Notas sobre Métodos Numéricos con R

Carlos E. Martínez-Rodríguez
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Academia de Matemáticas
carlos.martinez@uacm.edu.mx

Índice

1. Sobre el curso

El curso se llevará a cabo tres veces a la semana, con sesiones de 1.5 horas, de las cuales una de ellas se realizará en el laboratorio de cómputo 3.

1.1. Requisitos para acreditar la materia

El curso por su naturaleza implica que la/el estudiante implemente los distintos algoritmos que se revisan en el curso, por lo tanto es importante que demuestre que efectivamente puede implementar, revisar y mejorar los algoritmos ya existentes.

Hay dos maneras de certificar la materia: a) Portafolio y b) Examen de certificación. Al menos una semana antes de que termine el curso las y los estudiantes tendrán conocimiento de sus calificaciones parciales y por tanto de la calificación promedio obtenida al momento, para que sea el/la mismo(a) estudiante quién decida si certifica por la modalidad de portafolio, o por la modalidad de examen de certificación.

El portafolio se conforma de evaluaciones (40 %), programas, (40 %) tareas (10 %), tareitas (5 %)y trabajos adicionales (5 %). Mientras que la certificación es un examen elaborado por el comité de certificación y que será presentado por todas y todos los estudiantes que se inscriban en esta modalidad en las fechas establecidas por la Coordinación de Certificación y Registro. En cualquiera de las dos modalidades es indispensable que el/la estudiante se registre a este proceso para que su calificación pueda ser asignada al final del proceso de Certificación.

1.2. De la naturaleza del curso

El curso tiene un fuerte sustento en la programación constante, sin embargo, es importante resaltar que los conceptos teóricos deben ser dominados por las y los estudiantes, por lo tanto las evaluaciones y las tareas tendrán estas dos componentes principales. Al contrario de lo que pueda pensarse la asistencia al curso es obligatoria pero no influye directamente en la calificación obtenida. Sin embargo, hay que mencionar que si la asistencia se realiza de manera intermitente es probable que cueste un poco de trabajo reincorporarse a la dinámica de trabajo que se irá construyendo con el grupo con el transcurso de las clases.

2. Introducción

En este curso estudiaremos los elementos básicos de los métodos numéricos, utilizando el programa de distribución libre *R*. Antes de iniciar propiamente con el estudio de los métodos numéricos realizaremos un breve repaso de algunos conceptos de álgebra lineal, cálculo diferencial mismos que son fundamentales en esta materia y de la que se supone las y los estudiantes se encuentran familiarizados con ellos.

Análisis Numérico es una rama de las matemáticas que, mediante el uso de algoritmos iterativos, obtiene soluciones numéricas a problemas en los cuales la matemática simbólica (o analítica) resulta poco eficiente o no puede ofrecer un resultado. En particular, a estos algoritmos se les denomina *métodos numéricos*.Por lo general los métodos numéricos se componen de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica, mejorando aproximaciones iniciales a cierta cantidad, tal como la raíz de una ecuación, hasta que se cumple con cierta cota de error. A esta operación cíclica de mejora del valor se le conoce como *iteración*. El análisis numérico es una alternativa muy eficiente para la resolución de ecuaciones, tanto algebraicas (polinomios) como trascendentes teniendo una ventaja muy importante respecto a otro tipo de métodos: La repetición de instrucciones lógicas (iteraciones), proceso que permite mejorar los valores inicialmente considerados como solución. Dado que se trata siempre de la misma operación lógica, resulta muy pertinente el uso de recursos de cómputo para realizar esta tarea. Sin embargo, debe haber claridad en el sentido de que el análisis numérico no es la panacea en la solución de problemas matemáticos; los métodos numéricos arrojan *aproximaciones*, es decir, están sujetos a un error. Esto quiere decir que si se puede ser tan preciso como los recursos de cálculo lo permitan, siempre está presente y debe considerarse su manejo en el desarrollo de las soluciones requeridas. El uso de diversos sistemas de cómputo determina qué soluciones analítico–numéricas son viables en la práctica, lo que implica que se deben tomar en cuenta el proceso iterativo, el costo de los recursos físicos que se emplean en el análisis, y el tipo de práctica de la Ingeniería.

3. Revisión de temas importantes

3.1. Cálculo

Comenzamos el capítulo con un repaso de algunos aspectos importantes del cálculo que son necesarios a lo largo del texto. Suponemos que los estudiantes que lean este texto conocen la terminología, la notación y los resultados que se dan en un curso típico de cálculo.

3.1.1. Límites y continuidad

El límite de una función nos dice qué tan cerca se encuentran las imágenes de una función si dos elementos de su dominio se encuentran lo suficientemente cerca, es decir, decimos que una función $f(x)$ definida en el intervalo (a, b) tiene **límite** L en el punto $x = x_0$, lo que denotamos por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Es decir, que los valores de la función estarán cerca de L siempre que x esté suficientemente cerca de x_0.

Se dice que una función f es continua en a si cuando x se aproxima al valor de a, entonces también $f(x)$ se aproxima a $f(a)$, es decir, $f(x)$ es **continua** en el punto $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

y se dice que f es **continua en el conjunto** (a, b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo. Denotaremos el conjunto de todas las funciones f que son continuas en $E = (a, b)$ por $C(E)$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a un número x, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o bien, $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para cada $n > N(\varepsilon)$. Cuando una sucesión tiene límite, se dice que la **sucesión converge**.

3.1.2. Continuidad y convergencia de sucesiones

Si $f(x)$ es una función definida en un conjunto S de números reales y $x_0 \in S$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f(x)$ es continua en $x = x_0$,

2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en S que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Teorema 1 (Teorema del valor intermedio o de Bolzano.)**.** *Si $f \in C[a, b]$ y ℓ es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \ell$. Véase la Figura 1.*

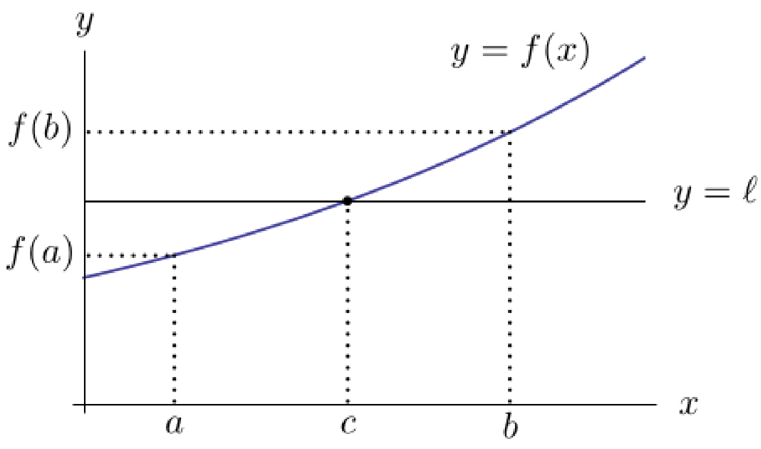

Figura 1: Teorema del valor intermedio o de Bolzano

Nota 1. *Todas las funciones con las que se van a trabajar en este curso de métodos numéricos serán continuas, ya que esto es lo mínimo que debemos exigir para asegurar que la conducta de un método se puede predecir.*

3.1.3. Derivabilidad

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto que contiene un punto x_0, entonces se dice que $f(x)$ es **derivable** en $x = x_0$ cuando existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El número $f'(x_0)$ se llama **derivada** de f en x_0 y coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$, Figura 2.

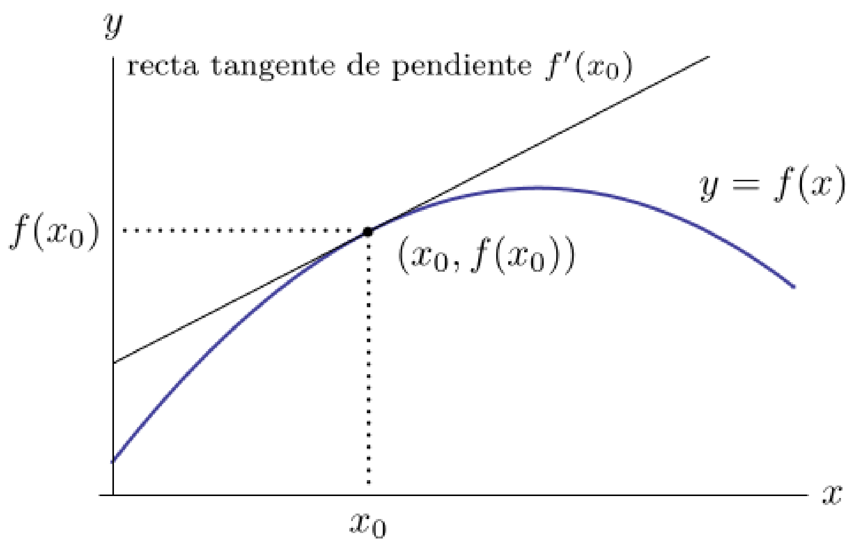

Figura 2: Derivada de una función en un punto

Derivabilidad implica continuidad. Si la función $f(x)$ es derivable en $x = x_0$, entonces $f(x)$ es continua en $x = x_0$. El conjunto de todas las funciones que admiten n derivadas continuas en S se denota por $C^n(S)$, mientras que el conjunto de todas las funciones indefinidamente derivables en S se denota por $C^\infty(S)$. Las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas están en $C^\infty(S)$, siendo S el conjunto de puntos en los que están definidas.

