

Análisis Numérico

Notas de clase

Análisis Numérico

Notas de clase

Jorge Velásquez Zapateiro
Virgilio Obeso Fernández

Ediciones Uninorte
Barranquilla-Colombia
2007

Jorge Velásquez Zapateiro
Análisis Numérico, Notas de clase
Jorge Velásquez Zapateiro, Virgilio Obeso
Fernández.
Barranquilla:Ediciones Uninorte,2007
195p
ISBN:

©Ediciones Uninorte,2007
©Jorge Velásquez Zapateiro y Virgilio Obeso Fernández, 2007

Cordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Editor
Jorge Velásquez Zapateiro.

Corrección de textos
xxxxxxxxxxxxxxxxxx.

Diseño de portada
yyyyyyyyyyyyyy.

Impreso y hecho en Colombia
Cargraphics Worl Bogotá

Índice general

1. Números en la Computadora	3
1.1. Sistemas Decimal y Binario	3
1.2. Del Sistemas Decimal al Sistema Binario	4
1.3. Números en Punto Flotante	7
1.4. Notación Científica Normalizada	9
1.5. Errores y Notación $\text{fl}(x)$	11
1.5.1. Norma Vector	11
1.5.2. Error Absoluto y Relativo	12
1.6. Análisis de Error	15
1.7. Epsilon de la Máquina	15
1.8. Notación O de Landau	16
1.9. Pérdida de Dígitos Significativos	19
2. Solución de Ecuaciones no lineales	25
2.1. Ratas de Convergencia	26
2.2. Punto Fijo	27
2.3. Análisis Gráfico del Método de Punto Fijo	36
2.4. Métodos de Localización de Raíces	37
2.4.1. Método de Bisección o Búsqueda Binaria	37
2.5. Método de Falsa Posición o Regula Falsi	43
2.6. Método de Newton	45
2.6.1. Convergencia del Método de Newton	49
2.7. Método Modificado de Newton	52
2.8. Método de la Secante	56
2.9. Método Δ^2 de Aitken	59
3. Solución de Sistema de Ecuaciones	67
3.1. Vectores y Matrices	68
3.2. Matrices	70
3.3. Determinantes	73

3.3.1.	Norma Matriz	74
3.4.	Sistema de Ecuaciones Lineales	76
3.4.1.	Sistemas Triangulares Superior	77
3.5.	Eliminación de Gauss y Pivoteo	80
3.5.1.	Transformaciones Elementales	80
3.5.2.	Operaciones Elementales en los Renglones	80
3.6.	Estrategias de Pivoteo	83
3.6.1.	Pivoteo Trivial	83
3.6.2.	Pivoteo Parcial	83
3.6.3.	Pivoteo Parcial Escalado	84
3.7.	Factorización LU	85
3.8.	Método de Jacobi	88
3.9.	Método de Gauss- Saidel	91
3.10.	Sistema de Ecuaciones no Lineales	93
3.10.1.	Método de Newton	93
3.10.2.	Ventajas y Desventajas de Método de Newton	97
3.10.3.	Método de Punto Fijo	97
4.	Interpolación Polinomial	105
4.1.	Interpolación de Lagrange	107
4.2.	Cotas de Error	111
4.3.	Polinomio Interpolador de Newton	114
4.4.	Polinomios de Hermite	119
4.5.	Aproximación de Padé	125
4.6.	Interpolación a Trozos	129
4.6.1.	Interpolación Lineal a Trozos	130
4.6.2.	Interpolación Cúbica o Cercha Cúbica	131
4.7.	Aproximación con Polinomios Trigonométricos	150
5.	Derivación e Integración Numérica	161
5.1.	Derivación Numérica	161
5.1.1.	Análisis de Error	174
5.2.	Extrapolación de Richardson	175
5.3.	Integración Numérica	180
5.4.	Integración Compuesta	193
5.4.1.	Regla Compuesta del Trapecio	193
5.4.2.	Regla Compuesta de Simpson	196
5.4.3.	Regla Compuesta de los $\frac{3}{8}$ Simpson	199
5.4.4.	Cotas de Error para las Reglas Compuestas	201
5.5.	Método de Integración de Romberg	206
5.6.	Cuadratura Adaptativa	211

5.7. Integración Gauss-Legendre	216
5.8. Integrales Impropias	221
5.9. Integración Doble	226
6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Condiciones Iniciales	239
6.1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Condiciones Iniciales	240
6.2. Métodos de Euler y de Taylor	243
6.2.1. Método de Euler	245
6.2.2. Cotas de Error	246
6.2.3. Método de Taylor	248
6.3. Métodos de Runge-Kuta	252
6.4. Métodos Explícitos de Adams- Bashforth	257
6.4.1. Método de Adams- Bashforth de dos pasos	257
6.4.2. Método de Adams- Bashforth de tres pasos	257
6.4.3. Método de Adams- Bashforth de cuatro pasos	258
6.5. Métodos de Adams-Moulton	260
6.5.1. Método se Adams-Moulton de dos pasos	260
6.5.2. Método se Adams-Moulton de tres pasos	261
6.6. Métodos Predictor-Corrector	264
6.6.1. Método de Milne-Simpson	266
6.7. Sistema de Ecuaciones Diferenciales	269
6.7.1. Aproximación Numérica	270
6.8. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior	272
Bibliografía.....	279

0pt0.4pt

Capítulo 1

Números en la Computadora

La aparición de los computadores ha hecho posible la solución de problemas, que por su tamaño antes eran excluidos. Desafortunadamente los resultados son afectados por el uso de la **Aritmética de Precisión Finita**, en la cual para cada número se puede almacenar tantos dígitos como lo permita el diseño del computador.

Así por ejemplo, de nuestra experiencia esperamos tener siempre expresiones verdaderas como $2 + 2 = 4$, $3^2 = 9$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, pero en la aritmética de precisión finita $\sqrt{5}$ no tiene un solo número fijo y finito, que lo representa.

Como $\sqrt{5}$ no tiene una representación de dígitos finitos, en el interior del computador se le da un valor aproximado cuyo cuadrado no es exactamente 5, aunque con toda probabilidad estará lo bastante cerca a él para que sea aceptable.

1.1. Sistemas Decimal y Binario

El sistema numérico de uso frecuente es el sistema decimal. La base del sistema decimal sabemos es 10. Ahora bien la mayoría de las computadoras no usan el sistema decimal en los cálculos ni en la memoria, sino que usan el sistema binario que tiene base 2, y su memoria consiste de registros magnéticos, en los que cada elemento solo tiene los estados **encendido** o **apagado**.

La base de un sistema numérico recibe el nombre de raíz. Para el sistema decimal como se dijo es 10 y para el binario es 2.

La base de un número se denota por un subíndice así que $(3.224)_{10}$ es 3.224 en base 10, $(1001.11)_2$ es 1001.11 en base 2.

El valor de un número base r es $(abcdefg.hijk)_r$ y se calcula como

$$a \times r^6 + b \times r^5 + c \times r^4 + d \times r^3 + e \times r^2 + f \times r^1 + g \times r^0 + h \times r^{-1} + i \times r^{-2} + j \times r^{-3} + k \times r^{-4}$$

1.2. Del Sistemas Decimal al Sistema Binario

Consideremos el número 17 en base 10 (de aquí en adelante se omite la base si ésta es 10) este se puede escribir en base 2 de la siguiente forma

$$(17)_{10} = (10001)_2$$

en efecto

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 1 = 17,$$

o también

$$427.325 \approx (110101011.\overline{0101001})_2$$

Ahora $(1001.11101)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} = 9.90625$.

En general si N es un número natural entonces existen cifras $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_K \in \{0, 1\}$ tales que

$$N = a_K \times 2^K + a_{K-1} \times 2^{K-1} + a_{K-2} \times 2^{K-2} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0.$$

Un algoritmo para encontrar la representación binaria de un número natural N , se puede establecer si dividimos la expresión anterior entre dos teniendo entonces que

$$\frac{N}{2} = a_K \times 2^{K-1} + a_{K-1} \times 2^{K-2} + a_{K-2} \times 2^{K-3} + \dots + a_1 \times 2^0 + \frac{a_0}{2},$$

si llamamos

$$P_0 = a_K \times 2^{K-1} + a_{K-1} \times 2^{K-2} + a_{K-2} \times 2^{K-3} + \dots + a_1 \times 2^0,$$

entonces

$$\frac{N}{2} = P_0 + \frac{a_0}{2},$$

luego a_0 es el resto que resulta de dividir a N entre dos, dividiendo ahora a P_0 entre dos se tiene que

$$\frac{P_0}{2} = a_K \times 2^{K-2} + a_{K-1} \times 2^{K-3} + a_{K-2} \times 2^{K-4} + \dots + a_3 \times 2^1 + a_2 \times 2^0 + \frac{a_1}{2},$$

con lo que

$$\frac{P_0}{2} = P_1 + \frac{a_1}{2},$$

donde

$$P_1 = a_K \times 2^{K-2} + a_{K-1} \times 2^{K-3} + a_{K-2} \times 2^{K-4} + \cdots + a_3 \times 2^1 + a_2 \times 2^0$$

o sea que a_1 es el resto de dividir a P_0 entre dos, y se continua este procedimiento hasta que se encuentre un número K , tal que $P_K = 0$, de lo anterior se tiene el siguiente algoritmo

$$N = 2P_0 + a_0$$

$$P_0 = 2P_1 + a_1$$

.

.

.

$$P_{K-2} = 2P_{K-1} + a_{K-1}$$

$$P_{K-1} = 2P_K + a_K \quad P_K = 0$$

Ejemplo 1.2.1. Utilizar el algoritmo anterior para escribir a 1357 en notación binaria.

Solución

$$1357 = 678 \times 2 + 1, \quad a_0 = 1$$

$$678 = 339 \times 2 + 0, \quad a_1 = 0$$

$$339 = 169 \times 2 + 1, \quad a_2 = 1$$

$$169 = 84 \times 2 + 1, \quad a_3 = 1$$

$$84 = 42 \times 2 + 0, \quad a_4 = 0$$

$$42 = 21 \times 2 + 0, \quad a_5 = 0$$

$$21 = 10 \times 2 + 1, \quad a_6 = 1$$

$$10 = 5 \times 2 + 0, \quad a_7 = 0$$

$$5 = 2 \times 2 + 1, \quad a_8 = 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0, \quad a_9 = 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1, \quad a_{10} = 1$$

luego

$$1357 = a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 = (10101001101)_2$$

■

Supongamos ahora se tiene $Q \in R$ con $0 < Q < 1$, entonces existen, $b_1, b_2, b_3, b_4 \dots \in \{0, 1\}$, tal que

$$Q = 0.b_1b_2b_3b_4b_5\dots,$$

y por tanto

$$Q = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \dots + b_k \times 2^{-k} + \dots$$

si multiplicamos a Q por dos se tiene que

$$2Q = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots + b_k \times 2^{-k+1} + \dots$$

si $F_1 = \text{frac}(2Q)$, donde $\text{frac}(x)$ es la parte fraccionaria de x , y $b_1 = \lfloor 2Q \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$, es la parte entera de x , entonces

$$F_1 = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots + b_k \times 2^{-k+1} + \dots,$$

multiplicando ahora a F_1 por dos se tiene que

$$2F_1 = b_2 + b_3 \times 2^{-1} + \dots + b_k \times 2^{-k+2} + \dots = b_2 + F_2,$$

donde $F_2 = \text{frac}(2F_1)$, y $b_2 = \lfloor 2F_1 \rfloor$, continuando este proceso formamos dos sucesiones $\{b_k\}$ y $\{F_k\}$, dadas por $b_k = \lfloor 2F_{k-1} \rfloor$ y $F_k = \text{frac}(2F_{k-1})$, con $b_1 = \lfloor 2Q \rfloor$ y $F_1 = \text{frac}(2Q)$ se tiene entonces que la representación binaria de Q es

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

Ejemplo 1.2.2. Utilizar el algoritmo anterior para escribir a 0.234 en notación binaria.

Solución

Sea $Q = 0.234$, entonces

$$2Q = 0.468, \quad b_1 = \lfloor 0.468 \rfloor = 0 \quad F_1 = \text{frac}(0.468) = 0.468$$

$$2F_1 = 0.936, \quad b_2 = \lfloor 0.936 \rfloor = 0 \quad F_2 = \text{frac}(0.936) = 0.936$$

$$2F_2 = 1.872, \quad b_3 = \lfloor 1.872 \rfloor = 1 \quad F_3 = \text{frac}(1.872) = 0.872$$

$$\begin{array}{lll}
2F_3 = 1.744, & b_3 = \lfloor 1.744 \rfloor = 1 & F_4 = \text{frac}(1.744) = 0.744 \\
2F_4 = 1.488, & b_5 = \lfloor 1.488 \rfloor = 1 & F_5 = \text{frac}(1.488) = 0.488 \\
2F_5 = 0.976, & b_6 = \lfloor 0.976 \rfloor = 0 & F_6 = \text{frac}(0.976) = 0.976 \\
2F_6 = 1.952, & b_7 = \lfloor 1.952 \rfloor = 1 & F_7 = \text{frac}(1.952) = 0.952
\end{array}$$

.

.

de lo anterior se tiene que

$$Q = 0.234 = (0.0011101 \dots)_2$$

■

1.3. Números en Punto Flotante

Definición 1.3.1. Los números en punto flotante son números reales de la forma

$$\pm \alpha \times \beta^e$$

donde α tiene un número de dígitos limitados, β es la base y e es el exponente que hace cambiar de posición al punto decimal.

Definición 1.3.2. Un número real x tiene una representación punto flotante normalizada si

$$x = \pm \alpha \times \beta^e$$

con $\frac{1}{\beta} < |\alpha| < 1$

En el caso que x tenga representación punto flotante normalizada entonces

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times \beta^e$$

donde si $x \neq 0$, $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i < \beta$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$ y $L \leq e \leq U$.

Definición 1.3.3. El conjunto de los números en punto flotante se le llama, conjunto de números de máquina.

El conjunto de número de máquina es finito, ya que si $x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \dots d_t \times \beta^e$, con $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i \leq \beta - 1$, $L \leq e \leq U$, entonces para asignarle valor a d_1 , hay $\beta - 1$ posibles valores y para d_i , $i = 2, 3, 4, \dots, t$ hay β posibles asignaciones, luego, entonces existirán

$$(\beta - 1) \underbrace{\beta \beta \cdots \beta}_{t-1 \text{ factores}} = (\beta - 1)\beta^{t-1}, \text{ fracciones positivas.}$$

Pero, como el número de exponentes es $U - L + 1$ en total habrán $(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1)$ números de máquina positivos y tomando los números máquina negativos, el total de números de máquina es $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$, teniendo en cuenta que el cero es también un número de máquina.

Esto significa que cualquier número real debe ser representado por uno de los $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$ número de máquina.

Ejemplo 1.3.1. Como ejemplo, tomemos $\beta = 2$, $t = 3$, $L = -2$ y $U = 2$, en este caso, las mantisas serían $(0.100)_2$, $(0.101)_2$, $(0.110)_2$ y $(0.111)_2$ los cuales son la representación en base dos de los números reales $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$ respectivamente, el total de números es máquina aparecen en la siguiente tabla

-2	-1	0	1	2
$(0.100)_2 \times 2^{-2}$	$(0.100)_2 \times 2^{-1}$	$(0.100)_2 \times 2^0$	$(0.100)_2 \times 2^1$	$(0.100)_2 \times 2^2$
$(0.101)_2 \times 2^{-2}$	$(0.101)_2 \times 2^{-1}$	$(0.101)_2 \times 2^0$	$(0.101)_2 \times 2^1$	$(0.101)_2 \times 2^2$
$(0.110)_2 \times 2^{-2}$	$(0.110)_2 \times 2^{-1}$	$(0.110)_2 \times 2^0$	$(0.110)_2 \times 2^1$	$(0.110)_2 \times 2^2$
$(0.111)_2 \times 2^{-2}$	$(0.111)_2 \times 2^{-1}$	$(0.111)_2 \times 2^0$	$(0.111)_2 \times 2^1$	$(0.111)_2 \times 2^2$

TABLA 1

que corresponden respectivamente a los números reales de la siguiente tabla

$\frac{4}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{32}{32}$	$\frac{64}{32}$
$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{40}{32}$	$\frac{80}{32}$
$\frac{6}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{24}{32}$	$\frac{48}{32}$	$\frac{96}{32}$
$\frac{7}{32}$	$\frac{14}{32}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{56}{32}$	$\frac{112}{32}$

TABLA 2

El total de números de máquina es $2(2 - 1) \times 2^2(2 + 2 + 1) + 1 = 41$ los cuales son

$$0, \pm \frac{4}{32}, \pm \frac{5}{32}, \pm \frac{6}{32}, \pm \frac{7}{32}, \pm \frac{8}{32}, \pm \frac{10}{32}, \pm \frac{12}{32}, \pm \frac{14}{32}, \pm \frac{16}{32}, \pm \frac{20}{32}, \pm \frac{24}{32}$$

$$\pm \frac{28}{32}, \pm \frac{32}{32}, \pm \frac{40}{32}, \pm \frac{48}{32}, \pm \frac{56}{32}, \pm \frac{64}{32}, \pm \frac{80}{32}, \pm \frac{96}{32}, \pm \frac{112}{32}$$

1.4. Notación Científica Normalizada

En la sección anterior, hablamos de representación punto flotante y punto flotante normalizado, de acuerdo a eso si $x \in R$ está en base 10 este se puede normalizar tomando

$$x = \pm r \times 10^n$$

con $0.1 \leq r < 10$ y n un entero. Obviamente si $x = 0$ entonces $r = 0$

Ejemplo 1.4.1. 1) 732.5051 se puede representar como punto flotante normalizado escribiendo $732.5051 = 0.7325051 \times 10^3$.

2) De la misma manera $-0.005612 = -0.5612 \times 10^{-2}$

Por otro lado si x está en el sistema binario, se puede representar en punto flotante normalizado si se escribe de la forma

$$x = \pm q \times 2^m,$$

donde $0.5 \leq q < 1$ y m es un entero.

Ejemplo 1.4.2. 1) $(101.01)_2 = 0.10101 \times 2^3$

2) $(0.0010111)_2 = 0.10111 \times 2^{-2}$

Nota: $(0.1)_2 = 1 \times 2^{-1} = 0.5$.

En una computadora los números se representan de la manera anteriormente comentada, pero con ciertas restricciones sobre q y m impuestas por la longitud de la palabra. Si suponemos se tiene una computadora hipotética, la cual llamaremos NORM-32, y si además suponemos que tiene una longitud de palabra de 32 bits (1bit = 1Binary digital), estos se distribuyen de la manera siguiente:

0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ahora, hemos dicho que $|m|$ no requiere más de 7 bits lo cual significa que $|m| \leq (1111111)_2 = 2^7 - 1 = 127$ de modo que el exponente de 7 dígitos binarios proporciona un intervalo de 0 a 127, pero el uso exclusivo de enteros positivos para el exponente no permite una representación adecuada para números pequeños, para que esto pueda ser posible se toma el exponente en el intervalo $[-63, 64]$

También hemos dicho que q requiere no más de 24 bits, por lo tanto los números de nuestra máquina hipotética tienen una precisión limitada que corresponde a entre 7 y 8 dígitos decimales ya que el bit menos significativo en la mantisa representa unidades del orden $2^{-24} \approx 10^{-7}$. Esto quiere decir que números expresados mediante más de siete dígitos decimales serán objeto de una aproximación cuando se dan como datos de entrada o como resultados de operaciones.

1.5. Errores y Notación $\text{fl}(x)$

1.5.1. Norma Vector

Definición 1.5.1. Sea V un espacio vectorial. Una función $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma vector si $\forall x, y \in V$ y α un escalar, se cumple que

1. $g(x) \geq 0$ y $g(x) = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $g(\alpha x) = |\alpha|g(x)$.
3. $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$.

Entre las clases de norma están las denominadas p -normas las cuales se define como

Definición 1.5.2. Para $1 \leq p < \infty$ se definen así

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Otra norma muy usada en análisis numérico es la norma del máximo cuya definición presentamos ahora

Definición 1.5.3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la norma del máximo como

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Nota: Si $p = 1$, se tiene que $\|x\|_1 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i| \right]$ y si $p = 2$, se tiene que

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

1.5.2. Error Absoluto y Relativo

Definición 1.5.4. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $x^* \in \mathbb{R}^n$, es una aproximación a x , definimos el error absoluto como

$$E = \|x - x^*\|.$$

Definición 1.5.5. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $x^* \in \mathbb{R}^n$, es una aproximación a x , definimos el error relativo como

$$E_r = \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \quad x \neq 0.$$

NOTA: Si $n = 1$ entonces $E = |x - x^*|$ y $E_r = \frac{|x - x^*|}{|x|} \quad x \neq 0.$

Definición 1.5.6. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x^* \in \mathbb{R}$ es su aproximación, se dice que x^* tiene por lo menos $p - \beta$ cifras significativas exactas si $E \leq \frac{1}{2}\beta^{-p}$.

Definición 1.5.7. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x^* \in \mathbb{R}$ es su aproximación, se dice que x^* tiene por lo menos $p - \beta$ dígitos significativos exactos si $E_r \leq \frac{1}{2}\beta^{-p+1}$.

Como hemos dicho los números pueden sufrir aproximaciones cuando se dan como datos de entrada o como resultados de operaciones, estas aproximaciones se pueden hacer de dos formas:

- **Truncamiento:** En este proceso el número se representa por medio del mayor número de la máquina menor que el número dado.
- **Redondeo:** En este proceso el número se representa por el número de máquina más cercano al número dado.

Los errores de redondeo pueden ser sutiles, cuando se realizan cálculos individuales pero estos pueden perjudicar la precisión computacional si existen dos situaciones las cuales son

1. Cuando se suman una sucesión de números, especialmente si estos decrecen en valor absoluto.
2. Cuando se hace la diferencia entre dos números casi idénticos, ya que se cancelan los dígitos principales.

Por lo anterior, si deseamos estimar el error cometido al aproximar un número positivo $x = \pm 0.d_1d_2\dots d_t d_{t+1}\dots \times \beta^m$, $d_i \neq 0$ mediante un número de máquina, notado $fl(x)$, esto se hace de la siguiente forma

■ Con redondeo

1. $fl(x) = \pm 0.d_1d_2\dots d_t \times \beta^m$ si $0 \leq d_{t+1} < \frac{\beta}{2}$.
2. $fl(x) = \pm (0.d_1d_2\dots d_t + \beta^{-t}) \times \beta^m$ si $\frac{\beta}{2} \leq d_{t+1} < \beta$

■ Con truncamiento

$$fl(x) = \pm 0.d_1d_2\dots d_t \times \beta^m$$

Se puede probar que si hay redondeo los errores absoluto y relativo son $E \leq \frac{1}{2}\beta^{m-t}$ y $E_r \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ si hay truncamiento son $E \leq \beta^{m-t}$ y $E_r \leq \beta^{1-t}$.

En nuestra computadora hipotética NORM-32, si $x = (0.d_1d_2d_3\dots d_{24}d_{25}d_{26}\dots) \times 2^m$, el número $x' = (0.d_1d_2d_3\dots d_{24}) \times 2^m$ obtenido por truncamiento se encuentra a la izquierda de x en la recta real y el número $x'' = (0.d_1d_2d_3\dots d_{24} + 2^{-24}) \times 2^m$ obtenido por redondeo se localiza a la derecha de x (ver figura 1.1). El más cercano a x entre x' y x'' se

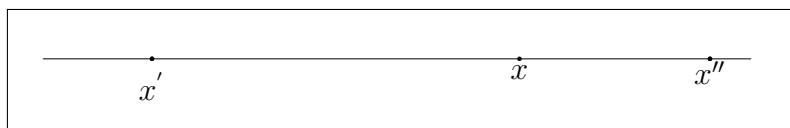


Figura 1.1

selecciona para representar a x en la computadora. Obsérvese que si x' representa mejor a x , entonces

$$|x - x'| \leq \frac{1}{2}|x' - x''| \leq \frac{1}{2} \times 2^{-24} \times 2^m = 2^{m-25},$$

luego el error relativo es

$$E_r = \frac{|x - x'|}{|x|} \leq \frac{2^{m-25}}{q \times 2^m} = \frac{2^{-25}}{q} \leq \frac{2^{-25}}{\frac{1}{2}} = 2^{-24},$$

y si x está más cercano a x'' , entonces

$$|x - x''| \leq \frac{1}{2}|x'' - x'| = 2^{m-25},$$

luego entonces el error relativo es

$$E_r = \frac{|x - x''|}{|x|} \leq 2^{-24}.$$

Es posible que durante el transcurso del cálculo, se genere un número $\pm q \times 2^m$, donde m quede por fuera del rango permitido por la computadora. Si m es demasiado grande se dice que se produce un sobreflujo o desbordamiento por exceso (**OVERFLOW**) y se interrumpen los cálculos, si m es por el contrario muy pequeño se dice que ocurre un subflujo o desbordamiento por defecto (**UNDERFLOW**) y suele dársele el valor cero; en NORM-32 esto ocurre para $m > 127$ o $m < -127$ respectivamente.

