

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

VOL. VII

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

AVANZA

Gustavo Tapia Sánchez
Luis Loeza Chin
Óscar Hernán Estrada Estrada

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

Mtro. Juan Ignacio Camargo Nassar
Rector

Dr. Daniel Constandse Cortez
Secretario General

Dr. Juan Francisco Hernández Paz
Director del Instituto de Ingeniería y Tecnología

Mtro. Jesús Maza Vega
Director General de Comunicación Universitaria

COMITÉ EDITORIAL AVANZA

Dr. Boris Mederos Madrazo
Editor UACJ

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Editor Unison

Dr. Angel Cano Cordero
Editor UNAM

Dr. Luis Loeza Chin
Coordinador UACJ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CUERPO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS PURAS
Y APLICADAS

AVANZA: Introducción a los Métodos Numéricos

Vol. VII

Gustavo Tapia Sánchez, Luis Loeza Chin,
Óscar Hernán Estrada Estrada

AVANZA: Introducción a los Métodos Numéricos. [Recurso electrónico] /
Coord. Luis Loeza Chin. – Ciudad Juárez, Chihuahua: Universidad Autónoma
de Ciudad Juárez. Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas, 2018.
v.7 (133 páginas).

ISBN Colección: 978-607-922-452-3

ISBN V.7: 978-607-520-331-7

Contenido: Introducción a los métodos numéricos. – Raíces de ecuaciones
no lineales. – Sistemas de ecuaciones lineales. – Interpolación. – Integración
numérica. – Ecuaciones diferenciales.

1. Métodos numéricos. – 2. Tipos de error. – 3. Newton-Raphson. –
4. Eliminación gaussiana. – 5. Gauss-Jordan. – 6. Gauss-Seidel. –
7. Interpolación. – 8. Integración numérica. – 9. Método de Euler. –
10. Método de Runge-Kutta.

QA159 A83 2017

Cuidado de la edición y diagramación: Luis Loeza Chin.

Corrección: Jorge Hernández Martínez.

Cubierta: Karla María Rascón González.

D.R. © 2018 Gustavo Tapia Sánchez
© Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Av. Plutarco Elías Calles núm. 1210
Fovissste Chamizal, C.P. 32310
Ciudad Juárez, Chihuahua, México

Impreso en México / Printed in Mexico

Agradecemos a:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DIRECCIÓN GENERAL DE COMUNICACIÓN UNIVERSITARIA

COORDINACIÓN GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Índice

Presentación	3
1 Introducción a los métodos numéricos	5
1.1 Problema	5
1.2 Errores	9
2 Raíces de ecuaciones no lineales	15
2.1 Método gráfico	16
2.2 Método de la bisección	17
2.3 Método de la regla falsa	22
2.4 Método de Newton-Raphson	28
2.5 Método de la secante	31
2.6 Método de iteración del punto fijo	33
2.7 Ejercicios	37
3 Sistemas de ecuaciones lineales	39
3.1 Operaciones elementales	40
3.2 Eliminación gaussiana	42
3.3 Método de Gauss-Jordan	49
3.4 Matriz inversa	52
3.5 Método de Gauss-Seidel	55
3.6 Ejercicios	61
4 Interpolación	63
4.1 Planteamiento del problema	63
4.2 Diferencias divididas finitas de Newton	68
4.3 Interpolación con diferencias divididas	69
4.4 Polinomio de interpolación de Lagrange	73

4.5	Interpolación de splines	76
4.6	Ejercicios	87
5	Integración numérica	89
5.1	Fórmulas de integración de Newton-Cotes	90
5.2	Regla de Simpson de un tercio	93
5.3	Regla de Simpson de tres octavos	98
5.4	Integración en intervalos desiguales	100
5.5	Método de integración de Romberg	102
5.6	Algoritmo de integración de Romberg	108
5.7	Ejercicios	110
6	Ecuaciones diferenciales	113
6.1	Método de Euler	114
6.2	Método de Euler mejorado	119
6.3	Método de Runge-Kutta	122
6.4	Ejercicios	125
7	Soluciones de ejercicios y tests	127
7.1	Soluciones a los Ejercicios	128

Presentación

Este libro se ha escrito con el propósito fundamental de servir como apoyo, tanto a los profesores que imparten como a los alumnos que cursan la materia de Análisis Numérico de las carreras de Ingeniería que se imparten en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, a través del Departamento de Física y Matemáticas.

El curso mencionado en el párrafo anterior es de carácter introductorio, por lo que no se pretende estudiar las demostraciones de la validez de los métodos numéricos, ni mucho menos la justificación de por qué un método es mejor que otro, motivo por el cual el libro se enfoca en explicar los pasos de los algoritmos, dando varios ejemplos para que el estudiante comprenda perfectamente los diversos métodos. Una vez que el alumno ha comprendido a la perfección la serie de pasos de determinado algoritmo, es mucho más fácil que entonces escriba algún programa de computación utilizando el lenguaje de su preferencia, pero estos programas no se incluyen en el libro, precisamente para que cada estudiante escriba sus propios programas.

El libro se divide en seis capítulos: en el primero se da una breve introducción a los métodos numéricos y se definen los diferentes tipos de errores. En el segundo se ven varios métodos para aproximar raíces de ecuaciones no lineales, como el método de la bisección, el método de Newton-Raphson y el método de la regla falsa, entre otros. En el tercer capítulo estudiamos tres métodos para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales: el método de eliminación gaussiana, el método de Gauss-Jordan y el método de Gauss-Seidel. En el cuarto capítulo nos abocamos a estudiar diversos métodos numéricos para la interpolación de datos, entre los que destacan los polinomios de interpolación de Newton y de Lagrange, así como el de las splines cúbicas. En el capítulo quinto vemos los principales métodos de integración numérica: el método de integración de Newton-Cotes, la regla del trapecio y las reglas de Simpson, finalizando con el método de integración de Romberg. Finalmente, en el

último capítulo estudiamos algunos métodos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales, como los métodos de Euler y el método de Runge-Kutta.

Los métodos numéricos son esenciales para aproximar soluciones que por métodos tradicionales son imposibles de hallar, lo que convierte a esta rama de la ciencia en una parte fundamental para el desarrollo de los estudiantes de ingeniería y ciencias, en general. Por ello, considero que un buen entendimiento de cómo funcionan estos métodos, le dará al estudiante un arma poderosa que podrá utilizar cuando se encuentre en la búsqueda de soluciones de problemas reales.

Gustavo Tapia, Luis Loeza y Óscar Estrada

Introducción a los métodos numéricos

1.1. Problema

Para introducir la forma de trabajar con métodos numéricos en la solución de problemas, veremos el siguiente:

Problema 1.1. Calcular la velocidad instantánea de un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre, suponiendo que la velocidad inicial del cuerpo es igual a 0 y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la fuerza de gravedad y la fuerza de resistencia del aire, la cual suponemos que es linealmente proporcional a la velocidad del cuerpo.

Solución analítica. Usamos la Segunda Ley de Newton, que establece:

$$F = m \cdot a,$$

la cual podemos escribir de la forma:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Las hipótesis sobre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo nos indican que:

$$F = F_G + F_R,$$

donde $F_G = m \cdot g$ (g -constante de gravedad) es la fuerza de gravedad y $F_R = -c \cdot v$ (c -coeficiente de arrastre) es la fuerza de resistencia del aire. Sustituyendo esto último, obtenemos:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - c \cdot v;$$

equivalentemente:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v,$$

que es nuestro *modelo matemático* del problema. En este caso identificamos nuestro modelo como una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

Procedemos a separar las variables:

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = dt;$$

integraremos ambos miembros de la ecuación:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = \int dt,$$

de lo cual obtenemos:

$$-\frac{m}{c} \ln \left| g - \frac{c}{m}v \right| = t + k,$$

donde k es la constante de integración. Para calcular la constante de integración, usamos la hipótesis de que la velocidad inicial del cuerpo es 0. Esto es, $v = 0$ si $t = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de arriba, obtenemos:

$$-\frac{m}{c} \ln g = k,$$

con lo cual obtenemos:

$$-\frac{m}{c} \ln \left| g - \frac{c}{m}v \right| = t - \frac{m}{c} \ln g.$$

Finalmente, despejamos v en función de t :

$$v = \frac{m}{c}g \left[1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right]$$

La cual resuelve el problema de forma exacta.

Para fijar un ejemplo particular supongamos que tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} m &= 70,000 \text{ g} \\ c &= 19,600 \text{ g/s} \\ g &= 980 \text{ cm/s}^2, \end{aligned}$$

calculemos los valores $v(0), v(1), \dots, v(5)$. Lo único que tenemos que hacer es sustituir los valores de m, c y g :

$$v = \frac{(70,000)(980)}{19,600} \left[1 - e^{-\frac{19,600}{70,000}t} \right]$$

1.1. Problema

$$\therefore v = 3500[1 - e^{-0.28t}].$$

Finalmente, sustituimos los valores del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 5$ y escribimos los resultados en la siguiente tabla:

t(s)	v(cm/s)
0	0
1	854.7569
2	1500.76828
3	1989.01317
4	2358.02072
5	2636.91063

Esta tabla de valores representa los valores exactos de las velocidades indicadas que se han obtenido por un método analítico.

A continuación veremos cómo podemos aproximar estos datos usando un método numérico.

Solución numérica. Primero que nada, recordemos que el modelo matemático del problema está dado por:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v.$$

Para usar un método numérico, recordemos cómo se define la derivada de una función; tenemos:

$$\frac{dv}{dt}(t_i) = \lim_{t_{i+1} \rightarrow t_i} \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i};$$

cuando t_{i+1} es cercano a t_i , podemos quitar el límite y obtener la siguiente aproximación:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx g - \frac{c}{m}v(t_i);$$

de aquí podemos despejar $v(t_{i+1})$ y obtener lo siguiente:

$$v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i).$$

Esta última fórmula, la cual es recursiva, nos permite calcular la velocidad $v(t_{i+1})$ si conocemos la velocidad en el tiempo anterior $v(t_i)$.

Nuestro punto de partida es que la velocidad inicial es 0, es decir, $v(0) = 0$, y de aquí podemos calcular, con la ayuda de nuestra fórmula recursiva, la velocidad en tiempos subsecuentes. Evidentemente estos cálculos son aproximaciones, y entre más cercanos sean los tiempos, mejores serán dichas aproximaciones.

Por ejemplo, retomando los datos que fijamos arriba, tenemos la fórmula:

$$v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + \left[980 - \frac{19600}{70000}v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i)$$

$$\therefore v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + [980 - 0.28v(t_i)](t_{i+1} - t_i).$$

Como dijimos arriba, comenzamos con $v(0) = 0$. Para aproximar $v(1)$, tenemos dos opciones: podemos aproximarla directo, saltando del tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 1$, o bien, podemos usar intervalos más pequeños de tiempo, digamos de longitud 0.2 s para obtener una mejor aproximación.

La primera opción nos da $v(1) \approx 980$, mientras que la segunda arroja los siguientes resultados:

t(s)	v(cm/s)
0	0
0.2	196
0.4	381.024
0.6	555.686656
0.8	720.5682033
1	876.2163839

Evidentemente, con la segunda opción obtenemos una mejor aproximación para $v(1)$, ya que los intervalos de tiempo son más pequeños, y lógicamente, si los redujéramos aún más, obtendríamos mejores aproximaciones. El precio que hay que pagar es el de cálculos cada vez más largos y tediosos y aquí es donde hace acto de presencia la poderosa herramienta computacional, que nos permite hacer cálculos largos y tediosos en poco tiempo y con mayor exactitud que si los hicieramos a mano. Esta gran herramienta hace factible el camino de los métodos numéricos pues de otra forma, serían muy lentos los procesos y con mucho riesgo de cometer errores en cada paso.

Por otro lado, cabe mencionar que para poder elaborar un buen programa de computación, aparte de manejar un lenguaje determinado, debemos saber realizar el proceso “a mano”, ya que esto nos permitirá implementar un mejor programa que contemple todas las posibles piedras en el camino.

Para obtener mejores aproximaciones obviamente elegimos la segunda opción, con intervalos de tiempo de 0.2 s . Esto nos arroja los siguientes resultados:

t(s)	v(cm/s)
0	0
1	876.2163839
2	1533.074153
3	2025.489197
4	2394.629346
5	2671.356168

donde hemos omitido los datos intermedios para no hacer más larga la tabla. Si hacemos una comparación entre la tabla de valores exactos y esta última de valores aproximados, vemos que hay diferencias entre los datos obtenidos, es decir, en la segunda tabla se han cometido ciertos errores que deben ser medidos y lo que es más importante, debemos tener alguna forma de poder afirmar: “el resultado que obtuve es lo suficientemente bueno”.

1.2. Errores

Los *errores numéricos* se generan con el uso de aproximaciones para representar cantidades y/u operaciones. Esto da lugar a dos tipos de errores:

$$\text{Errores} \left\{ \begin{array}{l} \text{truncamiento} \\ \text{redondeo} \end{array} \right.$$

- Los *errores de truncamiento* resultan de representar aproximadamente un procedimiento matemático exacto. Por ejemplo, en la solución numérica al problema del objeto en caída libre, usamos una aproximación al proceso de derivación, el cual es un procedimiento matemático exacto:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i},$$

esto genera errores de truncamiento durante el procedimiento.

- Los *errores de redondeo* resultan de representar aproximadamente números que son exactos. Por ejemplo, aun en la “solución exacta” al problema del objeto en caída libre, los resultados impresos en la tabla de velocidades no son totalmente exactos puesto que el número e es irracional y, por lo tanto, su extensión decimal es infinita y no periódica, lo que nos impide escribirlo de forma completamente exacta.

Utilizando 5 decimales, tenemos:

$$e \approx 2.71828,$$

esto genera errores de redondeo durante los cálculos.

En ambos casos tenemos que:

$$\text{valor verdadero} = \text{valor aproximado} + \text{error}.$$

Definición 1.1. Definimos el *error absoluto* como:

$$E_v = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}.$$

Esta definición de error tiene un pequeño defecto, como veremos en el siguiente

Ejemplo 1 Al medir la longitud de una varilla para construcción, se obtiene el resultado aproximado de 19.999 cm , mientras que al medir la longitud de un clavo, se obtiene el resultado de 9 cm . Suponiendo que los valores verdaderos de la varilla y el clavo son de $20,000\text{ cm}$ y 10 cm , respectivamente, calcular el error absoluto en ambos casos.

Solución. Tenemos los siguientes resultados:

- Para el caso de la varilla, el error absoluto se calcula como:

$$E_v = 20,000 - 19,999 = 1\text{ cm}$$

- Para el caso del clavo, el error absoluto se calcula como:

$$E_v = 10 - 9 = 1\text{ cm}$$

En ambos casos, el error absoluto es igual, pero obviamente tiene mayor trascendencia el error en el caso del clavo que en el de la varilla, es decir, necesitamos comparar el error absoluto contra el valor verdadero y esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 1.2. Definimos el *error relativo* como:

$$E_r = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor verdadero}}.$$

Esto es,

$$E_r = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}}.$$

Definición 1.3. Definimos el *error relativo porcentual* como:

$$\epsilon_v = E_r \times 100\%.$$

Es decir,

$$\epsilon_v = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} \times 100\%.$$

De hecho el error que más usamos es este último, ya que nos da una idea en tanto por ciento del error que se está cometiendo. Por ejemplo, en el caso de la varilla el error relativo porcentual es:

$$\epsilon_v = \frac{1}{20,000} \times 100\% = 0.005\%,$$

mientras que en el caso del clavo, el error relativo porcentual es:

$$\epsilon_v = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%.$$

Podemos observar que el error relativo porcentual refleja mejor la gravedad o no gravedad del error que se está cometiendo. Es claro que en el caso de la varilla no es trascendente, ya que representa solamente un 0.005% con respecto al valor verdadero, mientras que en el caso del clavo, el error sí es representativo, ya que es un 10% del valor verdadero.

Finalmente, mencionaremos que un proceso de aproximación puede detenerse cuando el valor absoluto del error relativo porcentual es menor que una cierta cota, fijada de antemano.

Sin embargo, todavía tenemos un pequeño defecto en nuestro análisis del error. Los métodos numéricos se aplican en realidad a problemas que no se pueden resolver analíticamente; en nuestro ejemplo del cuerpo en caída libre, en realidad no es necesario aplicar ningún método numérico. Ya que en una situación real desconoceremos el valor verdadero de la solución al problema; luego entonces estaremos imposibilitados de calcular el error relativo porcentual.

La forma de resolver este problema es pensar que para obtener una cierta aproximación a un valor, tuvimos que haber obtenido una aproximación anterior al mismo. Una vez calculada la nueva aproximación, procedemos a calcular otra aproximación

al mismo valor y así sucesivamente. Si el método realmente converge en un resultado (que esperamos sea la solución del problema), todas estas aproximaciones se estarán aproximando entre sí y al valor al cual convergen.

Definición 1.4. Definimos el *error aproximado porcentual* como:

$$\epsilon_a = \frac{\text{aproximación actual} - \text{aproximación previa}}{\text{aproximación actual}} \times 100\%.$$

Como mencionamos anteriormente, el proceso se detiene cuando se ha logrado disminuir el valor absoluto del error aproximado porcentual hasta un cierto rango fijado de antemano. Esto es, cuando

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s.$$

Se puede probar que si tomamos $\epsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n}(\%)$, entonces podemos tener la seguridad de que nuestra aproximación tiene, al menos, n cifras significativas, es decir, posee al menos n dígitos confiables.

Ejemplo ② Usar el siguiente resultado de series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

para aproximar el número irracional e hasta 4 cifras significativas.

Solución. Primero calculamos el valor de ϵ_s como sigue:

$$\epsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n}(\%) = 0.5 \times 10^{2-4} = 0.005\%;$$

enseguida usamos la serie, agregando un término cada vez, para obtener nuevas aproximaciones hasta que se logre que $|\epsilon_a| < 0.005\%$.

En el primer paso, tenemos simplemente un término:

$$\epsilon \approx \frac{1}{0!} = 1;$$

en el segundo paso, tenemos la suma de dos términos:

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2.$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado:

$$\epsilon_a = \frac{\text{actual} - \text{previa}}{\text{actual}} \times 100\% = \frac{2 - 1}{2} \times 100\% = 50\%.$$

Seguimos agregando términos de la serie puesto, que no se ha cumplido el objetivo; tenemos que:

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5.$$

El proceso se continúa hasta lograr la meta. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Número de términos	Aproximación al valor e	Error aproximado
1	1	
2	2	50%
3	2.5	20%
4	2.666666667	6.25%
5	2.708333333	1.54%
6	2.716666667	0.307%
7	2.718055556	0.051%
8	2.718253968	0.007%
9	2.718278770	0.0009%

Así pues, el resultado que se obtiene es:

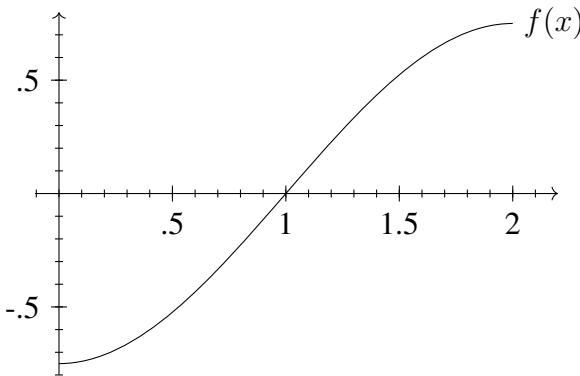
$$e \approx 2.718278770,$$

que en realidad tiene 6 cifras significativas. La cota impuesta por ϵ_s nos asegura que tendremos, al menos, n cifras significativas; en este ejemplo, obtuvimos 2 cifras significativas más.

Raíces de ecuaciones no lineales

Una raíz de una función $f(x)$ es un número x_0 , tal que $f(x_0) = 0$. También se dice que x_0 es una raíz de la ecuación $f(x_0) = 0$. En este curso, consideraremos solamente raíces reales.

Geométricamente, una raíz de una función representa un punto donde la gráfica de $f(x)$ cruza al eje x ,



En esta gráfica, vemos que la raíz es $x = 1$.

Ejemplo ① Las raíces de $f(x) = x^2 - 9$ son $x = 3$ y $x = -3$.

Ejemplo ② La función $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ no tiene raíces.

Ejemplo ③ La función $f(x) = 5 - \sin(x)$ no tiene raíces.

Ejemplo ④ Las raíces de $f(x) = (x+1)(x-3)(x+7)$ son $x = -1, x = 3, x = -7$.

Estudiaremos varios métodos numéricos para aproximar raíces de ecuaciones.

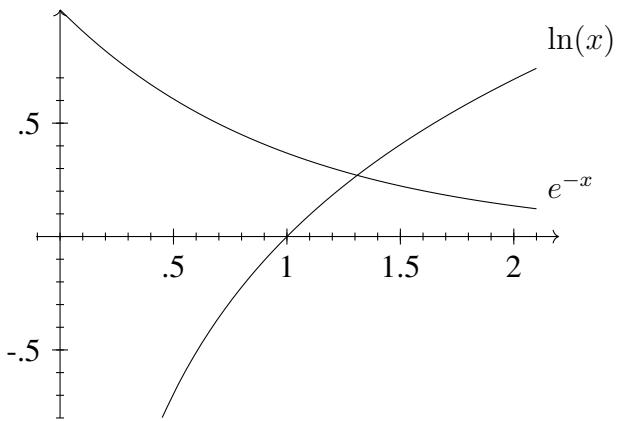
2.1. Método gráfico

Este método básicamente se usa para localizar un intervalo donde la función tiene alguna raíz.

Ejemplo 1 Localizar un intervalo donde la función $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$ tenga una raíz.

Solución. Para calcular la raíz de $f(x)$ hacemos $f(x) = 0$, de donde $e^{-x} = \ln(x)$. Por lo tanto, el problema equivale a encontrar el punto de intersección de las funciones $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = \ln(x)$.

