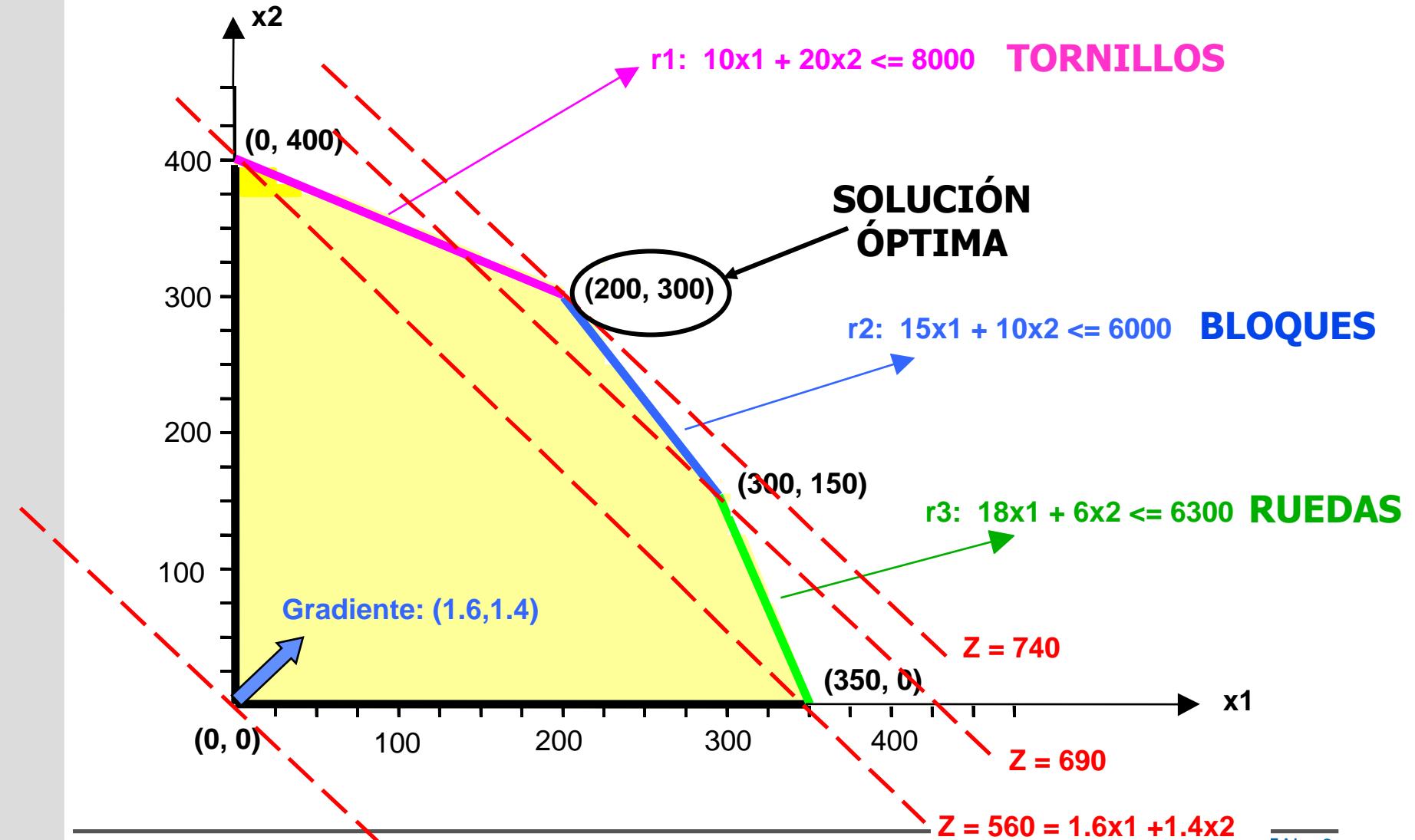
Solución gráfica (iii)

Representación gráfica de restricciones



Solución gráfica (iv)

Rectas de isobeneficio:



Solución gráfica (v)

Solución óptima:

- La solución óptima es fabricar **200 trenes** y **300 camiones**
- Se utilizan todas las existencias de **tornillos (8000)**
- Se utilizan todas las existencias de **bloques (6000)**
- Se utilizan **5400 ruedas** sobrando **900** de las existencias
- El beneficio resultante es de **740 euros**

Método Simplex (i)

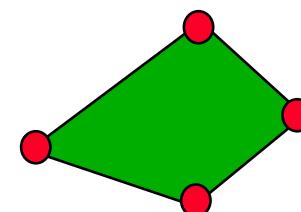
Geometría de la programación lineal

- **Poliedro:** Región definida por la intersección de un conjunto finito de hiperespacios

hiperespacios
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \\ \sum_j a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \end{array} \right.$$

- La región factible de un problema de programación lineal es un poliedro
- **Vértice** de un poliedro: punto que no se expresa como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de un poliedro

Si existe un único óptimo en un problema de programación lineal, éste se encuentra en un VÉRTICE



Método Simplex (ii)

Forma estándar

$$\min \text{ ó } \max Z = c^T \cdot x$$

$$A \cdot x = b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n; A \in \mathbb{R}^{m \times n}; c \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m$$

$$b \geq 0$$



Problema del artesano

$$\max Z = 1.6 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 + 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3$$

sujeto a :

$$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + h_1 = 8000$$

$$15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + h_2 = 6000$$

$$18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + h_3 = 6300$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

$$c^T = (-1.6, -1.4, 0, 0, 0)$$

$$x^T = (x_1, x_2, h_1, h_2, h_3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{bmatrix}$$

Método Simplex (iii)

Métodos para transformar a la forma estándar

- **Restricciones \leq** : Se introduce una variable de defecto $u_i \geq 0$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} \cdot x_j + u_i = b_i$$

- **Restricciones \geq** : Se introduce una variable de exceso $v_i \geq 0$

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} \cdot x_j - v_i = b_i$$

- **Variables negativas** : $-\infty \leq x_j \leq 0 \Rightarrow x_j = -y_j ; 0 \leq y_j \leq +\infty$

- **Variables libres** : Se sustituye por 2 variables $x_j = x_j^+ - x_j^-$

$$0 \leq x_j^+ \leq \infty \quad 0 \leq x_j^- \leq \infty$$

- **Parámetro $b_i < 0$** : Multiplicar por -1 la i-ésima restricción

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow \sum_j (-a_{ij}) x_j \geq (-b_i)$$

Método Simplex (iv)

Tipos de Soluciones

- **Solución Factible:** Satisface todas las restricciones
Pertenece a la región factible
- **Solución Infactible:** Viola al menos una restricción
No pertenece a la región factible
- **Solución Básica Factible:** Es factible
Tiene m variables básicas asociadas a una matriz B no singular de restricciones en A , de rango m , que toman valor >0 y el resto = 0
 - Número de restricciones
- **Solución Óptima :** Solución factible con mejor valor de la f.o.