Definición 1.5.8. Sean x y y puntos flotantes, definimos \oplus , \ominus , \otimes y \oslash , llamadas operaciones de punto flotante, de la siguiente forma,

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$$

$$x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \oslash y = fl(fl(x)/fl(y))$$

donde $+$, $-$, \times , $/$ son las operaciones usuales

Para ilustrar estas operaciones sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $fl(x) = \frac{24}{32}$ y $fl(y) = \frac{7}{32}$, son números punto flotantes, dados en el ejemplo 1.3.1, entonces,

$$x \oplus y = fl\left(\frac{24}{32} + \frac{7}{32}\right) = fl\left(\frac{31}{32}\right) = \frac{32}{32} = 1$$

$$x \ominus y = fl\left(\frac{24}{32} - \frac{7}{32}\right) = fl\left(\frac{17}{32}\right) = \frac{16}{32}$$

$$x \otimes y = fl\left(\frac{24}{32} \times \frac{7}{32}\right) = fl\left(\frac{21}{128}\right) = \frac{20}{128} = \frac{5}{32}$$

$$x \odot y = fl\left(\frac{24}{32} / \frac{7}{32}\right) = fl\left(\frac{24}{32} \times \frac{32}{7}\right) = fl\left(\frac{24}{7}\right) = fl\left(\frac{768}{224}\right) = \frac{784}{224} = \frac{112}{7}$$

Observemos que si $fl(x) = \frac{96}{32}$ y $fl(y) = \frac{4}{32}$, entonces

$$x \odot y = fl\left(\frac{96}{32} / \frac{4}{32}\right) = fl\left(\frac{96}{4}\right) = \frac{112}{32}$$

(fenómeno **OVERFLOW**) ya que $\frac{96}{4} > \frac{112}{32}$

En resumen si $fl(x)$ es el número de máquina más cercano a x y tomamos $\delta = \frac{fl(x) - x}{x}$, entonces, $fl(x) = x(1 + \delta)$ y $|\delta| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \epsilon$ o $|\delta| \leq \beta^{1-t} = \epsilon$ usando aritmética de redondeo o truncamiento respectivamente. El número ϵ se conoce como error de redondeo unitario o unidad de redondeo. En NORM-32 la unidad de redondeo es 2^{-24} .

1.6. Análisis de Error

Sea \otimes un operador con el cual representamos una cualquiera de las operaciones básicas $+$, $-$, \times , \div y sean x , y dos números cualesquiera y si $x \otimes y$ debe calcularse y almacenarse, entonces, la variación computada de $x \otimes y$ es $fl(x \otimes y)$, entonces cabe preguntarse que tan preciso es $fl(x \otimes y)$? Por lo anterior $fl(x \otimes y) = (x \otimes y)(1 + \delta)$ con $|\delta| \leq \epsilon$, si x , y son números de la máquina.

Si x , y no son números de la máquina, entonces $fl[fl(x) \otimes fl(y)] = (x + (1 + \delta_1) \otimes (y + (1 + \delta_2)))(1 + \delta_3)$ con $\delta_i \leq \epsilon$.

1.7. Epsilon de la Máquina

Ya se ha comentado que si una máquina funciona con una base β y utiliza t posiciones en la mantisa de sus números de punto flotante entonces

$$fl(x) = x(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \epsilon$$

donde $\epsilon = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ en caso de redondeo y $\epsilon = \beta^{1-t}$ en caso de truncamiento. El número ϵ (error de redondeo unitario) es una característica de la máquina, de su sistema operativo y de la manera en que efectúa los cálculos. El epsilon de la máquina es importante porque caracteriza la precisión de la máquina

en tal forma que los programas computacionales sean razonablemente independientes de la máquina en donde se ejecuta, sirve además como criterio de parada de los algoritmos.

Definición 1.7.1. *Se define ϵ de la máquina, abreviadamente “macheeps”, como el número positivo más pequeño τ tal que sumado con 1 da como resultado, un número mayor que 1, esto es $\epsilon = \{\tau : \tau + 1\}$.*

Este número es posible hallarlo con el siguiente algoritmo

ALGORITMO
 Inicio
 $eps \leftarrow 1.0$
 Mq $1.0 + eps > 1.0$
 $epsilon \leftarrow eps$
 $eps \leftarrow 0.5 \times eps$
 FMq
 Escriba epsilon
 Fin

En el caso de nuestra máquina hipotética “macheeps” = 2^{-24}

1.8. Notación O de Landau

Con el propósito de determinar que tan rápido crece o decrece una función, Edmund Landau introdujo la notación de órdenes de magnitud que lleva su nombre. Por ejemplo, el desarrollo de Taylor de la función exponencial se puede escribir como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

donde el último término significa que el término de error del teorema de Taylor es menor, en valor absoluto, que una constante que multiplica a x^3 , cuando x está cerca de 0.

De manera formal se tiene la siguiente definición

Definición 1.8.1. *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de variable real son del mismo orden de magnitud, escrito $f(x) = O(g(x))$, más propiamente,*

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

si y solo si, existen constantes N y C tales que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x > N.$$

Lo que intuitivamente significa que $f(x)$ no crece más rápido que $g(x)$

En general, si $a \in \mathbb{R}$, escribiremos

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

si y solo si, existen constantes α, β tales que

$$|f(x)| \leq \beta |g(x)|, \quad |x - a| < \alpha.$$

Normalmente, el contexto determina el valor de a o si ésta es ∞ .

Se denomina de orden constante a una función $O(1)$, logarítmico si es $O(\log(n))$, lineal si $O(n)$, cuadrático para $O(n^2)$, polinómico para $O(n^k)$ con $k \in \mathbb{N}$, y exponencial para $O(c^n)$ con $0 < c \in \mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $O(\log(n)) = O(\log(n^c))$.

Además de la notación O grande, Landau también introdujo la notación o pequeña. Informalmente $f(x) = o(g(x))$ significa que f crece mucho más lentamente que g y se hace cada vez más insignificante respecto a ella conforme x crece.

Formalmente, se tiene

Definición 1.8.2. $f(x) = o(g(x))$, para $x \rightarrow \infty$ si y solo si $\forall \gamma > 0$, existe una constante N , tal que

$$|f(x)| \leq \gamma |g(x)|, \quad \forall x > N.$$

En general, se tiene que

Definición 1.8.3. $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, si y solo si, $\forall \gamma > 0$, existe una constante η tal que

$$|f(x)| \leq \gamma |g(x)|, \quad \forall |x - a| < \eta.$$

Cuando a es cero o infinito, y queda claro su valor por el contexto, se omite.

Es fácil observar que los símbolos O y o son equivalentes a \leq y $<$.

El símbolo O tiene propiedades las cuales mostramos en el siguiente teorema

Teorema 1.8.1. 1. Si $f(x) = O(g(x))$ y $h(x) = O(g(x))$, entonces,
 $\lambda f(x) + \nu h(x) = O(g(x))$

2. Si $f(x) = O(g(x))$, $h(x) = O(k(x))$, entonces, $f(x)h(x) = O(g(x)k(x))$.

3. Si $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(h(x))$, entonces, $f(x) = O(h(x))$

Demostración. 1.- Como $f(x) = O(g(x))$ y $h(x) = O(g(x))$, entonces, existen constantes N_1 y N_2 , tales que,

$$|f(x)| \leq N_1|g(x)| \quad \text{y} \quad |h(x)| \leq N_2|g(x)|,$$

luego

$$|\lambda f(x) + \nu g(x)| \leq |\lambda||f(x)| + |\nu||g(x)|,$$

de modo que,

$$|\lambda f(x) + \nu g(x)| \leq |\lambda|N_1|g(x)| + |\nu|N_2|g(x)| = (|\lambda|N_1 + |\nu|N_2)|g(x)|,$$

por tanto existe una constante $N = |\lambda|N_1 + |\nu|N_2$, tal que

$$|\lambda f(x) + \nu g(x)| \leq N|g(x)|,$$

de modo que

$$\lambda f(x) + \nu h(x) = O(g(x))$$

2.- Si $f(x) = O(g(x))$, $h(x) = O(k(x))$, entonces existen constantes N_1 y N_2 , tales que

$$|f(x)| \leq N_1|g(x)| \quad \text{y} \quad |h(x)| \leq N_2|k(x)|,$$

luego

$$|f(x)h(x)| = |f(x)||h(x)| \leq N_1|g(x)|N_2|k(x)| = (N_1N_2)|g(x)k(x)|,$$

así que existe una constante $N = N_1N_2$, tal que

$$|f(x)h(x)| \leq N|g(x)k(x)|,$$

y por lo tanto,

$$f(x)h(x) = O(g(x)k(x)),$$

3.- Si $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(h(x))$, existen constantes N_1 y N_2 , tales que

$$|f(x)| \leq N_1|g(x)| \quad \text{y} \quad |g(x)| \leq N_2|h(x)|,$$

por lo tanto

$$|f(x)| \leq N_1|g(x)| \leq N_1(N_2|h(x)|) = N|h(x)|,$$

con $N = N_1N_2$, de modo que existe $N = N_1N_2$, tal que

$$|f(x)| \leq N|h(x)|,$$

y por lo tanto $f(x) = O(h(x))$

□

La notación O , por supuesto también permite comparar sucesiones, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de forma $a_n \leq b_n$ de acuerdo a la siguiente definición

Definición 1.8.4. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones, con $b_n > 0 \quad \forall n$, si existe una constante C tal que

$$|a_n| \leq Cb_n,$$

con $n \geq N$, para algún número natural N , entonces se dice que

$$a_n = O(b_n)$$

La definición anterior es equivalente a decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = L \neq \infty$

Ejemplo 1.8.1. 1. Como $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$, entonces $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

2. Se sabe que $|\cos n| \leq 1$, luego $\cos n = O(1)$.

3. $\sin \frac{x}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, ya que $\left|\sin \frac{x}{n}\right| \leq \frac{x}{n} = |x| \frac{1}{n}$

4. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$, entonces

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Hay 3 símbolos más, pero sólo presentaremos uno de ellos, el equivalente a θ : se dice que $f(x) = \theta(g(x))$ si y solo si $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(f(x))$. Note la diferencia entre escribir $f(x) = O(g(x))$ y $f(x) = \theta(g(x))$.

En el presente texto nos limitaremos al uso de la notación O grande, sobre todo para simplificar la escritura del término de error. No utilizaremos ninguno de los otros símbolos de Landau.

1.9. Pérdida de Dígitos Significativos

Toda operación de punto flotante en un proceso computacional puede dar lugar a un error, que puede aumentar o disminuir, una de las maneras más comunes de aumentar la importancia de un error se conoce como pérdida de dígitos significativos. La pérdida de dígitos significativos se puede generar por la longitud de la palabra que almacena los números y en este caso es

inevitable, pero también se puede tener por la programación, en este caso es evitable. Estos últimos aparecen por ejemplo al restar números muy cercanos, supongamos que vamos a calcular $z = x - y$ y que tenemos aproximaciones x^* y y^* para x y y respectivamente cada una de las cuales es buena hasta r dígitos. Entonces $z^* = x^* - y^*$ es una aproximación para z que también es buena hasta r dígitos significativos a menos que, x^* y y^* coincidan en uno o más dígitos. En este último caso habrá cancelación durante la sustracción y por lo tanto z^* será exacto hasta menos de r dígitos.

Por ejemplo, si $x = 0.3721478693$ y $y = 0.3720230572$, entonces $x - y = 0.0001248121 = 0.1248121 \times 10^{-3}$, si los cálculos se llevan en una computadora decimal con mantisa de cinco dígitos, entonces $fl(x) = x^* = 0.37215$ y $fl(y) = y^* = 0.37202$ luego, $z^* = fl(x) - fl(y) = x^* - y^* = 0.00013$, el error relativo es

$$E_r = \left| \frac{(x - y) - (x^* - y^*)}{x - y} \right| \approx 4\%.$$

que es un error relativo muy grande.

La pérdida de dígitos significativo se puede evitar, (cuando sea posible) reescribiendo las ecuaciones bien sea utilizando artificios algebraicos, trigonométricos o series de Taylor.

Por ejemplo, calcular $y = \sqrt{x+1} - 1$ está implicando una pérdida de dígitos significativos para valores cercanos a 0 ya que en este caso $\sqrt{x+1} \approx 1$, luego se podría evitar esta pérdida reescribiendo la ecuación de la forma

$$y = (\sqrt{x+1} - 1) \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}.$$

Otro ejemplo sería evaluar la función $f(x) = 1 - \cos x$, al igual que antes $1 \approx \cos x$ para valores cercanos a cero, y se presentará pérdida de dígitos significativos, entonces la función puede reescribirse como

$$f(x) = 1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

la cual puede calcularse con mucha más exactitud para valores cercanos a cero, o también a partir de la fórmula de Taylor alrededor de 0 esto es

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

luego

$$f(x) = 1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

y si x esta cercano de cero, podemos usar una serie truncada tal como

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^7),$$

luego si $x \rightarrow 0$, entonces,

$$f(x) \approx \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} = \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360} \right) = \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} \left(1 - \frac{x^2}{30} \right) \right).$$

Ejercicios

1. Escribir el número decimal correspondiente a los siguientes números
 a) $(1101110)_2$ b) $(1101110.01)_2$ c) $(100111.101)_2$ d) $(101101.001)_2$
2. Escribir en base dos los siguientes números dados en base 10
 a) 2324.6 b) 3475.52 c) 45632 d) 1234.83
3. Haga una aproximación usando aritmética de redondeo a cuatro cifras
 a) 0.3258132 b) 1.425138 c) 0.4263289
 d) 3.2514326
4. Calcule en forma exacta y luego usando aritmética de redondeo a cuatro cifras, las siguientes operaciones
 a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$ c) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{4}{7}$ d) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) + \frac{5}{8}$
5. Sea $f(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{2}) \sin x + \cos x}{(x - \frac{\pi}{2}) + \cos x}$
 a) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$,
 b) Use aritmética de redondeo a cinco cifras para evaluar $f(0.1)$
6. Establezca un algoritmo que permita resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
7. Use el algoritmo del ejercicio anterior para resolver
 a) $8x^2 - 738x + 24 = 0$ a) $8x^2 + 738x - 24 = 0$ a) $1002x^2 - 11010x + 12.65 = 0$ a) $1002x^2 + 11010x - 12.65 = 0$

8. Si $x = 0.43257143$ y $y = 0.43257824$
- Use aritmética de redondeo a cinco cifras para calcular $fl(x)$ y $fl(y)$.
 - Calcule los errores relativos y absoluto
 - Resolver $x \oplus y$, $x \ominus y$, $x \otimes y$ y $x \oslash y$.
 - Calcule los errores relativos para las operaciones realizadas en el inciso c).
 - Cuántos dígitos significativos se pierden al resolver cada una de las operaciones realizadas en el inciso c).
9. Para los siguientes números x y $fl(x)$, ¿con cuántas cifras significativas aproxima $fl(x)$ a x ?
- $x = 524.023$, $fl(x) = 524.023$ b) $x = -0.045246$, $fl(x) = -0.04523$
 - $x = 34.5245$, $fl(x) = 34.6426$
10. Dado el sistema
- $$35.584x + 13.25y = 54.01$$
- $$14.12x + 5.581y = 21.02.$$
- Multiplique la primera ecuación por 14,12 y la segunda por -35.584 y sumelas para obtener el valor de y , después obtenga el valor de x .
- Use aritmética de redondeo a cuatro cifras al realizar las operaciones para obtener la solución del sistema.
 - Encuentre el error relativo.
11. Sea $x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_t d_{t+1} \dots \times 10^p$ y $fl(x)$ la aproximación a x por aritmética de redondeo con t dígitos.
- Demuestre que $E_r < 5 \times 10^{-t}$.
12. Sea $x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_t d_{t+1} \dots \times 10^p$ y $fl(x)$ la aproximación a x por aritmética de redondeo con t dígitos pruebe que.

$$\begin{aligned} \text{a)} & E_r < 10^{-(t-1)} \\ \text{b)} & E < 10^{p-t}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Solución de Ecuaciones no lineales

En una colisión de un protón con un átomo de helio en su estado base, la energía potencial de interacción se puede representar mediante un potencial de Morse definido por la ecuación

$$V(r) = \epsilon \left[e^{2c(1-\frac{r}{r_m})} - 2e^{c(1-\frac{r}{r_m})} \right] \quad (2.1)$$

donde r es la distancia internuclear, $\epsilon = 2.040eV$, $r_m = 0.7743\text{\AA}$, $c = 2.1931$ si $r \leq r_m$, y $c = 2.1341$ si $r > r_m$.

La ecuación que permite determinar los puntos de retorno, esto es, los puntos donde r es máxima o mínima, esta dada por

$$1 - \frac{b}{r^2} - \frac{V(r)}{E} = 0. \quad (2.2)$$

En 2.2, b es el parámetro de impacto, el cual puede tomar en principio, cualquier valor positivo, pero se sugiere asignarle valores entre 0 y 4.0\AA .

La cantidad E es la energía total del sistema y puede suponerse que toma cualquier valor entre 0 y $2.0eV$.

Como puede verse, determinar los puntos de retorno en este problema, supone tomar un valor para b y otro para E , reemplazar 2.1 en 2.2 y resolver la ecuación resultante para r , lo cual debe hacerse por métodos numéricos.

Con el propósito de resolver problemas como el planteado antes, nos proponemos estudiar métodos que permitan encontrar la solución de dichas ecuaciones que con frecuencia aparecen en ciencias e ingeniería.

Como hemos dicho en este capítulo trataremos el problema de encontrar un cero de una función de variable real con valores en los reales es decir encontrar un $x^* \in \mathbb{R}$, tal que $f(x^*) = 0$.

Definamos formalmente el concepto de ceros de una función

Definición 2.0.1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $r \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad $p \in \mathbb{Z}^+$, si

$$f(x) = (x - r)^p q(x),$$

con $q(r) \neq 0$

NOTA: Decimos que r es un cero simple si $p = 1$.

Para lograr nuestro propósito, estudiaremos métodos iterativos, esto es, métodos que partiendo de un punto inicial, generan una sucesión de puntos que deben converger al cero de la función, por ello es importante, establecer las condiciones de convergencia y la rapidez de dicha convergencia.

2.1. Ratas de Convergencia

Es muy importante caracterizar las ratas de convergencia de los diferentes algoritmos, ya que la rata de convergencia de un método es una propiedad decisiva en la escogencia del mismo; así por ejemplo, si la convergencia es muy lenta, tardaremos mucho en obtener la aproximación deseada. Por lo tanto, en esta sección, definiremos algunas clases de convergencias.

Supongamos que un método iterativo produce una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3 \dots$ a partir de un punto inicial x_0 . Se quiere conocer si converge a la solución x^* y cual es la rapidez con que lo hace.

Definición 2.1.1. La sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a $x^* \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

Definición 2.1.2. Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a x^* . Si existe una constante $\alpha \in (0, 1)$ y un entero $k_1 \geq 0$ tal que, para todo $k \geq k_1$

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_k - x^*\|,$$

se dice que $\{x_k\}$ es por lo menos q -linealmente convergente a x^* .

Esto garantiza que eventualmente, el error decrecerá por un factor $\alpha < 1$

La definición anterior es equivalente a decir que la sucesión $\{x_k\}$ converge q-linealmente a x^* , si y solo si,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = L$$

con $0 < L < 1$.

Definición 2.1.3. Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a x^* , $\{x_k\}$ converge por lo menos q-superlinealmente a x^* si,

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha_k \|x_k - x^*\|$$

para alguna sucesión $\{\alpha_k\}$, la cual converge a cero.

Definición 2.1.4. Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a x^* . Si existen constantes $p > 1, \alpha \geq 0, k_1 \geq 0$, tal que para todo $k \geq k_1$

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_k - x^*\|^p,$$

entonces, decimos que $\{x_k\}$ converge a x^* con q-orden al menos p .

Si $p = 2$ o $p = 3$, decimos que la convergencia es al menos cuadrática o cúbica, respectivamente.

Además de la convergencia q-orden, tenemos la convergencia r-orden, la cual es una alternativa, aunque más débil, para medir la rapidez de convergencia.

Definición 2.1.5. Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a x^* . Decimos que $\{x_k\}$ converge con r-orden al menos p si existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ que converge a cero con q-orden al menos p tal que

$$\|x_n - x^*\| \leq \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2.2. Punto Fijo

El primer método que estudiaremos es el de punto fijo, antes de definir el concepto de punto fijo y mostrar los teoremas que permitan su estudio, demostraremos primero algunos resultados de cálculo que nos serán útiles para este propósito.

Teorema 2.2.1. *TEOREMA DE FERMAT*

Si $f(c)$ es un punto extremo de f en un intervalo I , c está en el interior de I y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos $f(c)$ es el mínimo de f en I . Si $c+h \in I$ entonces de la definición de mínimo

$$f(c+h) \geq f(c),$$

luego

$$f(c+h) - f(c) \geq 0.$$

Si $h > 0$ entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad (2.3)$$

y si $h < 0$ entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad (2.4)$$

como $f'(c)$ existe, se tiene que $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Si $f'(c) > 0$, entonces de la definición de derivada $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$, para $h \neq 0$ suficientemente cerca a 0, lo cual es una contradicción con 2.4 de modo que $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Si $f'(c) < 0$, de la misma manera $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$, para $h \neq 0$ suficientemente cerca a 0, lo cual es una contradicción con 2.3 de modo que la única posibilidad es $f'(c) = 0$.

De igual forma se prueba que $f'(c) = 0$, cuando $f(c)$ es un máximo. \square

Teorema 2.2.2. Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$; entonces existe un punto $x_0 \in [a, b]$ para el cual

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Demostración. La prueba se deja como ejercicio al lector \square

Teorema 2.2.3. Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$; entonces existe un punto $x'_0 \in [a, b]$ para el cual

$$f(x'_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Demostración. La prueba se deja como ejercicio al lector \square

Teorema 2.2.4. TEOREMA DE ROLLE

Si f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$

Demostración. Por los teoremas 2.2.2 y 2.2.3, f alcanza tanto un máximo como un mínimo en $[a, b]$. Sea $M = \max f(x)$ y $m = \min f(x)$. Si $M = m$, entonces f es constante y $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b) . Si $M \neq m$, entonces uno de ellos es diferente de a . Supongamos que es M (para m es semejante). Entonces $M > f(a)$, de manera que el máximo no puede obtenerse en $x = a$ o bien $x = b$. De aquí que existe un punto c en (a, b) en el cual $f(x)$ es un máximo. Por el teorema de Fermat, entonces $f'(c) = 0$ \square

El teorema de Rolle significa geoméricamente que si la curva C dada por $y = f(x)$ tiene una tangente en todo punto de (a, b) entonces entre dos puntos sobre C que se encuentren a un mismo nivel, existe (por lo menos) un punto entre ellos en el cual la línea tangente es horizontal

Teorema 2.2.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) existe un número $c \in (a, b)$, tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración. Consideremos la función

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

como f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

pero $\phi(a) = 0$ y $\phi(b) = 0$ de modo que la función ϕ satisface las condiciones del teorema de Rolle en $[a, b]$.

Luego por dicho teorema existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

por lo tanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

\square

Teorema 2.2.6. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = k$

Demostración. Sea $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, luego, $G'(x) = f(x)$ si $x \in [a, b]$, tomemos $F(x) = G(x) - kx$, la cual es continua en $[a, b]$, puesto que $G(x)$ lo es, por lo tanto, $F(x)$ tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$. Supongamos que

$$f(a) < k < f(b),$$

como

$$F'(x) = G'(x) - k = f(x) - k \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces, por este hecho y por el supuesto, tenemos que,

$$F'(a) = f(a) - k < 0$$

y

$$F'(b) = f(b) - k > 0,$$

de modo que existe $c \in (a, b)$, tal que

$$0 = F'(c) = f(c) - k,$$

ya que F es diferenciable y $F'(a)$ y $F'(b)$, son de signos opuestos, de modo que

$$f(c) = k.$$

□

Definamos ahora si el concepto de punto fijo y mostremos resultados que nos permitan decidir cuando este existe y si la iteración de punto fijo converge o no.

Definición 2.2.1. Sean $\mathbf{P} \in R$, y $g(x)$ una función. \mathbf{P} es un punto fijo de $g(x)$, si y solo si, $\mathbf{P} = g(\mathbf{P})$.

Definición 2.2.2. Decimos que \mathbf{P} es un punto fijo de orden m de g si $g(x)$ está dada por

$$g(x) = \mathbf{P} + (x - \mathbf{P})^m q(x)$$

con $q(\mathbf{P}) \neq 0$.

Obsérvese que si $x = \mathbf{P}$, la definición coincide con la anterior.

Definición 2.2.3. La iteración $p_{n+1} = g(p_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se define como la iteración de punto fijo.

Teorema 2.2.7. Sea $g(x)$ una función continua, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por la iteración de punto fijo. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P,$$

entonces, P es un punto fijo de g .

Demostración. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = P,$$

luego

$$g(P) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = P,$$

así que P es un punto fijo de g □

Teorema 2.2.8. Supongamos $g \in C[a; b]$.