Conocemos bien estas gráficas:

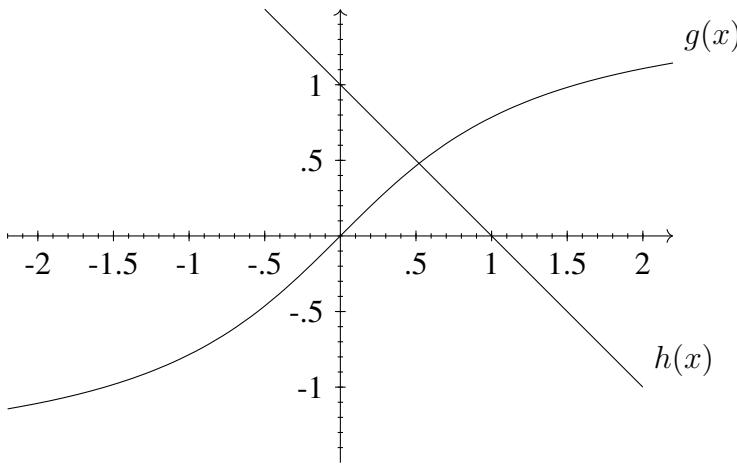


de lo cual concluimos que *un* intervalo donde se encuentra la *única* raíz es $[1, 1.5]$. En realidad, no nos interesa ser más finos en la búsqueda del intervalo, ya que posteriormente aplicaremos métodos más sistemáticos para aproximar mejor la raíz. Digamos que la utilidad del método gráfico radica en proveernos de un intervalo con el cual comencemos a trabajar.

Ejemplo 2 Localizar un intervalo donde la función $f(x) = \arctan(x) + x - 1$ tenga una raíz.

Solución. Nuevamente, para calcular la raíz de $f(x)$ hacemos $\arctan(x) + x - 1 = 0$, de donde tenemos que $\arctan(x) = 1 - x$. Así, el problema equivale a encontrar el punto de intersección de las gráficas de las funciones $g(x) = \arctan(x)$ y $h(x) = 1 - x$.

Conocemos bien las gráficas de estas funciones:



de donde vemos claramente que *un* intervalo donde se encuentra la *única* raíz es $[0, 1]$.

2.2. Método de la bisección

El método de la bisección se basa en el siguiente teorema de Cálculo:

Teorema 2.1. *Sea $f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces para cada z , tal que $f(a) < z < f(b)$, existe un $x_0 \in (a, b)$, tal que $f(x_0) = z$. La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$.*

Básicamente el Teorema del valor intermedio nos dice que toda función continua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, entonces debe alcanzar todos los valores intermedios. En particular, si $f(a) < f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z = 0$, y por lo tanto, el Teorema del valor intermedio nos asegura que debe existir $x_0 \in (a, b)$, tal que $f(x_0) = 0$, es decir, debe haber *por lo menos* una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a, b) .

El método de bisección sigue los siguientes pasos:

- i) Encontrar valores iniciales x_a, x_b , tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

- ii) La primera aproximación a la raíz, se toma igual al punto medio entre x_a y x_b :

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

- iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$. En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos; por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.
- $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$. En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo; de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.
- $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$. En este caso, se tiene que $f(x_r) = 0$; por lo tanto ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s,$$

es decir,

$$\left| \frac{x_{\text{actual}} - x_{\text{previa}}}{x_{\text{actual}}} \times 100\% \right| < \epsilon_s.$$

Ejemplo 1 Aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Sabemos, por lo visto en el ejemplo 1 de la sección anterior, que la única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[1, 1.5]$. Así que este intervalo es nuestro punto de partida; sin embargo, para poder aplicar el método de la bisección debemos verificar que $f(1)$ y $f(1.5)$ tengan signos opuestos.

En efecto, tenemos que

$$f(1) = e^{-1} - \ln(1) = e^{-1} > 0,$$

mientras que

$$f(1.5) = e^{-1.5} - \ln(1.5) = -0.18233 < 0.$$

Cabe mencionar que la función $f(x)$ sí es continua en el intervalo $[1, 1.5]$. Así, pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de la bisección. Comenzamos:

- i) Calculamos el punto medio (que es, de hecho, nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{r_1} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

- ii) Evaluamos $f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0363 > 0$

- iii) Para identificar mejor en qué nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$f(1)$	$f(1.25)$	$f(1.5)$
+	+	-

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.5]$. En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo $[1.25, 1.5]$.

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r_2} = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375.$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que ya contamos con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_2} - x_{r_1}}{x_{r_2}} \times 100\% \right| = 9.09\%;$$

puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos $f(1.375) = e^{-1.375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$, y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
+	-	-

así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.375]$.

Calculamos el punto medio:

$$x_{r_3} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

y el nuevo error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_3} - x_{r_2}}{x_{r_3}} \times 100\% \right| = 4.76\%.$$

El proceso debe seguirse hasta cumplir el objetivo. Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
1.25	
1.375	9.09%
1.3125	4.76%
1.28125	2.43%
1.296875	1.20%
1.3046875	0.59%

Así, obtenemos como aproximación a la raíz $x_6 = 1.3046875$.

Ejemplo (2) Aproximar la raíz de $f(x) = \arctan(x) + x - 1$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Como vimos en el ejemplo 2 de la sección anterior, la única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[0, 1]$. Para poder aplicar el método de la bisección, es importante verificar que sí se cumplen las hipótesis requeridas.

Sabemos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$, y verificamos que $f(0)$ y $f(1)$ tengan signos opuestos.

En efecto,

$$f(0) = \arctan(0) + 0 - 1 = -1 < 0,$$

mientras que

$$f(1) = \arctan(1) + 1 - 1 = 0.7853 > 0;$$

por lo tanto, sí podemos aplicar el método de la bisección.

Calculamos el punto medio del intervalo $[0, 1]$:

$$x_{r_1} = \frac{1+0}{2} = 0.5,$$

que es la primera aproximación a la raíz de $f(x)$.

Evaluamos $f(0.5) = \arctan(0.5) + 0.5 - 1 = -0.0363 < 0$. Y hacemos nuestra tabla de signos:

$$\begin{array}{c|c|c} f(0) & f(0.5) & f(1) \\ \hline - & - & + \end{array};$$

puesto que $f(0.5)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo $[0.5, 1]$.

En este punto, solo contamos con una aproximación, a saber, $x_{r_1} = 0.5$, que es el primer punto medio calculado.

Repetimos el proceso, es decir, ahora calculamos el punto medio del intervalo $[0.5, 1]$:

$$x_{r_2} = \frac{1 + 0.5}{2} = 0.75,$$

que es la nueva aproximación a la raíz de $f(x)$. Aquí podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.75 - 0.5}{0.75} \times 100\% \right| = 33.33\%;$$

puesto que no se cumple el objetivo, continuamos con el proceso. Evaluamos $f(0.75) = \arctan(0.75) + 0.75 - 1 = 0.3935 > 0$.

Y hacemos la tabla de signos:

$f(0.5)$	$f(0.75)$	$f(1)$
-	+	+

puesto que $f(0.5)$ y $f(0.75)$ tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo $[0.5, 0.75]$.

Calculamos el punto medio:

$$x_{r_3} = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

y el nuevo error aproximado:

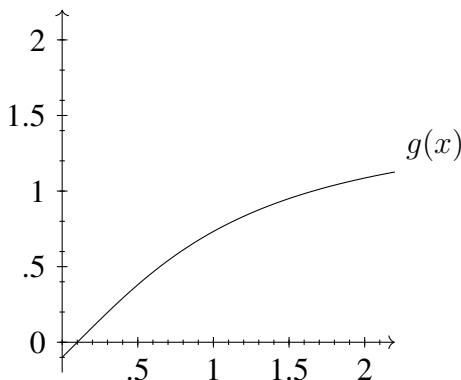
$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.625 - 0.75}{0.625} \times 100\% \right| = 20\%.$$

El proceso se debe continuar hasta que se logre el objetivo. Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
0.5	
0.75	33.33%
0.625	20%
0.5625	11.11%
0.53125	5.88%
0.515625	3.03%
0.5234375	1.49%
0.51953125	0.75%

donde vemos que la aproximación buscada es $x_{r_s} = 0.51953125$.

El método de la bisección, por lo general, es lento, y en casos como el de la siguiente gráfica, puede ser demasiado lento:



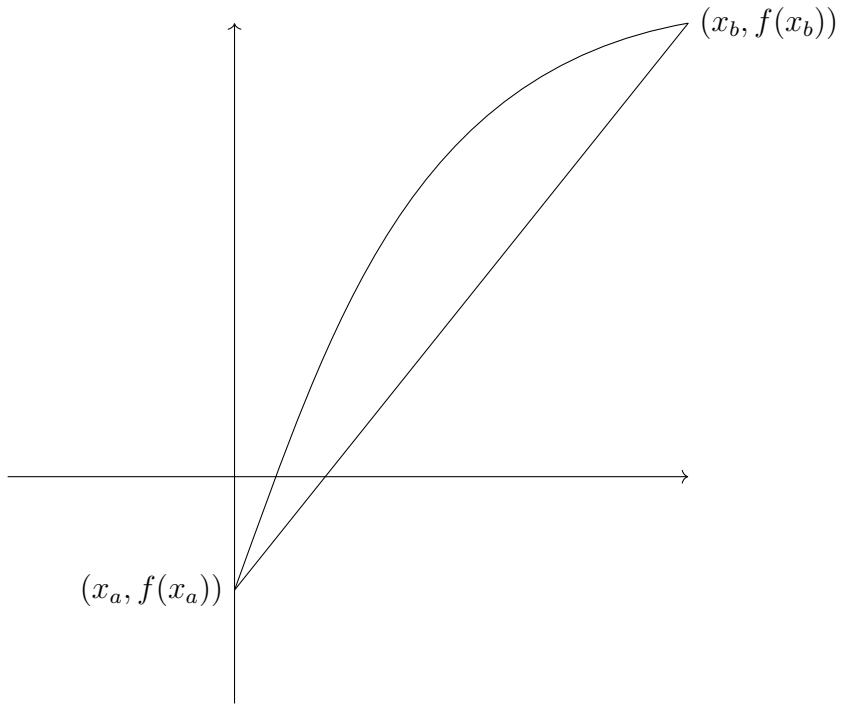
En un caso como este, el proceso de la bisección comienza a acercarse a la raíz de forma muy lenta, ya que el método solamente toma en cuenta que la raíz se encuentra dentro del intervalo, sin importar si se localiza más cerca de alguno de los extremos de dicho intervalo. Sería bueno implementar un método que tome en cuenta este detalle.

Esto da lugar al siguiente método de aproximación de raíces.

2.3. Método de la regla falsa

Como mencionamos anteriormente, sería bueno considerar si la raíz de una ecuación está localizada más cerca de alguno de los extremos del intervalo.

Consideremos nuevamente una gráfica como la anterior:



donde hemos agregado la línea recta que une los puntos extremos de la gráfica en el intervalo $[a, b]$.

Es claro que si en lugar de considerar el punto medio del intervalo, tomamos el punto donde esta recta cruza al eje x , nos aproximaremos mucho más rápido a la raíz; esta es, en si, la idea central del método de la regla falsa y esta es realmente la única diferencia con el método de la bisección, puesto que en todo lo demás los dos métodos son prácticamente idénticos.

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que es continua en el intervalo $[x_a, x_b]$ y, además, $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos.

Calculemos la ecuación de la línea recta que une los puntos $(x_a, f(x_a))$, $(x_b, f(x_b))$. Sabemos que la pendiente de esta recta está dada por:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a};$$

por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y - f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a).$$

Para obtener el cruce con el eje x , hacemos $y = 0$:

$$-f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a);$$

multiplicando por $x_b - x_a$ nos da:

$$-f(x_a)(x_b - x_a) = (f(x_b) - f(x_a))(x - x_a).$$

Finalmente, de aquí despejamos x :

$$x = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)} \right].$$

Este punto es el que toma el papel de x_r en lugar del punto medio del método de la bisección.

Así, pues, el método de la regla falsa sigue los siguientes pasos, asumiendo que $f(x)$ es continua:

- Encontrar valores iniciales x_a, x_b , tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

- La primera aproximación a la raíz, se toma igual a:

$$x_r = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)} \right]$$

- Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$. En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos; por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.
- $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$. En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo; de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$. En este caso, se tiene que $f(x_r) = 0$; por lo tanto, ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s.$$

Ejemplo 1 Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$, comenzando en el intervalo $[1, 2]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Este es el mismo ejemplo 1 del método de la bisección. Así, pues, ya sabemos que $f(x)$ es continua en el intervalo dado y que toma signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Por lo tanto, podemos aplicar el método de la regla falsa.

Calculamos la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 2 - \frac{f(2) \cdot [1 - 2]}{f(1) - f(2)} = 1.397410482;$$

puesto que solamente tenemos una aproximación, debemos seguir con el proceso.

Así, pues, evaluamos

$$f(x_{r_1}) = e^{1.397410482} - \ln(1.397410482) = -0.087384509 < 0.$$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(2)$
+	-	-

donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1, 1.397410482]$. Con este nuevo intervalo, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.397410482 - \frac{f(1.397410482) \cdot [1 - 1.397410482]}{f(1) - f(1.397410482)}$$

$$x_{r_2} = 1.321130513.$$

En este momento, podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.321130513 - 1.397410482}{1.321130513} \times 100\% \right| = 5.77\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, seguimos con el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_2}) = f(1.321130513) = -0.011654346 < 0$, y hacemos la tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(1.321130513)$
+	-	-

de donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1, 1.321130513]$, con el cual podemos calcular la nueva aproximación:

$$\begin{aligned}x_{r_3} &= x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} \\&= 1.321130513 - \frac{f(1.321130513) \cdot [1 - 1.321130513]}{f(1) - f(1.321130513)} \\&= 1.311269556\end{aligned}$$

y el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.311269556 - 1.321130513}{1.311269556} \times 100\% \right| = 0.75\%;$$

como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_3} = 1.311269556.$$

Observe la rapidez con la cual converge el método de la regla falsa a la raíz, a diferencia de la lentitud del método de la bisección.

Ejemplo 2 Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = \arctan(x) + x - 1$, comenzando en el intervalo $[0, 1]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Este es el mismo ejemplo 2 del método de la bisección. Así, pues, ya sabemos que se cumplen las hipótesis necesarias para poder aplicar el método, es decir, que $f(x)$ sea continua en el intervalo dado y que $f(x)$ tome signos opuestos en los extremos de dicho intervalo.

Calculamos, pues, la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1 - \frac{f(1)[0 - 1]}{f(0) - f(1)} = 0.5600991535;$$

como solamente tenemos una aproximación, debemos avanzar en el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_1}) = \arctan(0.5600991535) + 0.5600991535 = 0.070662953 > 0$, y hacemos nuestra tabla de signos:

f(0)	f(0.5600991535)	f(1)
-	+	+

de lo cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo $[0, 0.5600991535]$. Así, pues, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = 0.5600991535 - \frac{f(0.5600991535) \cdot [0 - 0.5600991535]}{f(0) - f(0.5600991535)} = 0.5231330281$$

y el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5231330281 - 0.5600991535}{0.5231330281} \times 100\% \right| = 7.06\%;$$

puesto que no se cumple el objetivo, seguimos avanzando en el proceso.

Evaluamos $f(x_{r_2}) = \arctan(0.5231330281) + 0.5231330281 - 1 = 0.00511533 > 0$. Y hacemos nuestra tabla de signos:

f(0)	f(0.5231330281)	f(0.5600991535)
-	+	+

de lo cual podemos ver que la raíz se localiza en el intervalo $[0, 0.5231330281]$, con el cual podemos calcular la siguiente aproximación:

$$x_{r_3} = 0.5231330281 - \frac{f(0.5231330281) \cdot [0 - 0.5231330281]}{f(0) - f(0.5231330281)} = 0.5204706484$$

y el siguiente error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5204706484 - 0.5231330281}{0.5204706484} \times 100\% \right| = 0.51\%;$$

como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_1} = 0.5204706484.$$

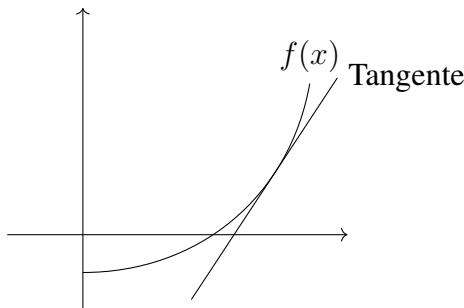
Nuevamente observamos el contraste entre la rapidez del método de la regla falsa contra la lentitud del método de la bisección.

Por supuesto que puede darse el caso del que el método de la regla falsa encuentre la aproximación a la raíz de forma más lenta que el método de la bisección. Como ejercicio, el estudiante puede aplicar ambos métodos a la función $f(x) = x^6 - 1$, comenzando en el intervalo $[0, 1.5]$, donde notará que mientras que el método de la bisección requiere de 8 aproximaciones para lograr que $|\epsilon_a| < 1\%$, el método de la regla falsa necesita hasta 16 aproximaciones.

2.4. Método de Newton-Raphson

Este método, el cual es iterativo, es uno de los más usados y efectivos. A diferencia de los métodos anteriores, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo, sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Supongamos que tenemos la aproximación x_i a la raíz x_r de $f(x)$:



Trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(x_i, f(x_i))$; esta cruza al eje x en un punto x_{i+1} , que será nuestra siguiente aproximación a la raíz x_r . Para calcular el punto x_{i+1} , calculamos primero la ecuación de la recta tangente. Sabemos que tiene pendiente

$$m = f'(x_i)$$

y, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i);$$

hacemos $y = 0$:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

y despejamos x :

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad \text{si } f'(x_i) \neq 0.$$

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos que nos aseguren que encontraremos la raíz y, de hecho, no tenemos ninguna garantía de que

encontraremos la raíz y de que nos aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge en la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde sí converge en la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

También observe que en el caso de que $f'(x_i) = 0$, el método no se puede aplicar. De hecho, vemos geométricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y, por lo tanto, no intersecta al eje x en ningún punto, a menos que coincida con este, en cuyo caso x_i mismo ¡es una raíz de $f(x)$!

Ejemplo 1 Usar el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$, comenzando con $x_0 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. En este caso, tenemos que:

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x};$$

de aquí tenemos que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}}{f'(x_0)} = 1.268941421.$$

En este caso, el error aproximado es:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\% \right| = 21.19\%;$$

continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

,

de lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:

$$x_3 = 1.309799389.$$

Ejemplo 2 Usar el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de $f(x) = \arctan(x) + x - 1$, comenzando con $x_0 = 0$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. En este caso, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1,$$

la cual sustituimos en la fórmula de Newton-Raphson para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\arctan(x_i) + x_i - 1}{\frac{1}{1+x^2} + 1};$$

comenzamos sustituyendo $x_0 = 0$ para obtener:

$$x_1 = x_0 - \frac{\arctan(x_0) + x_0 - 1}{\frac{1}{1+x_0^2} + 1} = 0.5.$$

En este caso tenemos un error aproximado de $|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5-0}{0.5} \times 100\% \right| = 100\%$. Continuamos con el proceso hasta lograr el objetivo. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
0	
0.5	100%
0.5201957728	3.88%
0.5202689918	0.01%

de lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:

$$x_3 = 0.5202689918.$$

Ejemplo 3 Usar el método de Newton-Raphson para aproximar raíces cuadradas de números reales positivos.

Solución. Sea $R > 0$. Queremos calcular x , tal que $x = \sqrt{R}$; elevando al cuadrado $x^2 = R$, o bien:

$$x^2 - R = 0.$$

Esto nos sugiere definir la función $f(x) = x^2 - R$, de donde $f'(x) = 2x$. Al sustituir estos datos en la fórmula de Newton-Raphson, nos da:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - R}{2x_i},$$

la cual simplificada nos da:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left[x_i + \frac{R}{x_i} \right].$$

Esta fórmula era conocida por los antiguos griegos (Hérón). Para fijar un ejemplo de su uso, pongamos $R = 26$ y apliquemos la fórmula obtenida, comenzando con $x_0 = 5$. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
5	
5.1	1.96%
5.099019608	0.019%
5.099019514	0.0000018%

de lo cual concluimos que $\sqrt{26} \approx 5.099019514$, ¡la cual es correcta en todos sus dígitos!

La misma idea puede aplicarse para crear algoritmos que aproximen raíces n -ésimas de números reales positivos.

Observe que cuando el método de Newton-Raphson converge en la raíz, lo hace de una forma muy rápida y, de hecho, observamos que el error aproximado disminuye a pasos agigantados en cada etapa del proceso. Aunque no es nuestro objetivo establecer formalmente las cotas para los errores en cada uno de los métodos que hemos estudiado, cabe mencionar que sí existen estas cotas que miden con mayor precisión la rapidez o lentitud del método en estudio.

2.5. Método de la secante

Este método se basa en la fórmula de Newton-Raphson, pero evita el cálculo de la derivada usando la siguiente aproximación:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

(Recuérdese la solución numérica al problema del cuerpo en caída libre). Sustituyendo en la fórmula de Newton-Raphson, obtenemos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \approx x - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}};$$

por lo tanto,

$$x_{i+1} \approx x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)},$$

que es la fórmula del método de la secante. Nótese que para poder calcular el valor de x_{i+1} , necesitamos conocer los dos valores anteriores: x_i y x_{i-1} . Obsérvese también el gran parecido con la fórmula del método de la regla falsa. La diferencia entre una y otra es que mientras el método de la regla falsa trabaja sobre intervalos cerrados, el método de la secante es un proceso iterativo y, por lo mismo, encuentra la aproximación casi con la misma rapidez que con el método de Newton-Raphson. Claro, corre el mismo riesgo de este último de no converger en la raíz, mientras que el método de la regla falsa va a la segura.

Ejemplo 1 Usar el método de la secante para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x^2} - x$, comenzando con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Tenemos que $f(x_0) = 1$ y $f(x_1) = -0.632120558$, que sustituimos en la fórmula de la secante para calcular la aproximación x_2 :

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \right] = 0.612699837;$$

con un error aproximado de:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 100\% \right| = 63.2\%;$$

como todavía no se logra el objetivo, continuamos con el proceso. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
0	
1	100%
0.612699837	63.2%
0.653442133	6.23%
0.652917265	0.08%

,

de lo cual concluimos que la aproximación a la raíz es:

$$x_4 = 0.652917265.$$

Ejemplo 2 Usar el método de la secante para aproximar la raíz de $f(x) = \arctan(x) - 2x + 1$, comenzando con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Tenemos los valores $f(x_0) = 1$ y $f(x_1) = -0.214601836$, que sustituimos en la fórmula de la secante para obtener la aproximación x_2 :

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \right] = 0.823315073;$$

con un error aproximado de:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 100\% \right| = 21.46\%;$$

como todavía no se logra el objetivo, continuamos con el proceso. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aproximación a la raíz	Error aproximado
0	
1	100%
0.823315073	21.4%
0.852330280	3.40%
0.853169121	0.09%

de lo cual concluimos que la aproximación a la raíz es:

$$x_4 = 0.853169121.$$

Finalizamos con el último método de aproximación, que también es iterativo.