Método Simplex (v)

Descomposición en componentes BASICAS y NO BASICAS (notación)

$$A = [B, N] \begin{cases} B \in \mathbb{Q}^{m \times m} \text{ matriz BASE} \\ N \in \mathbb{Q}^{m \times (n-m)} \text{ matriz NO BASICAS} \end{cases}$$

$$c^T = [c_B, c_N]^T \begin{cases} c_B \in \mathbb{Q}^m \text{ coeficientes de variables BASICAS} \\ c_N \in \mathbb{Q}^{n-m} \text{ coeficientes de variables NO BASICAS} \end{cases}$$

$$x^T = [x_B, x_N]^T \begin{cases} x_B \in \mathbb{Q}^m \text{ vector de variables BASICAS} \\ x_N \in \mathbb{Q}^{n-m} \text{ vector de variables NO BASICAS} \end{cases}$$

El simplex se mueve por soluciones básicas factibles (vértices) que van mejorando la f.o., sustituyendo una variable básica por una no básica

Método Simplex (vi)

Detección variables no básicas para entrar en la base

$$A \cdot x = b$$

$$B \cdot x_B + N \cdot x_N = b \rightarrow x_B = B^{-1} (b - N x_N) = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

Función objetivo

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \stackrel{=}{\substack{\downarrow \\ \uparrow}} c_B^T \hat{b} + [c_N^T - c_B^T B^{-1} N] x_N$$

Notación: $\hat{b} = B^{-1} b$

Vector de costes reducidos

Los costes reducidos para una solución factible arbitraria

$$c_j - c_B^T B^{-1} a_j = c_j - c_B^T y_j = c_j - z_j \rightarrow \text{Vector de costes reducidos}$$

Notación: $y_j = B^{-1} a_j; \quad z_j = c_B^T y_j; \quad \hat{c}_j = c_j - z_j; \quad j \equiv \text{índices no básicos}$

a_j : columna de A correspondiente a la variable x_j

Método Simplex (vii)

Los costes reducidos en la función objetivo:

$$z = c_B^T B^{-1} b + \left[c_N^T - c_B^T B^{-1} N \right] x_N = \hat{z} + \sum_j (c_j - z_j) x_j$$

Notación: $\hat{z} = c_B^T x_B$

- El coste reducido indica el cambio en la f.o. debido a un incremento unitario de una variable no básica
- En el óptimo de un problema de minimización todos los costes reducidos de las variables no básicas son ≥ 0 (para maximización, todos ≤ 0)
- Fuera del mínimo debe existir un coste reducido para una variable no básica < 0 (para el máximo, debe existir uno > 0)
- Los costes reducidos de las variables básicas son siempre 0
- Si el coste reducido de una variable no básica en el óptimo es 0 entonces pueden aparecer múltiples óptimos: Para que sean diferentes óptimos, la variable no básica con coste reducido 0 ha de tomar valor $\neq 0$ al entrar en la base

Método Simplex (viii)

Las **soluciones múltiples** son combinación lineal convexa de los distintos vértices óptimos: Ejemplo con dos soluciones óptimas

$$(x_1^1, x_2^1) \quad (x_1^2, x_2^2)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_1^1 + (1 - \lambda) \cdot x_1^2 \\ x_2 = \lambda \cdot x_2^1 + (1 - \lambda) \cdot x_2^2 \end{cases}$$

Incremento de la variable NO BÁSICA entrante:

Se incrementa desde cero una variable NO BÁSICA t hasta que alguna variable BÁSICA deje de ser positiva y se haga cero

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N = \hat{b} - Y x_N = \hat{b} - y_t x_t$$

\uparrow

$$B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$$

El resto de no básicas
Permanecen iguales a cero

Notación: $Y = B^{-1}N$

Método Simplex (ix)

$$(x_B)_i = \hat{b}_i - y_{it} x_t$$

- Si $y_{it} > 0 \rightarrow (x_B)_i$ Disminuye cuando x_t se incrementa hasta $\frac{\hat{b}_i}{y_{it}}$
(hasta que se anula)
- Si $y_{it} \leq 0 \rightarrow (x_B)_i$ Aumenta o permanece

Si todas las $y_{it} \leq 0$ el problema resulta **no acotado** $z = \hat{z} + (c_t - z_t)x_t \rightarrow -\infty$

Máximo incremento de variable NO BASICA entrante:

La variable NO BÁSICA elegida como variable BÁSICA ENTRANTE se incrementa hasta que la primera variable BÁSICA se anula

La variable BÁSICA SALIENTE es la que primero se anula

$$\bar{x}_t = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$$

Método Simplex (x)

PASOS del método SIMPLEX (i)

① **Inicialización:** Formulación del problema en forma estándar.
Se encuentra una solución básica factible inicial, es decir, B tal que:

$$x_B = B^{-1} b = \hat{b} \geq 0$$

② **Prueba de optimalidad:** Se calculan los costes reducidos

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

- Si en minimización todos los costes reducidos son ≥ 0 (en maximización ≤ 0) entonces la base es óptima
- Si en minimización existe algún coste reducido < 0 (en maximización > 0) se selecciona var. básica entrante x_t aquella cuyo coste reducido negativo (positivo en maximización) tenga mayor valor absoluto

Método Simplex (xi)

PASOS del método SIMPLEX (ii)

③ Iteración

$$y_t = B^{-1} a_t : \text{columna pivote de } x_t$$

$$\frac{\hat{b}_s}{y_{st}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\} : \text{variable básica saliente } x_s$$

Si todas las $y_{it} \leq 0$ el problema resulta no acotado

④ Pivotamiento

- Actualización de la matriz B^{-1}
- Actualización del vector de variables básicas x_B
- Volver al paso ②

Método Simplex (xii)

Forma tabular:

Se expresa el problema de optimización en una tabla con la siguiente estructura:

Var.básicas	X_N	X_B	Valores
	c_N^T	c_B^T	
X_B	N	B	b

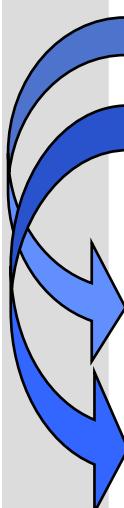
} Función objetivo
} Restricciones

Tabla inicial del simplex:

Se resta de la función objetivo las restricciones multiplicadas por $c_B^T B^{-1}$

Se multiplican las restricciones por B^{-1}

Dividir valores por $Y=B^{-1}N$ para determinar variable saliente



Var.básicas

X_N

X_B

Valores

	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	
X_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

} Costes reducidos
} Valores solución ≥ 0

Método Simplex (xiii)

Eliminación gaussiana:

Sirve para actualizar la tabla (por tanto B^{-1}) de una a otra iteración

'Se pone un 1 en el elemento pivot y un 0 en el resto de la columna'

- Dividir la fila pivot por el elemento pivot y_{st}
- Restar a cada una de las demás filas (incluida la f.o.) la nueva fila pivot multiplicada por el elemento de la fila y la columna pivot