1. Si la imagen de $y = g(x)$, es tal que $y \in [a; b]$, $\forall x \in [a; b]$, entonces g tiene un punto fijo.
2. Si $g'(x)$, está definida en $[a; b]$ y $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in (a; b)$, entonces el punto fijo es único en $[a; b]$.

Demostración. Probemos 1). Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$, entonces, a o b son puntos fijos de g y se cumple (1). Sea entonces $g(a) \in (a; b]$ y $g(b) \in [a; b)$, luego $a < g(a)$ y $b > g(b)$, por tanto $a - g(a) < 0$ y $b - g(b) > 0$. Definamos la función $f(x) = x - g(x)$, luego $f(a) = a - g(a) < 0$ y $f(b) = b - g(b) > 0$ entonces por el teorema del valor intermedio existe $\mathbf{P} \in (a; b)$, tal que $f(\mathbf{P}) = 0$, luego $0 = \mathbf{P} - g(\mathbf{P})$ y por tanto, $g(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ siendo \mathbf{P} un punto fijo de g .

Probemos 2) Supongamos que $|g'(x)| < 1 \forall x \in (a; b)$ y que \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 son puntos fijos distintos de g , entonces por el teorema del valor medio $\exists d \in (a; b)$ tal que $g(\mathbf{P}_1) - g(\mathbf{P}_2) = g'(d)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$, pero como $g(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_1$ y $g(\mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_2$, entonces $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = g'(d)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$ y por lo tanto,

$$g'(d) = \frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1},$$

así que $\exists d \in (a; b)$ tal que $g'(d) = 1$ y además por hipótesis, $\forall x \in (a; b)$, $-1 < g'(x) < 1$, lo cual es una contradicción, por tanto $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$ □

Teorema 2.2.9. TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Supongamos i) $g, g' \in C[a; b]$, ii) $K > 0$ una constante, iii) $p_0 \in (a; b)$, iv) $g(x) \in [a; b]$, $\forall x \in [a; b]$. Entonces hay un punto fijo \mathbf{P} de g en $[a; b]$; además

1. Si $|g'(x)| \leq K < 1$, $\forall x \in [a; b]$, entonces \mathbf{P} es el único punto fijo de g en $[a; b]$ y la iteración de punto fijo converge a dicho punto.
2. Si $|g'(x)| > 1$ y $p_0 \neq \mathbf{P}$, la iteración de punto fijo no converge a \mathbf{P} .

Demostración. Por i), iv) y el teorema anterior existe un punto fijo \mathbf{P} de g . Demostremos 1) Por el teorema anterior y las hipótesis i)-iv), se prueba que el punto fijo es único, por otro lado, por el teorema del valor medio $\exists c_0 \in (a; b)$, tal que $|g(\mathbf{P}) - g(p_0)| = |g'(c_0)(\mathbf{P} - p_0)|$, pero $g(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ y $g(p_0) = p_1$, luego entonces, $\exists c_0 \in (a; b)$, tal que $|\mathbf{P} - p_1| = |g'(c_0)||\mathbf{P} - p_0| \leq K|\mathbf{P} - p_0| < |\mathbf{P} - p_0|$, de modo que, p_1 , está más cerca de \mathbf{P} que p_0 . Pero también $\exists c_1 \in (a; b)$, tal que $|g(\mathbf{P}) - g(p_1)| = |g'(c_1)(\mathbf{P} - p_1)|$, pero $g(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ y $g(p_1) = p_2$, luego entonces, $\exists c_1 \in (a; b)$, tal que $|\mathbf{P} - p_2| = |g'(c_1)||\mathbf{P} - p_1| \leq K|\mathbf{P} - p_1| < |\mathbf{P} - p_1|$, así que, $|\mathbf{P} - p_2| < |\mathbf{P} - p_1| < |\mathbf{P} - p_0|$, y p_2 está más cerca de \mathbf{P} que p_1 , en general,

$$|\mathbf{P} - p_n| < |\mathbf{P} - p_{n-1}| < \dots < |\mathbf{P} - p_1| < |\mathbf{P} - p_0|,$$

podemos probar ahora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P} - p_n| = 0.$$

En efecto probemos primero por inducción sobre que n que $|\mathbf{P} - p_n| \leq K^n |\mathbf{P} - p_0|$.

Para $n=1$ se probó que $|\mathbf{P} - p_1| \leq K|\mathbf{P} - p_0|$.

Supongamos que $|\mathbf{P} - p_n| \leq K^n |\mathbf{P} - p_0|$, luego

$$|\mathbf{P} - p_{n+1}| = |g(\mathbf{P}) - g(p_n)| = |g'(c_n)(\mathbf{P} - p_n)| = |g'(c_n)||\mathbf{P} - p_n|,$$

pero como $|g'(c_n)| \leq K$, entonces

$$|\mathbf{P} - p_{n+1}| \leq K|\mathbf{P} - p_n| \leq K K^n |\mathbf{P} - p_0|,$$

luego

$$|\mathbf{P} - p_{n+1}| \leq K^{n+1} |\mathbf{P} - p_0|.$$

Pero entonces, como $0 < K < 1$, tenemos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P} - p_{n+1}| \leq |\mathbf{P} - p_0| \lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0,$$

así que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P} - p_{n+1}| \leq 0,$$

de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P} - p_n| = 0$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \mathbf{P}.$$

La prueba de (2) se deja de ejercicio al lector. \square

Corolario 2.2.1. *Supongamos g satisfice, las hipótesis (1) del teorema anterior. Entonces las cotas del error que se comete al usar la iteración de punto fijo para aproximar a \mathbf{P} son*

$$|\mathbf{P} - p_n| \leq K^n |\mathbf{P} - p_0| \quad \forall n \geq 1$$

y

$$|\mathbf{P} - p_n| \leq \frac{K^n |p_1 - p_0|}{1 - K} \quad \forall n \geq 1$$

Demostración. La primera cota ya fue probada en el teorema anterior.

Demostremos que se cumple la otra cota.

Para $n \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |p_{n+1} - p_n| &= |g(p_n) - g(p_{n-1})| = |g'(c_{n-1})| |p_n - p_{n-1}| \leq K |p_n - p_{n-1}| \leq \\ &\cdots \leq K^n |p_1 - p_0|, \end{aligned}$$

luego

$$|p_{n+1} - p_n| \leq K^n |p_1 - p_0|.$$

Así que, para $m > n \geq 1$,

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-2} - \cdots - p_{n+1} + p_{n+1} - p_n|,$$

entonces,

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq K^{m-1} |p_1 - p_0| + K^{m-2} |p_1 - p_0| + \cdots + K^n |p_1 - p_0| \\ &= K^n |p_1 - p_0| (K^{m-n-1} + K^{m-n-2} + \cdots + K^2 + K + 1), \end{aligned}$$

pero como

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = \mathbf{P},$$

tenemos que,

$$|\mathbf{P} - p_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} K^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} K^i \leq K^n |p_1 - p_0| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-n-1} K^i,$$

pero $\sum_{i=0}^{m-n-1} K^i$ es una serie geométrica de razón K con $0 < K < 1$, luego la sucesión converge a $\frac{1}{1-K}$, y entonces,

$$|\mathbf{P} - p_n| \leq K^n |p_1 - p_0| \frac{1}{1-K} = \frac{K^n |p_1 - p_0|}{1-K}$$

□

Teorema 2.2.10. *Si g es diferenciable en $[a; b]$ y P es un punto fijo de g de orden $m > 1$, entonces, la iteración de punto fijo tiene orden de convergencia $m > 1$ y si $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [a; b]$, entonces el método converge linealmente.*

Demostración. Supongamos $g(x) = P + (x - P)^m q(x)$, entonces, $g^{(k)}(P) = 0$, para $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$ y $g^{(m)}(P) \neq 0$, por el desarrollo de Taylor de $g(x_n)$ alrededor de P , tenemos que,

$$g(x_n) = P + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x_n - P)^k}{k!} g^{(k)}(P) + \frac{(x_n - P)^m}{m!} g^{(m)}(P) + O[(x_n - P)^{m+1}],$$

de modo que,

$$g(x_n) = P + \frac{(x_n - P)^m}{m!} g^{(m)}(P) + O[(x_n - P)^{m+1}],$$

luego,

$$x_{n+1} = P + \frac{(x_n - P)^m}{m!} g^{(m)}(P) + O[(x_n - P)^{m+1}],$$

o sea que

$$x_{n+1} - P = \frac{(x_n - P)^m}{m!} g^{(m)}(P) + O[(x_n - P)^{m+1}],$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - P}{(x_n - P)^m} = \frac{g^{(m)}(P)}{m!},$$

luego, el método tiene convergencia de orden $m > 1$ si P , es un punto fijo de orden m .

En particular si $m = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - P}{(x_n - P)} = g'(P) < 1$$

y la convergencia es lineal. \square

Ejemplo 2.2.1. Usa la iteración de punto fijo para calcular un cero de $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

Solución

Como $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ entonces calcular un cero de $f(x)$ equivale a obtener un punto fijo de $x = g(x) = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$, los resultados de la iteración de punto fijo se tiene en la tabla siguiente

k	x_k	$g(x) = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$	$ f(x_k) $
0	x_0	0.3333333333	0.3101361
1	x_1	0.23849956201	0.072040205
2	x_2	0.26251296367	0.01881916
4	x_3	0.25623991092	0.0048764885
5	x_4	0.25786540708	0.00126628
6	x_5	0.25744331555	0.00032863
7	x_6	0.25755285996	0.000085301
8	x_7	0.25752442613	0.00002214
9	x_8	0.25753180627	0.000005747

TABLA 3

Como puede observarse $|f(x_8)| \approx 0$ ■

2.3. Análisis Gráfico del Método de Punto Fijo

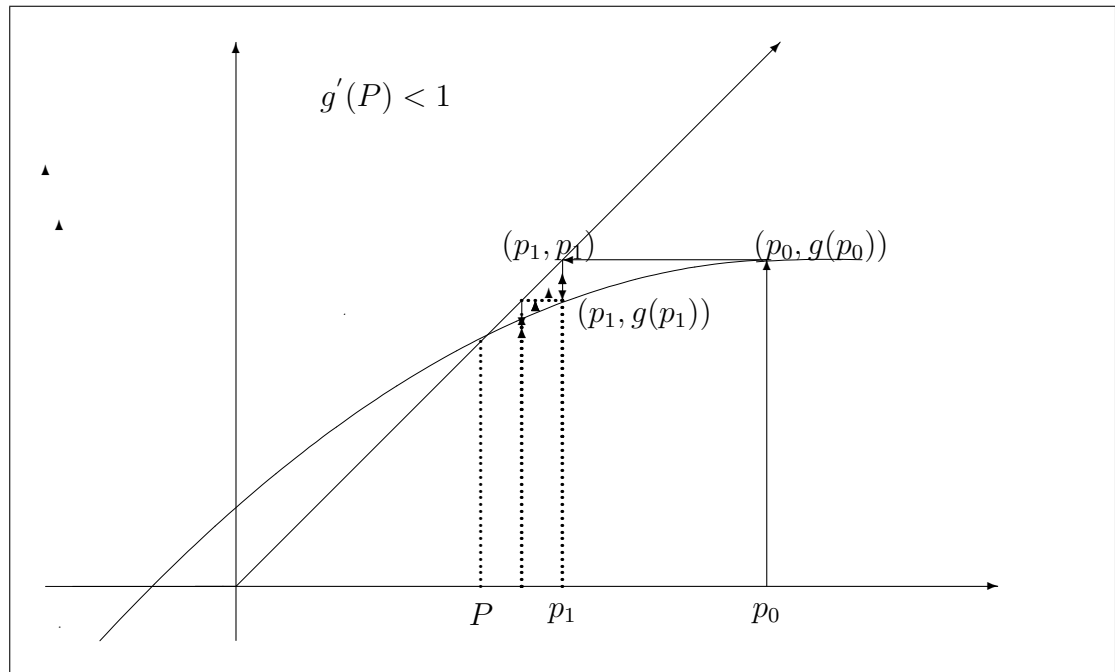


Figura 2.1 Convergencia Monótona

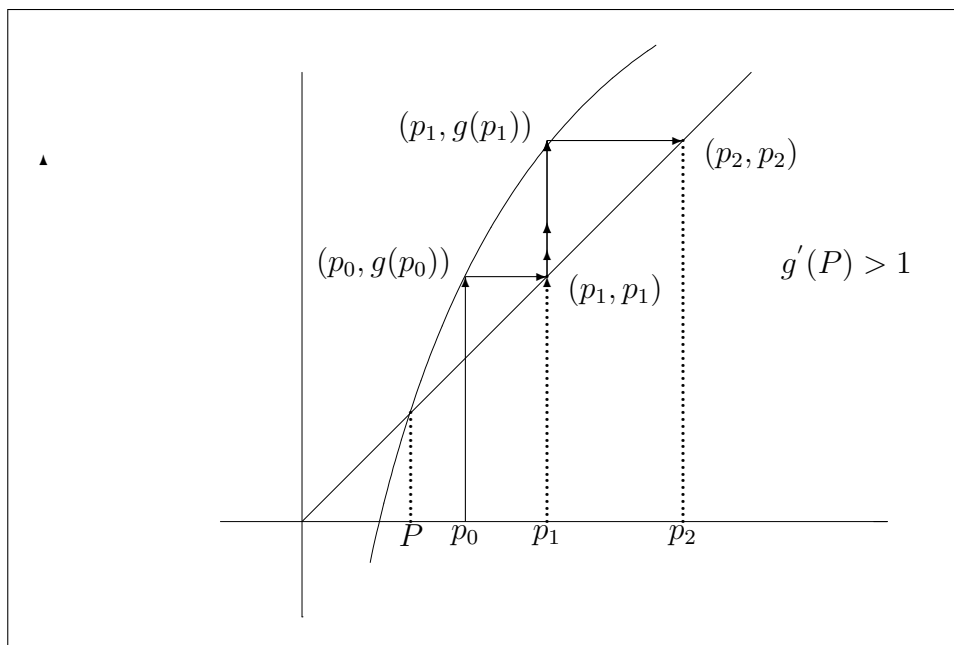


Figura 2.2 Divergencia Monótona

2.4. Métodos de Localización de Raíces

2.4.1. Método de Bisección o Búsqueda Binaria

Otra alternativa que estudiaremos con el propósito de encontrar un cero de una función, es el método de bisección o búsqueda binaria el cual presentamos a continuación.

Supongamos $f \in [a_0, b_0]$ con $f(a_0)f(b_0) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $r \in [a_0, b_0]$, tal que, $f(r) = 0$ (f corta al eje X en el punto $(r, 0)$).

Sea $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, entonces puede suceder tres casos:

i) $f(c_0) = 0$ ii) $f(a_0)f(c_0) < 0$ iii) $f(c_0)f(b_0) > 0$.

Si se tiene i) entonces $r = c_0$. Si se cumple ii), la raíz está en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = a_0$ y $c_0 = b_1$, y si se tiene iii) la raíz está en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = c_0$ y $b_0 = b_1$ en estos dos últimos casos se tiene que $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$.

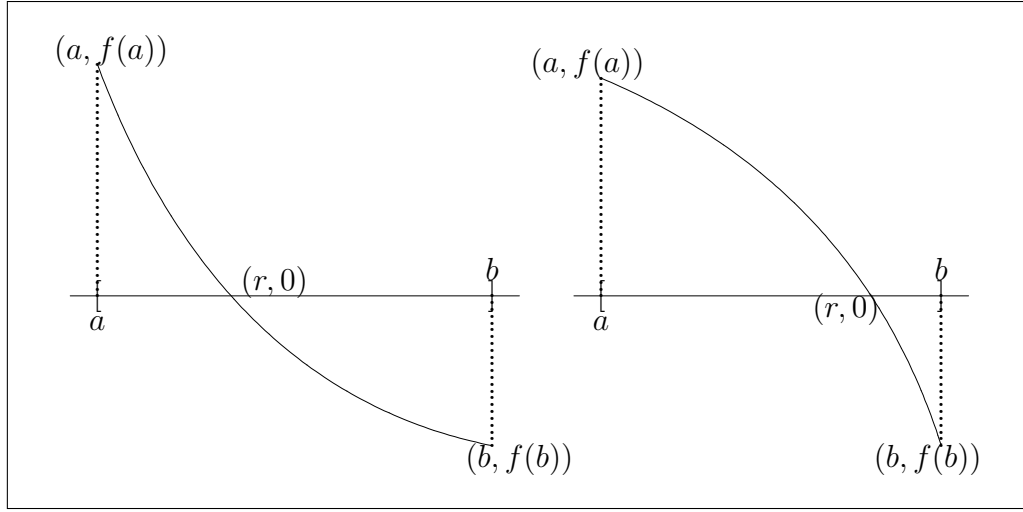


Figura 2.3 Método de Bisección

Sea ahora $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, entonces igual que antes se puede tener:

$$\text{i) } f(c_1) = 0 \quad \text{ii) } f(a_1)f(c_1) < 0 \quad \text{iii) } f(c_1)f(b_1) > 0 .$$

Si se tiene i) entonces $r = c_1$. Si se cumple ii), la raíz está en el intervalo $[a_2, b_2]$ donde $a_2 = a_1$ y $c_1 = b_2$, y si se tiene iii) la raíz está en el intervalo $[a_2, b_2]$ donde $a_2 = c_1$ y $b_1 = b_2$ en estos dos últimos casos se tiene que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Continuando con este proceso se toma $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ generando una sucesión de intervalos $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$, con $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Con el propósito de probar el teorema de convergencia del método de búsqueda binaria presentamos las siguientes definiciones y resultados.

Definición 2.4.1. Una sucesión $\{a_n\}$ es creciente, si

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

Definición 2.4.2. Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, si

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

Definición 2.4.3. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente, si existe una constante M tal que

$$a_n \leq M \quad \forall n$$

Definición 2.4.4. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente, si existe una constante M tal que

$$a_n \geq M \quad \forall n$$

Definición 2.4.5. Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si tiende a un límite finito.

Definición 2.4.6. Una sucesión $\{a_n\}$ es divergente si no tiene límite finito.

Teorema 2.4.1. TEOREMA DE WEIERSTRASS Una sucesión creciente y acotada superiormente tiende a un límite, y una sucesión decreciente y acotada inferiormente tiende a un límite.

Teorema 2.4.2. TEOREMA DE CONVERGENCIA Supongamos $f \in C[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de puntos medios generada por el método de búsqueda binaria. Existe $r \in [a, b]$, tal que $f(r) = 0$ y además

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}},$$

en particular $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a r

Demostración. Observemos que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_0$ y que $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a_0$, por tanto la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y está acotada luego por el teorema de Weierstrass es converge y $\{b_n\}$ es decreciente y acotada así que nuevamente por el teorema de Weierstrass converge.

Pero $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$, en general $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = (b_0 - a_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n},$$

pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

así que

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

como $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, entonces, por la continuidad de f se tiene que,

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) \leq 0,$$

por tanto

$$f(r)f(r) \leq 0,$$

de modo que

$$0 \leq [f(r)]^2 \leq 0,$$

y así

$$f(r) = 0.$$

Pero

$$|r - c_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}, \forall n,$$

ya que la distancia entre r y c_n no puede ser mayor que la mitad de ancho de $[a_n, b_n]$, figura 2.4 además

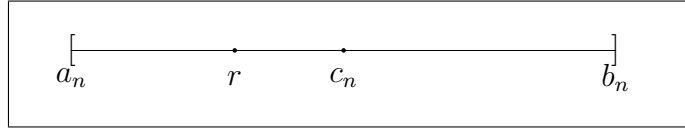


Figura 2.4

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

entonces,

$$|r - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}},$$

así que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |r - c_n| \leq (b_0 - a_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = r.$$

□

Se puede probar que el número de iteraciones necesarias que nos garantizaría que el punto medio c_N generado por el método de bisección converge,

está dado por $N = \left\lceil \left| \frac{\ln(b-a) - \ln \delta}{\ln 2} \right| \right\rceil$, donde como sabemos $\lceil x \rceil$ es la parte entera de x , para un delta previamente escogido. En efecto sea

$$\frac{|b-a|}{2^{n+1}} < \delta,$$

entonces tomando logaritmo a ambos lados se tiene que

$$\ln \frac{|b-a|}{2^{n+1}} < \ln \delta,$$

luego

$$\ln |b-a| - \ln 2^{n+1} < \ln \delta,$$

o sea que

$$\ln |b-a| - (n+1) \ln 2 < \ln \delta,$$

pero entonces

$$n+1 > \left(\frac{\ln |b-a| - \ln \delta}{\ln 2} \right),$$

pero como el número de iteraciones tiene que ser un número entero, se tiene que necesariamente

$$N = \left\lceil \left| \frac{\ln(b-a) - \ln \delta}{\ln 2} \right| \right\rceil.$$

Ejemplo 2.4.1. *Aplicar el método de bisección para encontrar un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, en el intervalo $[-2, -1]$*

Solución

Los resultados obtenidos al aplicar el método de bisección se muestran en las tablas 4a) y 4b)

k	a_k	c_k	b_k
0	-2	-1.5000000	-1
1	-1.5	-1.25	-1
2	-1.5	-1.375	-1.25
3	-1.5	-1.4375	-1.375
4	-1.4375	-1.40625	-1.375
5	-1.4375	-1.421875	-1.40625
6	-1.421875	-1.4140625	-1.40625
7	-1.421875	-1.41796875	-1.4140625
8	-1.41796875	-1.416015625	-1.4140625
9	-1.416015625	-1.4150390625	-1.4140625
10	-1.4150390625	-1.41455078125	-1.4140625
11	-1.41455078125	-1.41430664063	-1.4140625
12	-1.41430664063	-1.41418457031	-1.4140625
13	-1.41430664063	-1.41424560547	-1.41418457031
14	-1.41424560547	-1.41421508789	-1.41418457031
15	-1.41421508789	-1.4141998291	-1.41418457031
16	-1.41421508789	-1.4142074585	-1.4141998291

TABLA 4a)

k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	12	0.8125	-1
1	0.8125	-0.9023	-1
2	0.8125	-0.28882	-0.9023
3	0.8125	0.19533	-0.28882
4	0.19533	-0.00267	-0.28882
5	0.19533	0.06226	-0.00267
6	0.06226	-0.001208	-0.00267
7	0.06226	0.0302	-0.001208
8	0.0302	0.01447	-0.001208
9	0.01447	-0.00713	-0.001208
10	0.01447	0.003637	-0.00713
11	0.003637	-0.0017565	-0.00713
12	0.003637	0.000938	-0.0017565
13	0.000938	-0.000408	-0.0017565
14	0.000938	0.00026	-0.000408
15	0.00026	-0.000072	-0.000408
16	0.00020	0.0000967	-0.000072

TABLA 4b)

En la iteración 16 observamos que para $x_{16} = -1.4142074585$, se tiene $|f(x_{16})| = 0.0000488 \approx 0$ ■

2.5. Método de Falsa Posición o Regula Falsi

El método de la falsa posición o regla falsi, es otra alternativa usada para resolver el problema de encontrar el cero de una función dada y difiere del método de bisección en la forma como se consiguen los valores de c_n , el método de falsa posición se explica a continuación.

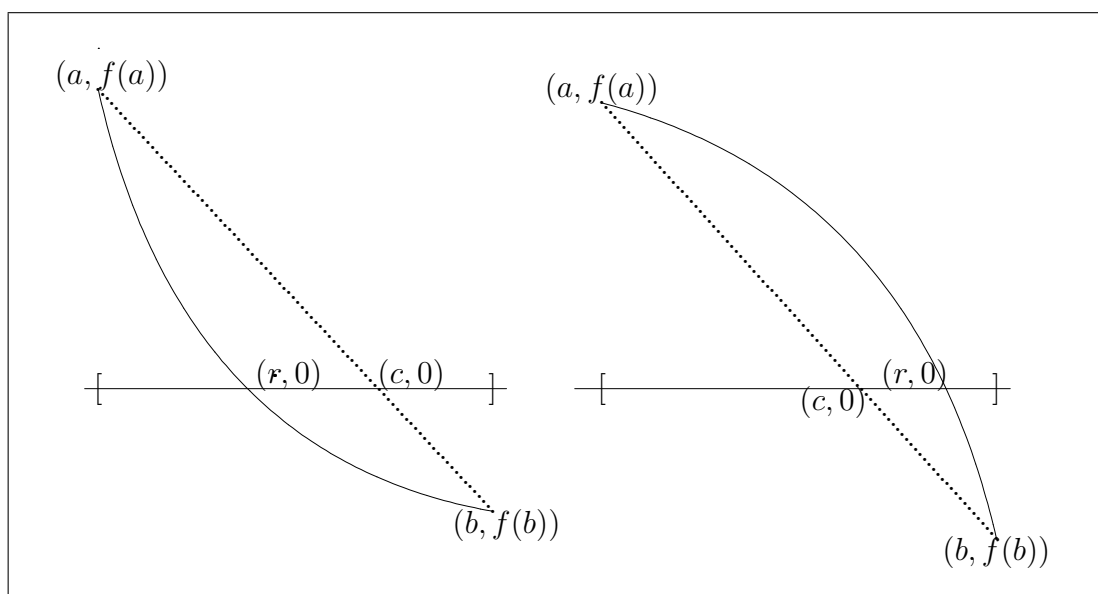


Figura 2.5

Sea $f(a)f(b) < 0$ y consideremos la recta que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ cuya pendiente es $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, pero si $(c, 0)$ es el punto de intersección de la recta con el eje X, entonces también $m = \frac{0 - f(b)}{c - b}$, luego

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(b)}{c - b},$$

o sea que

$$c - b = \frac{-f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)},$$

luego

$$c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)},$$

de modo que

$$c = \frac{bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b)}{f(b) - f(a)},$$

o también

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:

i) $f(c) = 0$ ii) $f(a)f(c) < 0$ iii) $f(c)f(b) < 0$.

Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f .

Si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay un cero de f en $[a; c]$.

Si $f(c)f(b) < 0$, entonces hay un cero de f en $[c; b]$.

Lo anterior sugiere un proceso iterativo que se concreta tomando

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ejemplo 2.5.1. *Aplicar el método de falsa posición para encontrar un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, en el intervalo $[-2, -1]$*

Solución

Los resultados obtenidos al aplicar el método de falsa posición son

k	c_k
0	-1.07692307692
1	-1.15467487495
2	-1.22537135188
3	-1.28347784602
4	-1.32725869259
5	-1.35806965506
6	-1.37870355683
7	-1.39205970195
8	-1.40051361035
9	-1.40578848384
10	-1.40905028226
11	-1.41105601959
12	-1.412285138223
13	-1.41303675163
14	-1.41349577272
15	-1.413775884687
16	-1.41394673027
17	-1.41405090632
18	-1.41411441692
19	-1.41415313171
20	-1.4141767299
21	-1.41419111333
22	-1.41419988002

TABLA 5

En la iteración 23 se tiene que $|f(x_{23})| = 0.000109 \approx 0$ ■

2.6. Método de Newton

En la búsqueda de los ceros de una función uno de los métodos más atractivos debido a su rápida convergencia, ya que en general es q-cuadrático, es el de Newton, el cual presentamos a continuación.

Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$, una función diferenciable en $[a, b]$ y sea $x_0 \in [a, b]$, entonces para todo $x \in (a, b)$, sabemos por el Teorema de Taylor que f se puede escribir de la forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots$$

si r es el cero de la función y $x_0 \approx r$, entonces podemos tomar la aproximación lineal dada por $M(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, el método desea encontrar punto x_+ , tal que $M(x_+) = 0$, lo cual se consigue si

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_+ - x_0),$$

por tanto

$$x_+ = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

o sea

$$s_+ = x_+ - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Lo anterior sugiere el siguiente algoritmo.

ALGORITMO DE NEWTON

Dado $f : R \mapsto R$ continuamente diferenciable y $x_0 \in R$

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, “hasta converger”

$$\text{Resuelva } s_k = \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\text{Haga } x_{k+1} = x_k + s_k.$$

El método de Newton también se puede establecer observando en la fig 2.6 que la recta que pasa por los puntos $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, 0)$ tiene pendiente $f'(p_0)$, luego se tiene que

$$f'(p_0) = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{-f(p_0)}{p_1 - p_0},$$

por tanto

$$p_1 - p_0 = \frac{-f(p_0)}{f'(p_0)},$$

o sea nuevamente

$$s_1 = p_1 - p_0 = \frac{-f(p_0)}{f'(p_0)}$$

como antes.

Una de las desventajas de este método es que en cada iteración se debe evaluar $f(x)$ y $f'(x)$, lo cual para algún tipo de funciones es muy costo computacionalmente. Otra de las desventajas es que la convergencia se garantiza sólo si se inicia el proceso desde un punto x_0 aceptable (

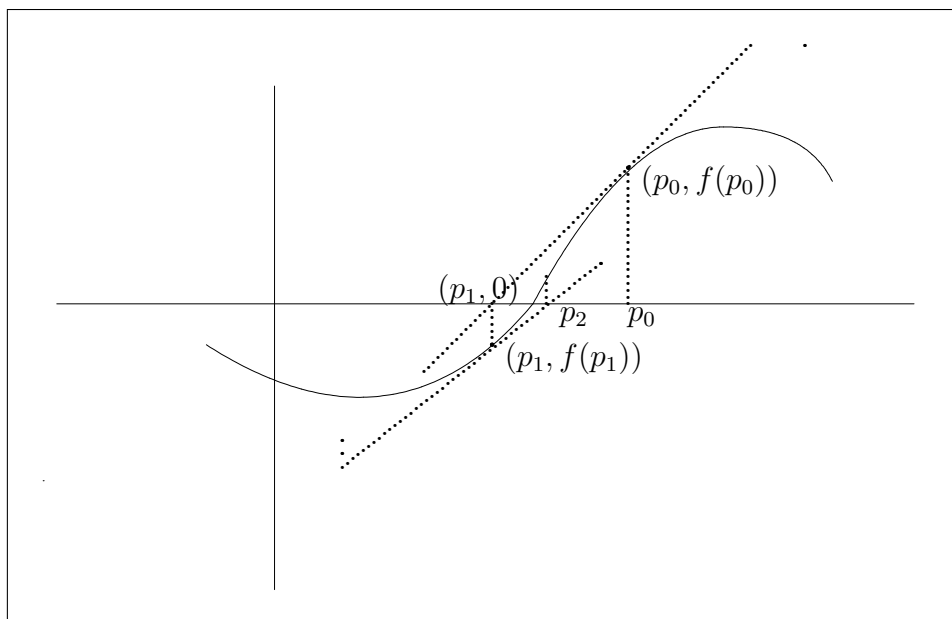


Figura 2.6 Método de Newton

suficientemente próximo a la solución x^*), es decir, se debe tener un x_0 tal que $|x_0 - x^*|$ sea suficientemente pequeño. Por ejemplo, si consideramos el problema clásico de hallar la solución de $\arctan x = 0$, el método converge si se toma x_0 suficientemente próximo a la solución $x^* = 0$, en caso contrario el método diverge. Lo anterior lo mostramos en la siguiente tabla

Iteración	$f(x) = \arctan x$	$f(x) = \arctan x$
x_0	1.0000000	1.5000000
x_1	-0.5707963	-1.6940795
x_2	0.1168598	2.3211265
x_3	-0.0010609	-5.1140853
x_4	0.0000000	32.295648
x_5	.	-1575.3134

TABLA 6

En la Tabla 6, observamos cómo al aplicar el método de Newton iniciando en $x_0 = 1.0$, obtenemos la respuesta en 5 iteraciones, mientras que si lo iniciamos en $x_0 = 1.5$, el método diverge.

Ejemplo 2.6.1. Sea $f(x) = x^3 - x + 2$ encuentre x^* tal que $f(x^*) = 0$ si $p_0 = -1.4$.

Solución

Como $f(x) = x^3 - x + 2$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 1$ pero la iteración de Newton como hemos visto es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

entonces al aplicar dicha iteración, se obtienen los resultados dados en la siguiente tabla.

k	x_k	$f(x) = x^3 - x + 2$	$ f(x_k) $
0	x_0	-1.4	0.656
1	x_1	-1.53442622951	0.07832486421
2	x_2	-1.52150857169	0.00076602144
3	x_3	-1.52139827287	0.00011035434
4	x_4	-1.52137970707	0.00000000157
5	x_5	-1.52137970681	0.00000000003

TABLA 7

Como puede observarse $|f(x_5)| = 0.00000000003$, de modo que $x_5 \approx x^*$ ■

Ejemplo 2.6.2. *Aplicar el método de Newton para obtener la solución de*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

Solución

Partiendo de $x_0 = -3$ se tiene la siguiente tabla

k	x_k	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$	$ f(x_k) $
0	x_0	-2.88888888889	-0.0722702332
1	x_1	-2.87945156695	-0.0005038501
2	x_2	-2.87938524484	-0.000000248
3	x_3	-2.87938524157	0.0000000000

TABLA 8

La solución $x_3 = -2.87938524157$ se tiene en cuatro iteraciones. ■

2.6.1. Convergencia del Método de Newton

En esta sección probaremos un resultado que muestra que el método de Newton converge q-cuadráticamente, pero para esto necesitamos establecer unos resultados previos.

Teorema 2.6.1. Teorema Generalizado del Valor Medio Si se cumple que

1. f y g continuas en un intervalo $[a, b]$
2. f y g diferenciables en el intervalo $[a, b]$
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$,

entonces existe $c \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración. Se tiene que $g(a) \neq g(b)$, ya que si $g(a) = g(b)$, entonces, por el teorema del valor medio existe $c \in (a, b)$, tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0,$$

y por hipótesis $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ lo que es una contradicción.

Sea $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$, entonces $\phi(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , además, $\phi(a) = 0$ y $\phi(b) = 0$ ya que

$$\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(a) - g(a)] = 0$$

y

$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0,$$

luego aplicando el teorema de Rolle a $\phi(x)$, se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$, pero como

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x),$$

entonces

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0,$$

luego

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)],$$

por lo tanto

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Teorema 2.6.2. *Si f cumple las siguientes condiciones*

1. f y f' son continuas en un intervalo cerrado $I = [c, c + h]$
2. $f''(x)$ existe si $x \in (c, c + h)$
3. $E = f(c + h) - [f(c) + f'(c)h]$
4. Existe M tal que $|f''(x)| \leq M, \forall x \in (c, c + h)$

entonces, $|E| \leq \frac{1}{2}Mh^2$

Demostración. Sea $F(x) = f(x) + f'(x)(c + h - x)$, $G(x) = (c + h - x)^2$, entonces F y G satisfacen las hipótesis del teorema anterior y por lo tanto, existe $m \in (c, c + h)$ tal que

$$\frac{F'(m)}{G'(m)} = \frac{F(c + h) - F(c)}{G(c + h) - G(c)}, \quad (2.5)$$

pero

$$F(c + h) - F(c) = [f(c + h) + f'(c + h) \times 0] - [f(c) + f'(c)h] = f(c + h) - f(c) - f'(c)h$$

y

$$G(c + h) - G(c) = (c + h - c - h)^2 - (c + h - c)^2 = -h^2,$$

luego

$$\frac{F(c + h) - F(c)}{G(c + h) - G(c)} = \frac{f(c + h) - f(c) - f'(c)h}{-h^2},$$

y como

$$F'(x) = f'(x) - f'(x) + f''(x)(c + h - x) = f''(x)(c + h - x)$$

y

$$G'(x) = -2(c + h - x),$$

entonces tomando $x = m$ se tiene que

$$F'(m) = f''(m)(c + h - m)$$

y

$$G'(m) = -2(c + h - m),$$

así que de 2.5 tenemos que

$$\frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{-h^2} = \frac{f''(m)(c+h-m)}{-2(c+h-m)} = \frac{f''(m)}{-2}$$

por el inciso 3 de la hipótesis

$$\frac{E}{-h^2} = \frac{f''(m)}{-2},$$

o sea que

$$E = \frac{h^2}{2} f''(m),$$

luego

$$|E| = \left| \frac{h^2}{2} f''(m) \right| = |f''(m)| \frac{h^2}{2} \leq M \frac{h^2}{2},$$

luego en efecto

$$|E| \leq M \frac{h^2}{2}.$$

□

Teorema 2.6.3. *Si se cumple que*

1. *f tiene primera y segunda derivada en un intervalo abierto I que contiene un número x^* con $f(x^*) = 0$*
2. *$\exists m > 0$, tal que $|f'(x)| \geq m$, $\forall x \in I$*
3. *$\exists M > 0$, tal que $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in I$*
4. *$x_n, x_{n+1} \in I$, son aproximaciones sucesivas de x^* producidas por el método de Newton.*

entonces

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x^*|^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Demostración. Sea E el error que resulta de usar $f(x_n)$ como una aproximación para $f(x^*) = 0$, entonces,

$$E = f(x^*) - [f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)] = -[f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)],$$

pero por el teorema anterior

$$|E| \leq \frac{1}{2}M(x_n - x^*)^2.$$

Como $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$x_{n+1} - x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = \frac{-[f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)]}{f'(x_n)},$$

luego

$$x_{n+1} - x^* = \frac{E}{f'(x_n)},$$

por tanto

$$|x_{n+1} - x^*| = \frac{|E|}{|f'(x_n)|} \leq \frac{M(x_n - x^*)^2}{2|f'(x_n)|},$$

pero $\frac{1}{|f'(x_n)|} \leq \frac{1}{m}$, luego

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x^*|^2.$$

□

Como podemos observar el teorema anterior muestra que el método de Newton en general converge q-cuadráticamente.

2.7. Método Modificado de Newton

Hemos dicho que en general el método de Newton converge cuadráticamente sin embargo cuando la raíz no es simple solo se garantiza la convergencia lineal, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.7.1. *Sea una función diferenciable en un intervalo $[a; b]$ que contiene a r y supongamos r es un cero de multiplicidad $p > 1$, entonces el método de Newton converge q-linealmente.*

Demostración. Como r es un cero de multiplicidad $p > 1$, entonces, $f(x) = (x - r)^p q(x)$, con $q(r) \neq 0$. Sea

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

como la iteración de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

esta se puede considerar una iteración de punto fijo para $g(x)$.

Luego

$$g(x) = x - \frac{(x-r)^p q(x)}{p(x-r)^{p-1}q(x) + (x-r)^p q'(x)} = x - \frac{(x-r)q(x)}{pq(x) + (x-r)q'(x)},$$

así que

$$g'(r) = 1 - \frac{p[q(r)]^2}{p^2[q(r)]^2} = 1 - \frac{1}{p},$$

pero como $p > 1$, entonces $1 - \frac{1}{p} < 1$, de modo que $0 \neq g'(r) < 1$, así que por el teorema 2.2.10, el método de Newton converge q-linealmente. \square

Ejemplo 2.7.1. *Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, partiendo de $x_0 = 1.5$.*

Solución

Observemos que $f(x)$ tiene en $r = 2$ un cero de multiplicidad 2, y partiendo de $x_0 = 1.5$ obtenemos los siguientes resultados.

i	x_i	$ x_i - x^* $	$\frac{ x_{i+1} - x^* }{ x_i - x^* }$
0	1.5	0.5	0.4
1	1.8	0.2	0.47
2	1.905882359	0.0941	0.49
3	1.954132539	0.04587	0.494
4	1.9773386164	0.02266	0.497
5	1.988734610	0.011266	0.498
6	1.994383304	0.0056167	0.499
7	1.997195612	0.0028044	0.499
8	1.998598791	0.00140121	0.499
9	1.999299641	0.00070036	0.4999
10	1.999649882	0.00035012	0.4999
11	1.999824956	0.00017504	0.4999
12	1.999912482	0.00008752	0.5
13	1.999956242	0.0000438	0.5
14	1.999978121	0.000021879	0.499
15	1.999989061	0.000010939	0.4999
16	1.999994530	0.00000547	0.5
17	1.999997265	0.000002735	0.5

TABLA 9

Como podemos observar, el método de Newton en este caso tiene un comportamiento lineal. ■

Con el propósito de mejorar la convergencia del método, este se puede modificar, cuando como en este caso el cero buscado sea de multiplicidad $m > 1$.

Supongamos que r es un cero de multiplicidad $m > 1$, entonces,

$$f(x) = (x - r)^m q(x),$$

con $q(r) \neq 0$, definamos

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - r)q(x)}{mq(x) + (x - r)q'(x)}.$$

Observemos primero que r es también un cero de $g(x)$ ya que

$$g(r) = \frac{(r - r)q(r)}{mq(r) + (r - r)q'(r)} = \frac{0}{mq(r)} = 0,$$

además r es un cero simple de $g(x)$ puesto que esta función se puede escribir de la forma

$$g(x) = (x - r) \left[\frac{q(x)}{mq(x) + (x - r)q'(x)} \right] = (x - r)s(x),$$

donde

$$s(x) = \frac{q(x)}{mq(x) + (x - r)q'(x)},$$

con

$$s(r) = \frac{q(r)}{mq(r) + (r - r)q'(r)} = \frac{q(r)}{mq(r)} = \frac{1}{m} \neq 0.$$

Consideremos la función de iteración

$$h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}},$$

la cual nos da un método de Newton por lo menos q -cuadrático luego,

$$h(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)},$$

lo anterior sugiere un proceso iterativo, el cual se concreta al escribir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Ejemplo 2.7.2. Usar el método de modificado Newton para encontrar un cero de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, partiendo de $x_0 = 1.5$

Solución

Al aplicar el método modificado de Newton partiendo de $x_0 = 1.5$, con una tolerancia de 10^{-10} los resultados que se obtienen son:

k	x_k	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$	$ f(x_k) $
0	x_0	1.5	
1	x_1	1.89473684210526	0.02099431403
2	x_2	1.99691833590139	0.00001896406
3	x_3	1.99999761850615	0.0000000000001
4	x_4	1.9999999999256	0.0000000000001

TABLA 10

Si comparamos los resultados obtenidos ahora con los anteriores, observamos que la rapidez de convergencia es mayor. ■

Otra alternativa muy usada que permite acelerar el método de Newton está dada por

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$, siendo m la multiplicidad del cero de $f(x)$.

2.8. Método de la Secante

Como hemos dicho una de las desventajas del método de Newton es que en cada iteración hay que evaluar tanto a $f(x)$ como a $f'(x)$, para atenuar esa desventaja se propone el método de la secante que es casi tan rápido como el de Newton, pero no posee la desventaja comentada.

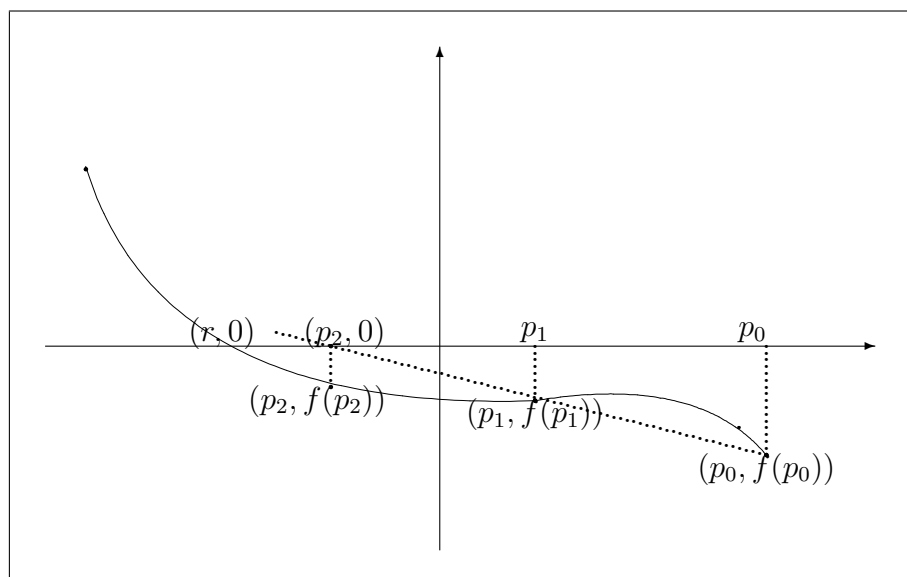


Figura 2.7 Método de la Secante

En el método de la secante partimos de dos puntos $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$, como lo muestra la figura 2.7 por esos dos puntos pasa una secante que los

una y cuya pendiente es

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0},$$

pero puesto que esta recta secante corta al eje X en el punto $(p_2, 0)$, entonces también se tiene que

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1},$$

luego entonces

$$\frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1},$$

por tanto

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)},$$

este proceso genera la fórmula de iteración dada por

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}.$$

Como hemos dicho el método de secante se propone para mejorar alguna de las desventajas que presenta el método de Newton, sin quitar mucho de su rapidez de convergencia, con el teorema siguiente se prueba que el método de la secante converge con una rapidez de convergencia dada por $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Teorema 2.8.1. Sea x^* un cero de $f(x)$ y supongamos que $f''(x^*) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Demostración. Sea $e_k = p_k - x^*$, $k = 0, 1, 2, \dots$, como

$$p_{k+1} = \frac{p_{k-1}f(p_k) - p_k f(p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} p_{n+1} - x^* &= \frac{p_{n-1}f(p_n) - p_n f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})} - \frac{x^*(f(p_n) - f(p_{n-1}))}{f(p_n) - f(p_{n-1})} \\ &= \frac{(p_{n-1} - x^*)f(p_n) - (p_n - x^*)f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})}, \end{aligned}$$

de modo que

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1}f(x^* + e_n) - e_n f(e_{n-1} + x^*)}{f(x^* + e_n) - f(e_{n-1} + x^*)},$$

pero por el desarrollo de Taylor de $f(x^* + e_n)$ y $f(x^* + e_{n-1})$ alrededor de x^* tenemos que

$$f(x^* + e_n) = f(x^*) + f'(x^*)e_n + \frac{1}{2}f''(x^*)e_n^2 + \dots$$

y

$$f(x^* + e_{n-1}) = f(x^*) + f'(x^*)e_{n-1} + \frac{1}{2}f''(x^*)e_{n-1}^2 + \dots,$$

pero como $f(x^*) = 0$ entonces,

$$e_{n-1}f(x^* + e_n) = f'(x^*)e_n e_{n-1} + \frac{1}{2}f''(x^*)e_n^2 e_{n-1} + \dots$$

y

$$e_n f(x^* + e_{n-1}) = f'(x^*)e_{n-1} e_n + \frac{1}{2}f''(x^*)e_{n-1}^2 e_n + \dots,$$

además

$$f(x^* + e_n) - f(x^* + e_{n-1}) = f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(x^*)(e_n^2 - e_{n-1}^2) + \dots$$

de modo que

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)e_n e_{n-1}(e_n - e_{n-1}) + \dots}{f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \dots},$$

para $|e_{n-1}|$ y $|e_n|$ suficientemente pequeños tenemos que

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(x^*)e_n e_{n-1}}{2f'(x^*)},$$

así que

$$|e_{n+1}| \approx M|e_n e_{n-1}| = M|e_n||e_{n-1}|,$$

siendo $M = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$, pero queremos obtener el valor de p , para el cual se cumpla que

$$|x^* - x_n| = \alpha|x^* - x_{n-1}|^p,$$

o sea que

$$|e_n| = \alpha|e_{n-1}|^p,$$

con $\alpha > 0$, $p \geq 1$, pero también

$$|e_{n+1}| = \alpha|e_n|^p = \alpha(\alpha|e_{n-1}|^p)^p,$$

de modo que

$$\alpha^{p+1}|e_{n-1}|^{p^2} = M(\alpha|e_{n-1}|^p)|e_{n-1}|,$$

de modo que

$$\alpha^{p+1}|e_{n-1}|^{p^2} = \alpha M(|e_{n-1}|^{p+1}),$$

la cual es válida si $\alpha^p = M$ y $p^2 = p + 1$, de modo que

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

□

Ejemplo 2.8.1. *Aplique el método de la Secante para obtener la solución de*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$$

en el intervalo $[-3, -2]$

Solución

k	x_k	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$	$ f(x_k) $
0	x_0	-2.75000000000	0.890625
1	x_1	-3.06666666667	1.626962963
2	x_2	-2.86202438769	0.1301835722
3	x_3	-2.87718593646	0.0166792473
4	x_4	-2.87941389757	0.00021768
5	x_5	-2.87938519474	0.0000003558
6	x_6	-2.87938524157	0.000000000

TABLA 11

Lo anterior nos muestra que la raíz de $f(x)$ es $x_6 = -2.87938524157$, la cual se tiene en 7 iteraciones, y que el método si bien es suficientemente rápido, el método de Newton sigue siendo más eficiente lo cual era de esperarse puesto que como hemos probado Newton es q-cuadrático en tanto que el orden de convergencia de el método de la Secante es $p \approx 1.618$. ■

2.9. Método Δ^2 de Aitken

Es posible aumentar la rapidez de convergencia de una sucesión, cuando esta converge linealmente, esto se hace usando una técnica llamada método Δ^2 de **Aitken**, antes de exhibir el método Δ^2 de Aitken estableceremos la siguiente definición

2.9. MÉTODO Δ^2 DE AITKEN

Definición 2.9.1. Supongamos $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión, definimos la diferencia progresiva Δp_n como

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \quad n \geq 0$$

Para $k \geq 2$ se define recursivamente $\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n)$

Lo que deseamos es, construir una sucesión $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ que converja a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, para ello supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, converge a p , que $p_n - p$, $p_{n+1} - p$, $p_{n+2} - p$, tienen el mismo signo y que $\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$, luego