2.6. Método de iteración del punto fijo

Este método se aplica para resolver ecuaciones de la forma

$$x = g(x).$$

Si la ecuación es $f(x) = 0$, entonces puede despejarse x , o bien, sumar x en ambos lados de la ecuación para ponerla en la forma adecuada.

Ejemplo 1 La ecuación $\cos(x) - x = 0$, se puede transformar en $\cos(x) = x$.

Ejemplo 2 La ecuación $\tan(x) - e^{-x} = 0$, se puede transformar en $x + \tan(x) - e^{-x} = x$.

Dada la aproximación x_i , la siguiente iteración se calcula con la fórmula:

$$x_{i+1} = g(x_i);$$

supongamos que la raíz verdadera es x_r , es decir,

$$x_r = g(x_r),$$

restando las últimas ecuaciones obtenemos:

$$x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i);$$

por el Teorema del valor medio para derivadas, sabemos que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , entonces existe $\xi \in (a, b)$, tal que $g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

En nuestro caso, existe ξ en el intervalo determinado por x_i y x_r , tal que:

$$g'(\xi) = \frac{g(x_r) - g(x_i)}{x_r - x_i};$$

de aquí tenemos que:

$$g(x_r) - g(x_i) = g'(\xi) \cdot (x_r - x_i),$$

o bien,

$$x_r - x_{i+1} = g'(\xi) \cdot (x_r - x_i).$$

Tomando el valor absoluto en ambos lados,

$$|x_r - x_{i+1}| = |g'(\xi)| \cdot |x_r - x_i|.$$

Observe que el término $|x_r - x_{i+1}|$ es precisamente el error absoluto en la $(i + 1)$ -ésima iteración, mientras que el término $|x_r - x_i|$ corresponde al error absoluto en la i -ésima iteración.

Por lo tanto, solamente si $|g'(\xi)| < 1$, entonces se disminuirá el error en la siguiente iteración. En caso contrario, el error irá en aumento.

En resumen, el método de la iteración del punto fijo converge en la raíz si $|g'(x)| < 1$ para x en un intervalo $[a, b]$ que contiene a la raíz y donde $g(x)$ es continua y diferenciable, pero diverge si $|g'(x)| > 1$ en dicho intervalo. Analicemos nuestros ejemplos anteriores:

- En el ejemplo 1, $g(x) = \cos(x)$ y claramente se cumple la condición de que $|g'(x)| < 1$. Por lo tanto, el método sí converge en la raíz.
- En el ejemplo 2, $g(x) = x + \tan(x) - e^{-x}$ y en este caso, $|g'(x)| = |1 + \sec^2(x) + e^{-x}| > 1$. Por lo tanto, el método no converge en la raíz.

Para aclarar el uso de la fórmula, veamos dos ejemplos:

Ejemplo 3 Usar el método de la iteración del punto fijo para aproximar la raíz de $f(x) = \cos(x) - x$, comenzando con $x_0 = 0$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Como ya aclaramos anteriormente, el método sí converge en la raíz.

Aplicando la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_1 = g(x_0) = \cos(0) = 1$$

con un error aproximado del 100%; aplicando nuevamente la fórmula iterativa tenemos:

$$x_2 = g(x_1) = \cos(1) = 0.540302305$$

y un error aproximado del 85.08%.

Intuimos que el error aproximado, se irá reduciendo muy lentamente. En efecto, se necesitan hasta 13 iteraciones para lograr reducir el error aproximado menor al 1%. El resultado final que se obtiene es:

$$x_{13} = 0.7414250866$$

con un error aproximado igual al 0.78%.

Ejemplo 4 Usar el método de la iteración del punto fijo para aproximar la raíz de $f(x) = x^2 - 5x - e^x$, comenzando con $x_0 = 0$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

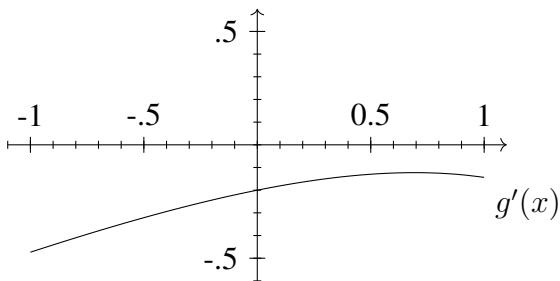
Solución. Si despejamos la x del término lineal, vemos que la ecuación equivale a:

$$\frac{x^2 - e^x}{5} = x,$$

de donde

$$g(x) = \frac{x^2 - e^x}{5};$$

en este caso, tenemos que $g'(x) = \frac{2x - e^x}{5}$. Un vistazo a la gráfica:



nos convence que $|g'(x)| < 1$, para $x \in [-1, 1]$, lo que es suficiente para deducir que el método sí converge en la raíz buscada.

Aplicando la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_1 = g(x_0) = -0.2$$

con un error aproximado del 100%.

Aplicando nuevamente la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_2 = g(x_1) = -0.1557461506$$

con un error aproximado igual al 28.41%.

En este ejemplo, el método solo necesita de 5 iteraciones para reducir el error menor al 1%. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

0	
-0.2	100%
-0.1557461506	28.41%
-0.1663039075	6.34%
-0.163826372	1.51%
-0.164410064	0.35%

de donde vemos que la aproximación buscada es:

$$x_5 = -0.164410064.$$

2.7. Ejercicios

Observación. Usa todos los dígitos en tu calculadora para que la aproximación sea lo más exacta posible.

EJERCICIO 2.2. Usa el método de la bisección para aproximar la raíz de

$$f(x) = e^{-x^3} - 2x + 1,$$

comenzando en el intervalo $[0.75, 1]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.3. Usa el método de la bisección para aproximar la raíz de

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \tan(x),$$

comenzando en el intervalo $[0.5, 1]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.4. Usa el método de la regla falsa para aproximar la raíz de

$$f(x) = 4 - x^2 - x^3,$$

comenzando en el intervalo $[1, 2]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.5. Usa el método de la regla falsa para aproximar la raíz de

$$f(x) = \ln(x) + x^2 - 4,$$

comenzando en el intervalo $[1, 2]$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.6. Usa el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de

$$f(x) = 1 - x^2 - \arctan(x),$$

comenzando con $x_0 = 0.5$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.7. Usa el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de

$$f(x) = \cos(x) - x,$$

comenzando con $x_0 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.8. Usa el método de la secante para aproximar la raíz de

$$f(x) = \arcsin(x) - e^{-2x},$$

comenzando con $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.9. Usa el método de la secante para aproximar la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x,$$

comenzando con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.10. Usa el método de la iteración del punto fijo para aproximar la raíz de

$$f(x) = \sin(x) + x - 1,$$

comenzando con $x_0 = 0.52$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

EJERCICIO 2.11. Usa el método de la iteración del punto fijo para aproximar la raíz de

$$f(x) = \ln(x) + 2x - 4,$$

comenzando con $x_0 = 1.5$ y hasta que $|\epsilon_1| < 1\%$.

Sistemas de ecuaciones lineales

Estudiaremos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n , \end{aligned}$$

donde a_{ij} , b_j son constantes y x_j son las incógnitas. Se dice que el sistema tiene n ecuaciones con n incógnitas o simplemente que es de $n \times n$.

En la notación a_{ij} , i se refiere al renglón y j , a la columna en donde está ubicado el elemento correspondiente.

El sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en forma matricial si definimos:

- i) La *matriz de coeficientes*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ;$$

- ii) La *matriz de incógnitas*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;$$

iii) La *matriz de términos independientes* o resultados:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema es equivalente a la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B,$$

donde el producto indicado es el producto de matrices.

3.1. Operaciones elementales

Para una matriz A , se definen tres operaciones elementales por renglones (o columnas); nos remitiremos a las operaciones por renglones. Cuando se efectúan las operaciones elementales, se obtiene una matriz equivalente y se utiliza el símbolo de equivalencia.

I. *Intercambiar dos renglones.* Si intercambiamos los renglones 1 y 3:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 7 & -10 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

II. *Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero.* Si multiplicamos el renglón 3 por 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \times 2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}.$$

III. *Sumar un renglón a otro renglón.* Si sumamos el renglón 3 al renglón 2:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 6 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones *II* y *III*, se combinan para sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Ejemplo (1)

(i) Comenzamos con la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

(ii) Multiplicamos el renglón 1 por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times 2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

(iii) Sumamos el renglón 1 al renglón 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

(iv) Finalmente multiplicamos por $\frac{1}{2}$ el renglón 1 (lo cual anula el paso (ii)):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ahormando pasos podemos escribir simplemente:

$$\times 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las operaciones elementales se utilizan para “hacer ceros” debajo de algún elemento $a_{ij} \neq 0$.

Ejemplo (2) Hacer ceros debajo del elemento a_{11} en la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Vemos que para lograr el objetivo, podemos multiplicar el renglón 1 por 2, y sumarlo al renglón 2. También podemos multiplicar el mismo renglón 1 por -3, y sumárselo al renglón 3:

$$-3, 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & -9 & 14 \end{pmatrix}$$

El objetivo final es transformar una matriz A en una matriz escalonada.

Definición 3.1. Una matriz se llama *escalonada* si el primer elemento no cero en cada renglón está más a la derecha que el del renglón anterior.

Ejemplo 3 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

sí es escalonada.

3.2. Eliminación gaussiana

Este método se aplica para resolver sistemas lineales de la forma:

$$A \times X = B$$

El método de eliminación gaussiana (simple) consiste en escalar la matriz aumentada del sistema:

$$(A \dot{:} B),$$

para obtener un sistema equivalente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{mn}x_n &= b'_n, \end{aligned}$$

donde la notación a'_{ij} se usa simplemente para denotar que el elemento a_{ij} cambió. Se despejan las incógnitas comenzando con la última ecuación y hacia arriba. Por esta razón, muchas veces se dice que el método de eliminación gaussiana consiste en la eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás.

Ejemplo 1 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= -2 \\7x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= 5\end{aligned}$$

usando el método de eliminación gaussiana (simple).

Solución. Escalonamos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 10 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -11 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

y dividiendo el segundo renglón entre -3, tenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

Por lo tanto, el sistema equivale a:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_2 + 2x_3 &= 2 \\x_3 &= 10 ;\end{aligned}$$

de la última ecuación tenemos que $x_3 = 10$; sustituimos este valor en la ecuación de arriba para obtener $x_2 = -18$; sustituimos estos dos valores en la ecuación de arriba para obtener $x_1 = 7$.

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 7 \\x_2 &= -18 \\x_3 &= 10 .\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Resolver:

$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -10 \\3x_1 + x_2 - 6x_3 &= 4\end{aligned}$$

usando eliminación gaussiana (simple).

Solución. Escalonando la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 1 & -10 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 10 & 0 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -50 & -100 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema equivale a:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_2 + 5x_3 &= 14 \\ -50x_3 &= -100; \end{aligned}$$

de la ecuación (3) obtenemos que $x_3 = 2$; sustituimos arriba para obtener $x_2 = 4$; sustituimos arriba para obtener $x_1 = 4$. Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}.$$

El método de eliminación gaussiana (simple) puede presentar un problema cuando uno de los elementos que se usan para hacer ceros, es cero.

Por ejemplo, supóngase que en algún paso del proceso de hacer ceros tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

es claro que el elemento $a_{22} = 0$, ¡no puede usarse para hacer ceros!

Este problema se puede resolver fácilmente intercambiando los renglones 2 y 3. De hecho, el resultado que obtenemos es la matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 6 \end{pmatrix};$$

sin embargo, el problema puede presentarse también si el elemento aquel es *muy cercano a cero*.

Ejemplo (3) Resolver el siguiente sistema usando eliminación gaussiana (simple).

$$\begin{aligned} 0.00005x_1 + 5x_2 &= 3.33335 \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Solución. Usando eliminación gaussiana (simple), obtenemos:

$$-\frac{1}{0.00005} \begin{pmatrix} 0.00005 & 5 & 3.33335 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.00005 & 5 & 3.33335 \\ 0 & -99999 & -66666 \end{pmatrix},$$

que nos da el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 0.00005x_1 + 5x_2 &= 3.33335 \\ -99999x_2 &= -66666, \end{aligned}$$

de donde $x_2 = \frac{2}{3}$; sustituimos arriba y obtenemos:

$$x_1 = \frac{3.33335 - 5\left(\frac{2}{3}\right)}{0.00005}.$$

El resultado cambia drásticamente de acuerdo con el número de cifras significativas que se usen. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Número de cifras significativas	x_2	x_1	(*) Error relativo porcentual
3	0.667	-33	10,000%
4	0.6667	-3	1,000%
5	0.66667	0	100%
6	0.666667	.3	10%
7	0.6666667	0.33	1%

(*) Para calcular este error, se tomó el valor verdadero de $x_1 = \frac{1}{3}$.

Ahora resolvemos el mismo sistema, pero intercambiando los renglones 1 y 2:

$$-0.00005 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.00005 & 5 & 3.33335 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4.99995 & 3.33333 \end{pmatrix},$$

lo cual nos da el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 4.99995x_2 &= 3.33333, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $x_2 = \frac{2}{3}$; sustituyendo arriba nos da:

$$x_1 = 1 - \frac{2}{3}.$$

Nuevamente tomamos distintas cifras significativas y resumimos los resultados en la siguiente tabla:

No. de cifras significativas	x_2	x_1	(*) Error relativo porcentual
3	0.667	0.333	0.1%
4	0.6667	0.3333	0.01%
5	0.66667	0.33333	0.001%
6	0.666667	0.333333	0.0001%
7	0.6666667	0.3333333	0.00001%

En este último caso, vemos que el error relativo porcentual no varía drásticamente como en la solución anterior.

Así, vemos que los elementos que son cercanos a cero son malos para hacer ceros. En general, para evitar este problema se elige como elemento para hacer ceros (el cual recibe el nombre de *elemento pivotal* o simplemente *pivote*) el elemento mayor en valor absoluto de entre todos los candidatos.

A este procedimiento se le llama pivoteo parcial y aplicado a la eliminación gaussiana, nos da el llamado método de eliminación gaussiana con pivoteo (parcial).

Podemos resumir el pivoteo (parcial) como sigue:

- Para elegir el elemento pivote en la primera columna, se escoge el elemento mayor (con valor absoluto) de toda la primera columna.
- Para elegir el elemento pivote en la segunda columna, se escoge el elemento mayor (con valor absoluto) de toda la segunda columna, exceptuando el elemento a_{12} .
- Para la tercera columna, se exceptúan los elementos a_{13} y a_{23} , etcétera.

En un diagrama matricial, tenemos que los elementos pivotes de cada columna se escogen de entre los siguientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.2.1. Ejemplos

Ejemplo 4 Usar eliminación gaussiana con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 0.5x_3 &= -5 \\-2x_1 + 5x_2 - 1.5x_3 &= 0 \\-0.2x_1 + 1.75x_2 - x_3 &= 10.\end{aligned}$$

Solución. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{array} \right).$$

Para escoger el primer elemento pivote en la columna 1, tomamos el elemento mayor con valor absoluto entre $-1, -2$ y -0.2 , el cual obviamente es -2 ; por lo tanto, intercambiamos los renglones 1 y 2 (este es el *primer pivoteo* realizado):

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{array} \right)$$

y procedemos a hacer ceros debajo del pivote. Para ello, multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{2}$ y se lo sumamos al renglón 2. También, multiplicamos el renglón 1 por $-\frac{0.2}{2}$ y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \end{array} \right).$$

Olvidándonos del renglón 1 y de la columna 1, procedemos a escoger el pivote de la columna 2, pero únicamente entre 0.5 y 1.25 , el cual obviamente resulta ser 1.25 . Por lo tanto, intercambiamos los renglones 2 y 3 (este es el *segundo pivoteo* realizado):

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \end{array} \right)$$

y procedemos a hacer ceros debajo del elemento pivote. Para ello, multiplicamos el renglón 2 por $-\frac{0.5}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 3 para obtener:

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{array} \right),$$

la cual es una matriz escalonada. El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 - 1.5x_3 &= 0 \\ 1.25x_2 - 0.84x_3 &= 10 \\ 0.09x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Y con la sustitución hacia arriba, obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= -75 \\ x_2 &= -60 \\ x_3 &= -100 \end{aligned}$$

Ejemplo (5) Usar eliminación gaussiana con pivoteo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0.4x_1 - 1.5x_2 + 0.75x_3 &= -20 \\ -0.5x_1 - 15x_2 + 10x_3 &= -10 \\ -10x_1 - 9x_2 + 2.5x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0.4 & -1.5 & 0.75 & -20 \\ -0.5 & -15 & 10 & -10 \\ -10 & -9 & 2.5 & 30 \end{array} \right)$$

El elemento pivote en la columna 1 es -10, lo que nos obliga a intercambiar los renglones 1 y 3:

$$\left(\begin{array}{cccc} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ -0.5 & -15 & 10 & -10 \\ 0.4 & -1.5 & 0.75 & -20 \end{array} \right);$$

haciendo ceros debajo del pivote, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ 0 & -14.55 & 9.875 & -11.5 \\ 0 & -1.5 & 0.85 & -18.8 \end{array} \right)$$

Ahora el elemento pivote en la columna 2 es -14.55, el cual está bien colocado, y no hay necesidad de intercambiar renglones. Procedemos a hacer ceros debajo del pivote, lo cual nos da la siguiente matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ 0 & -14.55 & 9.875 & -11.5 \\ 0 & 0 & -0.412371 & -17.3299 \end{array} \right)$$

Escribiendo el sistema equivalente, y resolviendo con la sustitución hacia arriba, obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{aligned}x_1 &= -18.875 \\x_2 &= 29.3125 \\x_3 &= 42.0250.\end{aligned}$$

3.3. Método de Gauss-Jordan

Este método utiliza las mismas técnicas de eliminación gaussiana (incluyendo el pivoteo), pero con el objetivo de finalizar con una matriz de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array} \right)$$

Para lograr esto, se usa la técnica del pivoteo con la única diferencia de que el pivote se usa para hacer ceros hacia abajo y hacia arriba.

Ejemplo 1 Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 0.5x_3 &= -5 \\-2x_1 + 5x_2 - 1.5x_3 &= 0 \\-0.2x_1 + 1.75x_2 - x_3 &= 10.\end{aligned}$$

Solución. Comenzamos con la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -2 & 5 & 1.5 & 0 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{array} \right)$$

Procedemos a hacer el primer pivoteo, y para ello, intercambiamos los renglones 1 y 2:

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 5 & 1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{array} \right)$$

y haciendo ceros debajo del pivote, obtenemos:

$$-\frac{0.2}{2}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para colocar adecuadamente el segundo pivote, intercambiamos los renglones 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \end{pmatrix}.$$

Para hacer ceros arriba del pivote 1.25, multiplicamos el renglón 2 por $-\frac{5}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 1; para hacer ceros debajo del mismo pivote, multiplicamos el mismo renglón 2 por $-\frac{0.5}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 3. Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1.9 & -40 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ahora procedemos a hacer ceros arriba del pivote 0.09. Para ello, multiplicamos el renglón 3 por $\frac{0.85}{0.09}$ y se lo sumamos al renglón 2; igualmente, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{1.9}{0.09}$ y se lo sumamos al renglón 1. Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1.25 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para hacer los unos en la diagonal principal, multiplicamos los renglones 1, 2 y 3 por $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1.25}$ y $\frac{1}{0.09}$, respectivamente. Obtenemos, entonces, la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -75 \\ 0 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \end{pmatrix},$$

la cual nos da la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= -75 \\ x_2 &= -60 \\ x_3 &= -100. \end{aligned}$$

Ejemplo (2) Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -0.4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ 0.5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 15.\end{aligned}$$

Solución. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -0.4 & 2 & -1 & 10 \\ 0.5 & -3 & 1 & 15 \end{array} \right).$$

Observamos que el primer elemento pivote está bien colocado y, por lo tanto, no hay necesidad de intercambiar renglones. Por lo mismo hacemos ceros debajo del pivote $a_{11} = 1$; para ello, multiplicamos el renglón 1 por 0.4 y se lo sumamos al renglón 2, y también multiplicamos el mismo renglón 1 por -0.5 y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2.8 & 0.2 & 10.4 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \end{array} \right).$$

Para elegir el segundo elemento pivote, debemos escoger el elemento mayor (con valor absoluto) entre $a_{22} = 2.8$ y $a_{32} = -4$, el cual obviamente es este último. Por lo tanto, debemos intercambiar los renglones 2 y 3. Tenemos entonces:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 2.8 & 0.2 & 10.4 \end{array} \right);$$

procedemos a hacer ceros arriba y abajo de nuestro segundo elemento pivote; para ello, multiplicamos el renglón 2 por 0.5 y se lo sumamos al renglón 1, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{2.8}{4}$ y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2.75 & 8.25 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{array} \right).$$

Nuestro tercer elemento pivote es $a_{33} = -0.15$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{0.5}{0.15}$ y se lo sumamos al renglón 2, y también multiplicamos el mismo renglón 3 por $\frac{2.75}{0.15}$ y se lo sumamos al renglón 1. Esto nos da:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & -4 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{array} \right).$$

Finalmente, hacemos los unos en la diagonal, multiplicando el renglón 2 por $-\frac{1}{4}$ y el renglón 3 por $-\frac{1}{0.15}$. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & 1 & 0 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & -137 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 385 \\ x_2 &= 13.5 \\ x_3 &= -137. \end{aligned}$$

3.4. Matriz inversa

Una de las aplicaciones del método de Gauss-Jordan, es el cálculo de matrices inversas. Recordamos, primero, la definición de matriz inversa.

Definición 3.2. Sea A una matriz de $n \times n$. La *matriz inversa* de A es una matriz B de $n \times n$, tal que:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

Se escribe $B = A^{-1}$ para denotar la matriz inversa. Cuando la matriz inversa existe, es única, pero no siempre existe la matriz inversa.