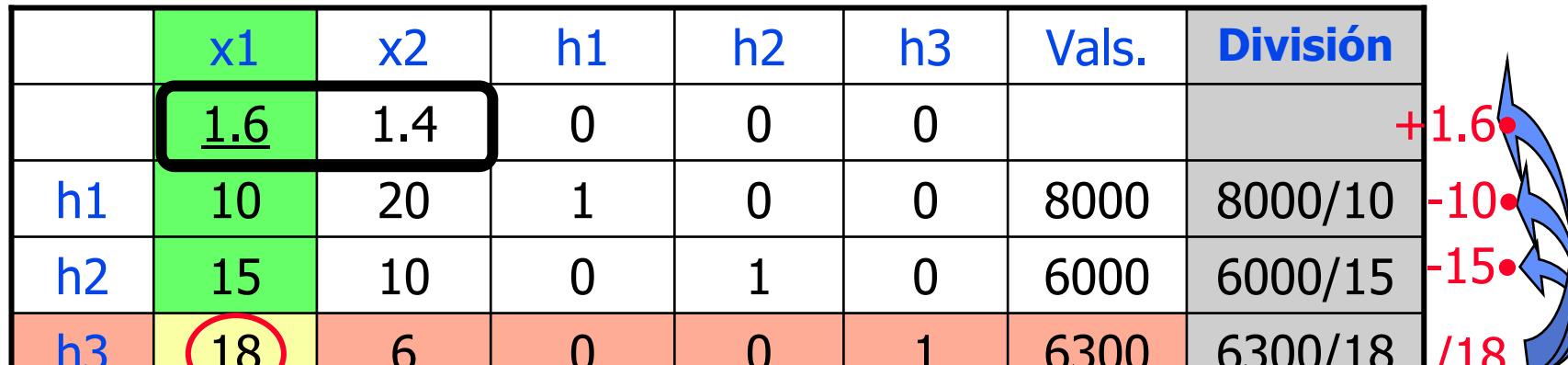
Iteración 1 (problema artesano)

	x1	x2	h1	h2	h3	Vals.	División
	1.6	1.4	0	0	0		
h1	10	20	1	0	0	8000	8000/10
h2	15	10	0	1	0	6000	6000/15
h3	18	6	0	0	1	6300	6300/18

Variable básica saliente

Variable básica entrante

El elemento pivot resulta y_{31}



Método Simplex (xiv)

Iteración 2

- Tiene que aparecer la matriz identidad en las variables básicas
- Los costes reducidos de las variables básicas tienen que ser 0
- El lado derecho de la tabla tiene que seguir siendo ≥ 0

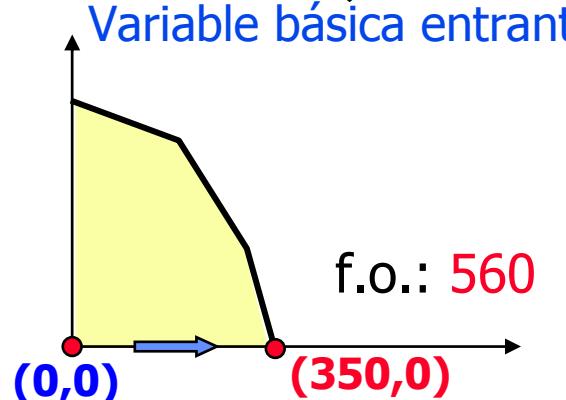
Variable básica saliente

	x1	x2	h1	h2	h3	Vals.	Relación
	0	0.86	0	0	-0.08		
h1	0	16.6	1	0	-0.5	4500	$\frac{4500}{16.6} = 270$
h2	0	5	0	1	-5/6	750	150
x1	1	1/3	0	0	1/18	350	1050

-0.86 •
 -16.6 •
 /5 •
 -1/3

Variable básica entrante

El elemento pivot
resulta y_{22}



Método Simplex (xv)

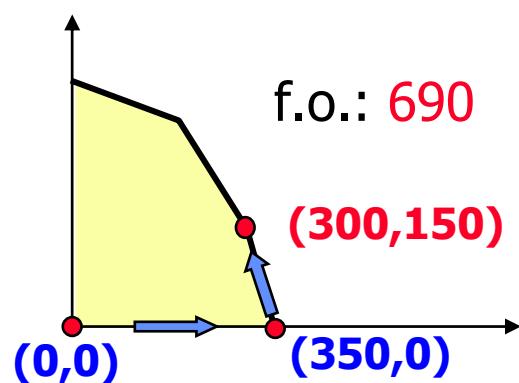
Iteración 3

Variable básica saliente

	x1	x2	h1	h2	h3	Vals.	Relación
	0	0	0	-0.17̃	0.05̃		
h1	0	0	1	-3.̃	2.2̃	2000	900
x2	0	1	0	1/5	-1/6	150	nulo
x1	1	0	0	-1/15	1/9	300	2700

0.05̃ →
/2.2̃ ←
+1/6 ↘
-1/9 ↙

Variable básica entrante



El elemento pivote resulta y_{12}

Método Simplex (xvi)

Iteración 4

	x1	x2	h1	h2	h3	Vals.
	0	0	-0.025	-0.09	0	
h3	0	0	0.45	-1.5	1	900
x2	0	1	0.075	-0.05	0	300
x1	1	0	-0.05	0.1	0	200

Todos los costes reducidos son negativos o nulos
por lo que el óptimo ha sido alcanzado

Solución óptima: (200, 300)
Función objetivo: 740

Inicialización Método Simplex (i)

Tabla inicial del simplex:

No siempre es posible encontrar la identidad en A con $b \geq 0$

Métodos para encontrar solución básica factible inicial

- Basados en la incorporación de variables artificiales
- En las restricciones \leq se introducen las variables de defecto h_i
- En las restricciones \geq se introducen variables de exceso e_i y también variables artificiales a_i (las de exceso tienen coeficiente -1)
- En las restricciones $=$ se introducen directamente variables artificiales

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + h_i = b_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j - e_i + a_i = b_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + a_i = b_i$$

Inicialización Método Simplex (ii)

Solución básica factible inicial (cont.)