Teorema 2 (Teorema del valor medio o de Lagrange.)**.** *Si $f \in C[a,b]$ y es derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente hablando, Figura 3, el teorema del valor medio dice que hay al menos un número $c \in (a,b)$ tal que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

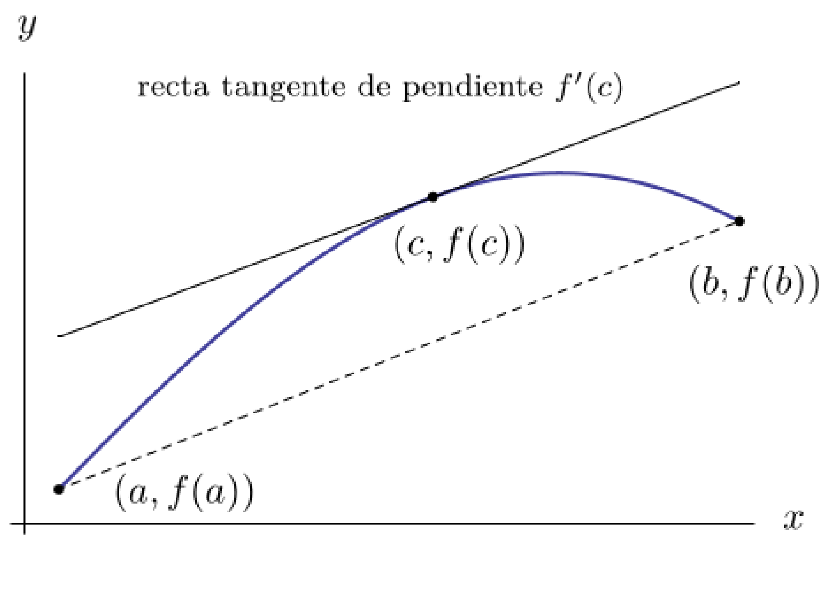

Figura 3: Teorema del valor medio o de Lagrange

Teorema 3 (Teorema de los valores extremos.). *Si $f \in C[a,b]$, entonces existen c_1 y c_2 en (a,b) tales que $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ para todo $x \in [a,b]$. Si además, f es derivable en (a,b), entonces los puntos c_1 y c_2 están en los extremos de $[a,b]$ o bien son puntos críticos.*

3.1.4. Integración

Teorema 4 (Primer teorema fundamental o regla de Barrow.). *Si $f \in C[a,b]$ y F es una primitiva cualquiera de f en $[a,b]$ (es decir, $F'(x) = f(x)$), entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 5 (Segundo teorema fundamental.). *Si $f \in C[a,b]$ y $x \in (a,b)$, entonces*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Teorema 6 (Teorema del valor medio para integrales.). *Si $f \in C[a,b]$, g es integrable en $[a,b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Nota 2. *Cuando $g(x) = 1$, véase la Figura 4, este resultado es el habitual teorema del valor medio para integrales y proporciona el valor medio de la función f en el intervalo $[a,b]$, que está dado por*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

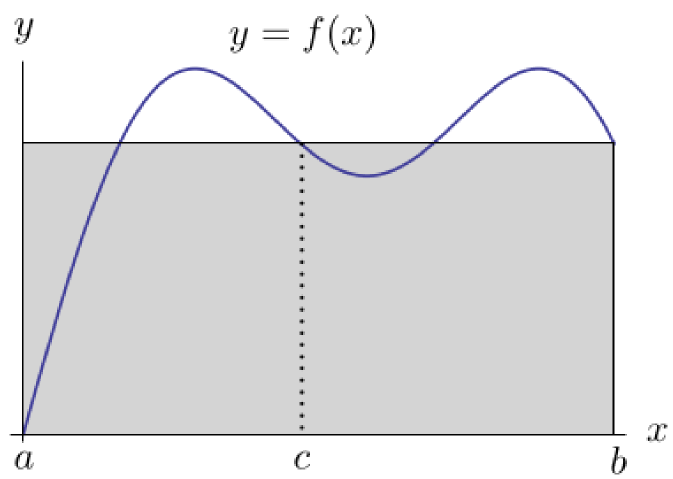

Figura 4: Teorema del valor medio para integrales

3.1.5. Polinomios de Taylor

Teorema 7 (Teorema de Taylor.). *Supongamos que $f \in C^{(n)}[a,b]$ y que $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$. Sea x_0 un punto en $[a,b]$. Entonces, para cada x en $[a,b]$, existe un punto $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k, && (1) \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad y \quad h = x - x_0. && (2) \end{aligned}$$

El polinomio $P_n(x)$ se llama **n-ésimo polinomio de Taylor** de f alrededor de x_0 (véase la Figura 5). $R_n(x)$ se llama **error de truncamiento** (o *resto de Taylor*) asociado a $P_n(x)$. Como el punto $\xi(x)$ en el error de truncamiento $R_n(x)$ depende del punto x en el que se evalúa el polinomio $P_n(x)$, podemos verlo como una función de la variable x.

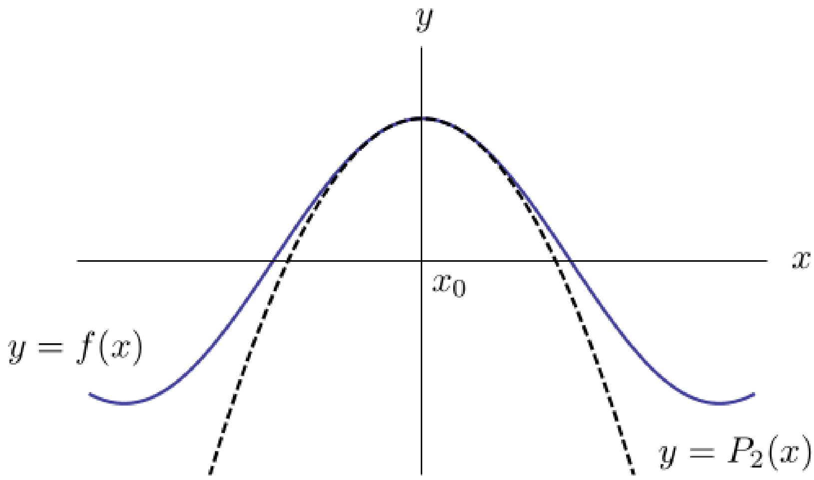

Figura 5: Gráficas de $y = f(x)$ y de su polinomio de Taylor $y = P_2(x)$ alrededor de x_0.

Nota 3. *La serie infinita que resulta al tomar límite en la expresión de $P_n(x)$ cuando $n \to \infty$ se llama **serie de Taylor** de f alrededor de x_0. Cuando $x_0 = 0$, el polinomio de Taylor se suele denominar **polinomio de Maclaurin**, y la serie de Taylor se llama **serie de Maclaurin**.*

La denominación error de truncamiento en el teorema de Taylor se refiere al error que se comete al usar una suma truncada al aproximar la suma de una serie infinita.

3.1.6. Teoremas adicionales

A continuación enunciaremos algunas de las definiciones y teoremas básicos que utilizaremos a lo largo de estas notas.