Un resultado del álgebra lineal prueba que la matriz inversa A^{-1} existe si y sólo si el determinante de A es distinto de cero.

El método de Gauss-Jordan procede como sigue:

$$(A : I_n) \rightarrow (I_n : A^{-1}),$$

es decir, en una matriz comenzamos por escribir la matriz A , y a su derecha agregamos la matriz identidad I_n del mismo orden que la matriz A ; enseguida, aplicamos el método de Gauss-Jordan para hacer los ceros y unos, y obtener del lado

izquierdo la matriz identidad I_n . Del lado derecho, lo que obtendremos será la matriz inversa de A .

Ejemplo 1 Usar el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. En una matriz colocamos la matriz A y, a su derecha, agregamos la matriz identidad I_2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El primer elemento pivote $a_{11} = 4$ está bien colocado y procedemos a hacer ceros debajo de este elemento. Para ello, multiplicamos el renglón 1 por $-\frac{1}{4}$ y se lo sumamos al renglón 2. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuestro segundo elemento pivote es $a_{22} = 0.25$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos el renglón 2 por $-\frac{11}{0.25}$ y se lo sumamos al renglón 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 15 & -44 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos los unos en la diagonal principal. Para ello, multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{4}$ y el renglón 2 por $\frac{1}{0.25}$. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, concluimos que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 Usar el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -0.5 & 1.2 & -0.1 \\ -0.3125 & -0.625 & 3.125 \end{pmatrix}$$

Solución. En una matriz colocamos la matriz A y, a su derecha, agregamos la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 \\ -0.3125 & -0.625 & 3.125 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el primer elemento pivote $a_{11} = 2$ está bien colocado y procedemos a hacer ceros debajo de este elemento. Para ello, multiplicamos el renglón 1 por $\frac{0.5}{2}$ y se lo sumamos al renglón 2; también, multiplicamos el mismo renglón 1 por $\frac{0.3125}{2}$ y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.1625 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para elegir el segundo elemento pivote, debemos escoger el elemento mayor (con valor absoluto) entre $a_{22} = 0.2$ y $a_{32} = -1.25$, el cual obviamente es este último. Por lo tanto, debemos intercambiar los renglones 2 y 3. Tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.15625 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & -0.1 & 0.25 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

procedemos a hacer ceros arriba y abajo de nuestro segundo elemento pivote; para ello, multiplicamos el renglón 2 por $-\frac{4}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 1, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{0.2}{1.25}$ y se lo sumamos al renglón 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 & 0.5 & 0 & -3.2 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.15625 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.275 & 1 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

Nuestro tercer elemento pivote es $a_{33} = 0.4$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{3.125}{0.4}$ y se lo sumamos al renglón 2, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{10}{0.4}$ y se lo sumamos al renglón 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 7.375 & 25 & 0.8 \\ 0 & -1.25 & 0 & -1.9921875 & -7.8125 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.275 & 1 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, hacemos los unos en la diagonal principal. Para ello, multiplicamos los renglones 1, 2 y 3 por $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{1.25}$ y $\frac{1}{0.4}$, respectivamente. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.6875 & 12.5 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 1.59375 & 6.25 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6875 & 2.5 & 0.4 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, concluimos que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.6875 & 12.5 & 0.4 \\ 1.59375 & 6.25 & 0.2 \\ 0.6875 & 2.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

3.5. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es iterativo y, por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente. Comenzamos con nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}.$$

De la ecuación 1 despejamos x_1 , de la ecuación 2 despejamos x_2 , ..., de la ecuación n despejamos x_n . Esto nos da el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{21}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{11}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn-1}}. \end{aligned}$$

Este último conjunto de ecuaciones son las que forman nuestras fórmulas iterativas. Para comenzar el proceso iterativo, le damos el valor de cero a las variables x_2, \dots, x_n ; esto nos dará un primer valor para x_1 . Más precisamente, tenemos que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Enseguida, sustituimos este valor de x_1 en la ecuación 2, y las variables x_3, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero. Esto nos da el siguiente valor para x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} \left(\frac{b_1}{a_{11}} \right)}{a_{22}}.$$

Estos últimos valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la ecuación 3, mientras que x_4, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero; y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Todo este paso, nos arrojará una lista de primeros valores para nuestras incógnitas, la cual conforma nuestro primer paso en el proceso iterativo. Digamos que tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 \\x_2 &= \alpha_2 \\&\vdots \\x_n &= \alpha_n\end{aligned}$$

Volvemos a repetir el proceso, pero ahora sustituyendo estos últimos datos. En vez de ceros como al inicio, obtendremos una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Digamos que ahora tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 \\x_2 &= \beta_2 \\&\vdots \\x_n &= \beta_n\end{aligned}$$

En este momento, podemos calcular los errores aproximados relativos respecto a cada una de las incógnitas. Así, tenemos la lista de errores como sigue:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\% \right| \\|\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} \times 100\% \right| \\&\vdots \\|\epsilon_{a,n}| &= \left| \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n} \times 100\% \right|\end{aligned}$$

El proceso se vuelve a repetir hasta que:

$$|\epsilon_{a,i}| < \epsilon_s, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

donde ϵ_s es una cota prefijada.

Ejemplo 1 Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.2x_2 - 0.5x_3 &= 8 \\0.1x_1 + 7x_2 + 0.4x_3 &= -19.5 \\0.4x_1 - 0.1x_2 + 10x_3 &= 72.4\end{aligned}$$

hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. Primero despejamos las incógnitas x_1, x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3, respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{8 + 0.2x_2 + 0.5x_3}{3} \\x_2 &= \frac{-19.5 - 0.1x_1 - 0.4x_3}{7} \\x_3 &= \frac{72.4 - 0.4x_1 + 0.1x_2}{10}\end{aligned}$$

Estas últimas son nuestro juego de fórmulas iterativas.

Comenzamos el proceso iterativo, sustituyendo los valores de $x_2 = x_3 = 0$ en la primera ecuación, para calcular el primer valor de x_1 :

$$x_1 = 2.66667;$$

ahora, sustituimos $x_1 = 2.66667$ y $x_3 = 0$ en la segunda ecuación, para obtener x_2 :

$$x_2 = -2.82381;$$

ahora sustituimos $x_1 = 2.66667$ y $x_2 = -2.82381$ en la tercera ecuación, para obtener x_3 :

$$x_3 = 7.1051;$$

Con estos valores de inicio, aplicamos nuestras fórmulas iterativas y obtenemos el segundo juego de aproximaciones:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.6626 \\x_2 &= -3.24404 \\x_3 &= 7.06106\end{aligned}$$

Ahora sí podemos calcular los errores absolutos para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{3.6626 - 2.66667}{3.6626} \times 100\% \right| = 27\% \\|\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{-3.24404 + 2.82381}{-3.24404} \times 100\% \right| = 12.9\% \\|\epsilon_{a,3}| &= \left| \frac{7.06106 - 7.1051}{7.06106} \times 100\% \right| = 0.6\%;\end{aligned}$$

puesto que no se ha logrado el objetivo, debemos repetir el mismo proceso con los últimos valores obtenidos de cada una de las incógnitas. Nótese que aunque el error

aproximado $|\epsilon_{a,3}|$ ya cumple con ser menor al 1%, ¡esto se debe de cumplir para los tres errores aproximados!

Por lo tanto, repetimos el mismo proceso. Omitiendo los pasos intermedios, obtenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.62724 \\x_2 &= -3.24102 \\x_3 &= 7.06250.\end{aligned}$$

Y en este caso tenemos los siguientes errores aproximados:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a,1}| &= 0.09\% \\|\epsilon_{a,2}| &= 0.07\% \\|\epsilon_{a,3}| &= 0.001\%.\end{aligned}$$

Vemos que ahora sí se ha cumplido el objetivo para cada uno de los errores aproximados. Por lo tanto, concluimos que la solución aproximada es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.62724 \\x_2 &= -3.24102 \\x_3 &= 7.06250.\end{aligned}$$

Observación. Es lógico preguntarse si siempre el método de Gauss-Seidel converge en la solución del sistema de ecuaciones y también es lógico esperar que la respuesta es NO.

Un resultado de análisis numérico nos da una condición suficiente para la convergencia del método.

Teorema 3.1. *El método de Gauss-Seidel converge en la solución del sistema, si se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz diagonalmente dominante, es decir, si se cumple la siguiente condición:*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

La condición de ser una matriz diagonalmente dominante simplemente significa que los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del mismo renglón. Nótese que en el ejemplo

anterior, la matriz sí es diagonalmente dominante y, por lo tanto, el método de Gauss-Seidel sí converge en la solución del sistema.

Sin embargo, la condición de la matriz diagonalmente dominante solamente es suficiente pero no necesaria, es decir, existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *sí* convergen en la solución, y también existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *no* convergen en la solución.

Finalmente, obsérvese que aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, es posible, a veces, lograr que sí se cumpla con esta condición mediante un intercambio de renglones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo (2) Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 1.4x_2 - 2.7x_3 &= 94.2 \\ 0.7x_1 - 2.5x_2 + 15x_3 &= -6 \\ 3.3x_1 - 11x_2 + 4.4x_3 &= -27.5 \end{aligned}$$

hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución. En este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante (*¿por qué?*). Pero también vemos que si intercambiamos los renglones 2 y 3, entonces sí es diagonalmente dominante. Así, primero hacemos el intercambio de renglones y nuestro sistema es:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 1.4x_2 - 2.7x_3 &+ 94.2 \\ 3.3x_1 - 11x_2 + 4.4x_3 &+ -27.5 \\ 0.7x_1 - 2.5x_2 + 15x_3 &+ -6. \end{aligned}$$

Procedemos, entonces, a despejar x_1 , x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3, respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{94.2 - 1.4x_2 + 2.7x_3}{-5} \\ x_2 &= \frac{-27.5 - 3.3x_1 - 4.4x_3}{-11} \\ x_3 &= \frac{-6 - 0.7x_1 + 2.5x_2}{15}. \end{aligned}$$

Comenzamos, entonces, el proceso iterativo sustituyendo los valores de $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 1, para obtener x_1 :

$$x_1 = -18.84;$$

ahora sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 2, para obtener x_2 :

$$x_2 = -3.152;$$

para terminar la primera iteración, sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_2 = -3.152$ en la ecuación 3 para obtener x_3 :

$$x_3 = -0.04613;$$

por lo tanto, los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -18.84 \\ x_2 &= -3.152 \\ x_3 &= -0.04613 ; \end{aligned}$$

puesto que solo tenemos la primera aproximación de la solución del sistema, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Sustituyendo

$$x_2 = -3.152 \text{ y } x_3 = -0.04613$$

en la ecuación 1, obtenemos $x_1 = -19.69765$; sustituyendo

$$x_1 = -19.69765 \text{ y } x_3 = -0.04613$$

en la ecuación 2, obtenemos $x_2 = -3.42775$; sustituyendo

$$x_1 = -19.69765 \text{ y } x_2 = -3.42775$$

en la ecuación 3, obtenemos $x_3 = -0.05207$. Por lo tanto, nuestra segunda aproximación es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -19.69765 \\ x_2 &= -3.42775 \\ x_3 &= -0.05207 . \end{aligned}$$

Y ahora sí podemos calcular los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned} |\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{-19.69765 + 18.84}{19.69765} \times 100\% \right| = 4.35\% \\ |\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{-3.42775 + 3.152}{-3.42775} \times 100\% \right| = 8.04\% \\ |\epsilon_{a,3}| &= \left| \frac{-0.05207 + 0.04613}{-0.05207} \times 100\% \right| = 11.4\% ; \end{aligned}$$

puesto que no se ha cumplido el objetivo, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Resumimos los siguientes resultados como sigue:

Tercera iteración:

$$\begin{aligned}x_1 &= -19.77165 \implies |\epsilon_{a,1}| = 0.3\% \\x_2 &= -3.45232 \implies |\epsilon_{a,2}| = 0.7\% \\x_3 &= -0.05271 \implies |\epsilon_{a,3}| = 1.2;\end{aligned}$$

Cuarta iteración:

$$\begin{aligned}x_1 &= -19.77819 \implies |\epsilon_{a,1}| = 0.3\% \\x_2 &= -3.45454 \implies |\epsilon_{a,2}| = 0.6\% \\x_3 &= -0.05277 \implies |\epsilon_{a,3}| = 0.1.\end{aligned}$$

Así, el objetivo se ha logrado hasta la cuarta iteración y tenemos que los valores aproximados de la solución del sistema son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -19.77819 \\x_2 &= -3.45454 \\x_3 &= -0.05277.\end{aligned}$$

3.6. Ejercicios

En todos los ejercicios redondea tus resultados a cinco decimales.

EJERCICIO 3.12. Usa el método de Gauss con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}5x_1 - 8x_2 + x_3 &= -71 \\-2x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 134 \\3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -58\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.13. Usa el método de Gauss con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 6x_4 &= 2.3 \\4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 &= 6.9 \\-5x_1 + x_2 - 3x_3 &= -36 \\10x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -36\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.14. Usa el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}2x_1 - 0.9x_2 + 3x_3 &= -3.61 \\-0.5x_1 + 0.1x_2 - x_3 &= 2.035 \\x_1 - 6.35x_2 - 0.45x_3 &= 15.401\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.15. Usa el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} 0.7x_1 + 2.7x_2 & -6x_3 + 0.7x_4 = 1.6487 \\ 2x_1 - 0.8x_2 & +3x_3 - x_4 = -2.342 \\ -x_1 - 1.5x_2 +1.4x_3 + 3x_4 = -4.189 \\ 7x_2 -1.56x_3 + x_4 = 15.792 \end{array}$$

EJERCICIO 3.16. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices usando el método de Gauss-Jordan:

$$(a) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & -3.2 & 5.7 \\ 0 & -6.9 & 1 & 4 \\ -1.1 & 2 & -2.5 & 6 \\ 0.5 & 4.1 & -0.7 & -0.4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3.17. Usa el método de Gauss-Seidel hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$, para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 0.5x_2 +0.6x_3 & = 5.24 \\ 0.3x_1 - 4x_2 -x_3 & = -0.387 \\ -0.7x_1 + 2x_2 +7x_3 & = 14.803 \end{array}$$

EJERCICIO 3.18. Usa el método de Gauss-Seidel hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$, para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 - 0.2x_2 +x_3 & = 1.5 \\ 0.1x_1 + 3x_2 -0.5x_3 & = -2.7 \\ -0.3x_1 + x_2 -7x_3 & = 9.5 \end{array}$$

Interpolación

En este capítulo estudiaremos el importantísimo tema de la *interpolación* de datos. Veremos dos tipos de interpolación: la *interpolación polinomial* y la *interpolación segmentaria (splines)*.

4.1. Planteamiento del problema

En problemas reales, generalmente con lo que se cuenta es con cierto número de datos, los cuales por lo regular se obtienen de manera experimental o por métodos estadísticos. Estos datos en muchas ocasiones representan puntos en el plano; por ejemplo, supóngase que se ha tomado la temperatura en un punto específico de una habitación, en intervalos de tiempo de 1 segundo y hasta completar 10 segundos. Entonces los datos obtenidos pueden escribirse de la siguiente forma:

$$(1, T_1), (2, T_2), \dots (10, T_{10}).$$

Podemos, entonces, plantearnos las siguientes preguntas:

¿Cuál fue la temperatura en $t = 0.5$ seg.?

¿Cuál fue la temperatura en $t = 3.7$ seg.?

... y así sucesivamente.

Para resolver este tipo de problemas, se aplica lo que se llama *interpolación de datos*, que no es otra cosa sino hallar una función $f(t)$ que pase por los puntos dados y, entonces, utilizar esta función para obtener el valor deseado en los puntos intermedios.

En el ejemplo que estamos manejando, una vez que obtenemos la función $f(t)$ que pase por los 10 puntos, entonces para conocer la temperatura en $t = 0.5$ seg., simplemente evaluamos $f(0.5)$; en el segundo caso, evaluamos $f(3.7)$ y así sucesivamente.

Finalmente, cabe comentar que cuando se usa la función $f(t)$ para conocer los valores en puntos intermedios, entonces decimos que estamos haciendo la interpolación, pero cuando usamos la función $f(t)$ para conocer el valor en puntos fuera del intervalo dado, entonces decimos que estamos haciendo *extrapolación*.

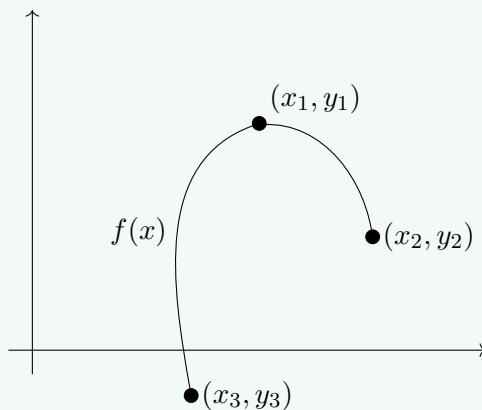
Nosotros solamente estudiamos la interpolación. Comencemos dando la definición general.

Definición 4.1. Dados $n + 1$ puntos que corresponden a los datos:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array},$$

los cuales se representan gráficamente como puntos en el plano cartesiano.

Si existe una función $f(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ (donde suponemos que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces a $f(x)$ se le llama *función de interpolación* de los datos cuando es usada para aproximar valores dentro del intervalo $[x_0, x_n]$, y se le llama *función de extrapolación* de los datos cuando está definida y es usada para aproximar valores fuera del intervalo.



Evidentemente pueden existir varios tipos de funciones que interpolen los mismos datos; por ejemplo, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones polinomiales, combinaciones de estas, etcétera. El tipo de interpolación que uno elige, depende generalmente de la naturaleza de los datos que se están manejando, así como de los valores intermedios que se están esperando.

Un tipo muy importante es la interpolación por funciones polinomiales. Puesto que evidentemente pueden existir una infinidad de funciones polinomiales de interpolación para una misma tabla de datos, se hace una petición extra para que el polinomio de interpolación sea único.

Definición 4.2. Un *polinomio de interpolación* es una función polinomial que, además de interpolar datos, es el de menor grado posible.

Caso $n = 0$

Tenemos los datos:

x	x_0
y	y_0

;

en este caso, tenemos que $f(x) = y_0$ (polinomio constante) es el polinomio de menor grado, tal que $f(x_0) = y_0$; por lo tanto, es el polinomio de interpolación.

Caso $n = 1$

Tenemos los datos:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

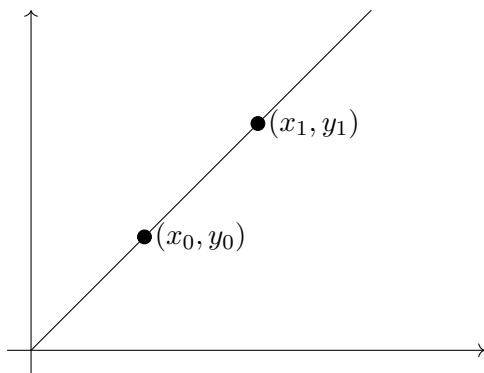
.

En este caso, el polinomio de interpolación es la función lineal que une los dos puntos dados. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

es el polinomio de interpolación.

La siguiente gráfica representa este caso:



Observación. Vemos que en el polinomio de interpolación del caso $n = 1$, se encuentra como primer término y_0 , que es el polinomio de interpolación del caso $n = 0$.

Continuemos:

Caso $n = 2$

Tenemos los datos:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

;

para este caso, el polinomio de interpolación va a ser un polinomio de grado 2. Tomando en cuenta la observación anterior, intuimos que el polinomio de interpolación será como sigue:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \text{término cuadrático};$$

por lo tanto, planteamos el polinomio de interpolación como sigue:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Si asignamos $x = x_0$, se anulan los valores de b_1 y b_2 , quedándonos el resultado:

$$f(x_0) = b_0;$$

como se debe cumplir que $f(x_0) = y_0$, entonces:

$$y_0 = b_0.$$

Si asignamos $x = x_1$, el valor de b_2 queda anulado, resultando lo siguiente:

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0);$$

como se debe cumplir que $f(x_1) = y_1$ y ya sabemos que $y_0 = b_0$, entonces $y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$, de lo cual obtenemos el valor para b_1 :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1.$$

Asignando $x = x_2$, vamos a obtener:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1);$$

como se debe cumplir que $f(x_2) = y_2$, y ya sabemos que $y_0 = b_0$ y $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$, sustituimos estos datos para después despejar el valor de b_2 :

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

de lo cual podemos hacer un despeje parcial para lograr la siguiente igualdad:

$$\frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0).$$

Ahora en el numerador del miembro izquierdo de la igualdad, le sumamos un cero ($-y_1 + y_1$), de tal manera que no se altere la igualdad:

$$\frac{y_2 - \underbrace{y_1 + y_1}_{-y_1} - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0);$$

a continuación, aplicamos un poco de álgebra para así obtener los siguientes resultados:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \left(\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \right) = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - 1 \right) = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} \left(\frac{x_2 - x_1 - x_0 + x_0}{x_1 - x_0} \right) = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_2(x_2 - x_0)$$

Y, finalmente, despejando b_2 vamos a obtener:

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_2 - x_0;$$

por lo tanto, el polinomio de interpolación para este caso es:

$$f(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

Observación. Vemos que efectivamente el polinomio de interpolación contiene al del caso anterior, más un término extra que es de un grado mayor, pero además vemos que cada uno de los coeficientes del polinomio de interpolación, se forman a base de cocientes de diferencias, etcétera. Esto da lugar a la definición de diferencias divididas finitas de Newton, como sigue:

4.2. Diferencias divididas finitas de Newton

Las diferencias divididas finitas de Newton, se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f[x_i, x_j] &= \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \\ f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \\ &\vdots \\ f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] &= \frac{f[x_n, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

A manera de ejemplo, citemos el siguiente caso específico:

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0},$$

donde, a su vez:

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$$

y

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0};$$

y donde, a su vez:

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

etcétera.

Podemos ahora definir nuestro primer tipo de polinomio de interpolación.