- Las variables artificiales y las variables de holgura de defecto (en restricciones \leq) constituyen la base inicial del Simplex
- Las soluciones con variables artificiales positivas no son factibles, pues estas variables realmente no existen
- Los métodos de las dos fases y de penalización tratan de eliminar las variables artificiales, y encontrar la solución óptima
- Si no se pueden eliminar las variables artificiales → problema INFATIBLE

Inicialización Método Simplex (iii)

Métodos de anulación de variables artificiales

- **Método de las dos fases**

- La fase I tiene por f.o. la suma de las variables artificiales
- Si la fase I acaba con la f.o. nula, el problema es factible y se obtiene una solución básica factible
- La fase II restablece la f.o. original y parte de la solución básica factible del final de la fase I (que es la solución básica factible inicial)

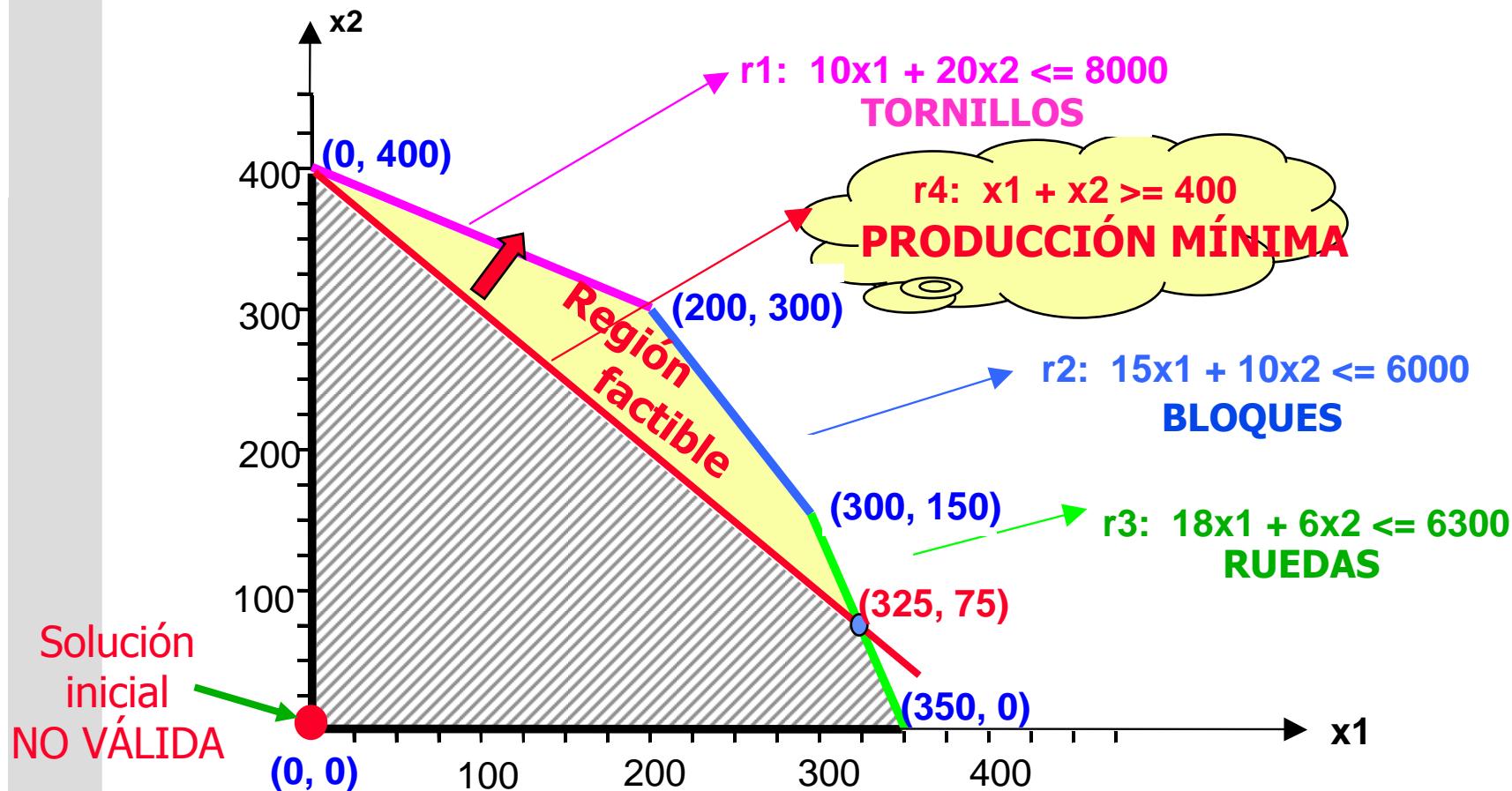
- **Método de la M mayúscula**

- Introduce variables artificiales en la f.o. penalizadas (en minimización) con un coeficiente elevado **M** (en maximización **-M**)

Inicialización Método Simplex (iv)

Ejemplo del método de las dos fases

En el ejemplo del artesano se introduce la restricción de que el número total de juguetes fabricados debe ser al menos de 400



Inicialización Método Simplex (v)

Ejemplo del artesano (cont.i)

$$\text{Min } a_1$$

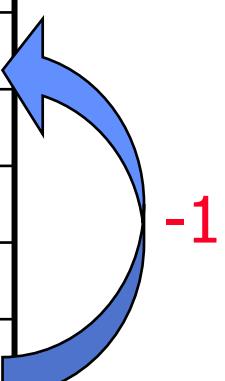
$$\begin{array}{lll} \text{sujeto a: } & 10x_1 + 20x_2 + h_1 & = 8000 \\ & 15x_1 + 10x_2 + h_2 & = 6000 \\ & 18x_1 + 6x_2 + h_3 & = 6300 \\ & x_1 + x_2 - e_1 + a_1 & = 400 \end{array}$$

Fase I (iteración 0)

$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, e_1, a_1 \geq 0$$

No es una tabla inicial del simplex:
Debería ser 0!!!. El primer paso de la Fase I siempre es hacerlo 0

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals
	0	0	0	0	0	0	1	
h1	10	20	1	0	0	0	0	8000
h2	15	10	0	1	0	0	0	6000
h3	18	6	0	0	1	0	0	6300
a1	1	1	0	0	0	-1	1	400



Inicialización Método Simplex (vi)

iteración
1

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals	Relación
	-1	-1	0	0	0	1	0		
h1	10	20	1	0	0	0	0	8000	800
h2	15	10	0	1	0	0	0	6000	400
h3	18	6	0	0	1	0	0	6300	350
a1	1	1	0	0	0	-1	1	400	400



iteración
2

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals	Relación
	0	-2/3	0	0	1/18	1	0		
h1	0	50/3	1	0	-5/9	0	0	4500	270
h2	0	5	0	1	-15/18	0	0	750	150
x1	1	1/3	0	0	1/18	0	0	350	1050
a1	0	2/3	0	0	-1/18	-1	1	50	75



Inicialización Método Simplex (vii)

iteración
3
(óptima fase I)

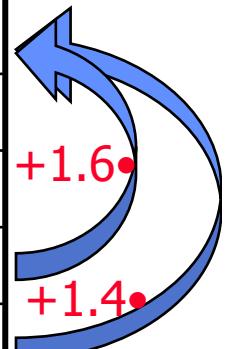
Fase II

Var. básicas	x1	<u>x2</u>	h1	h2	h3	e1	a1	Vals
	0	0	0	0	0	0	1	
h1	0	0	1	0	0.83	25	-25	3250
h2	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375
x1	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325
x2	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75

iteración
1

No es una tabla
inicial del simplex:
Debería ser 0!!!. El
primer paso de la
Fase II siempre es
hacerlo 0

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals
	1.6	1.4	0	0	0	0	0	
h1	0	0	1	0	0.83	25	-25	3250
h2	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375
x1	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325
x2	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75



Inicialización Método Simplex (viii)