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p),$$

así que

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1}p + p^2 \approx p_n p_{n+2} - p p_{n+2} - p p_n + p^2,$$

pero entonces

$$p p_{n+2} + p p_n - 2p p_{n+1} \approx p_n p_{n+2} - p_{n+1}^2,$$

o sea que

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})p \approx p_n p_{n+2} - p_{n+1}^2,$$

entonces

$$p \approx \frac{p_n p_{n+2} - p_{n+1}^2}{p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1}} = \frac{p_n^2 + p_n p_{n+2} - 2p_n p_{n+1} + 2p_n p_{n+1} - p_{n+1}^2 - p_n^2}{p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1}},$$

de modo que

$$p \approx \frac{p_n(p_n + p_{n+2} - 2p_{n+1}) - (p_n^2 - 2p_n p_{n+1} + p_{n+1}^2)}{p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1}},$$

luego

$$p \approx p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n},$$

pero $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$ y $\Delta^2 p_n = \Delta(\Delta p_n) = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = p_{n+2} - p_{n+1} - p_{n+1} + p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$, de modo que

$$p \approx p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n},$$

definamos la sucesión $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ por

$$q_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \quad (2.6)$$

Mostremos ahora que la sucesión $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$

Teorema 2.9.1. *Supongamos $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p linealmente y supongamos que $(p_n - p)(p_{n+1} - p) > 0$, para n suficientemente grande. Entonces la sucesión $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por 2.6 converge a p más rápidamente que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q_n - p}{p_n - p} \right| = 0$$

Demostración. Como $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge linealmente a p , entonces existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \right| = \lambda,$$

luego, entonces existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - \lambda \right| = 0,$$

de modo que si $\delta_n = \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - \lambda$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

pero como $E_n = p_n - p$ y $E_{n+1} = p_{n+1} - p$, entonces $\delta_n = \frac{E_{n+1}}{E_n} - \lambda$, de modo que $E_{n+1} = E_n \delta_n + \lambda E_n$, o sea que

$$E_{n+1} = (\delta_n + \lambda)E_n,$$

así que

$$E_{n+2} = (\delta_{n+1} + \lambda)E_{n+1} = (\delta_{n+1} + \lambda)(\delta_n + \lambda)E_n,$$

pero

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = (p_{n+1} - p) + (p - p_n) = E_{n+1} - E_n,$$

de modo que

$$\Delta p_n = E_n \delta_n + \lambda E_n - E_n = (\delta_n + \lambda - 1)E_n,$$

así que,

$$\Delta^2 p_n = \Delta(\Delta p_n) = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = p_{n+2} - p_{n+1} - p_{n+1} + p_n$$

luego

$$\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n = (p_{n+2} - p) - 2(p_{n+1} - p) + (p_n - p) = E_{n+2} - 2E_{n+1} + E_n$$

o sea que

$$\begin{aligned}\Delta^2 p_n &= (\delta_{n+1} + \lambda)(\delta_n + \lambda)E_n - 2(\delta_n + \lambda)E_n + E_n \\ &= \lambda^2 E_n + (\delta_{n+1} + \delta_n)\lambda E_n + \delta_n \delta_{n+1} E_n - 2\delta_n E_n - 2\lambda E_n + E_n,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\Delta^2 p_n &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)E_n + (\lambda\delta_{n+1} + \lambda\delta_n + \delta_n\delta_{n-1} - 2\delta_n)E_n \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)E_n + \delta'_n E_n,\end{aligned}$$

donde $\delta'_n = \lambda\delta_{n+1} + \lambda\delta_n + \delta_n\delta_{n-1} - 2\delta_n$ de modo que

$$\Delta^2 p_n = (\lambda - 1)^2 E_n + \delta'_n E_n = [(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n,$$

pero como $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$ converge a cero entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda\delta_{n+1} + \lambda\delta_n + \delta_n\delta_{n-1} - 2\delta_n) = 0,$$

por tanto,

$$q_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} = p_n - \frac{(p_{n+1} - p)^2}{[(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n} = p_n - \frac{(\delta_n + \lambda - 1)^2 E_n^2}{[(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n}$$

así que

$$q_n = E_n + p - \frac{(\delta_n + \lambda - 1)^2 E_n^2}{[(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n},$$

de modo que

$$q_n - p = \frac{[(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n^2 - (\delta_n + \lambda - 1)^2 E_n^2}{[(\lambda - 1)^2 + \delta'_n] E_n},$$

o sea que

$$\frac{q_n - p}{E_n} = \frac{(\lambda - 1)^2 + \delta'_n - (\delta_n + \lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2 + \delta'_n},$$

por consiguiente

$$\frac{q_n - p}{p_n - p} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \delta'_n - (\delta_n^2 + \lambda^2 + 1 + 2\lambda\delta_n - 2\delta_n - 2\lambda)}{(\lambda - 1)^2 + \delta'_n},$$

pero entonces

$$\frac{q_n - p}{p_n - p} = \frac{\delta'_n - 2\delta_n(\lambda - 1) - \delta_n^2}{(\lambda - 1)^2 + \delta'_n},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta'_n - 2\delta_n(\lambda - 1) - \delta_n^2}{(\lambda - 1)^2 + \delta'_n} = \frac{0}{(\lambda - 1)^2} = 0$$

□

Ejercicios

En los ejercicios del 1-10 encuentre el cero real de las siguientes funciones, encuentre el intervalo $[a, b]$ en el que se encuentra dicha raíz y use $\frac{a+b}{2}$ como punto de inicio para el método de Newton. Use bisección, regla falsi, secante y Newton en las funciones

1. $f(x) = x^2 - 7$
2. $f(x) = x^3 - 6$
3. $f(x) = x^4 - 0.65$
4. $f(x) = x^3 - 7$
5. $f(x) = x^3 - 3$
6. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$
7. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 3$
8. $f(x) = x^3 - x^2 - 24x - 32$
9. $f(x) = 0.4x^2 - x + 0.2$
10. $f(x) = 9x^3 - 10x + 1$
11. Demuestre que el punto fijo de $x = g(x) = 0.4x^2 + 0.2$ existe, y use la iteración de punto fijo para encontrarlo.
12. Use la iteración de punto fijo para encontrar el punto fijo de $x = g(x) = 0.9x^3 + 0.1$
13. Determine las raíces de $f(x) = -2 + 6x - 4x^2 + 0.5x^3$, usando el método de Newton usando valores iniciales de a) 4.2 y b) 4.43.
14. Localice la primera raíz positiva de $\sin x + \cos(x^2 + 1) - 1$. Use cuatro iteraciones con el método de Newton con valores iniciales de a) 1.0 y b) 1.5
15. La función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ tiene una raíz doble en $x = 1$. Use a) el método normal de Newton, b) el método modificado de Newton para resolver para la raíz $x = 1$. Compare y analice la convergencia para $x_0 = 0.2$

16. Use el método de punto fijo para encontrar la raíz de $f(x) = \sin \sqrt{x} - x$. Use el valor inicial $p_0 = 0.5$ e iteración hasta que $\delta \leq 0.01\%$
17. Para cada una de las siguientes funciones, use el método de Newton para encontrar un cero, en caso que el método falle explique porque.
- a) $f(x) = -5x^4 + 11x^2 - 2, x_0 = 1$
- b) $f(x) = x^4 - 4x + 1, x_0 = 0$
- c) $f(x) = 5x^4 - 11x^2 + 2, x_0 = \frac{1}{2}, x_0 = 0$
18. Encuentre los ceros de los siguientes polinomios de Legendre.
- a) $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- b) $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- c) $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
- d) $P_5(x) = \frac{1}{8}(65x^5 - 70x^3 + 15x)$
19. Encuentre la intersección de $y = e^x$ y $y = x^3$
20. Encuentre la intersección de $y = 2^x$ y $y = x^2$
21. Encuentre la intersección de $y = -a + e^x$ y $y = b + \ln x$, si
- a) $a = 5$ y $b = 1$

b) $a = 3$ y $b = 2$

c) $a = 1$ y $b = 5$

22. Use el método de Newton y el de la secante para encontrar un cero de $f(x) = -0.01 + \frac{1}{1+x^2}$

Capítulo 3

Solución de Sistema de Ecuaciones

Una red eléctrica está conectada a tres terminales con voltajes conocidos, según se muestra en la figura 3.1, se desea obtener los voltajes en los nodos 1, 2 y 3. Sabemos que si V_a , V_b son los voltajes en dos nodos cualesquiera a ,

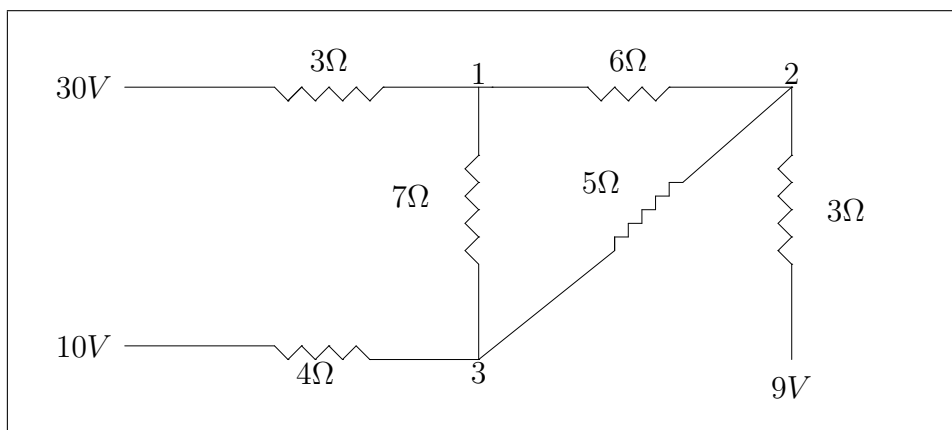


Figura 3.1

y b y R_{ab} es la resistencia entre dichos nodos, entonces la corriente eléctrica i_{ab} está dada por

$$i_{ab} = \frac{V_a - V_b}{R_{ab}},$$

además si un nodo a cualquiera está conectado a $j = b, c, d, \dots, n$, como lo muestra la figura 3.2, entonces,

$$\sum_{j=b}^n i_{aj} = 0,$$

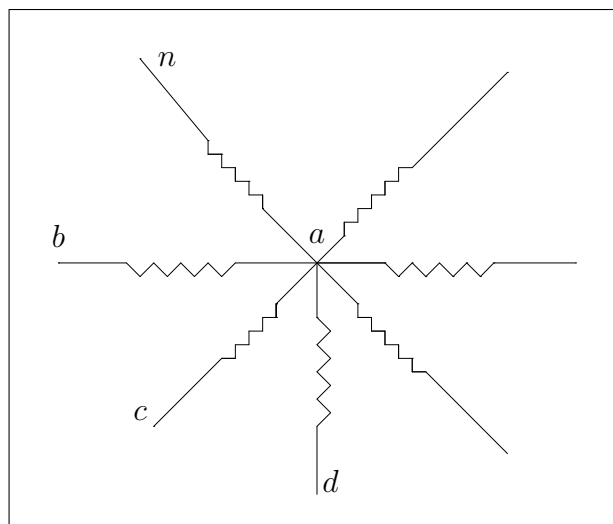


Figura 3.2

así que entonces en nuestro problema se tiene que

$$\text{Para el nodo 1: } \frac{V_1 - 30}{3} + \frac{V_1 - V_2}{6} + \frac{V_1 - V_3}{7} = 0$$

$$\text{Para el nodo 2: } \frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2 - V_3}{5} + \frac{V_2 - 9}{3} = 0$$

$$\text{Para el nodo 3: } \frac{V_3 - V_1}{7} + \frac{V_3 - V_2}{5} + \frac{V_3 - 10}{4} = 0.$$

Esto genera un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. En este capítulo mostraremos métodos que permitan resolver sistemas lineales que en general pueden ser muy dimensionados.

3.1. Vectores y Matrices

Definición 3.1.1. Un vector de \mathbb{R}^n es una n -upla de la forma

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

Definición 3.1.2. Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$, vectores renglones en \mathbb{R}^n decimos que $\vec{v} = \vec{w}$, si y solo si $v_i = w_i$, $\forall i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Definición 3.1.3. Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$, vectores renglones en \mathbb{R}^n definimos

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

Definición 3.1.4. Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ vector de \mathbb{R}^n , $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$\alpha \vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \dots, \alpha v_n)$$

Definición 3.1.5. Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$ vectores en \mathbb{R}^n , definimos

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 + \dots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i,$$

como el producto escalar de \vec{v} y \vec{w} .

Definición 3.1.6. Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ vector de \mathbb{R}^n , definimos la norma de \vec{v} , notada $\|\vec{v}\|$ como

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3.1.1. Sean \vec{v} , \vec{w} y \vec{u} vectores en \mathbb{R}^n , entonces, se tiene:

1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2. $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
3. $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
4. $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\vec{v} + \vec{z} = \vec{0}$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(\beta \vec{v}) = \beta(\alpha \vec{v}) = (\alpha\beta) \vec{v}$

Demostración. La prueba se deja como Ejercicio al lector

□

3.2. Matrices

Definición 3.2.1. Una matriz es un arreglo rectangular de mn números de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la cual tiene m filas y n columnas

Notación Si los elementos de una matriz A son números reales y dicha matriz tiene m filas y n columnas diremos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y que su tamaño es $m \times n$

Es común usar la notación $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ para referirnos a la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definición 3.2.2. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices tamaño $m \times n$, entonces, $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

Definición 3.2.3. Una matriz A es cuadrada si tiene el mismo número de filas y de columnas y en este caso se escribe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definición 3.2.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matriz cuadrada si $a_{ij} = 1, i = j$ y $a_{ij} = 0, i \neq j$, se dice que A es la matriz idéntica y se nota I_n

Definición 3.2.5. La matriz $O = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$ es la matriz nula.

Definición 3.2.6. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices tamaño $m \times n$, definimos $A + B$ como la matriz $m \times n$ dada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Definición 3.2.7. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz tamaño $m \times n$, y c un número definimos cA como la matriz $m \times n$ dada por $cA = [ca_{ij}]$

Definición 3.2.8. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz tamaño $m \times n$ definimos $-A = [-a_{ij}]$

Definición 3.2.9. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ definimos el producto $A \times B$ como la matriz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times r}$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, r$

Presentamos a continuación algunos teoremas sin demostración los cuales se dejan como ejercicios para el lector

Teorema 3.2.1. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ entonces, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
7. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ entonces, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

Teorema 3.2.2. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times r}$ entonces, $(A + B)D = AD + BD$.

Teorema 3.2.3. Sean $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$ entonces, $D(A + B) = DA + DB$.

Teorema 3.2.4. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times s}$ entonces, $A(BC) = (AB)C$.

Definición 3.2.10. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

De la definición anterior la siguiente matriz es triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.11. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

La matriz siguiente es triangular inferior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.12. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es tridiagonal si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$

La matriz siguiente es tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.13. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es de ancho r si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > r$

Definición 3.2.14. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es Hessemberg Superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j + 1$

Definición 3.2.15. Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es Hessemberg Inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j + 1$

Definición 3.2.16. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice invertible o no singular si y solo si $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $AB = BA = I_n$ y en este caso se dice que B es la inversa de A .

Notación

Si A es no singular su inversa, que es única, la notamos A^{-1} .

Definición 3.2.17. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ los elementos a_{ii} se llaman elementos diagonales

Definición 3.2.18. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz A se dice estrictamente diagonal dominante si y solo si $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$, $i \neq j$

Definición 3.2.19. Si $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, definimos la matriz Jacobiana de

F , notada $J(x)$, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, como

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.20. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matriz transpuesta de A es una matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, tal que $b_{ij} = a_{ji}$, y en ese caso se nota $B = A^T$

Ejemplo 3.2.1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que A es simétrica, si y solo si, $A = A^T$

Definición 3.2.22. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica, A es definida positiva, si y solo si, $X^T A X > 0$, para todo vector columna $X \neq 0$

3.3. Determinantes

Definición 3.3.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

definimos el determinante de A , como $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Definición 3.3.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definimos el menor ij notado M_{ij} como el determinante de la submatriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j

Definición 3.3.3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definimos el cofactor ij notado A_{ij} como

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Definición 3.3.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definimos el determinante de A notado $|A|$ como

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Nota : Si A es una matriz triangular superior o inferior tamaño $n \times n$ entonces, $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

3.3.1. Norma Matriz

Definición 3.3.5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la norma de A está definida, como

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid \|x\| \neq 0 \right\}$$

Como la norma matricial se expresa en términos de un vector, se dice que la norma es inducida por la correspondiente norma vector.

La definición anterior es equivalente a

$$\|A\| = \max \{ \|Ay\| \mid \|y\| = 1 \},$$

ya que si $y = \frac{x}{\|x\|}$, entonces,

$$\|Ay\| = \left\| A \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Como $\|A\|$, es el máximo cociente $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, entonces,

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

$x \neq 0$, por lo tanto

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Las normas matriciales más usadas en análisis numérico son relacionadas a continuación

1. La norma 1 dada por

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

2. La norma infinito dada por

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3. La norma de Frobenius dada por

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

Definición 3.3.6. Sea A una matriz no singular definimos el número de condición de la matriz A notado $\kappa(A)$, como

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Nota: El número condición puede ser calculado con cualquiera de las anteriores normas. Distinguiamos las diferentes normas usadas con un subíndice escribiendo entonces κ_1 , κ_∞ o κ_F respectivamente.

Definición 3.3.7. Sea A una matriz no singular decimos que la matriz A está bien condicionada si $K(A)$ es un número muy cercano a 1, si $K(A)$ es significativamente mayor que 1 la matriz se dice mal condicionada.

Ejemplo 3.3.1. Supongamos se tiene el sistema

$$x - 2y = 1$$

$$x - (2 + \delta)y = 1 + \delta$$

el cual como puede comprobarse tiene solución $x = -1$, $y = -1$, además la matriz de coeficiente del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -(2 + \delta) \end{pmatrix},$$

la cual es no singular y su inversa está dada por

$$A^{-1} = -\frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} -(2 + \delta) & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2 + \delta)}{\delta} & \frac{-2}{\delta} \\ \frac{1}{\delta} & \frac{-1}{\delta} \end{pmatrix},$$

de modo que $\|A\|_\infty = \max\{|1| + |-2|, |-(2+\delta)| + |1|\} = 3 + \delta$ y

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{4 + \delta}{\delta},$$

de modo que

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{(3 + \delta)(4 + \delta)}{\delta}.$$

Si $\delta = 10^{-6}$, entonces $\kappa_\infty(A) = \frac{12 + 7 \times 10^{-6} + 10^{-12}}{10^{-6}} = 12 \times 10^6 + 7 + 10^{-6} \approx 12 \times 10^6$ de modo que A es mal condicionada lo cual trae como consecuencia que pequeños cambios en b alteren la solución de modo considerable, en efecto si el sistema es ahora

$$x - 2y = 1$$

$$x - (2 + \delta) = 1 + 2\delta,$$

la solución ahora es $x = 3$, $y = -2$, que está muy alejada de la solución anterior

3.4. Sistema de Ecuaciones Lineales

En esta sección estudiaremos métodos iterativos que nos permitan solucionar sistemas de ecuaciones lineales cuadrados es decir, sistemas con n ecuaciones lineales y n variables.

Definición 3.4.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vectores columnas, entonces $AX = b$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n variables.

De la definición anterior si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

entonces el sistema de la definición anterior es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y por lo tanto se tiene

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Definición 3.4.2. La matriz A del sistema lineal anterior se define como la matriz de coeficientes del sistema

Definición 3.4.3. A la matriz $[A|b] \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ que resulta al agregarle a la matriz de coeficiente el vector columna b se le define como la matriz de coeficientes ampliada del sistema

3.4.1. Sistemas Triangulares Superior

Un sistema de ecuaciones lineales triangular superior tiene la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \cdots + a_{3n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3$$

.

.

$$a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{nn}x_n = b_n.$$

Teorema 3.4.1. Teorema de Sustitución Regresiva Si $AX = b$ es un sistema triangular superior de ecuaciones lineales y $a_{kk} \neq 0$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces el sistema tiene solución única.

Demostración. La demostración se hace de manera recursiva. Como $a_{nn} \neq 0$ por hipótesis, de la última ecuación se tiene que

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

además el valor de x_n se único.

Pero ahora, conocido x_n se puede encontrar el valor de x_{n-1} ya que como sabemos $a_{n-1n-1} \neq 0$, luego de la penúltima ecuación se tiene que

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

la unicidad de x_{n-1} , está garantizada por la unicidad de x_n .

Como $a_{n-2n-2} \neq 0$ y puesto que conocemos los valores de x_n y x_{n-1} , entonces se tiene que

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2n-1}x_{n-1} - a_{n-2n}x_n}{a_{n-2n-2}}.$$

Si suponemos que se conocen los valores de $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{k+1}$, y como $a_{kk} \neq 0$, entonces se tiene que

$$x_k = \frac{b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - a_{kk+2}x_{k+2} - \dots - a_{kn-1}x_{n-1} - a_{kn}x_n}{a_{kk}},$$

o también

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{i=k+1}^n a_{ki}x_i}{a_{kk}},$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$.

Además la unicidad de la solución se garantiza por inducción sobre n . \square

Teorema 3.4.2. Teorema de Sustitución Progresiva Si $AX = b$ es un sistema triangular inferior de ecuaciones lineales y $a_{kk} \neq 0$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces el sistema tiene solución única.

Demostración. Como $a_{11} \neq 0$, entonces

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

pero como también $a_{22} \neq 0$, entonces

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}},$$

conocido los valores de x_1 y x_2 , tenemos que

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}.$$

En general si se han calculado los valores de x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , y como $a_{kk} \neq 0$, entonces

$$x_k = \frac{b_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3 - \dots - a_{kk-1}x_{k-1}}{a_{kk}} = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j}{a_{kk}},$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$.

La unicidad de la solución se tiene porque en la primera ecuación $\frac{b_1}{a_{11}}$, es el único valor posible de x_1 y, por inducción finita, los valores de x_2, x_3, \dots, x_n son únicos. \square

Ejemplo 3.4.1. *Consideremos el sistema*

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$$

$$5x_2 + 4x_3 = 2$$

$$3x_3 = 6$$

resolver el sistema utilizando sustitución regresiva.

Solución

De la última ecuación se tiene que

$$x_3 = \frac{6}{3} = 2,$$

pero entonces reemplazando este valor en la ecuación anterior obtenemos que

$$x_2 = \frac{2 - 4x_3}{5} = \frac{2 - 4 \times 2}{5} = \frac{-6}{5}$$

conocido los valores de x_3 y x_2 se reemplazan en la primera ecuación para obtener

$$x_1 = \frac{4 - x_2 + 3x_3}{2} = \frac{28}{5}.$$

■

3.5. Eliminación de Gauss y Pivoteo

Definición 3.5.1. *Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y solo si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

3.5.1. Transformaciones Elementales

1. Dado un sistema de ecuaciones lineales, si a una cualquiera de sus ecuaciones se multiplica por un escalar $c \neq 0$, resulta un sistema equivalente al sistema dado.
2. Dado un sistema de ecuaciones lineales, si dos cualesquiera de sus ecuaciones se intercambian, resulta un sistema equivalente al sistema dado.
3. Dado un sistema de ecuaciones lineales, si a una cualquiera de sus ecuaciones se le suma un múltiplo de otra ecuación cualquiera, resulta un sistema equivalente al sistema dado.

3.5.2. Operaciones Elementales en los Renglones

Existen tres operaciones elementales sobre los renglones de una matriz A , las cuales enumeramos a continuación.

1. Multiplicar un renglón cualquiera de una matriz por un escalar $c \neq 0$.
2. Sumarle a un renglón de una matriz un múltiplo de otro renglón.
3. Intercambiar dos renglones cualesquiera de la matriz.

Definición 3.5.2. *El elemento $a_{qq} \neq 0$, usado para eliminar los elementos a_{rq} , para $r = q + 1, q + 2, \dots, n$ se define como el elemento pivote y la fila q se define como la fila pivote.*

Definición 3.5.3. *Los números $m_{rq} = \frac{a_{rq}}{a_{qq}}$, por el cual se multiplica la fila pivote para luego restársela a la fila r con $r = q + 1, q + 2, \dots, n$ se llaman multiplicadores.*

Las operaciones elementales junto con los elementos pivotes y los multiplicadores nos permiten, cuando esto sea posible, transformar la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, en una matriz bien sea triangular superior o inferior y resolver el sistema equivalente, por sustitución regresiva o progresiva respectivamente.

Ejemplo 3.5.1. *Resolver el sistema*

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4$$

$$4x_1 + 10x_2 - 4x_3 = -8$$

$$-3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -4$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -1$$

usando sustitución regresiva.

Solución

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 & -8 \\ -3 & -2 & -5 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 4 & -7 & -1 \end{array} \right).$$

El elemento pivote en la primera fila es $a_{11} = 2$ y los multiplicadores son $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$, $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{3}{2}$, $m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{2}{2} = -1$, tomando la primera fila para eliminar los elementos de la primera columna ubicados debajo de la diagonal se tiene que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Para la segunda fila ahora el elemento pivote es $a_{22} = 4$ luego los multiplicadores ahora son $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{5}{8}$, $m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = \frac{7}{4}$, luego entonces se tiene que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 20 & 11 & 31 \end{array} \right).$$

Pero ahora para la tercera fila el elemento pivote es $a_{33} = 3$ y el multiplicador es $m_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{20}{3}$, luego entonces tenemos que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & -49 \end{array} \right).$$

La matriz ampliada anterior corresponde al sistema triangular superior dado por

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4$$

$$4x_2 - 8x_3 - 8x_4 = -16$$

$$3x_3 + 9x_4 = 12$$

$$-49x_4 = -49$$

que es equivalente al original.