4.3. Interpolación con diferencias divididas

Dados $n + 1$ datos:

x	x_0	x_1	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	\cdots	y_n

;

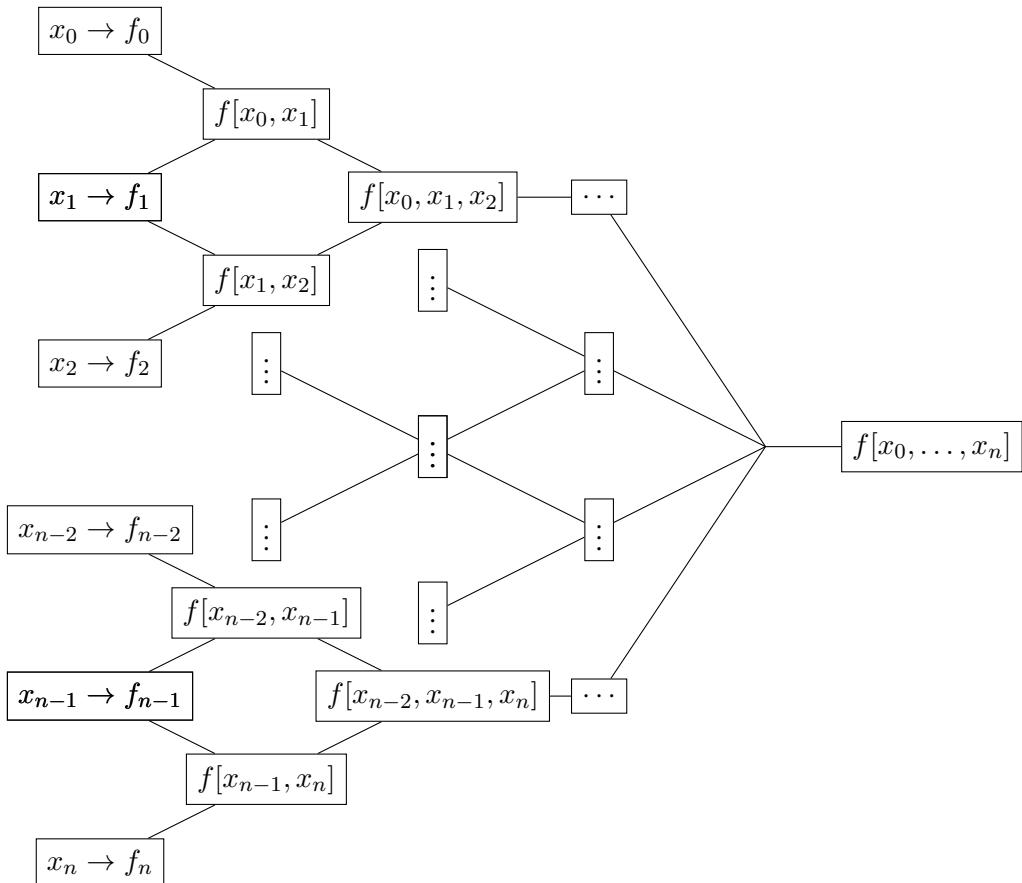
el *polinomio de interpolación de Newton*, se define de la siguiente manera:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= f[x_1, x_0] \\ b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\vdots \\ b_n &= f[x_n, \dots, x_0] \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n , es conveniente construir una tabla de diferencias divididas como la siguiente:



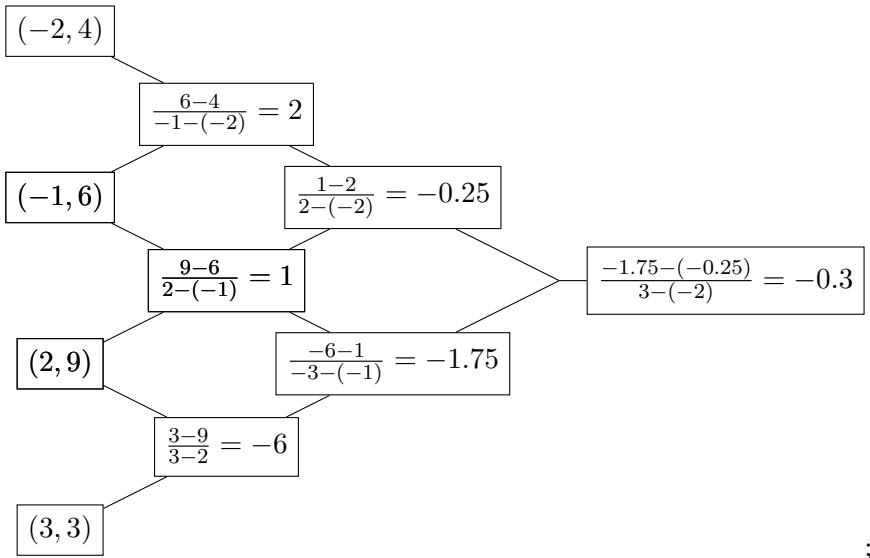
Obsérvese que los coeficientes del polinomio de interpolación de Newton, se encuentran en la parte superior de la tabla de diferencias divididas.

Ejemplo 1 Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos:

x	-2	-1	2	3
y	4	6	9	3

y utilizar la información de dicha tabla, para construir el polinomio de interpolación de Newton.

Solución. Procedemos como sigue:



por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton es:

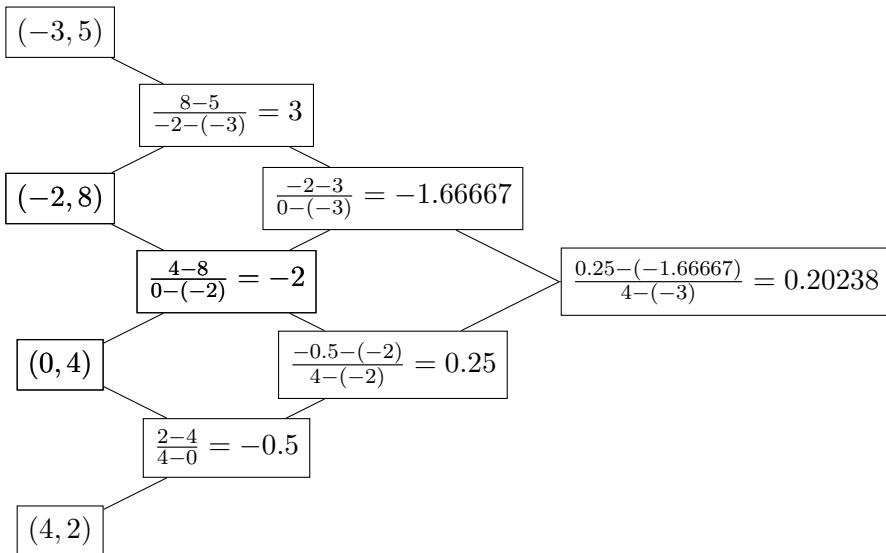
$$f(x) = 4 + 2(x + 2) - 0.25(x + 2)(x + 1) - 0.3(x + 2)(x + 1)(x - 2).$$

Ejemplo ② Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos:

x	-3	-2	0	4
y	5	8	4	2

y usar la información en la tabla para construir el polinomio de interpolación de Newton.

Solución. Procedemos como sigue:



;

por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton nos queda:

$$f(x) = 5 + 3(x + 3) - 1.66667(x + 3)(x + 2) - 0.20238(x + 3)(x + 2)(x).$$

Antes de ver el siguiente tipo de polinomio de interpolación, veamos cómo el imponer la restricción del grado mínimo, implica la unicidad del polinomio de interpolación.

Teorema 4.1. Si x_0, x_1, \dots, x_n son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios y_0, y_1, \dots, y_n existe un polinomio único $f_n(x)$, de a lo más grado n , y tal que:

$$f_n(x_i) = y_i, \quad \text{para toda } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Demostración. En realidad, no probaremos formalmente la existencia de un polinomio de interpolación, aunque informalmente aceptamos que dada cualquier tabla de datos, el polinomio de Newton siempre existe.

Probemos la unicidad del polinomio de interpolación. Supongamos que $g_n(x)$ es otro polinomio de interpolación de a lo más grado n . Sea:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= f_n(x) - g_n(x) \\ \therefore h_n(x_i) &= f_n(x_i) - g_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \end{aligned}$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, $h_n(x)$ tiene $n + 1$ raíces distintas, y es un polinomio de grado más n , esto solamente es posible si $h_n(x) = 0$. Por lo tanto,

$$f_n(x) = g_n(x),$$

que es lo que queríamos probar. □

Sin embargo, aunque el polinomio de interpolación es único, pueden existir diversas formas de encontrarlo. Una es mediante el polinomio de Newton; otra, mediante el polinomio de Lagrange.

4.4. Polinomio de interpolación de Lagrange

Nuevamente tenemos los datos:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array};$$

el *polinomio de interpolación de Lagrange*, se plantea como sigue:

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x),$$

donde los polinomios $l_i(x)$ se llaman polinomios de Lagrange, correspondientes a la tabla de datos.

Como se debe satisfacer que $P(x_0) = y_0$, esto se cumple si $l_0(x_0) = 1$ y $l_i(x_0) = 0$ para toda $i \neq 0$.

Como se debe satisfacer que $P(x_1) = y_1$, esto se cumple si $l_1(x_1) = 1$ y $l_i(x_1) = 0$ para toda $i \neq 1$.

Y así sucesivamente, veremos finalmente que la condición $P_n(x_n) = y_n$ se cumple si $l_n(x_n) = 1$ y $l_i(x_n) = 0$ para toda $i \neq n$.

Esto nos sugiere cómo plantear los polinomios de Lagrange. Para ser más claros, analicemos detenidamente el polinomio $l_0(x)$. De acuerdo con el análisis anterior, vemos que deben cumplirse las siguientes condiciones para $l_0(x)$:

$$l_0(x_0) = 1 \text{ y } l_0(x_j) = 0$$

para toda $j \neq 0$. Por lo tanto, planteamos $l_0(x)$ como sigue:

$$l_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n);$$

con esto se cumple la segunda condición sobre $l_0(x)$. La constante c se determinará para hacer que se cumpla la primera condición:

$$\begin{aligned} l_0(x_0) = 1 &\implies 1 = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n) \\ &\implies c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} ; \end{aligned}$$

por lo tanto, el polinomio $l_0(x)$ queda definido como:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}.$$

Análogamente se puede deducir que:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Ejemplo 1 Calcular el polinomio de Lagrange usando los siguientes datos:

x	1	3	5	7	
y	-2	1	2	-3	

Solución. Tenemos que:

$$f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$f(x) = -2l_0(x) + l_1(x) + 2l_2(x) - 3l_3(x),$$

donde

$$l_0(x) = \frac{(x - 3)(x - 5)(x - 7)}{(-2)(-4)(-6)} = \frac{(x - 3)(x - 5)(x - 7)}{-48}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 1)(x - 5)(x - 7)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{(x - 1)(x - 5)(x - 7)}{16}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 7)}{(4)(2)(-2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 7)}{-16}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 5)}{(6)(4)(2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 5)}{48}$$

Sustituyendo arriba, el polinomio de Lagrange queda definido como sigue:

$$f(x) = \left[\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{24} \right] + \left[\frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{16} \right] \\ - \left[\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{8} \right] - \left[\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{16} \right]$$

Ejemplo (2) Calcular el polinomio de Lagrange usando los siguientes datos:

\$x\$	-2	0	2	4
\$y\$	1	-1	3	-2

Solución. Tenemos que:

$$f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$f(x) = l_0(x) - l_1(x) + 3l_2(x) - 2l_3(x),$$

donde:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-2)(-4)(-6)} = \frac{x(x-2)(x-4)}{-48}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{16}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(4)(2)(-2)} = \frac{x(x+2)(x-4)}{-16}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(6)(4)(2)} = \frac{x(x+2)(x-2)}{48}$$

Sustituyendo arriba, el polinomio de Lagrange queda como sigue:

$$f(x) = \left[\frac{x(x-2)(x-4)}{-48} \right] - \left[\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{16} \right] + 3 \left[\frac{x(x+2)(x-4)}{-16} \right] \\ - \left[\frac{x(x+2)(x-2)}{24} \right]$$

En el capítulo de integración numérica, usaremos nuevamente los polinomios de Lagrange.

4.5. Interpolación de splines

Terminamos este capítulo estudiando un tipo de interpolación que ha demostrado poseer una gran finura, y que inclusive es usado para el diseño por computadora, por ejemplo, de tipos de letra.

Esta interpolación se llama *interpolación segmentaria* o *interpolación por splines*. La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos emplear segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación.

Cabe mencionar que entre todas, las *splines cúbicas* han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente.

Así, pues, podemos decir de manera informal que una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se une entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.

Definición 4.3. Dada nuestra tabla de datos:

x	x_0	x_1	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	\cdots	y_n

,

donde suponemos que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, y dado que k es un número entero positivo, una *función de interpolación spline de grado k*, para la tabla de datos, es una función $s(x)$, tal que:

- i) $s(x_i) = y_i$ para toda $i = 0, 1, \dots, n$.
- ii) $s(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- iii) $s(x)$ tiene derivada continua hasta de orden $k - 1$ en $[x_0, x_n]$.

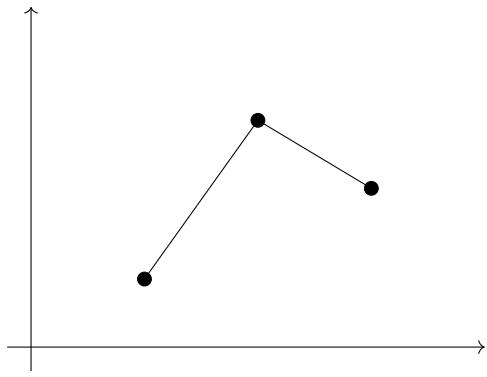
4.5.1. Funciones splines de grado 1

Dados los $n + 1$ puntos:

x	x_0	x_1	\cdots	$\frac{x}{n}$
y	y_0	y_1	\cdots	y_n

,

una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, como sigue:



claramente esta función cumple con las condiciones de la spline de grado 1. Así, tenemos que para este caso:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ s_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde:

- i) $s_j(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1.
- ii) $s(x)$ tiene derivada continua de orden $k - 1 = 0$.
- iii) $s(x_j) = y_j$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

Por lo tanto, la spline de grado 1 queda definida como:

$$s(x) = \begin{cases} y_0 + f[x_1, x_0](x - x_0) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + f[x_2, x_1](x - x_1) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ y_{n-1} + f[x_n, x_{n-1}](x - x_{n-1}) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde $f[x_i, x_j]$ es la diferencia dividida de Newton.

4.5.2. Funciones splines de grado 2

Para aclarar bien la idea, veamos un ejemplo concreto:

Consideremos los siguientes datos:

x	3	4.5	7	9
y	2.5	1	2.5	0.5

y procedamos a calcular la interpolación por splines de grado 2. Primero que nada, vemos que se forman tres intervalos:

$$[3, 4.5], [4.5, 7], [7, 9];$$

en cada uno de estos intervalos, debemos definir una función polinomial de grado 2, como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ a_3x^2 + b_3x + c_3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

Primero, hacemos que la spline pase por los puntos de la tabla de datos. Es decir, se debe cumplir que:

$$s(3) = 2.5, \quad s(4.5) = 1, \quad s(7) = 2.5, \quad s(9) = 0.5;$$

así, se forman las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} s(3) = 2.5 &\implies 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5 \\ s(4.5) = 1 &\implies \begin{cases} (4.5)^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ (4.5)^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{cases} \\ s(7) = 2.5 &\implies \begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{cases} \\ s(9) = 0.5 &\implies 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \end{aligned}$$

Hasta aquí, tenemos un total de 6 ecuaciones vs. 9 incógnitas.

El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas. En el caso de las splines de grado 2, necesitamos que la spline tenga derivada continua de orden $k - 1 = 1$, es decir, primera derivada continua. Calculamos, primero, la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 2a_2x + b_2 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ 2a_3x + b_3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

Vemos que esta derivada está formada por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades son $x = 4.5$ y $x = 7$. Por lo tanto, para que $s'(x)$ sea continua, se debe cumplir que:

$$2a_1(4.5) + b_1 = 2a_2(4.5) + b_2$$

o, lo que es lo mismo,

$$9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2;$$

también debe cumplirse que:

$$2a_2(7) + b_2 = 2a_3(7) + b_3$$

o, lo que es lo mismo,

$$14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3;$$

así, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 9 incógnitas; esto nos da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Elegimos por simple conveniencia $a_1 = 0$.

De esta forma, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas. Estas son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3b_1 + c_1 &= 2.5 \\ 4.5b_1 + c_1 &= 1 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2.5 \\ 81a_3 + 9b_3 + c_3 &= 0.5 \\ b_1 &= 9a_2 + b_2 \\ 14a_2 + b_2 &= 14a_3 + b_3 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma matricial:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & a_3 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & c_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2.5 \\ 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

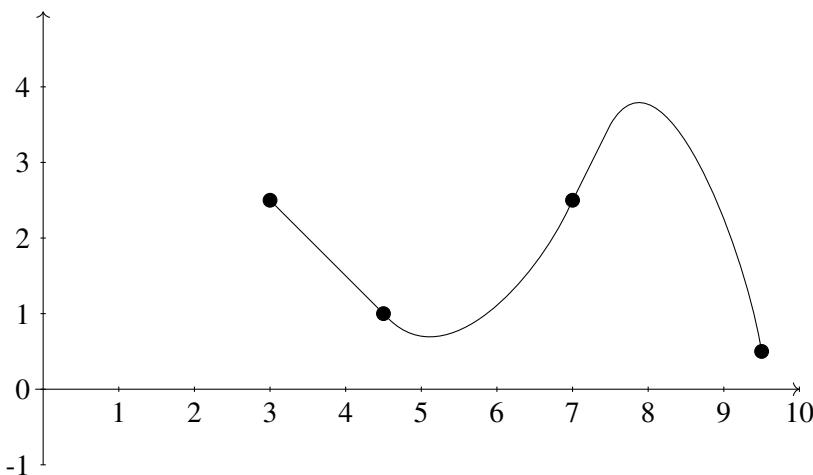
Usando *Mathematica*, se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \\ c_1 &= 5.5 \\ a_2 &= 0.64 \\ b_2 &= -6.76 \\ c_2 &= 18.46 \\ a_3 &= -1.6 \\ b_3 &= 24.6 \\ c_3 &= -91.6 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores (junto con $a_1 = 0$), obtenemos la función spline cuadrática que interpola la tabla de datos dada:

$$s(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

La gráfica que se muestra a continuación, contiene tanto los puntos iniciales de la tabla de datos, así como la spline cuadrática. Esta gráfica se generó usando *Mathematica*:



El siguiente caso, que es el más importante en las aplicaciones, sigue exactamente los mismos pasos del ejemplo que acabamos de resolver, solamente que en vez de trabajar con polinomios cuadráticos, lo hace con polinomios cúbicos.

4.5.3. Funciones splines cúbicas

Para hacer más firme el entendimiento, escribimos la definición correspondiente a este caso ($k = 3$).

Dados los $n + 1$ datos:

x	x_0	x_1	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	\cdots	y_n

una spline cúbica que interpola estos datos, es una función $s(x)$ definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde cada $s_i(x)$ es un polinomio cúbico; $s_i(x_i) = y_i$ para toda $i = 0, 1, \dots, n$ y tal que $s(x)$ tiene primera y segunda derivadas continuas en $[x_0, x_n]$.

Ejemplo 1 Interolar los siguientes datos mediante una spline cúbica:

x	2	3	5
y	-1	2	-7

Solución. Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}.$$

A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} s(2) = -1 &\implies 0a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1 \\ s(3) = 2 &\implies 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2 \\ s(5) = -7 &\implies 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la primera derivada de $s(x)$:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases};$$

al igual que en el caso de las splines cuadráticas, se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso $x = 3$. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos $x = 3$ en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2$$

o, lo que es lo mismo:

$$27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2.$$

Análogamente procedemos con la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases};$$

para lograr que $s''(x)$ sea continua:

$$6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2$$

$$\therefore 18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2.$$

En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas; por lo tanto, tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$s''(x_0) = 0$$

$$s''(x_n) = 0,$$

de lo cual vamos a obtener:

$$s''(2) = 0 \implies 6a_1(2) + 2b_1 = 0$$

$$\therefore 12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$s''(5) = 0 \implies 6a_2(5) + 2b_2 = 0$$

$$\therefore 30a_2 + 2b_2 = 0,$$

con lo cual hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 &= -1 \\
 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 &= 2 \\
 27a_2 + 9b_2 + 3x_2 + d_2 &= 2 \\
 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 &= -7 \\
 27a_1 + 6b_1 + c_1 &= 27a_2 + 7b_2 + c_2 \\
 18a_1 + 2b_1 &= 18a_2 + 2b_2 \\
 12a_1 + 2b_1 &= 0 \\
 30a_2 + 2b_2 &= 0
 \end{aligned}$$

cuya forma matricial es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

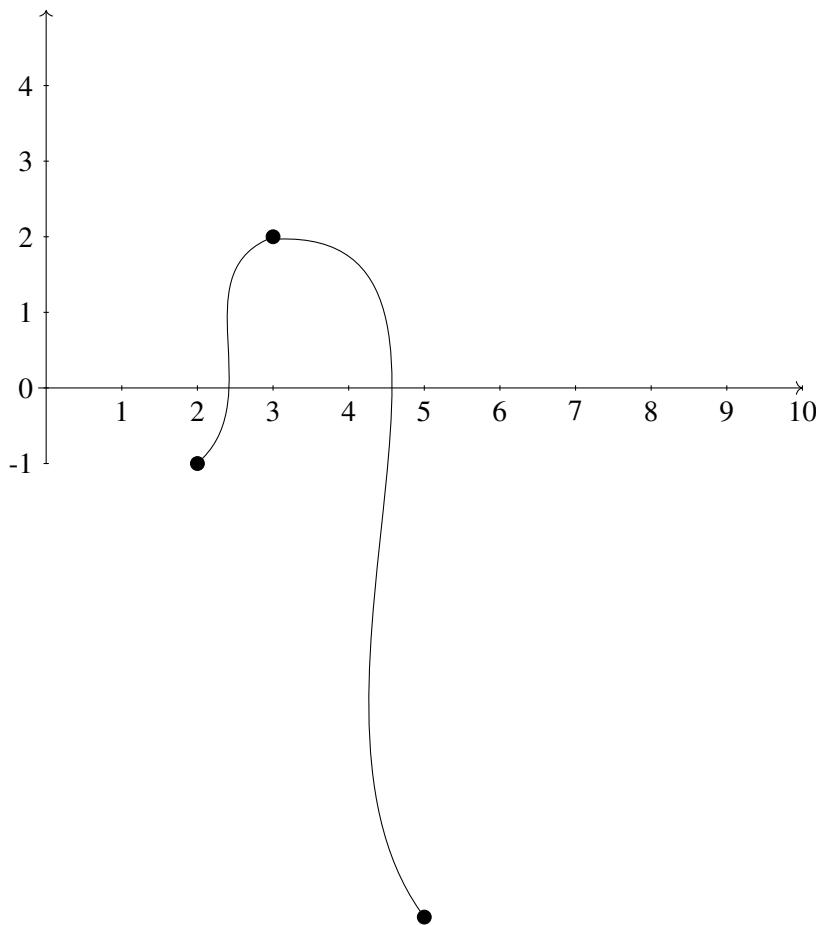
Usando *Mathematica*, obtenemos la siguiente solución:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -1.25 \\
 b_1 &= 7.5 \\
 c_1 &= -10.75 \\
 d_1 &= 0.5 \\
 a_2 &= 0.625 \\
 b_2 &= -9.375 \\
 c_2 &= 39.875 \\
 d_2 &= -50.125
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la spline cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.25 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$$

Mostramos la gráfica correspondiente a este ejercicio, creada también en *Mathematica*:



Observe la finura con la que se unen los polinomios cúbicos que conforman la spline. ¡Prácticamente ni se nota que se trata de dos polinomios diferentes! Esto es debido a las condiciones que se impusieron sobre las derivadas de la función. Esta finura casi artística, es la que permite aplicar las splines cúbicas para cuestiones como el diseño de letras por computadora, o bien, a problemas de aplicación donde la interpolación que se necesita es de un carácter bastante delicado, como podría tratarse de datos médicos sobre algún tipo de enfermedad.