Fase II

iteración
2

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals	Relación
	0	0	0	0	-0.016	1.3	-1.3		
h1	0	0	1	0	0.83	25	-25	3250	130
h2	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375	50
x1	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325	650
x2	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75	

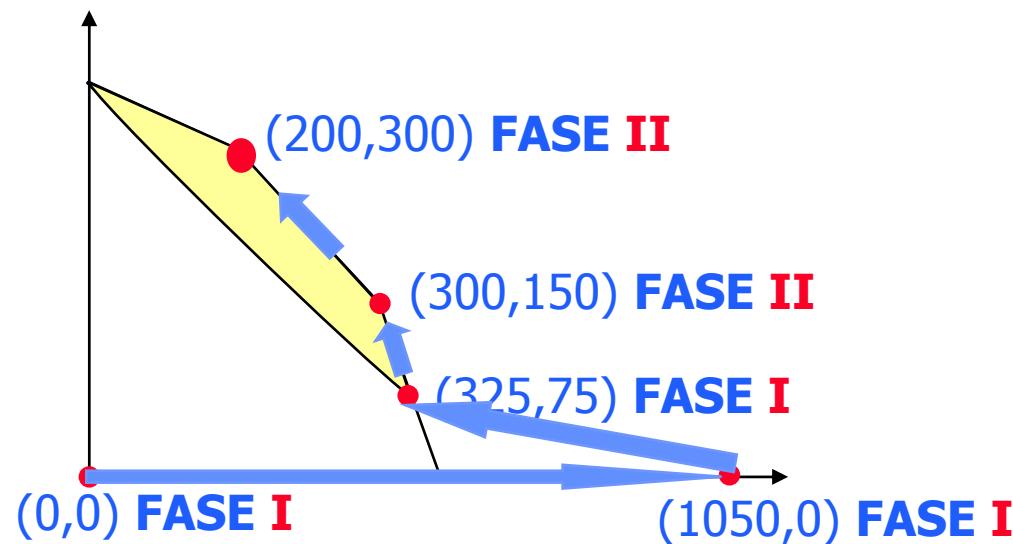
iteración
3

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals	Relación
	0	0	0	-0.173	0.05	0	0		
h1	0	0	1	-3.3	2.2	0	0	2000	900
e1	0	0	0	2/15	-1/18	1	-1	50	
x1	1	0	0	-1/15	1/9	0	0	300	2700
x2	0	1	0	1/5	-1/6	0	0	150	

Inicialización Método Simplex (ix)

Fase II
iteración
4

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	Vals
	0	0	-0.025	-0.09	0	0	0	
h3	0	0	0.45	-3/2	1	0	0	900
e1	0	0	0.025	0.05	0	1	-1	100
x1	1	0	-0.05	0.1	0	0	0	200
x2	0	1	0.075	-0.05	0	0	0	300



Inicialización Método Simplex (x)

Ejemplo del método de las penalizaciones

$$\text{Min } x_1 - 2 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow \text{Min } x_1 - 2 \cdot x_2 + M \cdot a_1 + M \cdot a_2$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + x_2 - h_1 + a_1 = 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 - h_2 + a_2 = 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 + h_3 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, a_1, a_2 \geq 0$$

No es una tabla inicial del simplex:
Debería ser 0!!!. El primer paso siempre es hacerlo 0

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	v
	1	-2	0	0	0	M	M	
A1	1	1	-1	0	0	1	0	2
A2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
H3	0	1	0	0	1	0	0	3

Inicialización Método Simplex (xi)

**iteración
1**

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	Vals
	1	-2-2M	M	M	0	0	0	
A1	1	1	-1	0	0	1	0	2
A2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
H3	0	1	0	0	1	0	0	3

**iteración
2**

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	Vals
	-1-2M	0	M	-2-M	0	0	2+2M	
A1	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
H3	1	0	0	1	1	0	-1	2

Inicialización Método Simplex (xii)

iteración
3

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	Vals
	0	0	-1/2	-3/2	0	1/2+M	3/2+M	
X1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2
x2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2
H3	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2

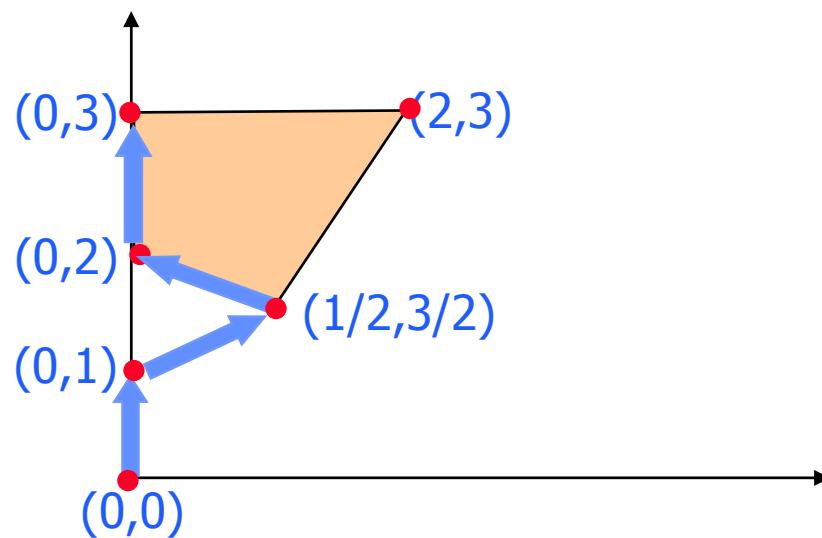
iteración
4

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	Vals
	3	0	-2	0	0	2+2M	M	
H2	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x2	1	1	-1	0	0	1	0	2
H3	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Inicialización Método Simplex (xiii)

iteración
5
(solución óptima)

Var. básicas	x1	x2	h1	h2	h3	a1	a2	Vals
	1	0	0	0	2	M	M	
H2	1	0	0	1	1	0	-1	2
x2	0	1	0	0	1	0	0	3
H1	-1	0	1	0	1	-1	0	1



Inicialización Método Simplex (xiv)

- **Algoritmo método dos Fases:**

- FASE I: Resolver Simplex con f.o. $\mathbf{1}^T \mathbf{x}_a$
 - a) Si $\mathbf{1}^T \mathbf{x}_a > 0$, $\Rightarrow (P)$ no es factible
 - b) $\mathbf{1}^T \mathbf{x}_a = 0$, $\Rightarrow (P)$ es factible y solución básica factible inicial
 - b.1) No variables artificiales en la base \Rightarrow pasar a la fase II.
 - b.2.) Variables artificiales en la base (valor 0) \Rightarrow eliminarlas (entra en la base una variable legítima no básica pivoteando en fila de la variable artificial a eliminar; si no hay pivote, fila redundante, eliminarla) y pasar a la fase II.