Definición 1. *f es de clase C^1 en el intervalo $[a;b]$ si f' es continua en $[a;b]$.*

Definición 2. *f es de clase C^n en el intervalo $[a;b]$ si $f^{(n)}$ es continua en $[a;b]$.*

Definición 3. *f es de clase C^∞ en el intervalo I si f es infinitas veces derivable y continua en I.*

Teorema 8. *(Teorema de los valores intermedios). Sea f continua en el intervalo $[a;b]$. Si $k \in \mathbb{R}$ es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto ξ perteneciente al intervalo $(a;b)$ tal que $f(\xi) = k$.*

Teorema 9 (Bolzano)**.** *Si f es continua en el intervalo $[a;b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un ξ perteneciente al $(a;b)$ tal que $f(\xi) = 0$.*

Teorema 10 (Teorema de acotabilidad)**.** *Si $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[a;b]$, entonces f está acotada en $[a;b]$.*

Teorema 11 (Teorema de Weierstrass)**.** *Si $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[a;b]$, entonces f tiene un máximo global y un mínimo global en $[a;b]$.*

Teorema 12 (Teorema Generalizado de Rolle)**.** *Si f continua en $[a;b]$, y existen las derivadas $f'(x), f''(x), \ldots,$ j en $(a;b)$ y $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$ (con $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a;b]$) entonces existe ξ perteneciente al $(a;b)$ tal que $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Teorema 13 (Teorema de Lagrange)**.** *Si f continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$ entonces existe ξ perteneciente al $(a;b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.*

Teorema 14 (Teorema del valor medio ponderado)**.** *Sea f continua en $[a,b]$ y g una función integrable Riemann en $[a,b]$. Si g no cambia de signo en $[a,b]$, entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

3.2. Álgebra Lineal

3.2.1. Matrices

Una **matriz** es un arreglo multidimensional de escalares, llamados *elementos*, ordenados en filas y columnas. Una matriz de m filas y n columnas, o *matriz (de orden) $m \times n$*, es un conjunto de $m \cdot n$ elementos a_{ij}, con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, que se representa de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se puede abreviar la representación de la matriz anterior de la forma $A = (a_{ij})$ con $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Hay una relación directa entre matrices y vectores puesto que podemos pensar una matriz como una composición de vectores fila o de vectores columna. Además, un vector es un caso especial de matriz: un *vector fila* es una matriz con una sola fila y varias columnas, y un *vector columna* es una matriz con varias filas y una sola columna.

3.2.2. Operaciones con matrices

- Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices que tienen el mismo orden, $m \times n$, decimos que A y B son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.
- Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices que tienen el mismo orden $m \times n$, la **suma** de A y B es una matriz $C = (c_{ij})$ del mismo orden con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.
- Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$, la **multiplicación de A por un escalar** λ es una matriz $C = (c_{ij})$ del mismo orden $m \times n$ con $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.
- Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$, la **matriz traspuesta** de A es la matriz que resulta de intercambiar sus filas por sus columnas, se denota por A^T y es de orden $n \times m$.
- Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz de orden $p \times n$, el **producto de A por B** es una matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$ con

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, m \text{ y } j = 1, \ldots, n.$$

  Obsérvese que el producto de dos matrices solo está definido si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda.

3.2.3. Matrices especiales

- Una matriz $A = (a_{ij})$ es **cuadrada** si tiene el mismo número de filas que de columnas, y de orden n si tiene n filas y n columnas. Se llama **diagonal principal** al conjunto de elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
- Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada que tiene algún elemento distinto de cero en la diagonal principal y ceros en el resto de elementos.
- Una matriz cuadrada con ceros en todos los elementos por encima (debajo) de la diagonal principal se llama **matriz triangular inferior (superior)**.
- Una matriz diagonal con unos en la diagonal principal se denomina **matriz identidad** y se denota por I. Es la única matriz cuadrada tal que $AI = IA = A$ para cualquier matriz cuadrada A.
- Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada A tal que $A = A^T$.
- La **matriz cero** es una matriz con todos sus elementos iguales a cero.
- Decimos que una matriz cuadrada A es **invertible** (o *regular* o *no singular*) si existe una matriz cuadrada B tal que $AB = BA = I$. Se dice entonces que B es la **matriz inversa** de A y se denota por A^{-1}. (Una matriz que no es invertible se dice *singular*.)
- Si una matriz A es invertible, su inversa también lo es y $A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A y B son dos matrices invertibles, su producto también lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.2.4. Determinante de una matriz

El **determinante** de una matriz solo está definido para matrices cuadradas y su valor es un escalar. El determinante de una matriz A cuadrada de orden n se denota por $|A|$ o $\det(A)$, y se define como

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}),$$

donde la suma se toma para todas las $n!$ permutaciones de grado n y s es el número de intercambios necesarios para poner el segundo subíndice en el orden $1, 2, \ldots, n$.

Algunas propiedades de los determinantes son:

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Si dos filas o dos columnas de una matriz coinciden, el determinante de esta matriz es cero.
- Cuando se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.
- El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal.
- Si denotamos por A_{ij} la matriz de orden $(n-1)$ que se obtiene de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A, llamamos **menor complementario** asociado al elemento a_{ij} de la matriz A al $\det(A_{ij})$.
- Se llama k**-ésimo menor principal** de la matriz A al determinante de la submatriz principal de orden k.
- Definimos el **cofactor** del elemento a_{ij} de la matriz A por $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.
- Si A es una matriz invertible de orden n, entonces

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C,$$

  donde C es la matriz de elementos Δ_{ij} para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Obsérvese entonces que una matriz cuadrada es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

3.2.5. Valores propios y vectores propios

- Si A es una matriz cuadrada de orden n, un número λ es un **valor propio** de A si existe un vector no nulo v tal que $Av = \lambda v$. Al vector v se le llama **vector propio** asociado al valor propio λ.
- El valor propio λ es solución de la **ecuación característica**

  $$\det(A - \lambda I) = 0,$$

  donde $\det(A - \lambda I)$ se llama **polinomio característico**. Este polinomio es de grado n en λ y tiene n valores propios (no necesariamente distintos).

3.2.6. Normas vectoriales y normas matriciales

Para medir la **longitud** de los vectores y el **tamaño** de las matrices se suele utilizar el concepto de **norma**, que es una función que toma valores reales. Un ejemplo simple en el espacio euclidiano tridimensional es un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, donde v_1, v_2 y v_3 son las distancias a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente.

La **longitud del vector** v (es decir, la distancia del punto $(0,0,0)$ al punto (v_1, v_2, v_3)) se calcula como

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

donde la notación $\|v\|$ indica que esta longitud se refiere a la *norma euclidiana* del vector v. De forma similar, para un vector v de dimensión n, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, la norma euclidiana se calcula como

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Este concepto puede extenderse a una matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, de la siguiente manera:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

que recibe el nombre de **norma de Frobenius**.

Hay otras alternativas a las normas euclidiana y de Frobenius. Dos normas usuales son la **norma 1** y la **norma infinito**:

- La **norma 1** de un vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se define como $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$. De forma similar, la norma 1 de una matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, se define como

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

- La **norma infinito** de un vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se define como $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$. La norma infinito de una matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, se define como

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Todas las normas son equivalentes en un espacio vectorial de dimensión finita.

4. Operaciones de punto flotante

4.1. Sistemas decimal y binario

El sistema numérico que se utiliza frecuentemente es el sistema decimal, en la que la base de expresión es el 10. Sin embargo las computadoras utilizan el sistema binario, sistema de base 2, es decir solamente $\{0, 1\}$.

Proposición 1. *Para cualquier número natural N, existen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_K$, con $a_i \in \mathbb{R}$ tales que*

$$N = a_K \times 2^K + a_{K-1} \times 2^{K-1} + a_{K-2} \times 2^{K-2} + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \times 2^0 \tag{3}$$

Para ver lo anterior lo que tenemos que hacer es calcula $\frac{N}{2}$, es decir, $\frac{N}{2} = P_0 + \frac{a_0}{2}$, donde $P_0 = a_K \times 2^{K-1} + a_{K-1} \times 2^{K-2} + a_{K-2} \times 2^{K-3} + \cdots + a_1 \times 2^0$, es decir a_0 es el resto de dividir N entre 2. Ahora hagamos lo mismo para P_0:

$$\frac{P_0}{2} = a_K \times 2^{K-2} + a_{K-1} \times 2^{K-3} + a_{K-2} \times 2^{K-4} + \cdots + a_2 \times 2^0 + \frac{a_1}{2},$$

por lo tanto

$$\frac{P_0}{2} = P_1 + \frac{a_1}{2},$$

donde

$$P_1 = a_K \times 2^{K-2} + a_{K-1} \times 2^{K-3} + a_{K-2} \times 2^{K-4} + \cdots + a_2 \times 2^0,$$

es decir P_1 es el resto de dividir P_0 entre 2. Siguiendo este procedimiento de manera análoga hasta que encontremos un valor K tal que $P_K = 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1. *Para un valor N natural, los términos a_k en la ecuación 3 se encuentran*

$$\begin{aligned}
&N = 2P_0 + a_0,\\
&P_0 = 2P_1 + a_1,\\
&\vdots\\
&P_{K-2} = 2P_{K-1} + a_{K-1},\\
&P_{K-1} = 2P_K + a_K,\\
&P_K = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Ejemplo 1. *Convertir* 24563

$$\begin{aligned}
24563 &= 12281 \times 2 + 1, \quad a_0 = 1\\
12281 &= 6140 \times 2 + 1, \quad a_1 = 1\\
6140 &= 3070 \times 2 + 0, \quad a_2 = 0\\
3070 &= 1535 \times 2 + 0, \quad a_3 = 0\\
1535 &= 767 \times 2 + 1, \quad a_4 = 1\\
767 &= 383 \times 2 + 1, \quad a_5 = 1\\
383 &= 191 \times 2 + 1, \quad a_6 = 1\\
191 &= 95 \times 2 + 1, \quad a_7 = 1\\
95 &= 47 \times 2 + 1, \quad a_8 = 1\\
47 &= 23 \times 2 + 1, \quad a_9 = 1\\
23 &= 11 \times 2 + 1, \quad a_{10} = 1\\
11 &= 5 \times 2 + 1, \quad a_{11} = 1\\
5 &= 2 \times 2 + 1, \quad a_{12} = 1\\
2 &= 1 \times 2 + 0, \quad a_{13} = 0\\
1 &= 0 \times 2 + 1, \quad a_{14} = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto el número binario es: $(24563)_{10} = (101111111110011)_2$.