Ejemplo 2 Interolar los siguientes datos utilizando splines cúbicas:

x	-1	1	2	4
y	-1	1	5	-2

Solución. Nuevamente, definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x \in [1, 2] \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases};$$

después, hacemos que la spline pase por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$s(-1) = -1$ implica que:

$$-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1,$$

$s(1) = 1$ implica que:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= 1, \end{aligned}$$

$s(2) = 5$ implica que:

$$\begin{aligned} 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 &= 5 \\ 8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 &= 5, \end{aligned}$$

y, finalmente, $s(4) = -2$ implica que:

$$64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 = -2.$$

Enseguida, calculamos la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 3a_3x^2 + 2b_3x + c_3 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases};$$

vemos, entonces, que las posibles discontinuidades de $s'(x)$ son $x = 1$ y $x = 2$. Por lo tanto, para hacer que $s'(x)$ sea continua, igualamos las ecuaciones correspondientes en ambos valores:

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2b_1 + c_1 &= 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\ 12a_2 + 4b_2 + c_2 &= 12a_3 + 4b_3 + c_3. \end{aligned}$$

Ahora procedemos a calcular la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 6a_3x + 2b_3 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases};$$

nuevamente, las posibles discontinuidades son $x = 1$ y $x = 2$. Por lo tanto, para que $s''(x)$ sea continua, se igualan las ecuaciones en ambos valores:

$$6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2 \rightarrow 3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2$$

$$12a_2 + 2b_2 = 12a_3 + 2b_3 \rightarrow 6a_2 + b_2 = 6a_3 + b_3.$$

Finalmente, se agregan las condiciones en las que la doble derivada se anule en los puntos inicial y final de la tabla. En este caso:

$$s''(-1) = 1 \rightarrow -6a_1 + 2b_1 = 0 \rightarrow -3a_1 + b_1 = 0$$

$$s''(4) = 0 \rightarrow 24a_3 + 2b_3 = 0 \rightarrow 12a_3 + b_3 = 0.$$

Con esto tenemos un juego de 12 ecuaciones vs. 12 incógnitas:

$$\begin{aligned} -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 &= -1 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= 1 \\ 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 &= 5 \\ 8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 &= 5 \\ 64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 &= -2 \\ 3a_1 + 2b_1 + c_1 &= 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\ 12a_2 + 4b_2 + c_2 &= 12a_3 + 4b_3 + c_3 \\ 3a_1 + b_1 &= 3a_2 + b_2 \\ 6a_2 + b_2 &= 6a_3 + b_3 \\ -3a_1 + b_1 &= 0 \\ 12a_3 + b_3 &= 0 \end{aligned};$$

este sistema tiene la siguiente forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 1 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

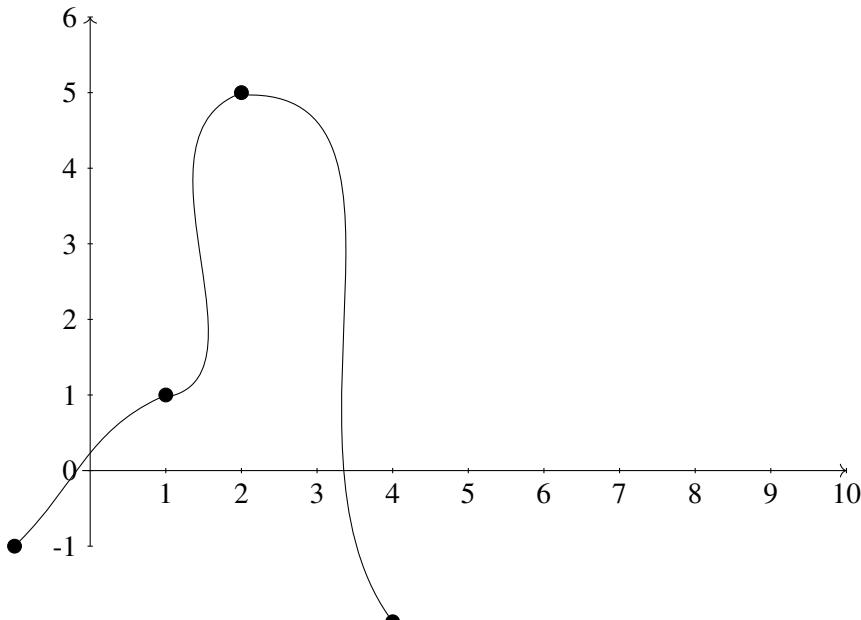
Usando *Mathematica*, obtenemos la solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{51}{140}, & a_2 &= -\frac{21}{10}, & a_3 &= \frac{24}{35} \\ b_1 &= \frac{153}{140}, & b_2 &= \frac{297}{35}, & b_3 &= -\frac{288}{35} \\ c_1 &= \frac{89}{140}, & c_2 &= -\frac{473}{70}, & c_3 &= \frac{1867}{70} \\ d_1 &= -\frac{153}{40}, & d_2 &= \frac{48}{35}, & d_3 &= -\frac{732}{35} \end{aligned} ;$$

por lo tanto, la spline cúbica es:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{51}{140}x^3 + \frac{153}{140}x^2 + \frac{89}{140}x - \frac{153}{40} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ -\frac{21}{10}x^3 + \frac{297}{35}x^2 - \frac{473}{70}x + \frac{48}{35} & \text{si } x \in [1, 2] \\ \frac{24}{35}x^3 - \frac{288}{35}x^2 + \frac{1867}{70}x - \frac{732}{35} & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases}$$

Finalmente, mostramos la gráfica correspondiente (creada en *Mathematica*):



4.6. Ejercicios

Nota: Cuando sea necesario, redondear a cinco decimales.

EJERCICIO 4.19. Calcula el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos:

(a)	x	2	-2	1	4
	y	0.5	-3	2.4	7.8
(b)	x	0.3	0.6	0.9	1.2
	y	-3	0	-6	9
					-12

EJERCICIO 4.20. Calcula el polinomio de Lagrange para los siguientes datos:

(a)	x	1	-2	3	5
	y	1.56	3.54	-2.57	-8
(b)	x	-1.5	-0.5	1	-2
	y	9	-2	5	33
					0

EJERCICIO 4.21. Calcula las splines cúbicas para los siguientes datos:

(a)	x	-2	1	3	
	y	40	-5	-20	
(b)	x	-5	-2	3	7
	y	20	4	-6	40

CAPÍTULO

5

Integración numérica

En los cursos de Cálculo Integral, nos enseñan cómo calcular una integral definida de una función continua mediante una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 5.1. *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El problema en la práctica, se presenta cuando nos vemos imposibilitados para encontrar la antiderivada requerida, aun para integrales aparentemente sencillas como:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx,$$

la cual simplemente es imposible de resolver con el Teorema Fundamental del Cálculo.

En este capítulo estudiaremos diversos métodos numéricos que nos permitirán obtener aproximaciones bastante exactas a integrales, como la mencionada anteriormente. Esencialmente, veremos dos tipos de integración numérica: las fórmulas de Newton-Cotes y el algoritmo de Romberg.

Las fórmulas de Newton-Cotes están conformadas por las bien conocidas reglas del trapecio y de Simpson (reglas de un tercio y de tres octavos). El algoritmo de Romberg forma parte de un método conocido como método de extrapolación de Richardson.

Haciendo uso de algunos programas computacionales (por ejemplo, en *Mathematica*), es posible discernir sobre las cualidades y defectos de cada uno de los métodos mencionados arriba.

5.1. Fórmulas de integración de Newton-Cotes

Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx,$$

donde $f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es un polinomio de interpolación de grado n para ciertos datos de $f(x)$ que se escogen apropiadamente.

Es importante observar que estas fórmulas se pueden aplicar inclusive a una tabla de datos, ya que lo que se usa es un polinomio de interpolación, el cual puede ser calculado con la tabla.

Dentro de las fórmulas de Newton-Cotes existen las formas *cerradas* y *abiertas*. En las formas cerradas, se conocen los valores de $f(a)$ y $f(b)$; en caso contrario, se llaman formas abiertas.

Nosotros nos remitiremos a estudiar únicamente las formas cerradas y, por lo tanto, siempre suponemos que conocemos los valores de $f(a)$ y $f(b)$.

5.1.1. Regla del trapecio

Corresponde al caso donde $n = 1$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx,$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de interpolación (obviamente de grado 1) para los datos

x	a	b
y	$f(a)$	$f(b)$

del capítulo anterior; sabemos que este polinomio de interpolación es:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

integrando este polinomio, tenemos que:

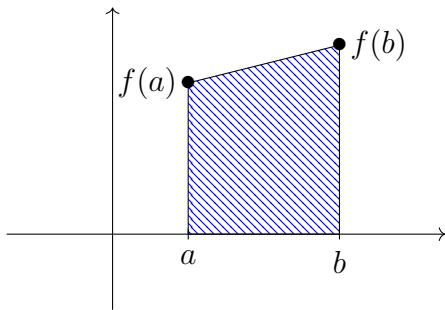
$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx &= f(a)x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right] \Big|_a^b \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left[\frac{(b-a)^2}{2} \right] \\ &= f(a)(b-a) + (f(b) - f(a)) \left(\frac{b-a}{2} \right) \\ &= (b-a) \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2} \right] \\ &= (b-a) \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} \right] \end{aligned}$$

;

por lo tanto, tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right],$$

que es la conocida *regla del trapecio*. Este nombre se debe a la interpretación geométrica que le podemos dar a la fórmula. El polinomio de interpolación para una tabla que contiene dos datos, es una línea recta. La integral corresponde al área bajo la línea recta en el intervalo $[a, b]$, que es precisamente el área del trapecio que se forma:



Ejemplo 1 Utilizar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Solución. Usamos la fórmula directamente con los siguientes datos: $a = 0$, $b = 1$ y $f(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1 - 0) \left[\frac{f(0) + f(1)}{2} \right] = \frac{1 + e}{2} = 1.85914.$$

Ejemplo (2) Usar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx.$$

Solución. Igual que en el ejemplo anterior, sustituimos los datos de manera directa en la fórmula del trapecio. En este caso, tenemos los datos: $a = 2$, $b = 4$ y $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \approx (4 - 2) \left[\frac{f(2) + f(4)}{2} \right] = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} = 17.3441.$$

La regla del trapecio se puede ampliar si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \frac{b-a}{n}$.

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la partición que se forma al hacer dicha subdivisión. Usando propiedades de la integral tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx.$$

Aplicando la regla del trapecio en cada una de las integrales, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (x_1 - x_0) \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right] + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \left[\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right];$$

ahora bien, ya que todos los subintervalos tienen la misma longitud h , tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)];$$

sustituyendo el valor de h y usando la notación sigma, tenemos finalmente:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \left[\frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \right].$$

Esta es la regla del trapecio para n subintervalos. Obviamente, esperamos que entre más subintervalos usemos, mejor sea la aproximación a la integral.

Ejemplo (3) Aplicar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

si subdividimos en 5 intervalos.

Solución. En este caso, identificamos $n = 5$, y la partición generada es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}.$$

Así, aplicando la fórmula tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx (1 - 0) \left[\frac{f(0) + 2(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) + f(1)}{2(5)} \right] \\ &= 1 \left[\frac{1 + 2(e^{(0.2)^2} + e^{(0.4)^2} + e^{(0.6)^2} + e^{(0.8)^2}) + e}{10} \right] \\ &= 1.48065 \end{aligned} ;$$

cabe mencionar que el valor verdadero de esta integral es $1.4626 \dots$

Así, vemos que con 5 intervalos, la aproximación no es tan mala. Para hacer cálculos con más subintervalos, es conveniente elaborar un programa que aplique la fórmula con el número de subintervalos que uno desee. El lector debería hacer su propio programa y checar con 50, 500, 1000, 10,000 y 20000 subintervalos, para observar el comportamiento de la aproximación.

5.2. Regla de Simpson de un tercio

Suponemos que tenemos los datos:

$$\frac{a}{f(a)} \mid \frac{x_m}{f(x_m)} \mid \frac{b}{f(b)},$$

donde x_m es el punto medio entre a y b .

En este caso, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx,$$

donde $f_2(x)$ es el polinomio de interpolación para los datos en la tabla anterior. Usaremos el polinomio de Lagrange.

Así, tenemos que:

$$f_2(x) = f(a) \frac{(x - x_m)(x - b)}{(a - x_m)(a - b)} + f(x_m) \frac{(x - a)(x - b)}{(x_m - a)(x_m - b)} + f(b) \frac{(x - a)(x - x_m)}{(b - a)(b - x_m)}.$$

Si denotamos $h = \frac{b-a}{2} = x_m - a = b - x_m$, entonces:

$$f_2(x) = f(a) \frac{(x - x_m)(x - b)}{(-h)(-2h)} + f(x_m) \frac{(x - a)(x - b)}{(h)(-h)} + f(b) \frac{(x - a)(x - x_m)}{(2h)(h)};$$

simplificando términos:

$$f_2(x) = \frac{f(a)}{2h^2}(x - x_m)(x - b) - \frac{f(x_m)}{h^2}(x - a)(x - b) + \frac{f(b)}{2h^2}(x - a)(x - x_m);$$

vemos que cada uno de los términos anteriores, es esencialmente de la misma forma, es decir, una constante por $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Así, calculamos la siguiente integral por partes:

$$\int (x - \alpha)(x - \beta)dx;$$

sea: $du = dx$, $u = x - \alpha$, $dv = (x - \beta)dx$ y $v = \int (x - \beta)dx = \frac{(x - \beta)^2}{2}$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int (x - \alpha)(x - \beta)dx &= (x - \alpha) \frac{(x - \beta)^2}{2} - \int \frac{(x - \beta)^2}{2} dx \\ &= (x - \alpha) \frac{(x - \beta)^2}{2} - \frac{(x - \beta)^3}{6}. \end{aligned}$$

Usamos esta fórmula para calcular la integral de cada uno de los tres términos de $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_2(x) dx &= \frac{f(a)}{2h^2} \int_a^b (x - x_m)(x - b) dx - \frac{f(x_m)}{h^2} \int_a^b (x - a)(x - b) dx \\ &\quad + \frac{f(b)}{2h^2} \int_a^b (x - a)(x - x_n) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b (x - x_m)(x - b) dx = (x - x_m) \frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_a^b \\
&= -(a - x_m) \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6} = -(-h) \frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{6} \\
&= 2h^3 - \frac{4}{3}h^3 \\
&= \frac{2}{3}h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_a^b (x - a)(x - b) dx = (x - a) \frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_a^b \\
&= \frac{(a-b)^3}{b} = \frac{(-2h)^3}{6} = -\frac{4}{3}h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^b (x - a)(x - x_m) dx = (x - a) \frac{(x-x_m)^2}{2} - \frac{(x-x_m)^3}{6} \Big|_a^b \\
&= (b - a) \frac{(b-x_m)^2}{2} - \frac{(b-x_m)^3}{6} + \frac{(a-x_m)^3}{6} \\
&= (2h) \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{(-h)^3}{6} = h^3 - \frac{h^3}{3} = \frac{2h^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_a^b f_2(x) dx &= \frac{f(a)}{2h^2} \left(\frac{2}{3}h^3 \right) - \frac{f(x_m)}{h^2} \left(-\frac{4}{3}h^3 \right) + \frac{f(b)}{2h^2} \left(\frac{2}{3}h^3 \right) \\
&= f(a) \frac{h}{3} + f(x_m) \frac{4}{3}h + f(b) \frac{h}{3} \\
&= \frac{h}{3}[f(a) + 4f(x_m) + f(b)]
\end{aligned}
;$$

debido al factor $\frac{1}{3}h$, se le conoce como la *regla de Simpson de un tercio*.

En la práctica, sustituimos el valor de $h = \frac{b-a}{2}$ para obtener nuestra fórmula final:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + 4f(x_m) + f(b)}{6} \right].$$

Ejemplo 1 Usar la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ para aproximar la siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Solución. Aplicamos la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= 1 \\
x_m &= 0.5 \\
f(x) &= e^{x^2}
\end{aligned}
;$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0) \left[\frac{f(0) + 4f(0.5) + f(1)}{6} \right] = \frac{1 + 4e^{(0.5)^2} + e}{6} = 1.4757.$$

Ejemplo 2 Usar la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ para aproximar la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx.$$

Solución. Igual que con el ejercicio anterior, sustituimos datos adecuadamente:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \approx (4 - 2) \left[\frac{f(2) + 4f(3) + f(4)}{6} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{e^2}{2} + 4 \cdot \frac{e^3}{3} + \frac{e^4}{4} \right] = 14.7082.$$

Al igual que con la regla del trapecio, podemos extender la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$, si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $h = \frac{b-a}{n}$.

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la partición que se forma al hacer la subdivisión, y denotemos por $x_{M_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ el punto medio en cada subintervalo.

Aplicamos, primero, propiedades básicas de la integral definida:

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx;$$

ahora, aplicamos la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ en cada una de las integrales de arriba:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx (x_1 - x_0) \left[\frac{f(x_0) + 4f(x_{M_1}) + f(x_1)}{6} \right] + \dots \\ &\quad + (x_n - x_{n-1}) \left[\frac{f(x_{n-1}) + 4f(x_{M_n}) + f(x_n)}{6} \right]. \end{aligned}$$

Sustituimos $h = \frac{b-a}{n}$ y usamos la notación sigma:

$$\therefore \int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \left[\frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{M_i}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{6n} \right].$$

Ejemplo 3 Aproximar la siguiente integral, aplicando la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y subdividiendo en 5 intervalos:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Solución. En este caso, tenemos que $n = 5$, y la partición que se genera es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\};$$

además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\};$$

por lo tanto, sustituimos los datos en la fórmula para obtener:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx (1 - 0) \left[\frac{f(0) + 4[f(0.1) + f(0.3) + \dots + f(0.9)] + 2[f(0.2) + f(0.4) + \dots + f(0.8)] + f(1)}{6(5)} \right] \\ &= \frac{1}{30} [1 + 4 [e^{(0.1)^2} + e^{(0.3)^2} + \dots + e^{(0.9)^2}] \\ &\quad + 2 [e^{(0.2)^2} + e^{(0.4)^2} + \dots + e^{(0.8)^2}] + e] \\ &= 1.4626 \end{aligned}$$

¡Nótese que esta aproximación ya es exacta hasta el cuarto decimal!

Ejemplo 4 Aproximar la siguiente integral, utilizando la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y subdividiendo en 4 intervalos:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx.$$

Solución. En este caso, tenemos que $n = 4$, y la partición que se genera es:

$$P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\};$$

además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{2.25, 2.75, 3.25, 3.75\};$$

sustituyendo todos estos datos en la fórmula, obtenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{e^x}{x} dx &\approx (4 - 2) \left[\frac{f(2) + 4[f(2.25) + \dots + f(3.75)] + 2[f(2.5) + f(3) + f(3.5)] + f(4)}{6(4)} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{e^2}{2} + 4 \left[\frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^{2.75}}{2.75} + \frac{e^{3.25}}{3.25} + \frac{e^{3.75}}{3.75} \right] + 2 \left[\frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^{3.5}}{3.5} \right] + \frac{e^4}{4} \right] \\ &= 14.6767 \end{aligned}$$

5.3. Regla de Simpson de tres octavos

En este caso corresponde a $n = 3$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx,$$

donde $f_3(x)$ es un polinomio de interpolación para los siguientes datos:

x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

y donde $a = x_0$, $b = x_3$ y x_1, x_2 son los puntos que dividen en tres partes iguales al intervalo $[a, b]$.

Igual que en el caso anterior, se usa el polinomio de interpolación de Lagrange, y empleando el método de integración por partes, se llega a la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)],$$

donde $h = \frac{(b-a)}{3}$. Debido al factor $\frac{3}{8}h$, es que se le dio el nombre de *regla de Simpson de $\frac{3}{8}$* . En la práctica, se sustituye el valor de h para obtener:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8} \right].$$

Ejemplo 1 Aproximar la siguiente integral, usando la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$:

$$\int_1^4 e^x \ln(x)dx.$$

Solución. En este caso, tenemos los siguientes datos:

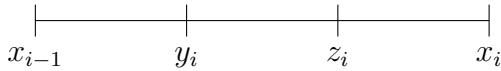
$$\begin{array}{ll} x_0 = & 1 \\ x_1 = & 2 \\ x_2 = & 3 \\ x_3 = & 4 \\ f(x) = e^x \ln(x) & , \end{array}$$

los cuales sustituimos en la fórmula, para obtener:

$$\begin{aligned}\int_1^4 e^x \ln(x) dx &\approx (4 - 1) \left[\frac{f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4)}{8} \right] \\ &= \frac{3}{8} [e \ln(1) + 3e^2 \ln(2) + 3e^3 \ln(3) + e^4 \ln(4)] \\ &= 58.9698\end{aligned}$$

Al igual que en los dos casos anteriores, la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$, se puede extender si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos de la misma longitud $h = \frac{b-a}{n}$.