Var. básicas	x1	x2	a1	a2	Vals
pivot	3	0	0	1	
a1	-2	0	1	-1	0
x2	1	1	0	-2	2

- FASE II: Retomar f.o. y resolver Simplex

Inicialización Método Simplex (xv)

- **Algoritmo penalizaciones (de la M mayúscula):**
- Resolver Simplex con f.o. Penalizando x_a con M (min) o $-M$ (max)
 - a) Si (P) con solución óptima (x, x_a)
 - a.1) $x_a=0 \rightarrow$ (P) tiene solución óptima y es x .
 - a.2.) $x_a>0 \rightarrow$ (P) no tiene solución factible.
 - b) Si (P) con solución no acotada
 - b.1) $x_a=0 \rightarrow$ (P) también tiene solución no acotada.
 - b.2.) $x_a>0 \rightarrow$ (P) no factible ó no acotado.

Resumen: Método Simplex (xvi)

- **Resumen identificación de posibles terminaciones:**
- **Optimalidad:** En minimización costes reducidos positivos (≥ 0). En maximización negativos (≤ 0). Si hay alguno cero, posibles múltiples óptimos. Incorporar en la base la variable no básica que tiene coste reducido 0.
- **Infactibilidad:** Sólo cuando haya sido necesario variables artificiales:
 - Si 2 fases y en la fase 1 hay al menos una variable artificial con valor >0 . En fase I solamente puede haber optimalidad (no acotamiento, ni infactibilidad).
 - Si Penalizaciones y hay una variable artificial con valor >0 .
- **No acotamiento.** Si al menos un coste reducido es negativo y cada uno de los elementos de su columna son ≤ 0 . A esta condición habría que añadir que las variables artificiales sean $=0$ con penalizaciones.
- **Caso dudoso: Infactibilidad o no acotamiento.** Si Penalizaciones, el problema penalizado no sea acotado y al menos una variable artificial sea >0 .



Optimización lineal: Dualidad y el Simplex Dual

Contenidos

- Definición del problema dual
- Propiedades de dualidad
- Interpretación económica
- Algoritmo Simplex Dual
- Relaciones entre el Simplex Primal y el Dual

Definición del problema dual (i)

- Todo problema LP (*primal*) tiene asociado otro problema LP (*dual*)
- Si *primal* es de maximización, *n* variables y *m* restricciones
dual es de minimización, *m* variables y *n* restricciones

<u>Min</u>		<u>Max</u>
<u>Variable</u>		<u>Restricción</u>
≥ 0	\Leftrightarrow	\leq
≤ 0	\Leftrightarrow	\geq
<i>no restringida</i>	\Leftrightarrow	$=$
<u>Restricción</u>		<u>Variable</u>
\geq	\Leftrightarrow	≥ 0
\leq	\Leftrightarrow	≤ 0
$=$	\Leftrightarrow	<i>no restringida</i>

Teorema: El dual del problema dual es el problema primal

Definición del problema dual (ii)

<i>Primal</i> $(m \times n)$	<i>Dual</i> $(n \times m)$
$\max_{x_j} z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	$\min_{w_i} u = \sum_{i=1}^m b_i w_i$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n$ $w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$
$\max_x z = c^T x$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$\min_w u = b^T w$ $A^T w \geq c$ $w \geq 0$

Definición del problema dual (iii)

Primal $(m \times n)$.	Dual $(n \times m)$.
$\max z = 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$		$\min u = 4w_1 + 12w_2 + 18w_3$ $w_1 + 3w_3 \geq 3$ $2w_2 + 2w_3 \geq 5$ $w_1, w_2, w_3 \geq 0$	
$\max z = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\min u = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & \cdot & 3 \\ \cdot & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	

Propiedades de Dualidad (i)

- Propiedad débil de la dualidad

x solución factible del primal *w* solución factible dual

$$\Rightarrow w^T b \leq c^T x$$

- Propiedad fuerte de la dualidad

*x** solución óptima del primal *w** solución óptima dual

$$\Rightarrow c^T x^* = w^{*T} b$$

- Teorema de dualidad

Únicas relaciones posibles entre primal y dual:

- Ambos tienen soluciones óptimas factibles
- Un problema es no acotado, y el otro problema es no factible
- Si un problema es no factible, el otro es no factible o no acotado

Propiedades de Dualidad (ii)

• **Lema** La matriz B^{-1} son las columnas Y de la última tabla del simplex para las variables x_B^0 que inicialmente formaban la matriz identidad (para variables de exceso en x_B^0 cambiando el signo a Y)

Var.básicas	X_N	X_B^0	X_B	Valores
	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	$-C_B^T B^{-1}$	0	
X_B	$B^{-1} N$	B^{-1}	I	$B^{-1} b$

• **Propiedad de solución óptima complementaria**

a) La solución dual complementaria es $w = c_B^T B^{-1}$, que son los costes reducidos de la última tabla del simplex para las variables x_B^0 cambiados de signo (para variables de exceso en x_B^0 sin cambio de signo)

b) x cumple óptimalidad para el primal sí y solo sí w factible para el dual.

Nota: Por tanto, para B^{-1} o $w = c_B^T B^{-1}$, si x_B^0 contiene artificiales, conviene no eliminarlas en la fase II. Si penalizaciones, calcular directamente $w = c_B^T B^{-1}$.

Propiedades de Dualidad (iii)

- Propiedad de la complementariedad de holguras

- Si restricción primal no activa (con holgura) \Rightarrow variable dual asociada a la restricción vale 0

$$\underbrace{w_i^*}_{\text{Variable dual}} \cdot \underbrace{\left(a^i \cdot x^* - b_i \right)}_{\text{Restricción primal}} = 0$$

- Si una variable del primal en el óptimo tiene valor $> 0 \Rightarrow$ la restricción asociada del dual en el óptimo está activa (no tiene holgura)

$$\underbrace{\left(c_j^T - w^{*T} a_j \right)}_{\text{Restricción dual}} \cdot \underbrace{x_j^*}_{\text{Variable primal}} = 0$$

Interpretación económica

- Interpretación económica de las variables duales (solo caso maximización con restricciones \leq):

– *En el óptimo:*

$$\max \sum_j c_j x_j^* = \min \sum_i b_i w_i^*$$

w_i^* : variación en la función objetivo por tener una unidad más de b_i

Valor marginal del recurso: precio sombra o precio justo (cantidad máxima a pagar por una unidad más de recurso)

→ *Si hay holgura de un recurso su precio marginal es cero, no se está dispuesto a pagar por una unidad más*

Si hay holgura $h_i > 0$ en una restricción primal $\Rightarrow w_i^ = 0$*

Algoritmo Simplex-Dual (i)

- *Método Simplex dual: Alternativa al Simplex para resolver un problema (no necesariamente el dual)*
 - ¿Cuándo usarlo?
 - Si es fácil obtener una **solución inicial básica no factible** pero cumple criterio **optimalidad** (alguna variable básica <0 y costes reducidos ≥ 0 en minimización)
 - Si tras una **modificación** se pierde **factibilidad** de la **solución óptima** (análisis sensibilidad, ver más adelante)
 - Idea básica:
 - se mueve por soluciones **no factibles para el primal**
 - se mueve por soluciones **factibles para el dual** (la complementaria), es decir, se cumple criterio **primal de optimalidad**
 - Al lograr **factibilidad primal** \rightarrow **óptima primal**.
 - Idea geométrica:
 - opera fuera de la **región factible**, y en la zona mejor que el **óptimo**.
 - entra en la **región sólo cuando alcanza el óptimo**.