Proposición 2. *Sea $Q \in \mathbb{R}$, tal que $0 < Q < 1$, entonces existen términos $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tales que $Q = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots b_k$, y por tanto*

$$Q = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \cdots + b_k \times 2^{-k} + \cdots \tag{5}$$

Si multiplicamos Q por 2, se tiene que

$$2Q = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + b_4 \times 2^{-3} + \cdots + b_k \times 2^{-k+1} + \cdots$$

Si $F_1 = frac(2Q)$, con $frac(x)$ la parte fraccionaria de x, y $b_1 = [[2Q]]$, donde $[[x]]$ es la parte entera de x, entonces

$$F_1 = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + b_4 \times 2^{-3} + \cdots + b_k \times 2^{-k+1} + \cdots,$$

de donde

$$2F_1 = b_2 \times 2^0 + b_3 \times 2^{-1} + b_4 \times 2^{-2} + \cdots + b_k \times 2^{-k+2} + \cdots = b_2 + F_2,$$

donde $F_2 = frac(2F_1)$, y $b_2 = [[2F_1]]$. Procediendo de manera análoga para el resto de los términos se tienen las suceciones $\{b_k\}$ y $\{F_k\}$, dadas por $b_k = [[2F_{k-1}]]$ y $F_k = frac(2F_{k-1})$, con $b_1 = [[2Q]]$ y $F_1 = frac(2Q)$. Por lo tanto se tiene la representación binaria de Q dada por

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \tag{6}$$

Ejemplo 2. *Convertir el número 3.5786. Sea $Q = 0.5786$, entonces*

$$\begin{aligned}
2Q &= 1.1572, b_1 = [[1.1572]] = 1, F_1 = frac(1.1572) = 0.1572 \\
2F_1 &= 0.3144, b_2 = [[0.3144]] = 0, F_2 = frac(0.3144) = 0.3144 \\
2F_2 &= 0.6288, b_3 = [[0.6288]] = 0, F_3 = frac(0.6288) = 0.6288 \\
2F_3 &= 1.2576, b_4 = [[1.2576]] = 1 F_4 = frac(1.2576) = 0.2576 \\
2F_4 &= 0.5152, b_5 = [[0.5152]] = 0, F_5 = frac(0.5152) = 0.5152 \\
2F_5 &= 1.0304, b_6 = [[1.0304]] = 1 F_6 = frac(1.0304) = 0.0304 \\
2F_6 &= 0.0608, b_7 = [[0.0608]] = 0, F_7 = frac(0.0608) = 0.0608 \\
2F_7 &= 0.1216, b_8 = [[0.1216]] = 0, F_8 = frac(0.1216) = 0.1216
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que:

$$0.5786 = (0.10010100\ldots)_2$$

Por lo tanto:

$$3.5786 = (11.10010100\ldots)_2.$$

Ejercicio 1. *Convertir los siguientes números de base 10 a base 2.*

1. 324
2. 27
3. 1423
4. 235.25
5. 41.596

4.2. Números en punto flotante

Definición 4. *Los números en punto flotante son número reales de la forma*

$$\pm\alpha \times \beta^e, \tag{7}$$

donde α tiene un número de dígitos limitados, β es la base y e es el exponente que modifica la posición del punto decimal.

Definición 5. *Un número real x tiene una representación punto flotante normalizada si*

$$\pm\alpha \times \beta^e, \tag{8}$$

con $\frac{1}{\beta} < |\alpha| < 1$

Nota 4. *En este caso x se puede escribir en la forma*

$$x = \pm 0, d_1 d_2 \cdots d_k \times \beta^e, \tag{9}$$

donde si $x \neq 0$,$d_1 \neq 0$, y además $0 \leq d_i < \beta$, para $i = 1, 2, 3 \ldots, k$ y $L \leq e \leq U$.

Definición 6. *El conjunto de los números en punto flotante se le llama* ***conjunto de números máquina****.*

Nota 5. *El conjunto de números máquina es finito. Para ver esto consideremos que si x es de la forma*

$$\pm 0, d_1 d_2 \cdots d_t \times \beta^e, \tag{10}$$

dado que $d_1 \neq 0$ y $0 \leq d_i < \beta$ entonces d_1 puede tomar $\beta - 1$ valores distintos, mientras que para d_i hay β posibilidades. Por lo tanto se tienen $(\beta - 1)\beta\beta \cdots \beta = (\beta - 1)\beta^t$. El número de exponentes posibles son $U - L + 1$, en total hay $(\beta - 1)\beta^t(U - L + 1)$ números máquina positivos, por lo tanto, considerando positivos y negativos hay $2(\beta - 1)\beta^t(U - L + 1)$ números máquina, considerando que el creo tambiés es un número de máquina hay en realidad $2(\beta - 1)\beta^t(U - L + 1) + 1$. Es decir, cualquier número real puede ser representado por uno de los $2(\beta - 1)\beta^t(U - L + 1) + 1$ números de máquina.

Ejemplo 3. *Recordemos la expresión (10), consideremos $\beta = 2$, $t = 3$, $L = -2$ y $U = 2$. Entonces $x = \pm d_1 d_2 d_3 \times (2)^e$, con $-2 \leq e \leq 2$ y $0 \leq d_1, d_2 < 2$. Por lo tanto se tiene que $d_1, d_2, d_3 = 1$; $e = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Entonces $d_1 d_2 d_3 = \{100, 101, 110, 111\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\}$*

(11)

-2	-1	0	1	2
0.111×2^{-2}	0.111×2^{-1}	0.111×2^{0}	0.111×2^{1}	0.111×2^{2}
0.110×2^{-2}	0.110×2^{-1}	0.110×2^{0}	0.110×2^{1}	0.110×2^{2}
0.101×2^{-2}	0.101×2^{-1}	0.101×2^{0}	0.101×2^{1}	0.101×2^{2}
0.100×2^{-2}	0.100×2^{-1}	0.100×2^{0}	0.100×2^{1}	0.100×2^{2}

sustituyendo y resolviendo las operaciones

(12)

-2	-1	0	1	2
$\frac{7}{8} \times 2^{-2} = \frac{7}{32}$	$\frac{7}{8} \times 2^{-1} = \frac{7}{16}$	$\frac{7}{8} \times 2^{0} = \frac{7}{8}$	$\frac{7}{8} \times 2^{1} = \frac{7}{4}$	$\frac{7}{8} \times 2^{2} = \frac{7}{2}$
$\frac{3}{4} \times 2^{-2} = \frac{3}{16}$	$\frac{3}{4} \times 2^{-1} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{4} \times 2^{0} = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \times 2^{1} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{4} \times 2^{2} = 3$
$\frac{5}{8} \times 2^{-2} = \frac{5}{32}$	$\frac{5}{8} \times 2^{-1} = \frac{5}{16}$	$\frac{5}{8} \times 2^{0} = \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8} \times 2^{1} = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{8} \times 2^{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} \times 2^{-2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \times 2^{-1} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times 2^{0} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2^{1} = 1$	$\frac{1}{2} \times 2^{2} = 2$

Por tanto el número total de números máquina son 41.

Ejercicio 2. 1. *Describir todos los números máquina para* $\beta = 2$, $t = 4$, $L = -3$ *y* $U = 3$.