Sea x_0, x_1, \dots, x_n la partición determinada de esta forma. Cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ lo dividimos en tres partes iguales, y sean y_i y z_i los puntos determinados; así:



Aplicando la regla de $\frac{3}{8}$ en cada uno de los intervalos, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx h \left[\frac{f(x_0) + 3f(y_1) + 3f(z_1) + f(x_1)}{8} \right] + h \left[\frac{f(x_1) + 3f(y_2) + 3f(z_1) + f(x_2)}{8} \right] \\ &\quad + \cdots + h \left[\frac{f(x_{n-1}) + 3f(y_n) + 3f(z_n) + f(x_n)}{8} \right] \\ &= \frac{h}{8} \left[f(x_0) + 3 \left(\sum_{i=1}^n [f(y_i) + f(z_i)] \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \\ &= \frac{b-a}{8n} \left[f(x_0) + 3 \left(\sum_{i=1}^n [f(y_i) + f(z_i)] \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right],\end{aligned}$$

esta última es la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ para n subintervalos, todos de la misma longitud.

Ejemplo (2) Aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^4 e^x \ln(x) dx$$

aplicando la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ y subdividiendo en 3 intervalos.

Solución. Identificamos $n = 3$ y la partición correspondiente:

$$P = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Al considerar los puntos que dividen en tres partes iguales a cada subintervalo, tenemos los siguientes datos:

$$1 < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{7}{3} < \frac{8}{3} < 3 < \frac{10}{3} < \frac{11}{3} < 4;$$

sustituyendo todos los datos en la fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^x \ln(x) dx &\approx \frac{4-1}{8(3)} \left[f(1) + 3 \left[f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{11}{3}\right) \right] + 2 [f(2) + f(3)] + f(4) \right] \\ &= 57.96878 \end{aligned}$$

De acuerdo con los ejemplos vistos, resulta evidente que la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ es más exacta que la de $\frac{1}{3}$ y, a su vez, esta es más exacta que la regla del trapecio. En realidad, pueden establecerse cotas para los errores que se cometan en cada uno de estos métodos.

Puesto que no es nuestra intención justificar formalmente cada uno de los teoremas, los siguientes resultados se mencionan para completar la información, pero se omiten las demostraciones correspondientes:

Regla	Fórmula	Error	Donde
Trapecio	$(b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$	$-\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$	$h = b - a$ $\xi \in [a, b]$
Simpson $\frac{1}{3}$	$(b-a) \left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \right]$	$-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$	$h = \frac{b-a}{2}$ $\xi \in [x_0, x_2]$
Simpson $\frac{3}{8}$	$(b-a) \left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8} \right]$	$-\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$	$h = \frac{b-a}{3}$ $\xi \in [x_0, x_3]$

5.4. Integración en intervalos desiguales

Cuando la longitud de los subintervalos no es igual, se usa una combinación de la regla trapezoidal y las reglas de Simpson, procurando seguir el siguiente orden jerárquico:

1. Simpson $\frac{3}{8}$.

Esta se aplica si contamos con 4 puntos igualmente espaciados.

2. Simpson $\frac{1}{3}$.

Esta se aplica si falla (1) y contamos con 3 puntos igualmente espaciados.

3. Regla trapezoidal.

Solo se aplica si no se cumplen (1) y (2).

Ejemplo 1 Evaluar $\int_0^{1.2} f(x)dx$, usando la siguiente tabla:

x	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.95	1.2
$f(x)$	0	6.84	4	4.2	5.51	5.77	1

Solución. Vemos que en el intervalo $[0, 0.1]$ podemos aplicar la regla del trapecio, en el intervalo $[0.1, 0.7]$ la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ y en el intervalo $[0.7, 1.2]$ la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$. Así, tenemos las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{0.1} f(x)dx = \frac{0.1 - 0}{2}[f(0) + f(0.1)] = 0.842$$

$$I_2 = \int_{0.1}^{0.7} f(x)dx = \frac{0.7 - 0.1}{8}[f(0.1) + 3f(0.3) + 3f(0.5) + f(0.7)] = 2.7712$$

$$I_3 = \int_{0.7}^{1.2} f(x)dx = \frac{1.2 - 0.7}{6}[f(0.7) + 4f(0.95) + f(1.2)] = 2.4658.$$

Finalmente, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_0^{1.2} f(x)dx = 0.842 + 2.7712 + 2.4658 = 6.079.$$

Ejemplo 2 Calcular la integral $\int_{-1}^{3.25} f(x)dx$, usando la siguiente tabla de datos:

x	-1	-0.5	0	1	1.75	2.5	3.25
$f(x)$	2	-3	1.5	-1	0.5	0.75	-2

Solución. En este caso, vemos que podemos aplicar la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ en el intervalo $[-1, 0]$, la regla del trapecio en el intervalo $[0.1]$ y la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ en el intervalo $[1, 3.25]$. Así, tenemos las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{0-(-1)}{6}[f(-1) + 4f(-0.5) + f(0)] = -1.41667 \\ I_2 &= \int_0^1 f(x)dx = \frac{1-0}{2}[f(0) + f(1)] = 0.25 \\ I_3 &= \int_1^{3.25} f(x)dx = \frac{3.25-1}{8}[f(1) + 3f(1.75) + 3f(2.5) + f(3.25)] = 0.210938 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_{-1}^{3.25} f(x)dx = -1.41667 + 0.25 + 0.210938 = -0.955729.$$

Vale la pena comentar que no siempre tiene que suceder que se apliquen exactamente las tres reglas. En realidad, esto depende de cómo se encuentran espaciados los intervalos en la tabla de datos.

5.5. Método de integración de Romberg

Sea $I(h)$ el valor de la integral que aproxima a $I = \int_a^b f(x)dx$, mediante una partición de subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ y usando la regla del trapecio. Entonces,

$$I = I(h) + E(h),$$

donde $E(h)$ es el error de truncamiento que se comete al aplicar la regla.

El *método de extrapolación de Richardson* combina dos aproximaciones de integración numérica, para obtener un tercer valor más exacto.

El algoritmo más eficiente dentro de este método, se llama *integración de Romberg*, el cual es una fórmula recursiva.

Supongamos que tenemos dos aproximaciones: $I(h_1)$ e $I(h_2)$;

$$\therefore \left. \begin{array}{l} I = I(h_1) + E(h_1) \\ I = I(h_2) + E(h_2) \end{array} \right\} \implies I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2).$$

Se puede demostrar que el error que se comete con la regla del trapecio para n subintervalos está dado por las siguientes fórmulas:

$$E(h_1) \approx -\frac{(b-a)}{12} h_1^2 \bar{f}^n$$

$$E(h_2) \approx -\frac{(b-a)}{12} h_2^2 \bar{f^n},$$

donde $\bar{f^n}$ es un promedio de la doble derivada entre ciertos valores que pertenecen a cada uno de los subintervalos.

Ahora bien, si suponemos que el valor de f^n es constante, entonces:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{\frac{-(b-a)}{12} h_1^2 \bar{f^n}}{\frac{-(b-a)}{12} h_2^2 \bar{f^n}} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore E(h_1) \approx E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

sustituyendo esto último en nuestra primera igualdad, tenemos que:

$$I(h_1) + E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \approx I(h_2) + E(h_2);$$

$$\begin{aligned} I(h_1) - I(h_2) &\approx E(h_2) - E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \\ \therefore &= E(h_2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right] \end{aligned};$$

de aquí podemos despejar $E(h_2)$:

$$E(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{I - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2}.$$

En el caso especial cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$ (que es el algoritmo de Romberg), tenemos:

$$I \approx I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - 2^2};$$

$$\therefore I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{I(h_1)}{3}.$$

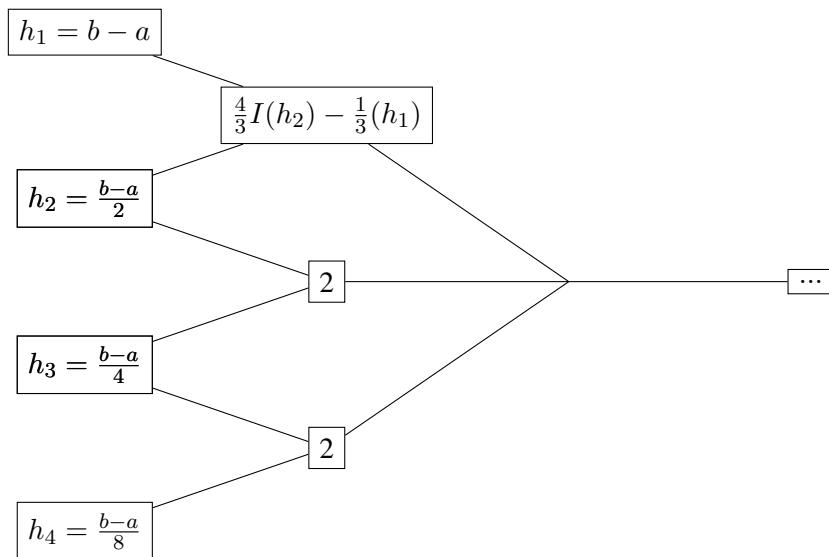
Esta fórmula es solo una parte del algoritmo de Romberg. Para entender el método, es conveniente pensar que se trabaja en niveles de aproximación. En un primer nivel, es cuando aplicamos la regla del trapecio, y para poder usar la fórmula anterior, debemos de duplicar cada vez el número de subintervalos: así, podemos comenzar con un subintervalo, luego con dos, cuatro, ocho, etcétera, hasta donde se deseé.

Posteriormente, pasamos al segundo nivel de aproximación, que es donde se usa la fórmula anterior, tomando las parejas contiguas de aproximación del nivel anterior

y que corresponden cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$. Después pasamos al nivel tres de aproximación, pero aquí cambia la fórmula de Romberg, y así sucesivamente hasta el último nivel, que se alcanza cuando solo contamos con una pareja del nivel anterior.

Desde luego, el número de niveles de aproximación que se alcanzan, depende de las aproximaciones que se hicieron en el nivel 1. En general, si en el primer nivel iniciamos con n aproximaciones, entonces alcanzaremos a llegar hasta el nivel de aproximación n .

Hacemos un diagrama para explicar un poco más lo anterior:



Ejemplo 1 Usar el algoritmo de Romberg para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx,$$

usando segmentos de longitud $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Solución. Primero calculamos las integrales de nivel 1, usando la regla del trapecio para las longitudes de segmentos indicadas:

$$(h_1 = 1) \quad \begin{array}{c} \hline | \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$(h_2 = \frac{1}{2}) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \qquad | \qquad | \\ 0 \qquad \frac{1}{2} \qquad 1 \end{array}$$

$$(h_3 = \frac{1}{4}) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \qquad | \qquad | \qquad | \\ 0 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad 1 \end{array}$$

Con estos datos, tenemos:

$$I(h_1) = \frac{1-0}{2} [e^{0^2} + e^{1^2}] = 1.859140914$$

$$I(h_2) = \frac{1-0}{4} \left[e^{0^2} + 2e^{(\frac{1}{2})^2} + e^{1^2} \right] = 1.571583165$$

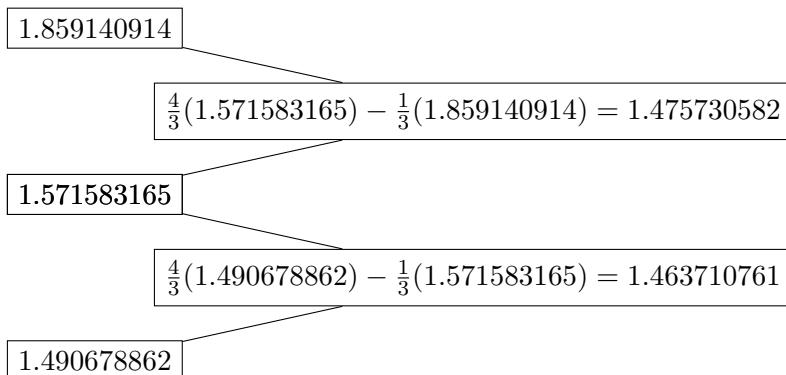
$$I(h_3) = \frac{1-0}{8} \left[e^{0^2} + 2 \left[e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{3}{4})^2} \right] + e^{1^2} \right] = 1.490678862$$

Ahora pasamos al segundo nivel de aproximación donde usaremos la fórmula que se dedujo anteriormente:

$$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

donde $I(h_1)$ es la integral menos exacta (la que utiliza menos subintervalos) e $I(h_2)$ es la más exacta (la que emplea el doble de subintervalos).

En un diagrama vemos lo siguiente:



Para avanzar al siguiente nivel, debemos conocer la fórmula correspondiente. De forma similar a la deducción de la fórmula:

$$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1),$$

se puede ver que la fórmula para el siguiente nivel de aproximación (nivel 3) queda como sigue:

$$\frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l,$$

donde:

* I_m es la integral más exacta,

* I_l es la integral menos exacta.

En el siguiente nivel (nivel 4), se tiene la fórmula:

$$\frac{64}{63}I_m - \frac{1}{63}I_l.$$

En el ejemplo anterior, obtenemos la aproximación en el nivel 3, como sigue:

$$\frac{16}{15}(1.463710761) - \frac{1}{15}(1.475730582) = 1.46290944.$$

Así, podemos concluir que el valor de la aproximación, obtenido con el método de Romberg en el ejemplo 1, es:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.46290944.$$

Ejemplo (2) Usar el algoritmo de Romberg para aproximar la integral:

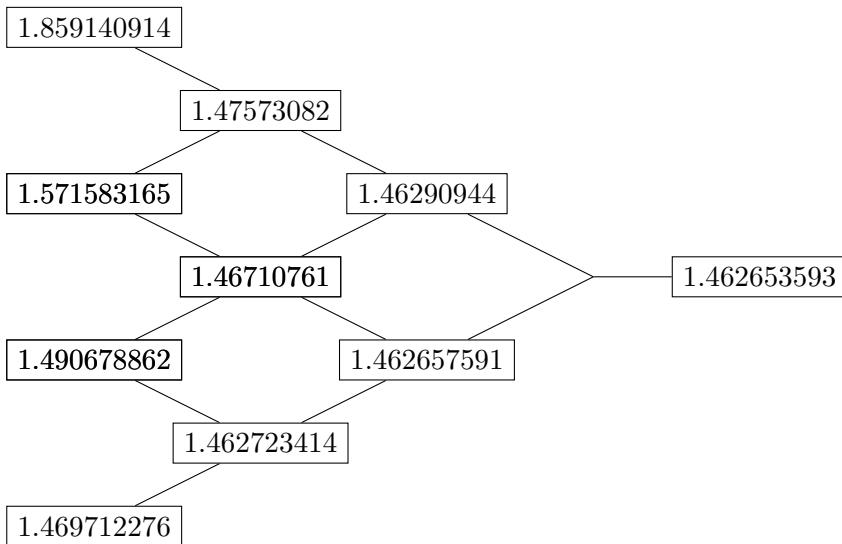
$$\int_0^1 e^{x^2} dx,$$

agregando a la tabla anterior $I(h_4)$, donde $h_4 = \frac{1}{8}$.

Solución. Calculamos $I(h_4)$ con la regla del trapecio:

$$\begin{aligned} I(h_4) &= \frac{1-0}{16} \left[e^{0^2} + 2 \left[e^{(\frac{1}{8})^2} + e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{3}{8})^2} + e^{(\frac{1}{2})^2} + e^{(\frac{5}{8})^2} + e^{((\frac{3}{4})^2)} + e^{(\frac{7}{8})^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{1^2} \right] \\ I(h_4) &= 1.469712276 \end{aligned}$$

Tenemos, entonces, la siguiente tabla:



,

de donde concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.462653593.$$

Ejemplo ③ Aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^2 e^x \ln(x) dx,$$

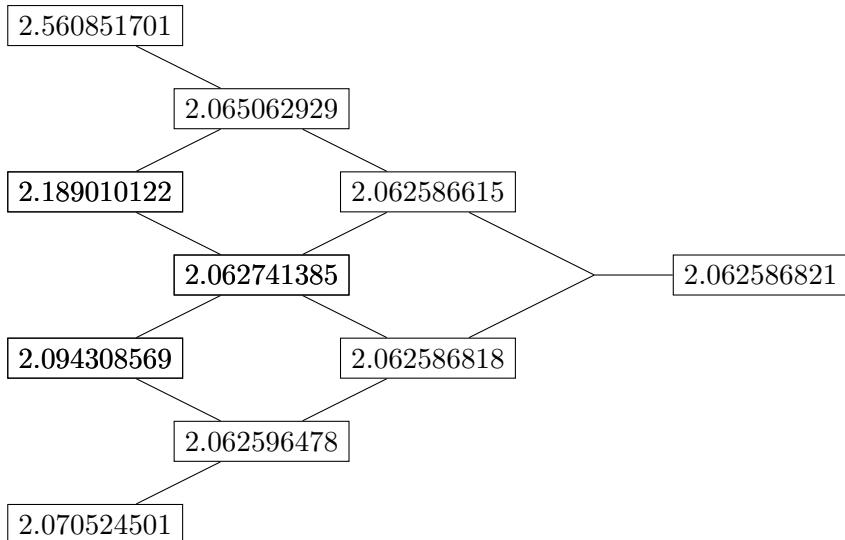
usando el método de Romberg con segmentos de longitud:

$$h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{2}, h_3 = \frac{1}{4}, h_4 = \frac{1}{8}.$$

Solución. Igual que arriba, primero usamos la regla del trapecio (con los valores de h indicados) para llenar el nivel 1. Tenemos, entonces, que:

$$\begin{aligned}
 I(h_1) &= \frac{2-1}{2} [e^1 \ln(1) + e^2 \ln(2)] = 2.560851701 \\
 I(h_2) &= \frac{2-1}{4} [e^2 \ln(1) + 2e^{1.5} \ln(1.5) + e^2 \ln(2)] = 2.189010122 \\
 I(h_3) &= \frac{2-1}{8} \left[e^1 \ln(1) + 2 \left[e^{\frac{5}{4}} \ln\left(\frac{5}{4}\right) + e^{\frac{3}{2}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + e^{\frac{7}{4}} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \right] + e^2 \ln(2) \right] \\
 &= 2.09430857 \\
 I(h_4) &= \frac{2-1}{16} \left[e^1 \ln(1) + 2 \left[e^{\frac{1}{8}} \ln\left(\frac{1}{8}\right) + e^{\frac{2}{8}} \ln\left(\frac{2}{8}\right) + \dots + e^{\frac{7}{8}} \ln\left(\frac{7}{8}\right) \right] + e^2 \ln(2) \right] \\
 &= 2.070524501
 \end{aligned}$$

A continuación, usamos las fórmulas de Romberg para cada nivel y obtenemos la siguiente tabla:



,

de donde concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_1^2 e^x \ln(x) dx \approx 2.062586821.$$

Podemos escribir una fórmula general para calcular las aproximaciones en cada uno de los niveles, como sigue:

5.6. Algoritmo de integración de Romberg

Los coeficientes en cada una de las fórmulas en el método de Romberg, deben sumar 1.

Así se tiene la siguiente fórmula recursiva:

$$I_{j,k} \approx \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1},$$

donde:

* $I_{j+1,k-1}$ es la integral más exacta,

* $I_{j,k-1}$ es la integral menos exacta

y el índice k indica el nivel de integración o de aproximación. Por ejemplo, digamos que $k = 2$, $j = 1$, entonces tenemos:

$$I_{1,2} \approx \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{3},$$

que es nuestra fórmula de nivel 2 de aproximación.

Como todo proceso iterativo, este se detiene cuando se obtiene una aproximación suficientemente buena. En este caso, se pide que:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{I_{j,k} - I_{j,k-1}}{I_{j,k}} \times 100\% \right| < \epsilon_s,$$

donde ϵ_s es la cota suficiente.

Ejemplo 1 Aplicar el algoritmo de integración de Romberg a la integral:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx,$$

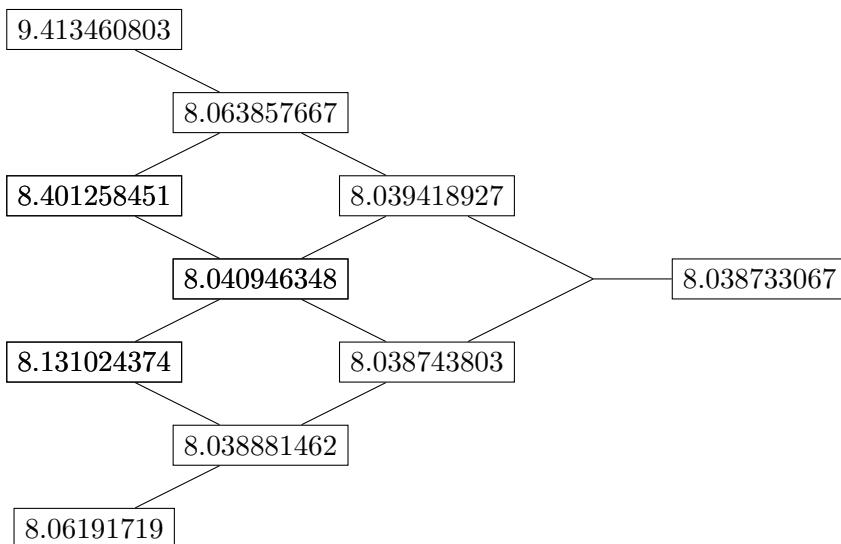
tomando $\epsilon_s = 0.01\%$.