Algoritmo Simplex-Dual (ii)

1. Inicialización

- Solución básica inicial dual factible: cumple criterio optimalidad primal (costes reduc. ≥ 0 en min)
- Si factible (todas las variables básicas ≥ 0) \rightarrow óptima, parar.
Si no, iterar en 2.

2. Iteración

- Variable básica saliente x_r : aquella con menor valor < 0
 - Variable básica entrante x_s
- criterio de entrada: razón mínima, mantener factibilidad dual

$$\left| \frac{c_s - z_s}{y_{rs}} \right| = \text{Min} \left\{ \left| \frac{c_j - z_j}{y_{rj}} \right| : y_{rj} < 0 \right\} \quad (\text{tanto para min como para max})$$

Si no hay $y_{rj} < 0$: problema no factible (porque dual no acotado), parar.

Pivoteamiento. Ir al punto 2 del paso 1.

Ejemplo Algoritmo Simplex-Dual (i)

$$\begin{array}{l}
 \min 4x_1 + x_2 \\
 \begin{array}{l}
 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
 x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l}
 -3x_1 - x_2 + h_3 = -3 \\
 -4x_1 - 3x_2 + h_4 = -6 \\
 -x_1 - 2x_2 + h_5 = -4
 \end{array} \right\} \\
 \min 4x_1 + x_2 \\
 x_1, x_2, h_3, h_4, h_5 \geq 0
 \end{array}$$

Var. básicas	x1	x2	h3	h4	h5	Vals
Relación $c_j - z_j / y_{rj}$	-1	-1/3				
	4	1	0	0	0	
h3	-3	-1	1	0	0	-3
h4	-4	-3	0	1	0	-6
h5	-1	-2	0	0	1	-4

dual factible

primal infactible

Var. básicas	x1	x2	h3	h4	h5	Vals
Relación $c_j - z_j / y_{rj}$	-8/5			-1		
	8/3	0	0	1/3	0	
h3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
x2	4/3	1	0	-1/3	0	2
h5	5/3	0	0	-2/3	1	0

Ejemplo Algoritmo Simplex-Dual (ii)

Costes reducidos variables que formaban inicialmente la base → se deduce la solución dual

Var. básicas	x1	x2	h3	h4	h5	Vals
	1	0	1	0	0	
h4	5	0	-3	1	0	3
x2	3	1	-1	0	0	3
h5	5	0	-2	0	1	2

- **Solución óptima del primal:**

$$(x_1, x_2, h_3, h_4, h_5) = (0, 3, 0, 3, 2)$$

- **Solución óptima del dual:**

$$(y_1, y_2, y_3) = -(1, 0, 0)$$

- **Ambas funciones objetivo:**

$$z = 3$$

Aclaraciones y resumen: Método Simplex-Dual

- En el método dual simplex no deben incorporarse variables artificiales → se aplica cuando las restricciones se pongan a \leq .
 - Además, los costes reducidos de la primera tabla deben estar en condiciones de optimalidad (≥ 0 en min, ≤ 0 en max).
 - En el método se pivotea como en el simplex (o simplex-primal).
 - Es un método alternativo al simplex para resolver un modelo lineal (no confundir con un método para resolver problemas duales).
- **Resumen identificación de posibles terminaciones:**
- **Optimalidad:** Todos los componentes del lado derecho de la última tabla deben ser ≥ 0 .
 - **Infactibilidad:** Si al menos un componente del lado derecho es < 0 y todos los componentes de su fila son ≥ 0 .
 - **No acotamiento.** Bajo las condiciones en las que se puede aplicar el dual-simplex, el problema **nunca** puede ser no acotado.

Relaciones Simplex Primal y el Dual

Método Simplex Primal	Método Simplex Dual
Maneja soluciones básicas factibles y se mueve hacia la solución óptima (trata de satisfacer la condición de optimalidad)	Maneja soluciones que satisfacen la condición de optimalidad primal (fact. dual) y se mueve hacia la solución óptima tratando de conseguir factibilidad primal (opt. dual)
Columna derecha ≥ 0	En minimización fila costes reducidos ≥ 0
En minimización fila costes reducidos < 0 (excepto en el óptimo)	Columna derecha < 0 (excepto en el óptimo)



Optimización lineal: Sensibilidad y Programación paramétrica

Contenidos

- Análisis sensibilidad
 - Procedimiento genérico
 - En cotas de las restricciones
 - En coeficientes variables no básicas
 - Incorporación de variables
 - En costes y resto de coeficientes variables básicas
 - Introducción de restricciones
- Programación paramétrica

Análisis de sensibilidad: procedimiento genérico (i)

Análisis de sensibilidad o postoptimización: efectos en solución óptima por cambios en problema, partiendo del óptimo previo

- Procedimiento genérico análisis de sensibilidad:
 1. *Introducir cambios en bloques correspondientes de tabla del Simplex*
 2. *Preparación tabla para adecuarla a iteración del Simplex (en variables básicas columna de un 1 en su fila y 0 resto)*

Var.básicas	X_N	X_B	Sol.
	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	0	
X_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

Análisis de sensibilidad: procedimiento genérico (ii)

- Procedimiento genérico análisis de sensibilidad (cont):
 3. *Prueba de factibilidad (variables básicas no negativas)*
 4. *Prueba de optimalidad (en min costes reducidos no negativos)*
 5. *Nueva iteración:*
 - *del método Simplex (si se cumple 3 y no 4)*
 - *del método Dual (si se cumple 4 y no 3)*
 - *introducción variables artificiales para que cumpla 3 y Simplex*

Cambios en cotas de restricciones (i)

- *Cambios en vector de requerimientos b*
 - Afectan a: *valores de las variables básicas.*
 - Se puede perder factibilidad: método *Simplex dual.*
 - Geométricamente: *desplazamientos paralelos restricciones*
Se mueve la región factible, el óptimo previo puede quedar:
 - a) dentro de la región factible → sigue siendo óptimo
 - b) fuera de la región factible (*algoritmo dual para volver a ella*)

Cambios en cotas de restricciones (ii)

– *Ejemplo:*

$$\begin{array}{lll} \min & z = -3x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + x_4 = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Var. Básicas	x1	x2	x3	x4	x5	Vals
				3/2	1	
x3			1	1/3	-1/3	2
x2		1		1/2		6
x1	1			-1/3	1/3	2

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow b' = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}; x_B' = \bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Infactible, usar dual (costes reducidos no cambian)

Cambios en coeficientes variables no básicas (i)

- *Cambio en un coeficiente de una variable no básica*
 - *En la tabla afectan a: la columna de la propia variable.*
Costes reducidos: $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N'$
Restricciones: $B^{-1} N'$
 - *Se puede perder optimalidad: método Simplex.*
Recalcular costes reducidos:
 - a) *Si* $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N' \geq 0$ (*min*) *sigue óptima.*
 - b) *Si no, variable básica entrante y método Simplex.*
 - *Cambio en coeficientes de la función objetivo:*
Geométricamente: cambio dirección optimización
Óptimo actual puede dejar de serlo → iterar, nuevo óptimo.