2. *Escribir el número* 732.5051 *en notación de punto flotante. Respuesta* 0.7325051×10^{-3}

3. *Escribir el número* 0.006521 *en notación de punto flotante. Respuesta* 0.06521×10^{-2}

4. $(101.01)_2$. *Respuesta* 0.10101×2^3

5. $(0.00101111)_2$. *Respuesta* 0.101111×2^{-2}

Nota 6. $(0.1)_2 = 1 \times 2^{-1} = 0.5$

4.3. Representación

En una computadora los números se expresan como se ha descrito, pero con restricciones sobre q y m dadas por la longitud de la palabra. Supongamos que la longitud de la palabra es de 32 bits, los cuales se distribuyen de la siguiente manera: los dos primeros se reservan para los signos: es 0 si es positivo y 1 si es negativo; los siguientes 7 espacios para el exponente, y los restantes para la mantisa. Considerando que cualquier número puede normalizarse, recordar $x = \pm q \times 2^m$, con $\frac{1}{2} \leq q < 1$, se puede asumir que el primer bit en q es 1 y por tanto no se requeire almacenar,.

Ejemplo 4. *Representar y almacenar en punto flotante normalizado el número* -0.125. *A saber* $(-0.125) = (-0.001)_2 = (-0.1)_2 \times 2^{-2}$, *además* $2 = (10)_2$; *por lo tanto su representación es:* $1, 1|$, $0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots 0$.

Ejemplo 5. *Represente y almacene el número* 117.125. *Respuesta* $117 = (1110101)_2$ *y* $0.125 = (0.001)_2$, *por tanto* $117.125 = (1110101.001)_2 = (0.1110101001)_2 \times 2^7$ *y* $y = (111)_2$, *por tanto se almacena:* $0, 0||0000111||110101 \ldots 0$

Nota 7. $|m|$ *no requiere más de 7 bits, es decir* $|m| \leq (1111111)_2 = 2^7 - 1 = 127$, *por tanto el exponente de 7 dígitos binarios proporciona un intervalo de 0 a 127, para números pequeños se toma el exponente en el intervalo* $[-63, 64]$. *Además* q *requiere de a lo más 24 bits, por tanto la máquina de 32 bits tienen una precisión limitada entre 7 y 8 dígitos decimales, ya que el bit menos significativo en la mantisa representa unidades del orden* $2^{-24} \approx 10^{-7}$. *Esto quiere decir que números expresados por más de siete dígitos decimales serán aproximados cuando se dan como datos de entrada o como resultados de operaciones.*

4.4. Errores

A la hora de realizar un cálculo es importante asegurarse de que los números que intervienen en el cálculo se pueden utilizar con confianza. Para ello, se introduce el concepto de **cifras significativas**, que designa formalmente la notación de un valor numérico, y se usa en aquellos que guían visualmente la precisión.

Los **errores de truncamiento** se producen cuando utilizamos una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto. Para conocer las características de estos errores se suelen considerar los polinomios de Taylor. Cuando se aproxima un proceso continuo por uno discreto, para errores provocados por un tamaño de paso finito h, resulta a menudo útil describir la dependencia del error e con h cuando h tiende a cero.

Decimos que una función $f(h)$ es una $\mathcal{O}$ grande de h^n si $|f(h)| \leq ch^n$ para alguna constante c, cuando h es cercano a cero; se escribe

$$f(h) = \mathcal{O}(h^n) \tag{13}$$

.

Si un método tiene un término de error que es $\mathcal{O}(h^n)$, se suele decir que es un **método de orden** n. Por ejemplo, si utilizamos un polinomio de Taylor para aproximar la función g en $x = a + h$, tenemos:v

$$g(x) = g(a+h) = g(a) + hg'(a) + \frac{h^2}{2!}g''(a) + \frac{h^3}{3!}g^{(3)}(\xi), \quad \text{para algún } \xi \in [a, a+h].$$

Suponiendo que g es suficientemente derivable, la aproximación anterior es $\mathcal{O}(h^3)$, puesto que el error

$$\frac{h^3}{3!}g^{(3)}(\xi), \quad \text{satisface} \quad \left|\frac{h^3}{3!}g^{(3)}(\xi)\right| \leq \frac{M}{3!}|h^3|,$$

donde M es el máximo de $g^{(3)}(x)$ para $x \in [a, a+h]$.

Las diferencias (errores) son múltiples y de diversa naturaleza, aunque pueden separarse en dos grupos genéricos:

- **Los errores que provienen del modelado teórico** (o abstracción matemática) del fenómeno real; estos errores se denominan *Errores del modelo o inherentes*. Los errores inherentes son producto de factores intrínsecos a la naturaleza, al ambiente y las personas mismas. Los errores inherentes son imposibles de remediar aunque pueden minimizarse; en consecuencia, no pueden cuantificarse.

  > Se distinguen dos tipos de errores inherentes: **Las incertidumbres** hacen referencia a las dimensiones físicas que nunca podrán ser medidas en forma exacta debido a la naturaleza de la materia y a las imperfecciones de los instrumentos de medición. **Las verdaderas equivocaciones** son las situaciones que se producen en la lectura de instrumentos de medición o en el traslado de información y que son inadvertidas a las personas; un claro ejemplo de estas situaciones es la denominada *ceguera de taller*.

- **Los errores del método** son producto de la limitante en la representación y manipulación de cantidades numéricas utilizadas en los cálculos necesarios en el desarrollo del modelo matemático. Es de destacar que los dispositivos de cálculo (tales como calculadoras y computadoras) utilizan y manipulan cantidades en forma imprecisa.

Existen dos grandes tipos de errores del método: *El truncamiento* se provoca ante la imposibilidad de manipular, por parte de un instrumento de cómputo, una cantidad infinita de términos o cifras. Los términos o cifras omitidas (que son infinitas en número) introducen un error en los resultados calculados. *El redondeo* se produce por el mismo motivo que el truncamiento pero, a diferencia de éste, las cifras omitidas sí son consideradas en la cifra resultante

En general, si se incrementa el número de cifras significativas en el ordenador, se minimizan los errores de redondeo, y los errores de truncamiento disminuyen a medida que los errores de redondeo se incrementan. Por lo tanto, para disminuir uno de los dos sumandos del error total debemos incrementar el otro. Como el error total no se puede calcular en la mayoría de los casos, se suelen utilizar otras medidas para estimar la exactitud de un método numérico, que suelen depender del método específico. En algunos métodos el error numérico se puede acotar, mientras que en otros se determina una estimación del *orden de magnitud del error*. Cuando se buscanlas soluciones numéricas de un problema real los resultados que se obtienen por lo general no son exactos.

4.5. Cuantificación de errores

Los errores se cuantifican de dos formas diferentes:

1. **Error absoluto**. El error absoluto es la diferencia absoluta entre un valor real y un aproximado. Está dado por la siguiente fórmula:

$$E = |V_{real} - V_{aprox}|$$

El error absoluto recibe este nombre ya que posee las mismas dimensiones que la variable bajo estudio.

2. **Error relativo**. Corresponde a la expresión en porcentaje de un error absoluto; en consecuencia, este error es adimensional.

$$e = \left| \frac{V_{real} - V_{aprox}}{V_{real}} \right| \cdot 100\,\%$$

La diferencia entre la preferencia en el uso de los dos tipos de error consiste precisamente en la presencia de las dimensiones físicas. Debido a las unidades de medición utilizadas, el manejo y la percepción del error absoluto suele ser engañoso o difícil de comprender rápidamente. Sin embargo, el manejo de porcentajes (o valores relativos) resulta más natural y sencillo de comprender. Sin embargo, el uso de estos dos tipos de errores está sujeto siempre al objetivo de las actividades desarrolladas.

Las expresiones que definen a los errores absoluto y relativo requieren del conocimiento de la variable V_{real} que representa un valor ideal que no posee error alguno. Como podrá suponerse, en la realidad resulta imposible determinar este valor. Una práctica común en los análisis elementales sobre errores es considerar como un valor real a los resultados arrojados por la medición experimental de los fenómenos y a los valores aproximados como los proporcionados por los modelos matemáticos (o viceversa). En realidad, ambos valores son valores aproximados. Para lograr un resultado coherente, en la práctica debe sustituirse al valor real por un valor que se considere posee un error menor.

En el caso del análisis numérico, dado que los resultados se obtienen a partir de procesos iterativos que se mejoran los inicialmente obtenidos, debe partirse del supuesto que el último valor obtenido posee un nivel menor de error que el valor previo. Dado lo anterior, los errores absoluto y relativo se calcularán de la siguiente forma:

Error absoluto:

$$E = |V_i - V_{i-1}|$$

Error relativo:

$$e = \left| \frac{V_i - V_{i-1}}{V_i} \right| \cdot 100\,\%$$

En ambas ecuaciones, V_i es el valor de la última iteración y V_{i-1} es el valor de la iteración anterior i–1.