Aplicando la sustitución regresiva se tiene de la última ecuación del sistema que $x_4 = 1$, pero en la tercera ecuación se tiene que

$$3x_3 = 12 - 9x_4 = 12 - 9 = 3,$$

por lo tanto $x_3 = 1$.

De la ecuación dos tenemos que

$$4x_2 = -16 + 8x_3 + 8x_4 = -16 + 8 + 8 = 0,$$

luego $x_2 = 0$.

Finalmente de la primera ecuación

$$2x_1 = 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2,$$

así que $x_1 = -1$. ■

El proceso que acabamos de utilizar para obtener la solución del ejemplo anterior se conoce como la **Eliminación Gaussiana con Sustitución Regresiva**.

3.6. Estrategias de Pivoteo

3.6.1. Pivoteo Trivial

Puede suceder que en algún paso del proceso de eliminación Gaussiana con sustitución regresiva, se tenga $a_{qq} = 0$, esto naturalmente implica que este elemento (a_{qq}), no se puede tomar como elemento pivote, en este caso se usa la estrategia del **Pivoteo Trivial**, que consiste en escoger de una fila k , $k = q + 1, q + 2, \dots, n$ en la que $a_{kq} \neq 0$, esta fila se intercambia con la fila q -ésima, con lo cual se obtiene un pivote no nulo.

3.6.2. Pivoteo Parcial

Es posible que al utilizar el pivoteo trivial se produzcan errores debido a que como es sabido la computadora utiliza aritmética de precisión finita, lo anterior lo ilustramos con un ejemplo.

Ejemplo 3.6.1. *Supongamos se desea resolver el sistema*

$$1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414$$

$$24.14x_1 - 1.21x_2 = 22.93$$

haciendo operaciones con una precisión de cuatro cifras significativas.

Solución

Observemos primero que la solución del sistema es exactamente $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. El elemento pivote es $a_{11} = 1.133$ y el multiplicador es $m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31$, de modo que se tiene entonces que

$$1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414$$

$$-113.7x_2 = 113.8$$

por tanto $x_2 = 1.001$ y así $x_1 = 0.9956$. ■

El error que se comete se debe a que el valor del multiplicador $m_{21} = 21.31$ es muy grande.

Miremos ahora como podríamos resolver el sistema anterior para evitar el error cometido.

Si se intercambian las ecuaciones se obtiene el sistema

$$24.14x_1 - 1.21x_2 = 22.93$$

$$1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414$$

que es equivalente al original; pero ahora el elemento pivote es $a_{11} = 24.14$ y el multiplicador es $m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04593$, con esto resulta el sistema triangular superior

$$24.14x_1 - 1.21x_2 = 22.93$$

$$5.338x_2 = 5.338,$$

de modo que se tiene la solución exacta $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$.

La estrategia anterior se conoce como **pivoteo parcial** la cual consiste en tomar como pivote el coeficiente de mayor magnitud, y una vez ubicado intercambiar filas a fin de colocarlo en la diagonal, esto es, se comparan todos los coeficientes en la columna q , desde el que está en la diagonal hasta el que está en la última fila. Una vez hecho esto se toma el elemento de mayor valor absoluto y esa fila se intercambia con la q -ésima, es decir, si

$$|a_{kq}| = \max\{|a_{qq}|, |a_{q+1q}|, \dots, |a_{nq}|\},$$

entonces se intercambian las filas q -ésima y k -ésima, con esto todos los multiplicadores serán todos menores que 1 en valor absoluto.

3.6.3. Pivoteo Parcial Escalado

Si bien el pivoteo parcial evita errores que se pueden cometer con el pivoteo trivial, con el pivoteo parcial escalado se pretende reducir aún más la propagación de errores, resultando una técnica mucho más eficiente.

En el pivoteo parcial escalado, se toma en cada columna desde la q -ésima hacia abajo el que tenga el mayor valor relativo con respecto a los elementos de su fila. Es decir se busca primero en cada fila, a partir de la fila q , hasta la n -ésima el elemento de mayor tamaño, esto es, si ese elemento lo notamos u_r , entonces

$$u_r = \max\{|a_{rq}|, |a_{rq+1}|, |a_{rq+2}|, \dots, |a_{rn}|\},$$

$r = q, q+1, \dots, n$, la fila pivote es entonces la fila k para la cual

$$\frac{|a_{kq}|}{u_k} = \max\left\{\frac{|a_{qq}|}{u_q}, \frac{|a_{q+1q}|}{u_{q+1}}, \frac{|a_{q+2q}|}{u_{q+2}}, \dots, \frac{|a_{nq}|}{u_n}\right\}.$$

Una vez hecho esto se intercambian la fila k y la fila q a menos que $q = k$.

3.7. Factorización LU

Definición 3.7.1. Sea A una matriz no singular se dice que A tiene factorización LU si y solo si, se puede expresar de la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a 1 y U es una matriz triangular superior.

Ejemplo 3.7.1. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix},$$

tiene factorización LU ya que si

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} = LU.$$

Si la matriz A tiene factorización LU dicha factorización se puede obten-

er de la manera siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

donde m_{kq} son los multiplicadores.

Ahora si se tiene un sistema lineal dado por la forma $AX = b$, donde A tiene factorización LU , entonces el sistema se puede escribir como

$$LUX = b,$$

pero si hacemos

$$UX = Y,$$

entonces, se puede resolver primero el sistema

$$LY = b$$

usando la sustitución regresiva, para luego resolver el sistema

$$UX = Y$$

aprovechando el hecho de que U es una matriz triangular superior.

Ejemplo 3.7.2. Resolver el sistema del ejemplo anterior usando factorización LU

Solución

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix},$$

luego entonces la matriz L , es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz U es

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix},$$

sea

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

entonces $LY = b$ es el sistema dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Que corresponde al sistema

$$y_1 = 4$$

$$2y_1 + y_2 = -8$$

$$-\frac{3}{2}y_1 + \frac{5}{8}y_2 + y_3 = -4$$

$$-y_1 + \frac{7}{4}y_2 + \frac{20}{3}y_3 + y_4 = -1,$$

de la primera ecuación $y_1 = 4$ luego de la segunda ecuación se tiene que $y_2 = -8 - 2y_1 = -16$ así que de la tercera ecuación $y_3 = -4 + \frac{3}{2}y_1 - \frac{5}{8}y_2 = 12$,

y de la cuarta ecuación se tiene que $y_4 = -1 + y_1 - \frac{7}{4}y_2 - \frac{20}{3}y_3 = -49$ de modo que el sistema $UX = Y$ a resolver es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 12 \\ -49 \end{pmatrix}.$$

o sea

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4$$

$$4x_2 - 8x_3 - 8x_4 = -16$$

$$3x_3 + 9x_4 = 12$$

$$-49x_4 = -49$$

sistema cuya solución como se ha visto antes es

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

3.8. Método de Jacobi

Miremos un ejemplo que nos permita comprender el método de Jacobi, el cual es usado, para encontrar la solución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales.

Ejemplo 3.8.1. *Resolver el sistema lineal*

$$5x - y + z = 10$$

$$2x + 8y - z = 11$$

$$-x + y + 4z = 3$$

usando el método iterativo de Jacobi a partir del punto inicial $(0, 0, 0)$.

Solución

De la primera ecuación tenemos que

$$x = \frac{10 + y - z}{5},$$

de la segunda

$$y = \frac{11 - 2x + z}{8}$$

y de la tercera

$$z = \frac{3 + x - y}{4}.$$

La iteración de Jacobi para este caso es

$$x_{k+1} = \frac{10 + y_k - z_k}{5}$$

$$y_{k+1} = \frac{11 - 2x_k + z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{3 + x_k - y_k}{4}$$

y los resultados del proceso iterativo se muestran en la tabla 12

Iteración	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	2	1.375	0.75
2	2.125	0.96875	0.90625
3	2.0125	0.95703	1.039063
4	1.983593	1.001758	1.013868
5	1.997578	1.0058353	0.992431
6	2.002681	0.999659	1.001287
7	1.9996744	0.999491	1.000756
8	1.999747	1.0001759	1.0000459
9	2.000026	1.00006899	0.999893
10	2.000035	0.99998	0.999989
11	1.9999982	0.9999899	1.000013
12	1.9999954	1.000002	1.000002
13	2.00000	1.00000	1.00000

TABLA 12



Ejemplo 3.8.2. *Resolver el sistema lineal*

$$2x + 8y - z = 11$$

$$-x + y + 4z = 3$$

$$5x - y + z = 10$$

usando el método iterativo de Jacobi a partir del punto inicial $(0, 0, 0)$.

Solución

La iteración de Jacobi para este caso es

$$x_{k+1} = \frac{11 - 8y_k + z_k}{2}$$

$$y_{k+1} = 3 + x_k - 4z_k$$

$$z_{k+1} = 10 - 5x_k + y_k$$

los resultados de la iteración de Jacobi se muestran en la tabla 13

Iteración	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	5.5	3	10
2	-1.5	-31.5	-14.5
3	124.5	59.5	-14
4	-239.5	183.5	-672
5	-1064.5	2415.5	1024

TABLA 13

■

Observamos como a pesar de ser sistemas equivalentes el método de Jacobi en el primer caso converge a la solución $(2, 1, 1)$, en tanto que para el otro sistema el método de Jacobi diverge.

La razón de lo anterior es que en el primer caso la matriz de coeficientes del sistema es una matriz estrictamente diagonal dominante, ya que $|5| > |-1| + |1|$, $|8| > |2| + |-1|$ y $|4| > |-1| + |1|$, en tanto que para el otro caso esto no se cumple.

Lo anterior significa que, para que el método de Jacobi converja la

matriz de coeficiente del sistema a resolver debe ser **estrictamente diagonal dominante**

En general dado el sistema lineal

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

...

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,$$

con la matriz de coeficientes diagonal estrictamente dominante y punto inicial $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ y si en la iteración k se ha obtenido el punto $P_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ entonces las coordenadas del punto P_{k+1} están dadas por

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - a_{i1}x_1^k - a_{i2}x_2^k - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}^k - a_{ii+1}x_{i+1}^k - \cdots - a_{in}x_n^k}{a_{ii}}$$

3.9. Método de Gauss- Saidel

Una variación del método de Jacobi es el método de Gauss-Saidel, que es más eficiente que el primero, la diferencia está en que en el de Jacobi para generar el nuevo punto del proceso iterativo se utilizan las coordenadas del punto anterior, mientras que en el de Gauss-Saidel se van usando las coordenadas en la medida en que se van generando, esto es, si se supone que ya hemos obtenido $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$, entonces la coordenada x_i^{k+1} , se obtiene de la siguiente forma:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - a_{i1}x_1^{k+1} - a_{i2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}^{k+1} - a_{ii+1}x_{i+1}^k - \cdots - a_{in}x_n^k}{a_{ii}}$$

Ejemplo 3.9.1. *Resolver el sistema lineal*

$$5x - y + z = 10$$

$$2x + 8y - z = 11$$

$$-x + y + 4z = 3$$

usando el método iterativo de Gauss-Saidel a partir del punto inicial $(0, 0, 0)$.

Solución

Primero observemos que se trata del mismo sistema resuelto con anterioridad por el método de Jacobi y comparemos resultado. Al igual que para el método de Jacobi se tiene que:

$$x_{k+1} = \frac{10 + y_k - z_k}{5}$$

$$y_{k+1} = \frac{11 - 2x_{k+1} + z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{3 + x_{k+1} - y_{k+1}}{4},$$

la diferencia estará en que siempre utilizaremos las variables que se van generando para encontrar la o las variables restantes, los resultados del proceso iterativo se muestran en la tabla 14

Iteración	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	2	0.875	1.031
2	1.9688	1.011675	0.98928
3	2.004479	0.99754	1.0017348
4	1.99808	1.000697	0.9993458
5	2.00027024	0.9998567	1.0001034
6	1.999951	1.0000252	0.9999815
7	2.000009	0.9999544	1.0000034
8	1.99999841	1.0000008	0.9999994
9	2.000000	1.000000	1.000000

TABLA 14

■

Como podemos notar el método de Gauss-Saidel nos da la respuesta en 9 iteraciones en tanto que con Jacobi se obtuvo en 13, lo cual dice de la rapidez de convergencia del uno comparado con el otro.

Ejemplo 3.9.2. *Resolver el sistema lineal*

$$2x + 8y - z = 11$$

$$-x + y + 4z = 3$$

$$5x - y + z = 10$$

usando el método iterativo de Gauss-Saidel a partir del punto inicial (0, 0, 0).

Solución

La iteración de Gauss-Saidel es entonces

$$x_{k+1} = \frac{11 - 8y_k + z_k}{2}$$

$$y_{k+1} = 3 + x_{k+1} - 4z_k$$

$$z_{k+1} = 10 - 5x_{k+1} + y_{k+1}$$

los resultados de la iteración de Gauss-Saidel se muestran en la tabla 15

Iteración	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	5.5	8.5	7.5
2	-49.5	-76.5	181
3	-776.75	-1477.75	2316

TABLA 15

■

Al igual que para el de Jacobi el método de Gauss-Saidel, no converge a la solución del sistema a pesar de que son sistemas equivalentes, la razón de ello es que, el método de Gauss-Saidel como el de Jacobi solo converge a la solución si la matriz de coeficientes del sistema es **estrictamente diagonal dominante**.

3.10. Sistema de Ecuaciones no Lineales

3.10.1. Método de Newton

En el problema de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x^*) = 0$ donde $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, es una función continuamente diferenciable dada, es posible utilizar métodos computacionales, cuya utilización depende de las condiciones del problema específico que se desea resolver.

Uno de los métodos más usados en la solución de este problema es el método de Newton, el cual requiere de $J(x)$, el jacobiano de la función F . Lo mejor del método es que converge cuadráticamente, pero, a su vez, su mayor desventaja es que resolver el sistema $J(x)s = -F(x)$, en cada iteración es costoso.

Para el caso $n > 1$, en analogía con el caso $n = 1$, como $F \in \mathbb{R}^n$ entonces aproximamos $F(x)$ por el modelo lineal

$$M_c(x) = F(x_c) + J(x_c)(x - x_c),$$

donde $J(x_c)$ es la matriz jacobiana de F en x_c . El método de Newton trata de encontrar x_+ tal que $M_c(x_+) = 0$, esto es

$$F(x_c) + J(x_c)(x_+ - x_c) = 0,$$

luego

$$x_+ = x_c - J(x_c)^{-1}F(x_c),$$

el cual determina un nuevo punto del proceso iterativo. Lo anterior permite establecer el algoritmo siguiente.

ALGORITMO DE NEWTON

Dado $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, “hasta converger”

Resuelva $J(x_k)s_k = -F(x_k)$

Haga $x_{k+1} = x_k + s_k$.

Ejemplo 3.10.1. *Obtenga tres iteraciones del método de Newton para el sistema no lineal dado por*

$$x^2 - y = 0.2$$

$$y^2 - x = 0.3$$

Solución

Sea

$$F(x, y) = F(X) = \begin{bmatrix} x^2 - y - 0.2 \\ y^2 - x - 0.3 \end{bmatrix}$$

y

$$J(x, y) = J(X) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix}.$$

Sea

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

el punto de inicio.

Primera Iteración

$$J(X_0) = \begin{bmatrix} 2.8 & -1 \\ -1 & 2.8 \end{bmatrix},$$

$$F(X_0) = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.26 \end{bmatrix},$$

luego si

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{bmatrix},$$

se debe entonces resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 2.8 & -1 \\ -1 & 2.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.36 \\ -0.26 \end{bmatrix},$$

o sea

$$2.8s_1^{(1)} - s_2^{(1)} = -0.36$$

$$-s_1^{(1)} + 2.8s_2^{(1)} = -0.26,$$

cuya solución es $s_1^{(1)} = -0.185380116959$ y $s_2^{(1)} = -0.159064327485$, luego

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.185380116959 \\ -0.159064327485 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$X_1 = X_0 + s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.185380116959 \\ -0.159064327485 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.21461988304 \\ 1.24064327485 \end{bmatrix},$$

y

$$F(X_1) = \begin{bmatrix} 0.03436578776 \\ 0.02530146029 \end{bmatrix}$$

Segunda Iteración

$$J(X_1) = \begin{bmatrix} 2.429239766608 & -1 \\ -1 & 2.48187134504 \end{bmatrix},$$

y

$$s^{(2)} = \begin{bmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(2)} \end{bmatrix},$$

de modo que se resuelve el sistema

$$\begin{bmatrix} 2.429239766608 & -1 \\ -1 & 2.48187134504 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03436578776 \\ -0.02530146029 \end{bmatrix}$$

esto es

$$2.429239766608s_1^{(2)} - s_2^{(2)} = -0.03436578776$$

$$-s_1^{(2)} + 2.48187134504s_2^{(2)} = -0.02530146029$$

que tiene como solución $s_1^{(2)} = -0.0219907863685$ y $s_2^{(2)} = -0.0190551049745$ así que

$$X_2 = X_1 + s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.21947120193 \\ 1.22188056755 \end{bmatrix}$$

y

$$F(X_2) = \begin{bmatrix} 0.065229444796 \\ -0.02647908057 \end{bmatrix}$$

Tercera Iteración

$$J(X_2) = \begin{bmatrix} 2.43894240380 & -1 \\ -1 & 2.4437611351 \end{bmatrix},$$

y

$$s^{(3)} = \begin{bmatrix} s_1^{(3)} \\ s_2^{(3)} \end{bmatrix},$$

por tanto se resuelve el sistema

$$\begin{bmatrix} 2.43894240380 & -1 \\ -1 & 2.4437611351 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(3)} \\ s_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.065229444796 \\ 0.02647908057 \end{bmatrix}$$

esto es

$$2.43894240380s_1^{(3)} - s_2^{(3)} = -0.06522944479$$

$$-s_1^{(3)} + 2.4437611351s_2^{(3)} = 0.02647908057$$

cuya solución es $s_1^{(3)} = -0.0267985763175$ y $s_2^{(3)} = -0.0001307393522$ de modo que

$$X_3 = X_2 + s^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.19267262561 \\ 1.2217498282 \end{bmatrix}$$

y

$$F(X_3) = \begin{bmatrix} 0.00071816368 \\ 0.00000000171 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que

$$\|F(X_3)\| = \sqrt{0.00071816368^2 + 0.00000000171^2} = 0.00071816380203,$$

que es una buena aproximación a la solución que como sabemos debe ser tal que

$$\|F(X^*)\| \approx 0,$$

naturalmente si queremos una mejor solución debemos efectuar más iteraciones ■

3.10.2. Ventajas y Desventajas de Método de Newton

VENTAJAS

1. Suponiendo que $J(x_k)$ es no singular, converge q-cuadráticamente si se comienza de un punto suficientemente cercano a la solución.
2. Para una función lineal F , da la solución exacta en una iteración (o un paso).

DESVENTAJAS

1. No es globalmente convergente para muchos problemas.
2. Requiere el cálculo $J(x_k)$ en cada iteración.
3. Cada iteración requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales que puede ser singular o mal condicionado.

3.10.3. Método de Punto Fijo

A menudo es conveniente resolver un sistema de ecuaciones no lineal por un proceso iterativo que no requiera evaluar las derivadas parciales como es el caso del método de Newton. Una opción adecuada es usar la iteración de punto fijo, la cual es una extensión de la idea en la sección 2.2.

En efecto, si $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ y si suponemos además que $f(x)$, está definida en un rectángulo n -dimensional $R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / a_i \leq x_i \leq b_i\}$ para algunas constantes $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Supongamos además que las componentes de la matriz jacobiana son continuas en D , si $f(x) \in D$, $\forall x \in D$, entonces existe un punto fijo $P \in D$.

Ahora si $F(P)$, es la matriz jacobiana de f en P y si $\|F(P)\|_\infty < 1$, la sucesión generada por la iteración de punto fijo definida por $x_{k+1} = f(x_k)$ converge, mientras que el punto de inicio este suficientemente cerca al punto fijo P .

Además si $K < 1$ es tal que para todo $x \in D$, $\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}$, para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces para cualquier punto inicial, la iteración de punto fijo converge.

Una cota del error en el n -ésimo paso está dado por

$$\|x_n - P\|_\infty \leq \frac{K^n}{1 - K} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Como una ilustración del uso de la iteración de punto fijo, busquemos la solución del siguiente sistema.

$$f_1(x, y, z) = x^3 - 10x + y - z + 3 = 0$$

$$f_2(x, y, z) = y^3 + 10y - 2x - 5 = 0$$

$$f_3(x, y, z) = x + y - 10z + 2\text{Sen}z + 5 = 0.$$

estas ecuaciones se pueden escribir de la forma $F(X) = 0$, $F : R^3 \rightarrow R^3$.

Hay muchas posibilidades para convertir este sistema como una iteración de punto fijo, pero su convergencia depende de que la magnitud de la derivada parcial de F sea suficientemente pequeña, para esto reescribimos el sistema de la siguiente forma

$$x_{k+1} = 0.1x_k^3 + 0.1y_k - 0.1z_k + 0.3$$

$$y_{k+1} = -0.1y_k^3 + 0.2x_k + 0.5$$

$$z_{k+1} = 0.1x_k + 0.1y_k + 0.2\text{Sen}z_k + 0.5$$

Si tomamos $X_0 = (1, 1, 1)$ se tiene el siguiente resultado (tabla 16)

Iteración	x_i	y_i	z_i
0	1	1	1
1	0.4	0.6	0.868294
2	0.279571	0.5584	0.752646
3	0.282761	0.538503	0.720512
4	0.28406	0.540936	0.7140803
5	0.284734	0.540984	0.713484
6	0.285058	0.541114	0.713466
7	0.285081	0.541168	0.713609
8	0.285083	0.541167	0.713523
9	0.285081	0.541167	0.713525

TABLA 16

la cual es una buena aproximación ya que $\|F(X)\|_2 = 0.00004 \approx 0$

Ejercicios

En los ejercicios del 1-5 aproxime la solución del sistema $AX = b$, partiendo de $x_0 = [0; 0; 0]$, usando primero el método de Jacobi y luego el de Gauss-Saidel,

1.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Use la eliminación gaussiana y la aritmética de truncamiento a cuatro dígitos para resolver los siguientes sistemas. Compare luego con la solución real

6.

$$a) \quad 0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2 \qquad b) \quad 58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2$$

$$5031x_1 - 6.1x_2 = 47 \qquad -6.1x_1 + 5.31x_2 = 47$$

$$\text{Solución real } (10; 1)^T \qquad \text{Solución real } (1; 10)^T$$

$$c) \quad 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 = -119$$

$$-3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 = 120$$

$$6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 = -139$$

$$\text{Solución real } (0; 10; \frac{1}{7})^T$$

$$d) \quad \pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11}$$

$$\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0$$

$$\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi$$

$$\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \frac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}$$

$$\text{Solución real } (0.78839378; 0.01269269; -0.02065405; -1.18260870)^T$$

7. Repita el ejercicio 6 usando pivoteo parcial.

8. Repita el ejercicio 6 usando pivoteo parcial escalado.

En los ejercicios 9-13 use a) el método de Newton, b) la iteración de punto fijo para resolver los siguientes sistemas no lineales

9.

$$f(x, y, z) = x^3 - 10x + y - z + 3 = 0$$

$$g(x, y, z) = y^3 + 10y - 2x - 2z - 5 = 0$$

$$h(x, y, z) = x + y - 10z + 2 \operatorname{sen} z + 5 = 0$$

10.

$$f(x, y, z) = x^2 + 20x + y^2 + z^2 - 20 = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 + 20y + z^2 - 20 = 0$$

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - 40z = 0$$

11.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4 = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 10y - 5 = 0$$

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 10z - 6 = 0$$

12.

$$f(x, y, z) = 10x - x^2 - y - z^2 - 4 = 0$$

$$g(x, y, z) = 10y - x^2 - y^2 - z^2 - 5 = 0$$

$$h(x, y, z) = 10z - x - y^2 - z^2 - 6 = 0$$

13.

$$f(x, y, z) = 10x - x^3 + y^2 - z - 5 = 0$$

$$g(x, y, z) = 10y + 0.5x^2 - y^2 - z - 3 = 0$$

$$h(x, y, z) = 10z - x - y^2 - z^3 - 6 = 0$$

14. Resuelva el siguiente sistema no lineal usando el método de Newton Si

$$\frac{1}{2} = a_1 \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} = a_2,$$

resuelva el sistema

$$0 = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$\frac{2}{3} = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$$

$$0 = a_1x_1^3 + a_2x_2^3$$

15. El estado estacionario de concentración de dos especies químicas en un sistema químico oscilatorio descrito por el modelo de Brusselator está dado por el sistema no lineal

$$0 = A + x^2y - (B + 1)x$$

$$0 = Bx - x^2y,$$

encuentre la solución si

- a) $B=1, A = 1$
 - b) $B=3, A=1$
 - c) $B=2, A=1$
16. Determine las fuerzas y reacciones asociada con la estructura estática asociada a la siguiente figura.