Solución. En este caso no sabemos exactamente cuántas aproximaciones debemos hacer con la regla del trapezio. Así que para comenzar, hacemos cálculos correspondientes a uno, dos, cuatro y ocho subintervalos:

$$\begin{aligned} I(h_1) &= \frac{3-1}{2} \left[\frac{e^1}{1} + \frac{e^3}{3} \right] = 9.413460803 \\ I(h_2) &= \frac{3-1}{4} \left[\frac{e^1}{1} + 2 \left(\frac{e^2}{2} \right) + \frac{e^3}{3} \right] = 8.401258451 \\ I(h_3) &= \frac{3-1}{8} \left[\frac{e^1}{1} + 2 \left(\frac{e^{1.5}}{1.5} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2.5}}{2.5} \right) + \frac{e^3}{3} \right] = 8.131024374 \\ I(h_4) &= \frac{3-1}{16} \left[\frac{e^1}{1} + 2 \left(\frac{e^{1.25}}{1.25} + \frac{e^{1.5}}{1.5} + \frac{e^{1.75}}{1.76} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^{2.5}}{2.5} + \frac{e^{2.75}}{2.75} \right) + \frac{e^3}{3} \right] \\ &= 8.06191719 \end{aligned}$$

Con estos datos, podemos hacer los cálculos hasta el nivel 4. Tenemos la siguiente

tabla:



Haciendo los cálculos de los errores, nos damos cuenta que efectivamente la aproximación se obtiene hasta el nivel 4, donde $|\epsilon_u| = 0.008\%$.

Por lo tanto, concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx = 8.038733067.$$

5.7. Ejercicios

EJERCICIO 5.22. Usar la regla del trapecio para aproximar:

$$\int_0^6 \frac{\cos(x)}{x+1} dx.$$

- (a) Dividiendo en un solo intervalo.
- (b) Dividiendo en 6 intervalos.

EJERCICIO 5.23. Usar la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ para aproximar:

$$\int_0^4 \sqrt[3]{x} e^x dx.$$

- (a) Dividiendo en un solo intervalo.
- (b) Dividiendo en 4 intervalos.

EJERCICIO 5.24. Usar la regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ para aproximar:

$$\int_2^4 (\ln(x))^2 dx.$$

- (a) Dividiendo en un solo intervalo.
- (b) Dividiendo en 4 intervalos.

EJERCICIO 5.25. Integrar las siguientes tablas de datos:

(a)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>-4</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-8</td><td>-3</td><td>1</td><td>2.5</td><td>-5</td><td>-1</td><td>6</td></tr></table>	x	-4	-1	0	1	1.5	2	2.5	$f(x)$	-8	-3	1	2.5	-5	-1	6				
x	-4	-1	0	1	1.5	2	2.5														
$f(x)$	-8	-3	1	2.5	-5	-1	6														
(b)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td><td>3</td><td>4.5</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4.1</td><td>2.5</td><td>0.3</td><td>-0.4</td><td>-1</td><td>-3.6</td><td>0</td><td>2.3</td><td>5.9</td></tr></table>	x	-3	-2	-1	0	0.5	1	1.5	3	4.5	$f(x)$	4.1	2.5	0.3	-0.4	-1	-3.6	0	2.3	5.9
x	-3	-2	-1	0	0.5	1	1.5	3	4.5												
$f(x)$	4.1	2.5	0.3	-0.4	-1	-3.6	0	2.3	5.9												

EJERCICIO 5.26. Usar el algoritmo de integración de Romberg para aproximar:

$$\int_1^6 \ln(x) \ln(x+1) dx.$$

- (a) Usando 1, 2 y 4 subintervalos.
- (b) Agregando al inciso anterior 8 intervalos.

EJERCICIO 5.27. Aproximar la integral del ejercicio anterior, tomando $\epsilon_s = 0.001\%$ como cota suficiente.

CAPÍTULO

6

Ecuaciones diferenciales

En esta unidad, haremos un breve estudio de los métodos numéricos básicos que se usan para aproximar soluciones de algunas ecuaciones diferenciales.

Recordamos rápidamente, que una ecuación diferencial (ordinaria) es aquella que involucra una variable independiente, una variable dependiente y la derivada (o derivadas) de esta última. En una ecuación diferencial, la incógnita es la variable dependiente y se espera encontrarla como función de la variable independiente, de tal forma que si se sustituye dicha variable dependiente, así como las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, la igualdad que resulta es verdadera.

De cursos anteriores de ecuaciones diferenciales, sabemos en general que existen una infinidad de funciones (curvas) que resuelven una misma ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación:

$$y' = y$$

tiene como solución general:

$$y = c \cdot e^x,$$

donde c es una constante arbitraria que puede ser cualquier número real (y de aquí la infinidad de curvas solución que mencionamos arriba).

En este curso, estudiaremos solamente ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$y' = f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ es una función de dos variables.

Cuando se desea que la curva solución pase por algún punto específico, digamos $y(x_0) = y_0$, entonces se dice que se trata de una ecuación diferencial con una condición inicial dada.

Así, estudiaremos ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Obviamente, la importancia de los métodos numéricos radica en la aparición de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse por métodos tradicionales, y de ahí la necesidad de implementar algún método de aproximación.

Veremos tres métodos numéricos:

- El método de Euler.
- El método de Euler mejorado.
- El método de Runge-Kutta de orden 4.

En todos estos métodos, se busca aproximar el valor $y(x_1)$, donde x_1 es un valor cercano a x_0 (el de la condición inicial dada).

Comencemos con el primer método que como siempre, no es el más exacto, pero si el más sencillo y simple de explicar, así como el que marca la pauta para desarrollar los otros métodos.

6.1. Método de Euler

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial

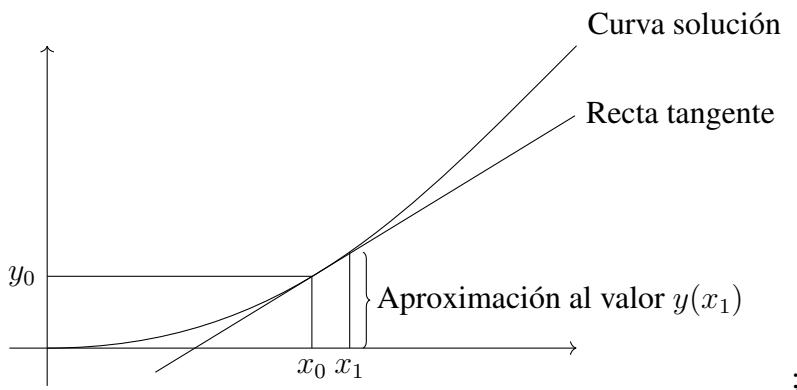
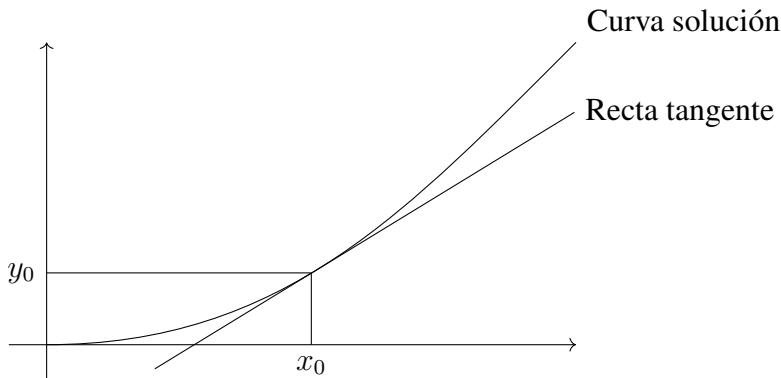
Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.

Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0) . De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0,$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0);$$



por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0.$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0 y, por lo tanto, estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + y_0;$$

de aquí tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima o menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer muchos errores al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir los errores y obtener, de hecho, un método iterativo, es dividir la distancia

$h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener, entonces, la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a n .

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots & x_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} .$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0);$$

para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1) y, por lo tanto, si sustituimos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n),$$

que es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$, aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h .

Ejemplo 1 Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1,$$

aproximar $y(0.5)$.

Nota. Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones:

Solución. Analítica

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c.$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c;$$

por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}.$$

Y, por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403.$$

Solución numérica. Aplicamos el método de Euler y, para ello, observamos que la distancia entre x_0 y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco, obtenemos un valor de $h = 0.1$ y, por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & = 0 \\ y_0 & = 1 \\ h & = 0.1 \\ f(x, y) & = 2xy. \end{array} \right.$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = x_0 + h & = 0.1 \\ y_1 & = y_0 + hf(x_0, y_0) & = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \end{array} \right. ;$$

aplicando nuevamente la fórmula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & = x_1 + h & = 0.2 \\ y_2 & = y_1 + hf(x_1, y_1) & = 1 + 0.1[2(0.1)(1)] = 1.02 \end{array} \right. ;$$

y así sucesivamente hasta obtener y_5 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler, es:

$$y(0.5) \approx 1.2144;$$

puesto que, en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la fórmula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\% \right| = 5.42\%.$$

Ejemplo 2 Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2.$$

Solución. Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h &= 1.1 \\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) &= 2 + 0.1[1^2 + 0.5(2)^2] = 2.3 \end{cases} .$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

de lo cual concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901.$$

6.2. Método de Euler mejorado

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \right];$$

donde:

$$y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

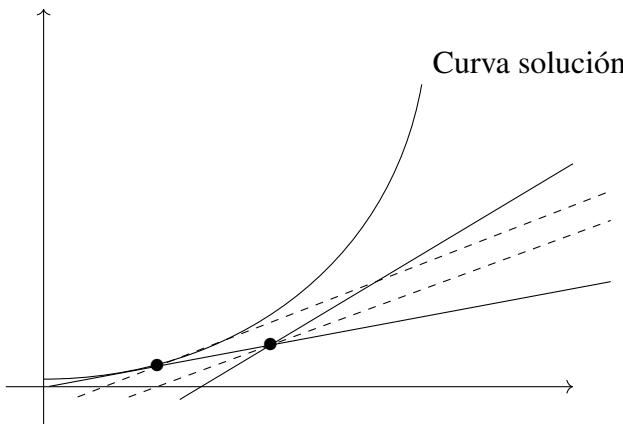
Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación con base en la gráfica de la siguiente página.

En la gráfica, vemos que la pendiente promedio \bar{m} corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la “recta tangente” a la curva en el punto (x_1, y_1) , donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Ejemplo 1 Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar $y(0.5)$, si:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1.$$



Solución. Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n .

Para aclarar el método, veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= 2xy \end{cases}.$$

En nuestra primera iteración, tenemos:

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_1^* &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = y_0 + h \left(\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2} \right) = 1.01.$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el de y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^* . Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$\begin{cases} x_2 &= x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ y_2^* &= y_1 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0302 \end{cases}$$

$$y_2 = y_1 + h \left(\frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)}{2} \right) = 1.040704.$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (Euler 1) y el de y_2^* . El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

concluimos, entonces, que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336.$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.05\%.$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método, veremos cómo se reduce aún más este error, ¡prácticamente a un 0%!

Veamos un segundo ejemplo.

Ejemplo 2 Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar $y(1.3)$, si tenemos:

$$y' = x - y + 5$$

$$y(1) = 2$$

Solución. Tenemos los siguientes datos:

$$h = 0.1$$

$$f(x, y) = x - y + 5$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 2.$$

En una primera iteración, tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2.4 \end{cases};$$

$$\therefore y_1 = 2 + 0.1 \left(\frac{4 + (1.1 - 2.4 + 5)}{2} \right) = 2.385.$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.385
2	1.2	2.742925
3	1.3	3.07635

concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.07635.$$

Finalmente, veamos el tercero y último método que estudiaremos en este curso. Por simplicidad del curso, no veremos la justificación formal de estas últimas fórmulas.

6.3. Método de Runge-Kutta

Sin entrar en mucho detalle, mencionamos solamente que el método de Runge-Kutta cambia la dirección en el sentido de que no sigue la misma línea de los métodos de Euler. De hecho, está basado en una aplicación de los polinomios de Taylor.

Comentamos, sin embargo, que el método de Runge-Kutta sí contiene como casos especiales los de Euler.

Las fórmulas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

donde:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_3 = h \cdot f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

se conocen como reglas o *fórmulas de Runge-Kutta de orden cuatro* para la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Ejemplo 1 Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$, dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1.$$

Solución. Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores. Segundo, procedemos con los mismos datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= 2xy \end{cases}$$

Para poder calcular el valor de y_1 , debemos calcular primero los valores de k_1, k_2, k_3 y k_4 . Tenemos, entonces, que:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = 0 \\ k_2 &= h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.05)(1)] = 0.01 \\ k_3 &= h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.05)(1.005)] = 0.01005 \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201; \end{aligned}$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.01005) + 0.020201] = 1.01005.$$

Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h = 0.2 \\ k_1 &= h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2(0.1)(1.01005)]0.020201 \\ k_2 &= h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.15)(1.02010)] = 0.03060 \\ k_3 &= h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.15)(1.02535)] = 0.03076 \\ k_4 &= h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2(0.2)(1.04081)] = 0.04163; \end{aligned}$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.04081.$$

El proceso debe repetirse hasta obtener y_5 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:

$$y(0.5) \approx 1.28403.$$

Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28403}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.0007\%,$$

con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho, observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación!

Ejemplo 2 Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$, dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= x + y \\ y(2) &= 4. \end{aligned}$$

Solución. Igual que siempre, tomamos $h = 0.1$ y llegaremos a la aproximación en dos pasos.

Con esta aclaración, tenemos los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \\ h = 0.1 \\ f(x, y) = x + y \end{array} \right. ;$$

Primera iteración:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = 2.1 \\ k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = 0.1[2 + 4] = 0.6 \\ k_2 &= h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.05 + 4.3] = 0.635 \\ k_3 &= h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.05 + 4.3175] = 0.63675 \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2.1 + 4.63675] = 0.673675; \end{aligned}$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2K - 3 + k_4] = 4.6362.$$

Segunda iteración:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + h = 2.2 \\k_1 &= h \cdot f(x_1, y_0) = 0.1[2.1 + 4.6362] = 0.67362 \\k_2 &= h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.15 + 4.97301] = 0.7123 \\k_3 &= h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.15 + 4.99235] = 0.71424 \\k_4 &= h \cdot f(x_1 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2.2 + 5.35044] = 0.75504;\end{aligned}$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 5.34982.$$

Concluimos, entonces, que el valor buscado es:

$$y(2.2) \approx 5.34982.$$

6.4. Ejercicios

EJERCICIO 6.28. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y(2) = 0.5,$$

usa el método de Euler para aproximar $y(2.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

EJERCICIO 6.29. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = \ln(x + y)$$

$$y(1) = 1.5,$$

usa el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

EJERCICIO 6.30. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = 2x + y - 3$$

$$y(2) = 1,$$

usa el método de Euler mejorado para aproximar $y(2.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

EJERCICIO 6.31. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{1}{x^2 + y}$$

$$y(3) = 2.5,$$

usa el método de Euler mejorado para aproximar $y(3.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

EJERCICIO 6.32. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = \ln x + \frac{1}{y}$$

$$y(4) = 5,$$

usa el método de Runge-Kutta para aproximar $y(4.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

EJERCICIO 6.33. Dada la ecuación diferencial:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$y(3) = 10,$$

usa el método de Runge-Kutta para aproximar $y(3.3)$, tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

CAPÍTULO

7

Soluciones de ejercicios y tests

7.1. Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 2.2. $x_r = 0.8046875.$



Ejercicio 2.3. $x_r = 0.9453125.$



Ejercicio 2.4. $x_r = 1.310240113.$



Ejercicio 2.5. $x_r = 1.841068663.$



Ejercicio 2.6. $x_r = 0.650561444.$



Ejercicio 2.7. $x_r = 0.739085133.$



Ejercicio 2.8. $x_r = 0.419118641.$



Ejercicio 2.9. $x_r = 0.567170358.$



Ejercicio 2.10. $x_r = 0.513272518.$



Ejercicio 2.11. $x_r = 1.725168986.$



Ejercicio 3.12. $x_1 = -1.00023, x_2 = 6.99985, x_3 = -10.00005.$



Ejercicio 3.13. $x_1 = 2, x_2 = -2.3, x_3 = 1.5, x_4 = -1.$



Ejercicio 3.14. $x_1 = 2.94994, x_2 = -1.70002, x_3 = -3.67996.$



Ejercicio 3.15. $x_1 = -1.567, x_2 = 3, x_3 = 0.8, x_4 = -0.792.$



$$\text{Ejercicio 3.16(a)} A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & -0.16667 \\ -0.25 & 0.25 & 0.16667 \end{pmatrix}$$



$$\text{Ejercicio 3.16(b)} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.23415 & 0.28973 & -0.37103 & 0.66859 \\ -0.09998 & 0.08496 & 0.06211 & 0.35659 \\ -0.37307 & 0.55763 & 0.0438 & 0.9171 \\ -0.07919 & 0.25715 & 0.09619 & 0.38584 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 3.17. $x_1 = 1.20991, x_2 = -0.40016, x_3 = 2.35004.$



Ejercicio 3.18. $x_1 = 0.5629, x_2 = -1.17681, x_3 = -1.54938.$



Ejercicio 4.19(a) $f(x) = 0.5 + 0.875(x - 2) - 0.925(x - 2)(x + 2) + 0.4625(x - 2)(x + 2)(x - 1).$



Ejercicio 4.19(b) $f(x) = -3 + 10(x - 0.3) - 50(x - 0.3)(x - 0.6) + 185.18519(x - 0.3)(x - 0.6)(x - 0.9) - 447.53088(x - 0.3)(x - 0.6)(x - 0.9)(x - 1.2)$



Ejercicio 4.20(a) $p(x) = 1.56 \left[\frac{(x+2)(x-3)(x+5)}{-36} \right] + 3.54 \left[\frac{(x-1)(x-3)(x+5)}{45} \right] - 2.54 \left[\frac{(x-1)(x+2)(x+5)}{80} \right] - 8.9 \left[\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{-144} \right]$ □

Ejercicio 4.20(b) $p(x) = 9 \left[\frac{(x+0.5)(x-1)(x+2)(x+4)}{3.125} \right] - 2 \left[\frac{x+1.5)(x-1)(x+2)(x+4)}{-7.875} \right] + 5 \left[\frac{(x+1.5)(x+0.5)(x+2)(x+4)}{56.25} \right] + 33 \left[\frac{(x+1.5)(x+0.5)(x-1)(x+4)}{-4.5} \right]$ □

Ejercicio 4.21(a)

$$s(x) = \begin{cases} 0.25x^3 + 1.5x^2 - 14.25x + 7.5 & \text{si } x \in [-2, 1] \\ -0.375x^3 + 3.375x^2 - 16.125x + 8.125 & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$
□

Ejercicio 4.21(b)

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{5}{\bar{526}}x^3 - \frac{75}{\bar{526}}x^2 - \frac{4703}{\bar{789}}x - \frac{5860}{\bar{789}} & \text{si } x \in [-5, -2] \\ \frac{1241}{\bar{7890}}x^3 + \frac{2257}{\bar{2630}}x^2 - \frac{15619}{\bar{3945}}x - \frac{8012}{\bar{1315}} & \text{si } x \in [-2, 3] \\ -\frac{299}{\bar{1578}}x^3 + \frac{2093}{\bar{526}}x^2 - \frac{10511}{\bar{789}}x + \frac{860}{\bar{263}} & \text{si } x \in [3, 7] \end{cases}.$$
□

Ejercicio 5.22(a)

$$\int_0^6 \frac{\cos(x)}{x+1} dx \approx 3.4115.$$
□

Ejercicio 5.22(b)

$$\int_0^6 \frac{\cos(x)}{x+1} dx \approx 0.36907.$$
□

Ejercicio 5.23(a)

$$\int_0^4 \sqrt[3]{xe^x} dx \approx 82.60511.$$
□

Ejercicio 5.23(b)

$$\int_0^4 \sqrt[3]{xe^x} dx \approx 76.94497.$$
□

Ejercicio 5.24(a)

$$\int_2^4 (\ln(x))^2 dx \approx 2.76591.$$

□

Ejercicio 5.24(b)

$$\int_2^4 (\ln(x))^2 dx \approx 2.76501.$$

□

Ejercicio 5.25(a) ≈ -17.11458 .

□

Ejercicio 5.25(b) ≈ 9.425 .

□

Ejercicio 5.26(a)

$$\int_1^6 \ln(x) \ln(x+1) dx \approx 9.156626413.$$

□

Ejercicio 5.26(b)

$$\int_1^6 \ln(x) \ln(x+1) dx \approx 9.153287278.$$

□

Ejercicio 5.27.

$$\int_1^6 \ln(x) \ln(x+1) dx \approx 9.153112082.$$

◀

Ejercicio 6.28. $y(2.3) \approx 1.16647$.

◀

Ejercicio 6.29. $y(1.3) \approx 1.79679$.

◀

Ejercicio 6.30. $y(2.3) \approx 1.79693$.

◀

Ejercicio 6.31. $y(3.3) \approx 2.52417$.

◀

Ejercicio 6.32. $y(4.3) \approx 5.48415$.

◀

Ejercicio 6.33. $y(3.3) \approx 11.5158$.

◀

Referencias

- [1] Atkinson, K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, Nueva York, 1978.
- [2] Burden, R. L., Faires, J. D. y Burden, A. N. *Análisis numérico*, 10.^a edición, Cengage Learning Editores, 2016.
- [3] Chapra, S. C. y Canale, R. P., *Métodos numéricos para ingenieros*, 5.^a edición, McGraw-Hill Interamericana, México, 2007.
- [4] Cheney, W. y Kincaid, D., *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [5] Curtis, F. G. y Wheatley, P. O., *Análisis numérico con aplicaciones*, 6.^a edición, Prentice-Hall, México, 2000.
- [6] Epperson, J. F., *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2013.
- [7] Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Dover Publications, New York, 1986.
- [8] Nakamura, S., *Métodos numéricos aplicados con software*, Pearson Education, México, 1992.
- [9] Nieves, A. H. y Domínguez, F. C., *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, 1.^a edición Ebook, Grupo Editorial Patria, México, 2014.
- [10] Mathews, J. H. and Fink, K. D., *Numerical Methods using Matlab*, 4th Edition, Pearson, 2004.

Índice Alfabético

- error
 - absoluto, 10
 - aproximado, 12
 - relativo, 10
 - relativo porcentual, 11
- interpolación, 64
- matriz
 - escalonada, 42
 - inversa, 52
- polinomio de interpolación, 65
- splines, 76