- **Error absoluto:** Se define como la diferencia entre el valor real (experimental o exacto) y el valor aproximado (teórico o calculado):

$$E_a = |x_{\text{real}} - x_{\text{aproximado}}|$$

- **Error relativo:** Es la relación entre el error absoluto y el valor real:

$$E_r = \frac{E_a}{|x_{\text{real}}|}$$

- **Error porcentual:** Es el error relativo expresado en porcentaje:

$$E_p = E_r \cdot 100 = \frac{E_a}{|x_{\text{real}}|} \cdot 100$$

4.6. Errores en punto flotante

Un número real $x \in \mathbb{R}$, cuando no pertenece a F, se representa mediante una aproximación flotante $fl(x) \in F$, de modo que:

$$x = fl(x)(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \epsilon_{\text{mach}}.$$

Este ε se llama **error relativo** y ϵ_{mach} es la **precisión de la máquina**. En general se tiene que:

$$\epsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}.$$

Nota 8. *Los ordenadores almacenan los números reales en forma binaria (base 2). Cada dígito binario (0 ó 1) se llama* ***bit*** *(por digital binary). La memoria de los ordenadores está organizada en* ***bytes****, siendo un byte = 8 bits. En el estándar IEEE, los ordenadores representan números reales en precisión simple (32 bits) y en precisión doble (64 bits). Este estándar también define los códigos para representar valores especiales como NaN (Not a Number), infinitos, y ceros con signo. Para representar un número real, se utiliza la forma normalizada:*

$$x = (-1)^s \cdot (1+f) \cdot 2^e,$$

donde: s: es el bit de signo (0 para positivo, 1 para negativo), f: es la fracción, e: es el exponente con sesgo.

Por ejemplo, el número 0.15625 en binario es 0.00101, que se escribe como $1.01 \cdot 2^{-3}$ *y se almacena como: signo = 0, exponente =* 124 *(con sesgo de* 127*), y mantisa =* 010000... *En este formato, la precisión depende de la cantidad de bits reservados a la fracción f. En doble precisión (64 bits), se reservan 52 bits para la fracción, 11 para el exponente y 1 para el signo.*

4.7. Aproximación numérica y errores

Una *aproximación* es un valor cercano a uno considerado como real o verdadero. Esta cercanía, o diferencia, se conoce como *error*. Normalmente, la consideración de la validez de una aproximación depende de la cota de error que el experimentador considere pertinente en función del contexto del fenómeno bajo estudio. Esto implica que también debe considerarse que una magnitud debe ser un valor real, que en el ámbito de la Ingeniería pocas veces se conoce, lo que obliga a adoptar convenciones. En Ingeniería, se denomina *exactitud* a la capacidad de un instrumento de medir un valor cercano al de la magnitud real. Exactitud implica precisión, pero no al contrario. Exactitud y precisión no son equivalentes. Exactitud es capacidad para acercarse a la magnitud real, y precisión es la capacidad de generar resultados similares. La precisión se logra cuando un instrumento para repetir mediciones exactas cuando éstas se realizan consecutivamente. De acuerdo con la definición de aproximación numérica, la exactitud se aplica en los métodos numéricos en cuanto a la capacidad del método de generar un resultado muy cercano al valor real; se percibe la cercanía entre la exactitud y el concepto de error. Por otra parte, los métodos numéricos a través de iteraciones generan valores aproximados cada vez más exactos, es decir, estas iteraciones deberán ser precisas. Dado lo anterior, los métodos numéricos deberán tener como cualidades la exactitud y la precisión. Matemáticamente, la **convergencia** es la propiedad de algunas sucesiones y series de tender progresivamente a un límite, de tal forma, si este límite existe, se dice que la sucesión o la serie *converge*. En forma análoga, si un método numérico en su funcionamiento iterativo nos proporciona aproximaciones cada vez más cercanas al valor buscado, se dice que el método converge. La convergencia se mide a través de los errores; si el error entre dos aproximaciones sucesivas se reduce, el método converge; se debe cumplir que:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Es decir, la diferencia enésima $(x_n - x_{n-1})$ debe ser menor que la diferencia $(n-1)$ésima $x_{n-1} - x_{n-2}$. Se dice que un sistema (o un proceso) es **estable** si a pequeñas variaciones en la entrada o en la excitación corresponden pequeñas variaciones en la salida o en la respuesta. La estabilidad de un método numérico tiene que ver con la manera en que los errores numéricos se propagan a lo largo del algoritmo. Cuando un método converge, lo más deseable es que en los resultados que se obtengan, los niveles de error se disminuyan en la forma más rápida posible. Sin embargo, ocurre que durante la operación del algoritmo, ya sea por el manejo de los datos numéricos o bien por la naturaleza propia del modelo matemático con el que se esté trabajando, los errores entre aproximaciones no disminuyan en forma progresiva, sino que incluso aumenten en alguna etapa del proceso para después reducirse mostrando un comportamiento aleatorio.

La **robustez** de un método numérico radica en su convergencia y su estabilidad. Pueden utilizarse métodos cuya prueba de convergencia indique la pertinencia de su uso, pero que durante su aplicación se obtengan resultados inestables que repercutan en el número de iteraciones y en consecuencia en el tiempo invertido en la solución. El ideal lo constituyen métodos que a la vez de ser convergentes resulten estables.

Nota 9. ***Convergencia*** *de un método se refiere a que sea posible la obtención del valor buscado cuando el número de pasos tiende a infinito. Típicamente, la convergencia se analiza en métodos iterativos, es decir, aquellos en los que el resultado final se obtiene tras una repetición de cálculos. Cuando repetimos estas iteraciones, los datos iniciales producen valoraciones progresivas del resultado.*

5. Ejercicios y Tareas

1. Realizar una revisión de la historia de los métodos numéricos, elaborar un documento de hasta dos cuartillas.

2. Realiza las siguientes conversiones de base 10 a base 2:

   a) 246
   b) 345.68
   c) 4586632.2846
   d) 984365.27463
   e) 79905523

3. Elabora el código en R para realizar la conversión de base 10 a base 2.

6. Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio 3. *Resolver por eliminación Gaussiana Simple los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

1.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 0.5x_3 &= -5 \\ -2x_1 + 5x_2 - 1.5x_3 &= 0 \\ -0.2x_1 + 1.75x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 6x_4 &= 2.3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 &= 6.9 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 &= -36 \\ 10x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -36 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 0.003000x_1 + 59.14x_2 &= 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 &= 46.78 \end{aligned}$$

utilizar redondeo a 4 cifras significativas.

4.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 10x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 12x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= -1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} 1.133x_1 + 5.281x_2 - 2.454x_3 &= 6.414 \\ 24.14x_1 - 1.21x_2 + 5.281x_3 &= 113.8 \\ -10.123x_1 + 6.387x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ *y* $b = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. *Resolver por eliminación gaussiana con pivoteo parcial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

1.

$$\begin{aligned} 0.4x_1 - 1.5x_2 + 0.75x_3 &= -20 \\ -0.5x_1 - 15x_2 + 10x_3 &= -10 \\ -10x_1 - 9x_2 + 2.5x_3 &= 30 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 + x_3 &= -71 \\ -2x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 134 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -58 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 0.003000x_1 + 59.14x_2 &= 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 &= 46.78 \end{aligned}$$

utilizar redondeo a 4 cifras significativas.

4.

$$\begin{aligned} -x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 0.00031000x_1 + 1.000000x_2 &= 3.000000 \\ 1.00045534x_1 + 1.00034333x_2 &= 7.000 \end{aligned}$$

6. *Resolver para* $A = \begin{pmatrix} 14 & 14 & -9 & 3 & -5 \\ 14 & 52 & -15 & 2 & -32 \\ -9 & -15 & 36 & -5 & 16 \\ 3 & 2 & -5 & 47 & 49 \\ -5 & 32 & 16 & 49 & 79 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -15 \\ -100 \\ 106 \\ 329 \\ 463 \end{pmatrix}$ *y* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

7. *Resolver para* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ *y* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

8. *Resolver para* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ *y* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

9. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

10. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 9.612x_2 &= 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Resolver por el método de Gauss-Jordan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -0.4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ 0.5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 0.9x_2 + 3x_3 &= -3.61 \\ -0.5x_1 + 0.1x_2 - x_3 &= 2.035 \\ x_1 - 6.35x_2 - 0.45x_3 &= 15.401 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}0.7x_1 + 2.7x_2 - 6x_3 + 0.7x_4 &= 1.6487\\ 2x_1 - 0.8x_2 + 3x_3 - x_4 &= -2.342\\ -x_1 - 1.5x_2 + 1.4x_3 + 3x_4 &= -4.189\\ 7x_2 - 1.56x_3 + x_4 = 15.792\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85\\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3\\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 27\\ -3x_1 - 6x_2 + 2x3 &= -61.5\\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -21.5\end{aligned}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 2 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 4\\ 1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$

7.