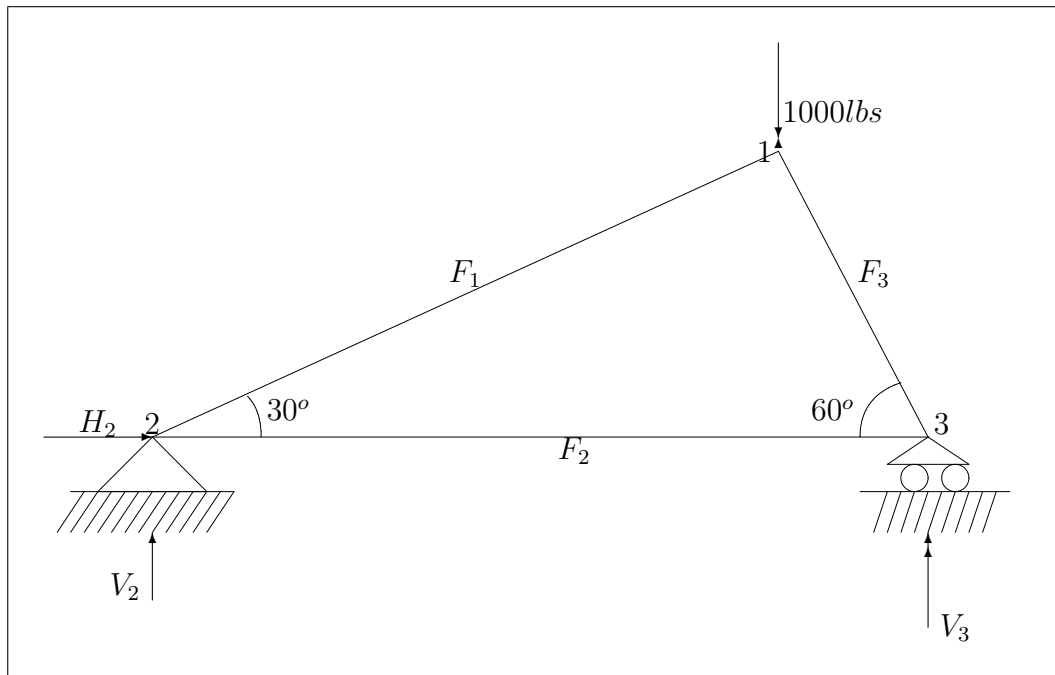


Figura 3.3 Problema 16

17. Determine las fuerzas y reacciones asociada con la estructura estática asociada a la figura 3.4.

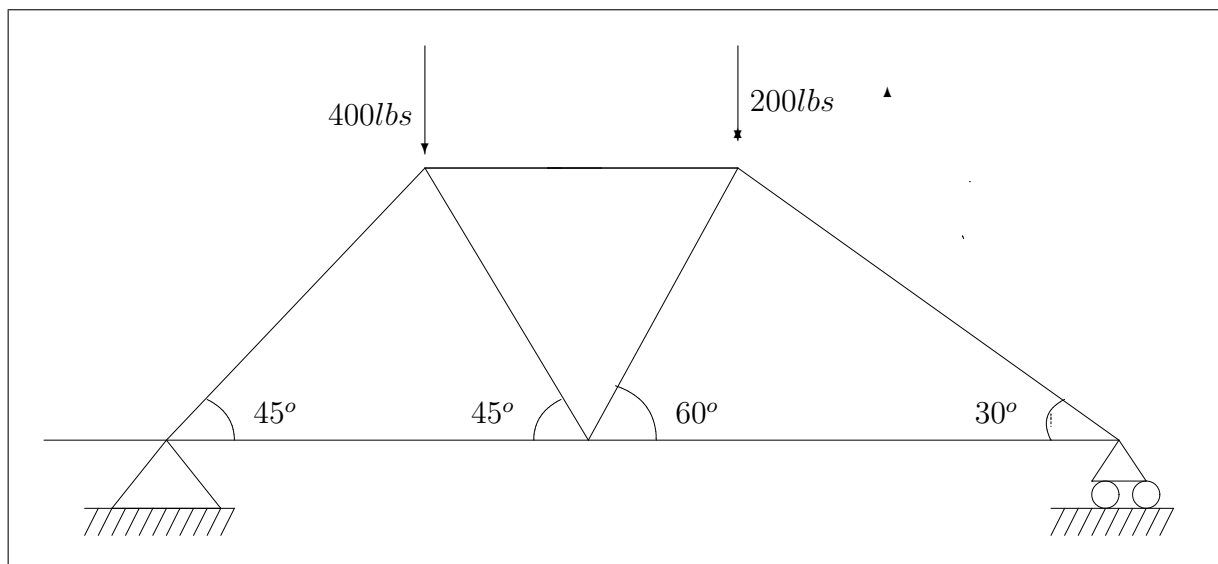


Figura 3.4 Problema 17

Capítulo 4

Interpolación Polinomial

Por el término interpolar se entiende estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al punto dado.

El primer polinomio de aproximación que estudiaremos es el polinomio de Taylor. Para ello supongamos que el polinomio

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i (x - x_0)^i,$$

es tal que $P_n(x_0) = f(x_0)$ y $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, deseamos encontrar un polinomio que aproxime a $f(x)$ alrededor de $x = x_0$.

Pero

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} (i+1)(i+2) \dots (i+k) c_{i+k} (x - x_0)^i,$$

luego

$$P_n^{(k)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k c_k + \sum_{i=1}^{n-k} (i+1)(i+2) \dots (i+k) c_{i+k} (x - x_0)^i,$$

así que

$$P_n^{(k)}(x_0) = k! c_k,$$

pero como $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, entonces

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

así que el polinomio de Taylor que aproxima a $f(x)$ alrededor de $x = x_0$ es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Definición 4.0.1. Supongamos f tiene derivada de orden n y $P_n(x)$ es el polinomio de aproximación de $f(x)$, definimos

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Teorema 4.0.1. Supongamos x_0 es cualquier número con $x_0 \neq x$, si f tiene n derivadas continuas en un intervalo cerrado $I = [x_0, x]$ y $f^{(n+1)}(x)$ está definida en (x_0, x) , entonces existe un número $c \in (x_0, x)$, tal que

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Demostración. Sea $t \in I$, y definamos $F(t)$ y $G(t)$ como

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} - \dots - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} - E_n(x),$$

y

$$G(t) = (x - t)^{n+1},$$

entonces, $F(x) = -E_n(x)$, $G(x) = 0$, $F(x_0) = f(x) - P_n(x) - E_n(x) = 0$ y $G(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$, además

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t) - \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!} + \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!} \\ & - \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^3}{3!} + \dots - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n-1)}(t)(x-t)^{(n-2)}}{(n-2)!} - \\ & \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

luego

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

y

$$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Aplicando el teorema del valor medio generalizado a F y G se tiene

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)},$$

luego entonces

$$\frac{-E_n(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!}}{-(n+1)(x-c)^n},$$

luego

$$\frac{E_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

y por tanto

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

□

4.1. Interpolación de Lagrange

Para la interpolación lineal utilizamos un segmento de recta que pasa por dos puntos conocidos, sean $P(x_0, y_0)$ y $P(x_1, y_1)$ dichos puntos, luego la pendiente del segmento es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

y por tanto la ecuación de la recta que contiene a ese segmento es

$$y = P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

o sea que

$$y = P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0},$$

de modo que

$$y = P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0},$$

que es un polinomio de grado menor o igual que 1, que satisface que $P(x_0) = y_0$ y $P(x_1) = y_1$.

Lagrange propuso otro procedimiento para encontrar este polinomio.

Como

$$y = P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0),$$

entonces

$$y = P_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + y_0 - y_0 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

luego

$$y = P_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + y_0 \left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right),$$

o sea que

$$y = P_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.$$

Sea

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

y

$$L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

los cuales son lineales, así que

$$P_1(x) = y_0 L_{1,0}(x) + y_1 L_{1,1}(x),$$

pero como $L_{1,0}(x_0) = 1$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$, $L_{1,1}(x_1) = 1$, entonces

$$P_1(x_0) = y_0 L_{1,0}(x_0) + y_1 L_{1,1}(x_0) = y_0$$

y

$$P_1(x_1) = y_0 L_{1,0}(x_1) + y_1 L_{1,1}(x_1) = y_1,$$

por tanto $P_1(x)$ pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) .

Definición 4.1.1. *Los términos*

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

y

$$L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

se definen como polinomios coeficientes de Lagrange

De la definición anterior se tiene que

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^1 y_k L_{1k}(x).$$

Cuando $y_k = f(x_k)$, el proceso de utilizar $P_1(x)$ para aproximar a $f(x)$ en $[x_0, x_1]$ se conoce como **interpolación lineal**, x_0 y x_1 se les llama nodos.

Si $x < x_0$ entonces al proceso se le llama extrapolación.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos la gráfica de $y = f(x) = \sin x$ en $[0.2, 1]$.

a) Usar los nodos $x_0 = 0.2$ y $x_1 = 1$ para construir un polinomio de interpolación lineal $P_1(x)$ y calcular $f(0.6)$.

b) Usar los nodos $x_0 = 0.4$ y $x_1 = 0.8$ para construir un polinomio de interpolación lineal $Q_1(x)$ y calcular $f(0.6)$.

Solución

a) Como $x_0 = 0.2$ y $x_1 = 1$, entonces $y_0 = \sin 0.2 = 0.198669$ y $y_1 = \sin 1 = 0.841471$ luego $P_1(x) = 0.198669 \frac{x-1}{0.2-1} + 0.841471 \frac{x-0.2}{1-0.2}$, o sea que $P_1(x) = -0.248331(x-1) + 1.051839(x-0.2)$ y $f(0.6) = 0.520068$

b) Para $x_0 = 0.4$ y $x_1 = 0.8$, entonces $y_0 = \sin 0.4 = 0.389418$ y $y_1 = \sin 0.8 = 0.717356$ luego $Q_1(x) = 0.389418 \frac{x-0.8}{0.4-0.8} + 0.717356 \frac{x-0.4}{0.8-0.4}$, por tanto $Q_1(x) = -0.973545(x-0.8) + 1.79339(x-0.4)$ y $f(0.6) = 0.553387$.

■

En la figura 4.1 podemos observar como Q_1 aproxima mejor a $y = f(x)$ que P_1 .

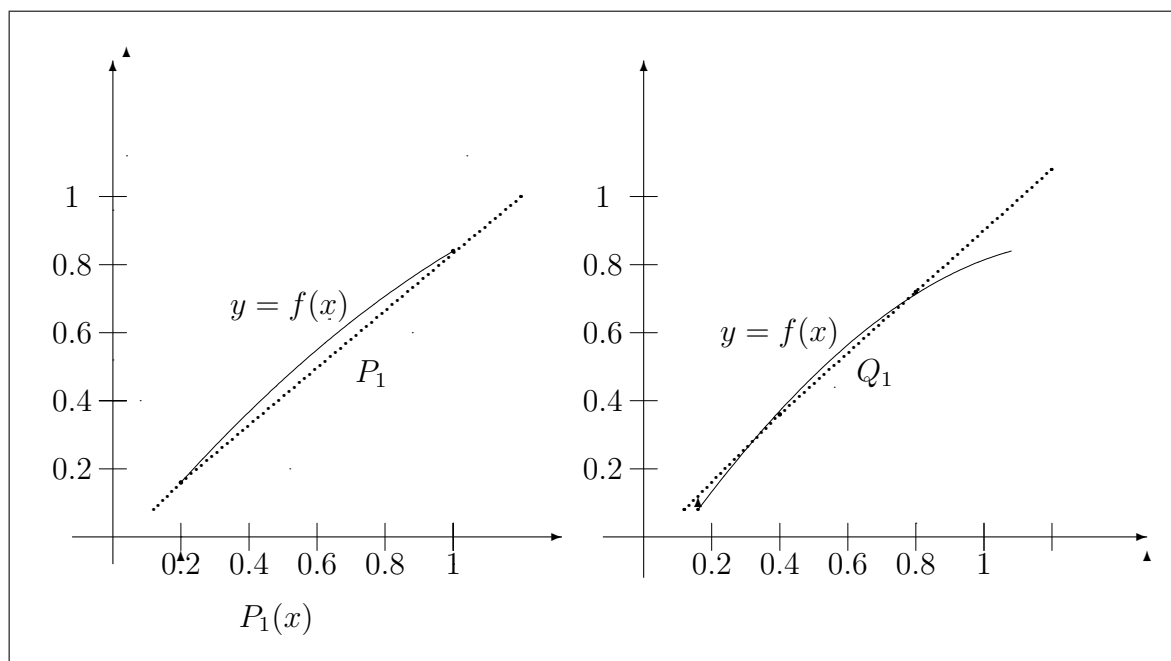


Figura 4.1

En general si se tiene los $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n , y si $f(x_k) = P(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ el polinomio que pasa por esos $n + 1$ puntos es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k},$$

donde

$$L_{n,k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)},$$

o usando una notación más compacta

$$L_{n,k} = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}, \quad k \neq j$$

Ejemplo 4.1.2. Consideremos $y = f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0.2, 1]$

a) Usando los nodos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, construir el polinomio interpolador $P_2(x)$.

b) Usando los nodos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 1$, construir el polinomio interpolador $P_3(x)$ y calcular $f(0.6)$.

Solución

a)

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

pero $y_0 = \sin x_0 = 0.198669$, $y_1 = \sin x_1 = 0.479426$, $y_2 = \sin x_2 = 0.841471$, luego

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0.198669 \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0.2 - 0.5)(0.2 - 1)} + 0.479426 \frac{(x - 0.2)(x - 1)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 1)} \\ &\quad + 0.841471 \frac{(x - 0.2)(x - 0.5)}{(1 - 0.2)(1 - 0.5)}, \end{aligned}$$

luego

$$P_2(x) = 0.198669 \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{0.24} + 0.479426 \frac{(x - 0.2)(x - 1)}{-0.15}$$

$$+0.841471 \frac{(x-0.2)(x-0.5)}{0.4},$$

por tanto

$$P_2(x) = 0.8277675(x-0.5)(x-1) - 3.196173(x-0.2)(x-1) + 2.103678(x-0.2)(x-0.5),$$

b)

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

pero $y_0 = \sin x_0 = 0.198669$, $y_1 = \sin x_1 = 0.389418$, $y_2 = \sin x_2 = 0.717356$
y $y_3 = \sin x_3 = 0.8411471$, luego

$$P_3(x) = 0.198669 \frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1)}{(0.2-0.4)(0.2-0.8)(0.2-1)} + 0.389418 \frac{(x-0.2)(x-0.8)(x-1)}{(0.4-0.2)(0.4-0.8)(0.4-1)} \\ + 0.717356 \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-1)}{(0.8-0.2)(0.8-0.4)(0.8-1)} + 0.841471 \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.8)}{(1-0.2)(1-0.4)(1-0.8)},$$

por tanto

$$P_3(x) = -2.069469(x-0.4)(x-0.8)(x-1) + 8.112875(x-0.2)(x-0.8)(x-1) \\ - 14.9449(x-0.2)(x-0.4)(x-1) + 8.765323(x-0.2)(x-0.4)(x-0.8)$$

con este polinomio el valor de $f(0.6) = 0.56449$ ■

4.2. Cotas de Error

Teorema 4.2.1. Polinomio Interpolador de Lagrange Supongamos que $f \in C^{n+1}[a, b]$ y x_0, x_1, \dots, x_n son los nodos de interpolación, entonces, $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

donde

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad c \in [a, b]$$

Demostración. Miremos primero el caso $n = 1$, para esto sea

$$g(t) = f(t) - P_1(t) - E_1(x) \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)},$$

luego

$$g(x) = f(x) - P_1(x) - E_1(x) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)} = f(x) - P_1(x) - E_1(x) = 0,$$

$$g(x_0) = f(x_0) - P_1(x_0) - E_1(x) \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)} = 0$$

y

$$g(x_1) = f(x_1) - P_1(x_1) - E_1(x) \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)} = 0.$$

Supongamos sin perder generalidad que $x \in (x_0, x_1)$, luego por el teorema de Rolle aplicado a $g(t)$ en $[x_0, x]$ se tiene que existe $d_0 \in (x_0, x)$ tal que $g'(d_0) = 0$ y aplicando el mismo teorema a g en el intervalo $[x, x_1]$ existe $d_1 \in (x, x_1)$ tal que $g'(d_1) = 0$, luego la función $g'(t) = 0$ si $t = d_0$ o $t = d_1$, aplicando nuevamente el teorema de Rolle pero a la función $g'(t)$ en el intervalo $[d_0, d_1]$ existe $c \in (d_0, d_1)$ tal que $g''(c) = 0$, pero

$$g'(t) = f'(t) - P_1'(t) - E_1(x) \frac{[(t - x_1) + (t - x_0)]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

y

$$g''(t) = f''(t) - P_1''(t) - E_1(x) \frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)},$$

pero como $P_1(x)$ es de grado 1, entonces $P_1''(t) = 0$, $\forall t$ luego

$$g''(t) = f''(t) - E_1(x) \frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)},$$

así que

$$0 = f''(c) - E_1(x) \frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)},$$

de modo que

$$E_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Para el caso general observemos que si $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces $E_n(x_k) = 0$, así que $f(x_k) = P_n(x_k)$, y en este caso c puede tomar un valor arbitrario en (a, b) , supongamos, $x \neq x_k$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y sea

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - E_n(x) \frac{(t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}$$

$$= f(t) - P_n(t) - E_n(x) \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{x - x_i},$$

cuando $t = x_k$, se tiene que,

$$g(x_k) = f(x_k) - P_n(x_k) - E_n(x) \prod_{i=0}^n \frac{(x_k - x_i)}{x - x_i} = 0 - E_n(x) \cdot 0 = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

además

$$g(x) = f(x) - P_n(x) - E_n(x) \prod_{i=0}^n \frac{(x - x_i)}{x - x_i} = f(x) - P_n(x) - E_n(x) = 0,$$

luego g se anula en los $n+2$ puntos x, x_0, x_1, \dots, x_n , por tanto por el teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $g^{n+1}(c) = 0$, pero

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - E_n(x) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)},$$

pero como $P_n(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $P_n^{(n+1)}(t) = 0$, además

$$\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{x - x_i} = \frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} t^{n+1} + \text{terminos de grado menor que } n$$

y

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

ya que

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^{n+1} = (n+1)n(n-1) \dots 2.1 = (n+1)!,$$

luego

$$0 = f^{(n+1)}(c) - 0 - E_n(x) \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)},$$

así que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

□

4.3. Polinomio Interpolador de Newton

Cuando queremos aproximar funciones por polinomios es deseable disponer de varios polinomios y escoger el que más se adecuó a las necesidades del problema. En los polinomios de Lagrange, estos se construyen individualmente, y no tienen relación alguna entre si, esto, junto con el hecho de que para su construcción se necesita un alto número de operaciones, lo cual implica un alto costo computacional, constituyen una desventaja.

Presentamos ahora los polinomios interpolantes de Newton, los cuales se construyen recursivamente. Sean

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

.

.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

Observemos que

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

.

.

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

Definición 4.3.1. *Al polinomio*

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

de le define como el polinomio de Newton con n centros x_0, x_1, \dots, x_{n-1}

Ejemplo 4.3.1. *Dados los centros $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, con $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = -4$, $a_5 = 0.5$, calcular $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y evaluar $P_3(2.6)$.*

Solución

a)

$$P_1(x) = 4 + 3(x - 2)$$

$$P_2(x) = 4 + 3(x - 2) - 5(x - 2)(x - 4)$$

$$P_3(x) = 4 + 3(x - 2) - 5(x - 2)(x - 4) - 4(x - 2)(x - 4)(x - 5)$$

$$P_4(x) = 4 + 3(x - 2) - 5(x - 2)(x - 4) - 4(x - 2)(x - 4)(x - 5) \\ + 0.5(x - 2)(x - 4)(x - 5)(x - 6)$$

b)

$$P_3(2.6) = 4 + 1.8 + 4.2 - 8.064 = 1.936$$



La forma de evaluar a $P_3(2.6)$ se puede hacer de manera más fácil de la siguiente forma

$$P_3(x) = (((a_3(x - x_2) + a_2)(x - x_1) + a_1)(x - x_0) + a_0),$$

si tomamos $S_3 = a_3 = -4$, $S_2 = S_3(x - x_2) + a_2$, $S_1 = S_2(x - x_1) + a_1$, $S_0 = S_1(x - x_0) + a_0$, entonces, $S_3 = -4$, $S_2 = -4 \times -2.4 - 5 = 4.6$, $S_1 = 4.6(2.6 - 4) + 3 = -3.44$, $S_0 = -3.44(2.6 - 2) + 4 = 1.936$, el proceso anterior se conoce con el nombre de multiplicaciones encajadas.

Supongamos ahora se quieren encontrar los coeficientes a_k de los polinomios de Newton que aproximan a la función $f(x)$, entonces para $P_1(x)$ se tiene que $P_1(x_0) = f(x_0)$ y $P_1(x_1) = f(x_1)$, luego $P_1(x_0) = a_0 = f(x_0)$ y $P_1(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$, de modo que,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Para $P_2(x)$, se tiene que $f(x_2) = P_2(x_2) = f(x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$, luego

$$\frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = a_2,$$

o sea que

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right),$$

por lo tanto

$$a_2 = \frac{(f(x_2) - f(x_0))(x_1 - x_0) - (f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

o también

$$a_2 = \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \\ &= \left(\frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) \frac{1}{x_2 - x_0}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$a_2 = \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) \frac{1}{x_2 - x_0}.$$

El numerador es una diferencia de cocientes de diferencias, a cada uno de estos cocientes, se les llama diferencias divididas, definamos este concepto.

Definición 4.3.2. Sea $f(x)$ una función se define las diferencias divididas de $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k) \\ f[x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \\ f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}} \\ f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}, \end{aligned}$$

en general

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, x_{k-j+2}, \dots, x_k] - f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}},$$

Las diferencias divididas nos permitirán calcular los coeficientes a_k de los polinomios de Newton, ya que estos se calculan mediante la expresión

$$a_k = f[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

.

La siguiente tabla ilustra las diferencias divididas para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$	$f[, , , ,]$
0	$f[x_0]$				
1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

TABLA 17

Ejemplo 4.3.2. Si $f(x) = \cos x$, construir la tabla de diferencias divididas para los nodos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 1.0$, $x_4 = 1.2$.

Solución

Las diferencias divididas en este caso se muestran en la tabla 18

k	x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$	$f[, , , ,]$
0	0,2	0,9800666				
1	0,4	0,92106099	-0,2956281			
2	0,8	0,6967067	-0,5608857	-0,442096		
3	1,0	0,540302	-0,782022	-0,3685605	0,0919194	
4	1,2	0,3623578	-0,8897225	-0,26925125	0,1241366	0,0322172

TABLA 18

■

Ejemplo 4.3.3. Calcular los coeficientes a_k y los cuatro polinomios interpolantes de Newton si $f(x) = \sin x$ para los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Solución

Las diferencias divididas en este caso se muestran en la tabla 19.

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$	$f[, , , ,]$
0	0				
1	0.841471	0.841471			
2	0.909297	0.067826	-0.3868225		
3	0.141120	-0.768177	-0.4180015	-0.010393	
4	-0.756802	-0.897922	-0.0648725	0.1177097	0.0320257

TABLA 19

luego $a_0 = 0$, $a_1 = 0.841471$, $a_2 = -0.3868225$, $a_3 = -0.010393$, $a_4 = 0.0320257$, así que

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = 0 + 0.841471(x - 0) = 0.841471x,$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

luego

$$P_2(x) = 0.841471x - 0.3868225x(x - 1),$$

para $P_3(x)$ se tiene que

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_1),$$

de modo que

$$P_3(x) = 0.841471x - 0.3868225x(x - 1) - 0.010393x(x - 1)(x - 2),$$

ahora

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

por consiguiente

$$P_4(x) = 0.841471x - 0.3868225x(x - 1) - 0.010393x(x - 1)(x - 2) +$$

$$0.0320257x(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

■

4.4. Polinomios de Hermite

Definición 4.4.1. Sean $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, m_i un entero no negativo, asociado a cada x_i , con $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, $f \in C^m[a, b]$ con $m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i$, definimos el **Polinomio Osculante** que aproxima a f como el polinomio de menor grado tal que

$$\frac{d^{(k)}P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^{(k)}f(x_i)}{dx^k},$$

$$\forall k = 0, 1, 2, 3, \dots, m_i$$

Observemos que si $i = 0$, entonces $k = 0, 1, 2, \dots, m_0$, luego $P^{(0)}(x_0) = f^{(0)}(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, $P''(x_0) = f''(x_0), \dots$, $P^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0)$, o sea que en este caso el polinomio osculante es que aproxima a f es el m_0 -ésimo polinomio de Taylor, pero si $m_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces, $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2), \dots, P(x_n) = f(x_n)$, es decir que $P(x_k) = f(x_k)$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ y en este caso el polinomio osculante es el n -ésimo polinomio de Lagrange.