Cambios en coeficientes variables no básicas (ii)

– *Ejemplo:*

Var. Básicas	x1	x2	x3	x4	x5	Vals
	0	3	1	2	0	
x1	1	1	1	1	0	6
x5	0	3	1	1	1	10

$$\begin{array}{lllll} \min & z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 6 \\ -x_1 & +2x_2 & & & +x_5 = 4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

a) $c_2=1$ se reemplaza por -3 $c_2^* - z_2 = (c_2^* - c_2) + (c_2 - z_2) = -4 + 3 = -1 < 0$

x_2 entra en la base y se aplica el Simplex

b) a_2 se cambia de (1,2) a (2,5)

$$y_2^* = B^{-1}a_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La tabla sigue siendo óptima:
reemplazar columna de x_2 por $(5,2,7)^T$

$$c_2^* - z_2^* = c_2^* - c_B B^{-1} a_2^* = 1 - (-2,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \geq 0$$

Introducción variables

- **Introducción de una nueva variable** x_{n+1}
 - *Calcular su coste reducido.*
 - 1. *Si < 0 interesa, introducir en la base:*
Calcular $B^{-1}a_{n+1}$, añadir toda la columna. Iterar Simplex.
 - 2. *Si ≥ 0 , no interesa. Sigue óptima.*
- ✓ **Ejemplo anterior:** Se introduce x_6 con $c_6=1$ y $a_6=(-1,2)^T$

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_6 - z_6 = c_6 - c_B^T \cdot y_6 = 1 - (-2, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Se introduce x_6 en la base y se aplica el Simplex

Cambios costes básicos

- *Cambio en coeficiente de una variable básica en la función objetivo*
 - Afecta a: Todos los costes reducidos de no básicas
 - Actualizar todos los costes reducidos variables no básicas
 - Si ≥ 0 , solución actual óptima
 - Si < 0 , no es óptima, iterar método Simplex .
- ✓ **Ejemplo anterior:** Se cambia $c_1=-2$ por 0

x_3 entra en la base y sale x_1

Var. Básicas	x1	x2	x3	x4	x5	Vals
	0	1	-1	0	0	
x1	1	1	1	1	0	6
x5	0	3	1	1	1	10

Cambios resto coeficientes variables básicas (i)

- **Cambio en un coeficiente de una variable básica**
 - Afecta a: toda la tabla del Simplex (cambia B^{-1})
 - Calcular $y'_j = B^{-1}a'_j$ siendo a'_j la nueva columna variable básica:
 - Si $y'_{jj}=0$ pérdida de base: v. **artificial** que la sustituya en la base, y **Simplex-Dos fases ó Penalización**
 - En otro caso pivotear en y'_{jj} . Durante el pivoteo puede perderse factibilidad:
 1. Pérdida de factibilidad primal: método **Dual**
 2. Pérdida de optimalidad (de factibilidad dual): método **Simplex**
 3. Pérdida ambas: v. **artificiales** recuperar factibilidad y **Simplex**

Cambios resto coeficientes variables básicas (ii)

✓ **Ejemplo anterior:** a_1 se cambia de $(1, -1)$ a $a'_1 = (0, -1)$

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = y'_1, \text{ las columnas básicas actuales no son una base}$$

$$c_1 - z'_1 = c_1 - c_B^T y'_1 = -2$$

x_6 artificial sustituye a x_1 en la base, con su mismo valor

Var. Básicas	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Vals
	-2	3	1	2	0	M	
→ x6	0	1	1	1	0	1	6
x5	-1	3	1	1	1	0	10

Mismos costes reducidos para el resto de variables

Aplicamos método de penalizaciones

Hacer $c_6 - z_6 = 0$ pivoteando y proceder método de penalizaciones

Incorporación de una restricción

- *Introducción de nueva restricción*
 1. Comprobar si la solución óptima la satisface. Si lo hace, óptima.
 2. Si no, añadir a tabla (v. básica asociada=variable holgura y/o artificial)
 - Método Dual si añadida holgura y al adaptar la tabla valor variable básica < 0
 - Método simplex 2 fases o penalización si añadidas artificiales

✓ **Ejemplo anterior:** Se añade la restricción $-x_1+2x_3 \geq 2$

El punto óptimo no satisface la restricción → incorporar holgura x_6

Var. Básicas	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Vals	Construir identidad y aplicar Dual Simplex por infactibilidad
	0	3	1	2	0	0	6	
x1	1	1	1	1	0	0		
x5	0	3	1	1	1	0	10	
x6	1	0	-2	0	0	1	-2	

Hacer 0 y aplicar
dual Simplex

Programación paramétrica (i)

Cambios continuos en parámetros

- *Cambios simultáneos coeficientes función objetivo*

$$c_j \rightarrow c_j + \alpha_j \cdot \theta \quad \theta \geq 0 \quad \alpha_f = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ dirección de parametrización}$$

- Sólo cambia la dirección de optimización
- Problema: Determinar zonas espacio paramétrico θ con un valor óptimo cada una (diferente valor objetivo)
 1. Hacer $\theta^*=0$
 2. Resolver con $\theta=\theta^*$, siendo la solución $x(\theta^*)$
 3. Calcular costes reducidos con $c_j(\theta)=c_j+\alpha_j\theta \quad \theta \geq \theta^*$
 4. Obtener $\theta^{**} \geq \theta^*$ tal que $x(\theta^*)$ sigue siendo solución óptima en $[\theta^*, \theta^{**}]$ pero un coste reducido=0: variable no básica entrante.
 5. Hacer $\theta^*=\theta^{**}$ e ir al paso 2 incorporando en la base la variable no básica anterior (aplicar primal simplex).

Programación paramétrica (ii)

- *Cambios simultáneos en cotas de las restricciones*

$$b_i \rightarrow b_i + \alpha_i \cdot \theta \quad \alpha_b = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad \text{dirección de parametrización}$$

- Cambia región factible: *zonas espacio paramétrico con una base óptima*
 - Son equivalentes a cambios en coeficientes de función objetivo del dual
1. Hacer $\theta^*=0$
 2. Resolver con $\theta=\theta^*$, siendo la solución $x(\theta^*)$
 3. Calcular valores variables básicas con $b_i(\theta)=b_i+\alpha_i\theta \quad \theta \geq \theta^*$
 4. Obtener $\theta^{**} \geq \theta^*$ tal que $x(\theta)$ sigue siendo factible en $[\theta^*, \theta^{**}]$ pero con un valor básico=0: *variable básica saliente*.
 5. Hacer $\theta^*=\theta^{**}$ e ir al paso 2 sacando de la base la variable básica anterior (*aplicar dual simplex*).