$$\begin{aligned}6x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 17\\ x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -17\\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 &= 19\\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -14\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + 4w &= 1\\ x - 4y + z + 11w &= 2\\ -x + 8y + 7z + 6w &= -2\\ 16x + 8y - 5z + 6w &= 11\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3\\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1\\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2\\ x_3 + 4x_4 + x_5 &= 1\\ x_4 + 5x_5 &= 3\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
15x_1 - 18x_2 + 15x_3 - 3x_4 &= 11\\
-18x_1 + 24_2 - 18x_3 + 4x_4 &= 10\\
15x_1 - 18x_2 + 18x_3 - 3x_4 &= 11\\
-3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= 13
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Resolver por el método de Gauss-Seidel los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

1.

$$\begin{aligned}
3x_1 - 0.2x_2 - 0.5x_3 &= 8\\
0.1x_1 + 7x_2 + 0.4x_3 &= -19.5\\
0.4x_1 - 0.1x_2 + 10x_3 &= 72.4
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
-5x_1 + 1.4x_2 - 2.7x_3 &= 94.2\\
0.7x_1 - 2.5x_2 + 15x_3 &= -6\\
3.3x_1 - 11x_2 + 4.4x_3 &= -27.5
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
3x_1 - 0.5x_2 + 0.6x_3 &= 5.24\\
0.3x_1 - 4x_2 - x_3 &= -0.387\\
-0.7x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 14.803
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
5x_1 - 0.2x_2 + x_3 &= 1.5\\
0.1x_1 + 3x_2 - 0.5x_3 &= -2.7\\
-0.3x_1 + x_2 - 7x_3 &= 9.5
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
-3x_2 + 7x_3 &= 2\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3\\
12x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
0.15_1 + 2.11x_2 + 30.75x_3 &= -26.38\\
0.64x_1 + 1.21x_2 + 2.05x_3 &= 1.01\\
3.21x_1 + 1.53x_2 + 1.04x_3 &= 5.23
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} 3x - 0.1y - 0.2z &= 7.85 \\ 0.1x + 7y - 0.3z &= -19.3 \end{aligned}$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

10.

$$17x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 500$$
$$\begin{aligned} -5x_1 + 21x_2 - 2x_3 &= 200 \\ -5x_1 - 5x_2 + 22x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Aplicar el método de Jacobi para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

1. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 2 & -1 & 0 & 26 \\ 1 & 20 & -2 & 3 & -15 \\ -2 & 1 & 30 & 0 & 53 \\ 1 & 2 & 3 & 20 & 47 \end{array}\right)$

2. $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 10 & 11 \\ 11 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right)$

3. $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 3 & 51 \\ 2 & 5 & 1 & 23 \\ -3 & 1 & 6 & 20 \end{array}\right)$

4. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right)$

5. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right)$

6. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -1 & 3 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & 8 & 15 \end{array}\right)$

7.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 14x_2 &= 10 \\ -5x_1 + 13x_2 &= 8 \\ -x_1 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 20 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 &= -19 \end{aligned}$$

7. Introducción al uso de R

7.1. Sesiones en RStudio

Al utilizar R, existen varios entornos que facilitan la gestión y ejecución de rutinas, *archivos con extensión .R*, el más popular es *RStudio* o bien directamente desde la terminal o ejecutando simplemente *R*, la ventaja de *RStudio* es que permite que en una pantalla podamos visualizar: Consola (lugar donde se ejecutan los comandos directamente), History (el histórico de las variables y funciones definidas mismo que puede guardarse para ser invocado posteriormente), Plots (ventana en la que se muestran los gráficos generados), Help (la ayuda sobre comandos, funciones, sintaxis en R), Files (lugar donde se manejan los archivos, es decir leer, guardar, mover o renombrar archivos), y Packages (espacio para instalar o cargar paquetes de manera gráfica), todo esto para facilitar el manejo y ejecución de rutinas compatibles con R. Por otra parte **Workspace** es un entorno en el que se incluyen todos los objetos definidos, al final de una sesión de R, este entorno puede guardarse una imagen del mismo para ser cargada posteriormente.

Durante el uso de R en ocasiones se requiere limpiar la consola, para esto al presionar **Ctrl+L**.

7.2. Uso de R

- **Constantes**: π, $exp(1)$
- Las constantes pueden ser de tipo *integer*, *double* o *complex*, el tipo de constante se puede consultar con la función **typeof()**

```
> typeof('mi constante')
[1] "character"
```

- Operadores: $<, >, >=, >=, ! =$, (Not), $\|$ (OR), & (And), == (comparar)
- Operadores aritméticos: $+$, $-$, $*$, ^ potencia, `%%` resto de la división entera, `%/%` división entera.
- Logaritmos y exponenciales: `log` logaritmo natural, `log(x,b)` ($log_b x$) y `exp(x)` (e^x).
- Funciones trigonométricas`cos(x)`,`sin(x)`, `tan(x)`, `acos(x)`, `asin(x)`, `atan(x)`.
- Funciones misceláneas `abs(x)`, `sqrt(x)`, `floor(x)`, `ceiling(x)`, `max(x)`, `sign(x)`.
- Comando `options(digits=k)`:

```
> 1/3.0
[1] 0.3333333
> options(digits=3)
> 1/3
[1] 0.333
> 1/17.0
[1] 0.0588
> options(digits=3)
> 1/17.0
[1] 0.0588
> options(digits=5)
> 1/17.0
[1] 0.058824
> options(digits=9)
> 1/17.0
[1] 0.0588235294
```

- Comando `round(x,n)` redondea x a n decimales, el valor por defecto es $n = 6$.
- Comando `cat('caracter1','caracter2')` concatena dos cadenas o valores y el resultado lo convierte a un objeto tipo *string*.

7.3. Funciones

```
nombrefun = function(a1,a2,...,an) {
# código ...
instruccion-1
instruccion-2
# ...
return( ... ) #valor que retorna (o también la última instrucción, si ésta retorna algo)
}
```

8. Clase en Laboratorio de Cómputo

Ejercicio 8. *1. Generar un archivo tipo Rmd, personalizar de manera básica*

2. Realizar las siguientes operaciones

```
x = c(1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)
x = 1:5
x = seq(1,3, by =0.5)
x = seq(5,1, by =-1)
x = rep(1, times = 5)
length(x)
rep(x, 2)
set.seed(123)
x = sample(1:10, 5)
```

3.
```
x = 1:5
y = rep(0.5, times = length(x))
x+y
x*y
x^y
1/(1:5)
```

4.
```
x = 1:5
2*x
1/x^2
x+3
```

5.
```
A = matrix(rep(0,9), nrow = 3, ncol= 3);
B = matrix(c(1,2,3,5,6,7), nrow = 2, byrow=T);
x = 1:3; y = seq(1,2, by = 0.5); z = rep(8, 3) ; x; y; z
C = matrix(c(x,y,z), nrow = length(x)); C # ncol no es necesario declararlo
xi = seq(1,2, by 0.1); yi = seq(5,10, by = 0.5)
rbind(xi,yi)
cbind(xi,yi)
```

6.
```
A = diag(c(3,1,3));
```

```
diag(A)
n = 3
I = diag(1, n);
D = diag(diag(A))
J = diag(1, 3, 4);
```

7.

```
B = matrix(c( 1, 1 ,8,
              2, 0, 8,
              3, 2, 8), nrow = 3, byrow=TRUE); B

B[2, 3]
B[3,]
B[,2]
B[1:2,c(2,3)]
```

8.

```
A = matrix(c( 1, 1 ,8,
              2, 0, 8,
              3, 2, 8), nrow = 3, byrow=TRUE); A
A[c(1,3), ] = A[c(3,1), ]
A[2, ] = A[2, ] - A[2,1]/A[1,1]*A[1, ]
```

9.

```
x = c(2, -6, 7, 8, 0.1,-8.5, 3, -7, 3)
which.max(x)
which.max(abs(x))
```

10.

```
A = matrix(1:9, nrow=3); A # Por columnas
B = matrix(rep(1,9), nrow=3); B

A+B
A*B
A%*%B
A^2
A-2
3*A
t(A)
det(A)
C <- A-diag(1,3); det(C)
```

11.

```
notas = matrix(c(80, 40, 70, 30, 90, 67, 90,
                 40, 40, 30, 90, 100, 67, 90,
                 100,100,100, 100, 70, 76, 95), nrow=3, byrow=TRUE); notas
# crear columa con la suma de los renglones
#agregar la columna al final de la matriz
```

9. Apendice A: Breve historia de los Métodos Numéricos

Un *método numérico* es un proceso matemático *iterativo* cuyo objetivo es encontrar la aproximación a una solución específica con un cierto error previamente determinado. Los métodos numéricos requieren de una aproximación a la solución real al problema, misma que es corregida a través de la repetición de un cierto proceso que debe arrojar soluciones cada vez más cercanas al valor real. Cada corrección de un valor inicial se conoce como *iteración*. El proceso es controlado por medio de la medición de una cantidad de error predefinido entre dos aproximaciones sucesivas.

La historia de los métodos numéricos es la colección de acontecimientos matemáticos en los que se resuelven problemas sin el uso de la matemática analítica. Algunos de los métodos más utilizados en la actualidad fueron creados mucho antes de la invención de la computadora; su aplicación era extenuante y complicada porque cada iteración requería de una diversidad de operaciones aritméticas que se realizaban por grupos enteros de calculistas, evidentemente, de forma manual. La historia de los métodos numéricos es paralela, al menos desde la mitad del siglo XIX, a la historia de la computación. Las contribuciones más actuales radican en la creación de software que minimiza los errores y mejora las aproximaciones de los resultados [1].

- 1650 a.C. Se crean los Papiros de Rhynd en los que se escribe un método para resolver expresiones matemáticas sin álgebra.
- 250 a.C. Euclides crea el Método de Exhaustión, que consiste en aproximar figuras geométricas (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) consecutivamente dentro de un círculo para obtener una aproximación a π.
- Siglo IX d.C. Al Juarismi crea los *algoritmos*.
- 1623. John Napier inventa los *huesos de Napier*, que son arreglos prácticos de logaritmos en tablas.
- Siglo XVII. Isaac Newton crea los procesos de interpolación polinomial.
- Siglo XVIII. Leibnitz crea el Cálculo diferencial.
- 1768. Euler crea soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales con el principio de la integración numérica. Jacob Stirling y Brook Taylor presentan el Cálculo de diferencias finitas.
- 1822. Charles Babbage inventa la *Máquina diferencial*.
- 1843. Ada, condesa de Lovelace, publica sus notas sobre la máquina analítica de Charles Babbage.
- 1890. (IBM) Tabula el censo estadounidense empleando las máquinas de tarjetas perforadas de Herman Hollerith.
- 1931. Vannebar Bush diseña el analizador diferencial, un computador analógico electromecánico. En 1945 publicará el artículo *Cómo podremos pensar* en el que describe la computación personal.
- 1937. Alan Turing publica *Sobre los números computables*, en el que describe un computador universal. En este mismo año, Howard Aiken propone la construcción de un gran computador y descubre partes de la máquina diferencial de Babbage en Harvard; también John Vincent Atanasoff conceptualiza el computador electrónico (la cual completará en 1939).
- 1938. William Hewlett y David Packard crean su empresa en Palo Alto, California, Estados Unidos.
- 1939. Turing comienza a descifrar los códigos secretos alemanes.

- 1944. John Von Neumann redacta el primer informe sobre EDVAC. En distintas universidades de Estados Unidos se desarrollan proyectos sobre computadoras cuya aplicación (secreta) será apoyar a la milicia en cálculos balísticos (ecuaciones diferenciales).
- 1950. Turing crea su famosa prueba sobre la inteligencia artificial; se suicidará en 1954. J.H. Wilkinson acudió al Laboratorio Nacional de Física de Reino Unido para construir una versión más simple de la máquina de Turing; construyó la *ACE (Automatic Computing Engine)* para resolver cálculos con matrices.
- 1953. John W. Backus, empleado de IBM, desarrolla *FORTRAN (Formulae Translating)*, como una alternativa al uso del lenguaje ensamblador; se usó por primera vez en una IBM 704.
- 1958. Se anuncia la creación de la Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada (ARPA).
- 1962. Doug Engelbart publica *Aumentar el intelecto humano*; en 1963, junto con Bill English inventará el ratón.
- 1968. Noyce y Moore fundan *INTEL.*
- 1969. Misión Apolo 11. Katherine Johnson calcula la trayectoria del cohete Mercurio. Dorothy Vaughan se convierte en la supervisora de IBM dentro de la NASA. Mary Jackson es la primera ingeniera aeroespacial en Estados Unidos. Margaret Hamilton escribe el código del programa que controló la nave. Todas ellas tuvieron una participación fundamental para que la misión fuera un éxito.
- 1970. Investigadores visitantes en el *Argone National Laboratory* de Estados Unidos traducen códigos de *ALGOL* para obtener eigenvalores planteados por Wilkinson para incluirlos en *FORTRAN.* De esta labor nace *EISPACK* en 1976 y posteriormente *LINPACK* en 1976.
- 1973. Vint Cerf y Bob Kahn completan los protocolos TCP/IP.
- 1975. Bill Gates y Paul Allen desarrollan el lenguaje de programación *BASIC*; fundan *Microsoft.* Steve Jobs y Steve Wozniak lanzan el *Apple I.*
- 1983. Richard Stallman empieza a desarrollar el proyecto *GNU.*
- 1986. Cleve Moler, a partir de *EISPACK* y *LINPACK*, crea *MATLAB*; funda la empresa *MathWorks.*
- 1991. Linus Torvalds lanza la primera versión de *Linux.* Tim Berbers-Lee anuncia la *World Wide Web.*

10. Programas y rutinas en R

```
#---- SESION 1 ----
##---- OPERADORES LOGICOS ----
17<5
17>5
17<=5
17>=5
17!=5
```

```
17==5
##---- OPERADORES ARITMETICOS ----
# SUMA, RESTA, MULTIPLICACION, DIVISION, POTENCIA, MODULO, DIVISION ENTERA
17+5
17*5
17*5
17^5
17%/%5
17%%5
##---- LOGARITMOS Y EXPONENCIALES ----
log(1)
log(12)
log(12,2)
exp(12)
exp(1)
##---- FUNCIONES TRIGONOMETRICAS ----
sin(45)
cos(45)
tan(45)
asin(0.96)
acos(0.97)
atan(0.45)
##---- FUNCIONES VARIAS ----
abs(-34)
sqrt(8)
floor(1.56)
ceiling(1.56)
max(4,7,2,12)
min(4,7,2,12)
sign(-45)
##---- EJERCICIOS DE PRACTICA ----
# calcular la expresion cos(pi/6+pi/2)+e^2
# calcular la expresion cos(pi/6+pi/2)+e^2*log(5)+arc cos(1/raiz(2))
# introducir las siguientes expresiones:
# a) 1/7
# b) options(digits=3); 1/7
# c) options(digits=6); 1/7
# d) round(67.45)
# e) round(75.324568,2)
# f) options(digits=7);
# g) signif(56.345458234234,2)
# h) signif(56.345458234234)
# i) exp(-30)
# j) options(scipen= 999)
# k) exp(-30)
# l) options(scipen=0)
#---- SESION 2 ----
##---- DEFINICION DE CONSTANTES ----
```

```
e = exp(1);
x = 0.0034
e <- exp(1)
x <- 0.034;
x0 = e^(2*x)
##---- CONCATENAR Y PEGAR EXPRESIONES ----
txt = "El valor de x0 es _"
cat(txt, x0)
paste(txt,x0)
paste0(txt,x0)
##---- ASIGNACION E IMPRESION ----
x0 <- 1
x1 <- x0 - pi*x0 + 1
(x1 <- x0 - pi*x0 + 1 )
print(x1)
##---- LISTADO DE OBJETOS DEFINIDOS ----
ls()
# Eliminar todos los objetos
rm(list= ls())
ls()
##---- IMPRIMIR PEGAR AVANZADO ----
x0 <- 1
x1 <- x0 - pi*x0 + 1
cat("x0 =", x0, "\n","x1 =", x1)
##---- EJERCICIOS DE PRACTICA ----

#---- SESION 3 ----

##---- DEFINICION DE FUNCIONES ----
# nombre_funcion <- function(param1,param2,param3,...,paramn){
# instruccion 1
# instruccion 2
# return(valor_de_retorno)
#}
###---- Ejemplo 1 ----
fun1 <- function(x,a,b,h,k){
  res <- a+b*cos(hx+k)
  return(res)
}
###---- Ejemplo 2 ----
Discriminante <- function(a,b,c){
  res <- b^2-4*a*c
  return(res)
}
##---- GRAFICAS ----
fun2 <- function(x,h,k){
  res <- 1/h*sin(k*x)
  return(res)
```

```
}
f2 <- fun2(1:100,2,3)
plot(f2,type="l", col= "red", lwd=2,
     main= "Grafico de la funcion f2",
     xlab= "x",
     ylab="f(x)=1/h*sin(k*x)",
     axes= TRUE)
###---- EJEMPLOS DE PRACTICA ----
# Graficar: rectas, parabolas, cubicas, polinomios, exponenciales, logaritmos

#---- SESION 4 ----
##---- MATRICES Y VECTORES ----
```

Referencias

[1] Isaacson, W. (2014). *Los innovadores: Los genios que inventaron el futuro*. Debate.