Ahora si $m_i = 1$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, el polinomio osculante que aproxima a f son los llamados **Polinomios de Hermite**, obsérvese que en este caso $P(x_k) = f(x_k)$ y $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Teorema 4.4.1. Sea $f \in C[a, b]$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ con $x_i \neq x_j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, el polinomio único de menor grado que coincide con f y f' en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ es el polinomio de Hermite de grado $2n + 1$ dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\hat{H}_{n,i}(x)$$

donde

$$H_{n,i}(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_{n,i}(x_i)]L_{n,i}^2(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,i}(x) = (x - x_i)L_{n,i}^2(x)$$

Demostración. Como

$$L_{n,i}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

entonces $L_{n,i}(x_j) = 0$ si $j \neq i$ y $L_{n,i}(x_j) = 1$ si $j = i$, por lo tanto, si $i = j$ $H_{n,i}(x_j) = [1 - 2(x_j - x_i)L'_{n,i}(x_i)]L_{n,i}^2(x_j) = 1$ y $\widehat{H}_{n,i}(x_j) = (x_j - x_j)L_{n,i}^2(x_j) = 0$, y si $j \neq i$ $H_{n,i}(x_j) = 0$ y $\widehat{H}_{n,i}(x_j) = 0$, pero como

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0, j \neq i}^n f(x_i)H_{n,i}(x) + f(x_j)H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\widehat{H}_{n,i}(x),$$

entonces

$$H_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0, j \neq i}^n f(x_i)H_{n,i}(x_j) + f(x_j)H_{n,i}(x_j) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\widehat{H}_{n,i}(x_j),$$

así que

$$H_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0, j \neq i}^n f(x_i) \cdot 0 + f(x_j) \cdot 1 + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \cdot 0 = f(x_j),$$

por tanto $H_{2n+1}(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ahora

$$H'_{n,i}(x) = -2L'_{n,i}(x_i)L_{n,i}^2(x) + 2L_{n,i}(x)L'_{n,i}(x)[1 - 2(x - x_i)L'_{n,i}(x_i)],$$

así que si $j \neq i$,

$$\begin{aligned} H'_{n,i}(x_j) &= -2L'_{n,i}(x_j)L_{n,i}^2(x_j) + 2L_{n,i}(x_j)L'_{n,i}(x_j)[1 - 2(x_j - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \\ &= -2L'_{n,i}(x_i) \cdot 0 + 2 \cdot 0L'_{n,i}(x_j)[1 - 2(x_j - x_j)L'_{n,i}(x_i)] = 0, \end{aligned}$$

y si $i = j$

$$\begin{aligned} H'_{n,j}(x_j) &= -2L'_{n,j}(x_j)L_{n,j}^2(x_j) + 2L_{n,j}(x_j)L'_{n,j}(x_j)[1 - 2(x_j - x_j)L'_{n,j}(x_j)], \\ &= -2L'_{n,j}(x_j) + 2L'_{n,j}(x_j) = 0 \end{aligned}$$

por tanto $H'_{n,i}(x_j) = 0 \forall j, i$.

También

$$\widehat{H}'_{n,i}(x) = L_{n,i}^2(x) + 2(x - x_i)L_{n,i}(x)L'_{n,i}(x),$$

así que

$$\begin{aligned} \widehat{H}'_{n,i}(x_j) &= L_{n,i}^2(x_j) + 2(x - x_i)L_{n,i}(x_j)L'_{n,i}(x_j) \\ &= L_{n,i}(x_j)[L_{n,i}(x_j) + 2(x_j - x_i)L'_{n,i}(x_j)], \end{aligned}$$

luego, si $j \neq i$ $L_{n,i}(x_j) = 0$ y por tanto

$$\widehat{H}'_{n,i}(x_j) = 0$$

y si $i = j$

$$\begin{aligned}\widehat{H}'_{n,i}(x_i) &= L_{n,i}(x_i)[L_{n,i}(x_i) + 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \\ &= 1[1 + 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] = 1,\end{aligned}$$

de modo que como

$$\begin{aligned}H'_{2n+1}(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i)H'_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\widehat{H}'_{n,i}(x) \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i)H'_{n,i}(x) + \sum_{i=0, i \neq j}^n f'(x_i)\widehat{H}'_{n,i}(x) + f'(x_j)\widehat{H}'_{n,i}(x),\end{aligned}$$

entonces

$$H'_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i)H'_{n,i}(x_j) + \sum_{i=0, i \neq j}^n f'(x_i)\widehat{H}'_{n,i}(x_j) + f'(x_j)\widehat{H}'_{n,i}(x_j) = f'(x_j).$$

Por lo anterior se tiene que $H_{2n+1}(x_j) = f(x_j)$ y $H'_{2n+1}(x_j) = f'(x_j)$, para $j = 0, 1, 2, \dots, n$ \square

Ejemplo 4.4.1. Sea $f(x) = \sin x$, construir un polinomio interpolante de Hermite que aproxime a $f(x)$ en $x = 0.4$

Solución

Sea $x_0 = 0.3$, $x_1 = 0.32$, $x_2 = 0.35$, se tiene entonces que $f(x_0) = 0.29552$, $f(x_1) = 0.31457$, $f(x_2) = 0.3429$, además $f'(x) = \cos x$, luego $f'(x_0) = 0.95534$, $f'(x_1) = 0.94924$, $f'(x_2) = 0.93937$, como $k = 0, 1, 2$, entonces $n = 2$, así que el polinomio de Hermite es $H_{2n+1}(x) = H_5(x)$ dado por

$$\begin{aligned}H_5(x) &= \sum_{i=0}^2 f(x_i)H_{2,i}(x) + \sum_{i=0}^2 f'(x_i)\widehat{H}_{2,i}(x), \\ &= f(x_0)H_{2,0}(x) + f(x_1)H_{2,1}(x) + f(x_2)H_{2,2}(x) \\ &\quad + f'(x_0)\widehat{H}_{2,0}(x) + f'(x_1)\widehat{H}_{2,1}(x) + f'(x_2)\widehat{H}_{2,2}(x),\end{aligned}$$

pero sabemos que

$$H_{2,i}(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_{2,i}(x)]L_{2,i}^2(x)$$

y

$$\widehat{H}_{2,i}(x) = (x - x_i)L_{2,i}^2(x),$$

$i = 0, 1, 2$ por lo tanto debemos calcular $H_{2,0}(x), H_{2,1}(x), H_{2,2}(x)$ así como, $\widehat{H}_{2,0}(x), \widehat{H}_{2,1}(x), \widehat{H}_{2,2}(x)$.

Para esto

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.32)(x - 0.35)}{(0.3 - 0.32)(0.3 - 0.35)} = \frac{(x - \frac{8}{25})(x - \frac{7}{20})}{\frac{1}{1000}},$$

o sea que

$$L_{2,0}(x) = 1000\left(x - \frac{8}{25}\right)\left(x - \frac{7}{20}\right) = 1000x^2 - 670x + 112,$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.35)}{(0.32 - 0.3)(0.32 - 0.35)} = \frac{(x - \frac{3}{10})(x - \frac{7}{20})}{-\frac{3}{5000}},$$

luego

$$L_{2,1}(x) = -\frac{5000}{3}\left(x - \frac{3}{10}\right)\left(x - \frac{7}{20}\right) = -\frac{5000}{3}x^2 + \frac{3250}{3}x - 175$$

y

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.32)}{(0.35 - 0.3)(0.35 - 0.32)} = \frac{(x - \frac{3}{10})(x - \frac{8}{25})}{\frac{3}{2000}},$$

luego

$$L_{2,2}(x) = \frac{2000}{3}\left(x - \frac{3}{10}\right)\left(x - \frac{8}{25}\right) = \frac{2000}{3}x^2 - \frac{1240}{3}x + 64,$$

de lo anterior se tiene que

$$L'_{2,0}(x) = 2000x - 670, \quad L'_{2,1}(x) = -\frac{10000}{3}x + \frac{3250}{3}, \quad L'_{2,2}(x) = \frac{4000}{3}x - \frac{1240}{3},$$

por tanto,

$$L'_{2,0}(x_0) = -70, \quad L'_{2,1}(x_1) = \frac{50}{3} \quad L'_{2,2}(x_2) = \frac{160}{3}$$

luego

$$H_{2,0}(x) = \left[1 - 2\left(x - \frac{3}{10}\right) \cdot (-70)\right](1000x^2 - 670x + 112)^2 = (140x - 41)(1000x^2 - 670x + 112)^2,$$

$$\begin{aligned}
 H_{2,1}(x) &= \left[1 - 2\left(x - \frac{8}{25}\right) \cdot \frac{50}{3}\right] \left(-\frac{5000}{3}x^2 + \frac{3250}{3}x - 175\right)^2 \\
 &= \left(-\frac{100}{3}x + \frac{35}{3}\right) \left(-\frac{5000}{3}x^2 + \frac{3250}{3}x - 175\right)^2,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 H_{2,2}(x) &= \left[1 - 2\left(x - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{160}{3}\right] \left(\frac{2000}{3}x^2 - \frac{1240}{3}x + 64\right)^2 \\
 &= \left(-\frac{320}{3}x + \frac{115}{3}\right) \left(\frac{2000}{3}x^2 - \frac{1240}{3}x + 64\right)^2.
 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 \widehat{H}_{2,0}(x) &= \left(x - \frac{3}{10}\right) \left(1000x^2 - 670x + 112\right)^2, \\
 \widehat{H}_{2,1}(x) &= \left(x - \frac{8}{25}\right) \left(-\frac{5000}{3}x^2 + \frac{3250}{3}x - 175\right)^2,
 \end{aligned}$$

y

$$\widehat{H}_{2,2}(x) = \left(x - \frac{7}{20}\right) \left(\frac{2000}{3}x^2 - \frac{1240}{3}x + 64\right)^2,$$

luego

$$\begin{aligned}
 H_5(x) &= 0.29552H_{2,0}(x) + 0.31457H_{2,1}(x) + 0.3429H_{2,2}(x) \\
 &\quad + 0.95534\widehat{H}_{2,0}(x) + 0.94924\widehat{H}_{2,1}(x) + 0.93937\widehat{H}_{2,2}(x).
 \end{aligned}$$

Pero $H_{2,0}(0.34) = \frac{33}{125}$, $H_{2,1}(0.34) = \frac{4}{27}$, $H_{2,2}(0.34) = \frac{19845}{3375}$, $\widehat{H}_{2,0}(0.34) = \frac{1}{625}$, $\widehat{H}_{2,1}(0.34) = \frac{2}{225}$ y $\widehat{H}_{2,2}(0.34) = -\frac{16}{5625}$, entonces

$$\begin{aligned}
 H_5(0.34) &= 0.29552 \cdot \left(\frac{33}{125}\right) + 0.31457 \cdot \left(\frac{4}{27}\right) + 0.3429 \cdot \left(\frac{1984}{3375}\right) \\
 &\quad + 0.95534 \cdot \left(\frac{1}{625}\right) + 0.94924 \cdot \left(\frac{2}{225}\right) - 0.93937 \cdot \left(\frac{16}{5625}\right)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$H_5(0.34) = 0.333489.$$

■

Como se observa en el ejemplo anterior el cálculo de los polinomios de Hermite aún en el caso en que se tengan pocos puntos, es muy costoso computacionalmente. Otro método para generar los polinomios de Hermite,

es utilizando las diferencia divididas interpolantes de Newton, usadas para obtener dichos polinomios, que como hemos comentado están dados por

$$P_n = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}).$$

Supongamos se tiene x_0, x_1, \dots, x_n , $x_i \neq x_j$, $f(x_i)$ y $f'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, sea $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n$, con estos nuevos puntos se construye la tabla de diferencias divididas. Pero como $z_{2i} = z_{2i+1}$, no se puede tener $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ en este caso se toma $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, el polinomio de Hermite es entonces

$$H_{2n+1}(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \dots, z_n](x - z_0)(x - z_1) \dots (x - z_{i-1}).$$

Ejemplo 4.4.2. Sea $f(x) = \sin x$, construir un polinomio interpolante de Hermite que aproxime a $f(x)$ en $x = 0.34$

Solución

Como antes sea $x_0 = 0.3$, $x_1 = 0.32$, $x_2 = 0.35$, se tiene entonces que $f(x_0) = 0.29552$, $f(x_1) = 0.31457$, $f(x_2) = 0.3429$, además $f'(x) = \cos x$, luego $f'(x_0) = 0.95534$, $f'(x_1) = 0.94924$, $f'(x_2) = 0.93937$, como $k = 0, 1, 2$, la tabla de diferencia divididas es entonces

z_0	0.3	0.29552					
z_1	0.3	0.29552	0.95534				
z_2	0.32	0.31457	0.9525	-0.142			
z_3	0.32	0.31457	0.94924	-0.163	-1.05		
z_4	0.35	0.3429	0.94433	-0.16367	-0.0134	20.732	
z_5	0.35	0.3429	0.93937	-0.16533	-0.05533	-0.7986	398.668

TABLA 20

Así que,

$$H_{2n+1}(x) = 0.29552 + 0.95534\left(x - \frac{3}{10}\right) - 0.142\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - 1.05\left(x - \frac{3}{10}\right)^2\left(x - \frac{8}{25}\right) + 20.732\left(x - \frac{3}{10}\right)^2\left(x - \frac{8}{25}\right)^2 + 398.668\left(x - \frac{3}{10}\right)^2\left(x - \frac{8}{25}\right)^2\left(x - \frac{7}{20}\right),$$

luego

$$\begin{aligned} H_{2n+1}\left(\frac{17}{50}\right) &= H_{2n+1}(0.34) = 0.29552 + 0.95534\left(\frac{17}{50} - \frac{3}{10}\right) - 0.142\left(\frac{17}{50} - \frac{3}{10}\right)^2 \\ &\quad - 1.05\left(\frac{17}{50} - \frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{17}{50} - \frac{8}{25}\right) + 20.732\left(\frac{17}{50} - \frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{17}{50} - \frac{8}{25}\right)^2 \\ &\quad + 398.668\left(\frac{17}{50} - \frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{17}{50} - \frac{8}{25}\right)^2\left(\frac{17}{50} - \frac{7}{20}\right) = 0.333489, \end{aligned}$$

que coincide con la aproximación obtenida con anterioridad. ■

4.5. Aproximación de Padé

Es posible aproximar una función $f(x)$ por un polinomio racional, esto es, si se tiene

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots + p_nx^n$$

y

$$R_m(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots + q_mx^m$$

se desea encontrar un polinomio cociente

$$Q_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{R_m(x)},$$

que aproxime a la función $f(x)$.

Obsérvese que el primer sumando de $R_m(x)$ lo hemos tomado igual a uno, lo cual es posible ya que como q_0 debe ser distinto de cero, siempre es posible dividir numerador y denominador por q_0 teniendo siempre a uno como primer sumando de $R_m(x)$.

El polinomio $Q_{n,m}(x)$, se toma de tal forma que f y sus derivadas hasta de orden $n + m$ coincidan en $x = 0$.

Supongamos $f(x)$ es analítica en $x = 0$ y que tiene como serie de MacLaurin

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots$$

y sea

$$R_m(x)f(x) - P_n(x) = C(x),$$

o sea

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \left(\sum_{j=0}^m q_j x^j\right) - \sum_{j=0}^n p_j x^j = \left(\sum_{j=n+m+1}^{\infty} c_j x^j\right), \quad q_0 = 1.$$

Al igualar a cero los coeficientes de las potencias iguales x^k , $k = 1, 2, 3, \dots, n + m$ se obtienen $n + m + 1$ ecuaciones lineales con variables p_i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ y q_j , $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

El proceso anterior se conoce como el método de **aproximación de Padé**, el cual como hemos visto requiere que $f(x)$ y sus derivadas sean continuas en $x = 0$.

Ejemplo 4.5.1. Determine la aproximación de Padé $Q_{3,2}$ de $f(x) = \ln(1 + x)$.

Solución

Como el desarrollo de MacLaurin de $f(x) = \ln(1 + x)$ es

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

el cual se puede escribir como

$$f(x) = x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots\right),$$

entonces se determina primero la aproximación de Padé $R_{2,2}(x)$ para $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, para esto sea

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots\right) (1 + q_1 x + q_2 x^2) - p_0 - p_1 x - p_2 x^2 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ + 0x^4 + c_5 x^5 + \dots, \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} (1 - p_0) + \left(q_1 - \frac{1}{2} - p_1\right)x + \left(q_2 - \frac{q_1}{2} + \frac{1}{3} - p_2\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}q_1 - \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{4}\right)x^3 \\ + \left(-\frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{5}\right)x^4 + \dots = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + c_5 x^5 + \dots, \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}1 - p_0 &= 0, \\ q_1 - \frac{1}{2} - p_1 &= 0 \\ q_2 - \frac{q_1}{2} + \frac{1}{3} - p_2 &= 0 \\ \frac{1}{3}q_1 - \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ -\frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{5} &= 0,\end{aligned}$$

luego al resolver las dos últimas ecuaciones se tiene que $q_1 = \frac{6}{5}$ y $q_2 = \frac{3}{10}$, al reemplazar estos valores en las ecuaciones 2 y 3 anteriores se tiene que $p_1 = \frac{7}{10}$ y $p_2 = \frac{1}{30}$, además $p_0 = 1$ de la primera ecuación, así que

$$\begin{aligned}g(x) &\approx \frac{1 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{30}x^2}{1 + \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}x^2} \\ &= \frac{\frac{30 + 21x + x^2}{30}}{\frac{10 + 12x + 3x^2}{10}} = \frac{30 + 21x + x^2}{30 + 36x + 9x^2},\end{aligned}$$

de modo que

$$f(x) = \ln(1+x) \approx Q_{3,2}(x) = \frac{30x + 21x^2 + x^3}{30 + 36x + 9x^2}$$

■

Ejemplo 4.5.2. *Determine la aproximación de Padé $Q_{5,4}(x)$ de $f(x) = \sin x$ y evalúe $\sin 0.34$ a partir de dicha aproximación.*

Solución

Sabemos que la serie de MacLaurin para $\sin x$ es

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots,$$

como x es un factor, entonces podríamos obtener primero la aproximación de Padé de $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, o sea

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots,$$

pero observemos que la función $g(x)$ solo contiene potencia pares de x , lo cual permite encontrar la aproximación de Padé para

$$h(x) = g(x^{\frac{1}{2}}) = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \frac{x^4}{9!} - \dots$$

y luego reemplazar a x por x^2 . Sea entonces

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^3}{5040} + \frac{x^4}{362880} - \dots\right)(1 + q_1x + q_2x^2) - p_0 - p_1x - p_2x^2 \\ = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + c_5x^5 + \dots, \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} 1 - p_0 &= 0, \\ q_1 - \frac{1}{6} - p_1 &= 0 \\ \frac{1}{120} - \frac{q_1}{6} + q_2 - p_2 &= 0 \\ -\frac{1}{5040} + \frac{1}{120}q_1 - \frac{1}{6}q_2 &= 0 \\ \frac{1}{362880} + \frac{1}{120}q_2 - \frac{1}{5040}q_1 &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo las dos últimas ecuaciones se tiene que $q_1 = \frac{91}{2772}$ y $q_2 = \frac{5}{11088}$, luego entonces se tiene que $p_1 = -\frac{371}{2772}$ y $p_2 = \frac{551}{166320}$ ahora como $p_0 = 1$ se tiene que el polinomio de aproximación de Padé de $h(x)$ es

$$S_{2,2}(x) = \frac{1 - \frac{371}{2772}x + \frac{551}{166320}x^2}{1 + \frac{91}{2772}x + \frac{5}{11088}x^2} = \frac{166320 - 22260x + 551x^2}{11088 + 364x + 5x^2},$$

o sea que

$$S_{2,2}(x) = \frac{166320 - 22260x + 551x^2}{15(11088 + 364x + 5x^2)},$$

luego si reemplazamos a x por x^2 se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx \frac{166320 - 22260x^2 + 551x^4}{15(11088 + 364x^2 + 5x^4)},$$

de modo que

$$\operatorname{sen} x \approx Q_{5,4}(x) = \frac{166320x - 22260x^3 + 551x^5}{15(11088 + 364x^2 + 5x^4)}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0.34 \approx Q_{5,4}(0.34) &= \frac{166320 \times 0.34 - 22260 \times (0.34)^3 + 551 \times (0.34)^5}{15(11088 + 364 \times (0.34)^2 + 5 \times (0.34)^4)} \\ &= \frac{55676.39645}{166952.1783} = 0.333487 \end{aligned}$$

que coincide con la aproximación obtenida usando los polinomios de Hermite.

■

4.6. Interpolación a Trozos

En un polinomio interpolador de grado n es posible tener $n - 1$ extremos relativos, lo cual trae como consecuencia que tenga muchas oscilaciones o fluctuaciones al pasar por los puntos dados, una alternativa para evitar dichas fluctuaciones es generar polinomios $S_k(x)$ que solo interpolen dos nodos consecutivos y luego unirlos en sus extremos, el conjunto $\{S_k(x)\}$ forman una curva **polinomial a trozos o spline** que notaremos $S(x)$

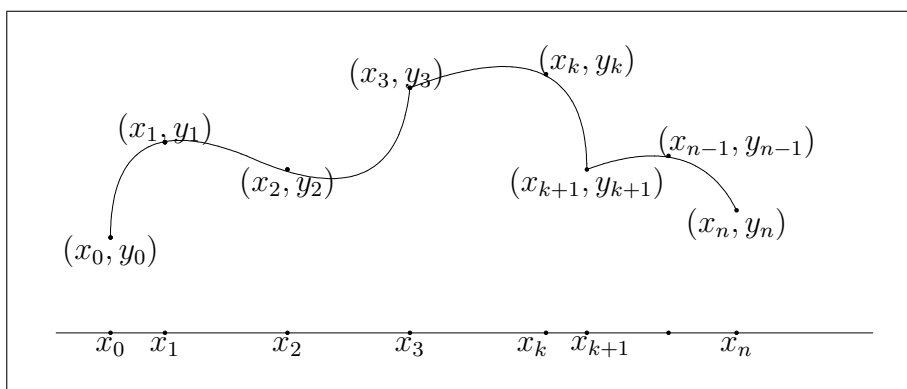


Figura 4.2

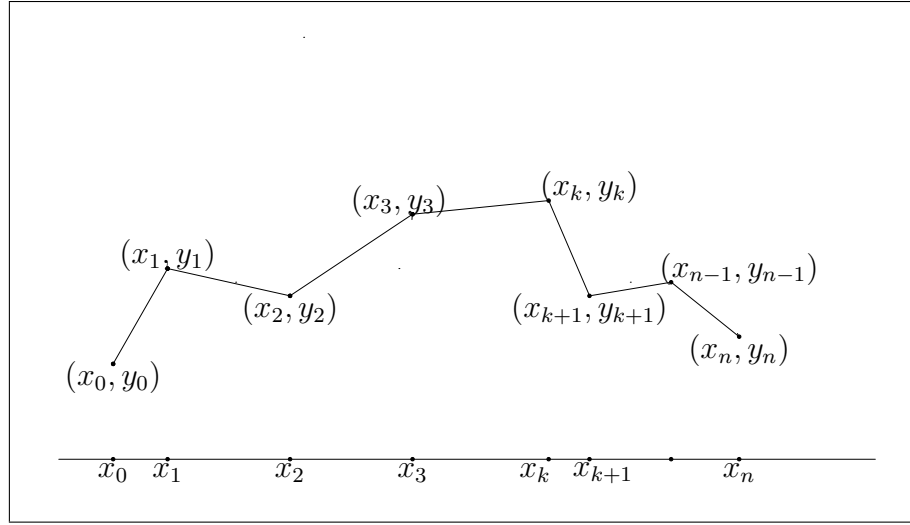


Figura 4.3

4.6.1. Interpolación Lineal a Trozos

Sean (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , \dots , (x_n, y_n) , los puntos por los cuales debe pasar el polinomio interpolador, el polinomio más simple que se puede construir es el polinomio de grado uno, el cual produce una línea poligonal. Fig(4.3)

Por los polinomios interpoladores de Lagrange podemos determinar cada uno de los segmentos que forman esta línea poligonal, si $S_k(x)$ es el k -ésimo segmento que une los puntos (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) se tiene entonces que

$$S_k(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_k - x_{k+1}},$$

o también

$$S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k), \quad d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados, luego entonces,

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + d_0(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + d_1(x - x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ y_k + d_k(x - x_k), & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \vdots \\ y_{n-1} + d_{n-1}(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

4.6.2. Interpolación Cúbica o Cercha Cúbica

Es posible construir una función cúbica $S_k(x)$ en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, tal que la curva a trozos $y = S(x)$ sea dos veces diferenciable y $S''(x)$ sea continua en $[x_0, x_n]$, lo primero implica que $y = f(x)$ no tiene esquinas y lo segundo que $S(x)$ tiene un radio de curvatura definido.

Definición 4.6.1. Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de el intervalo $[x_0, x_n]$, $S(x)$ es un interpolador cúbico o cercha cúbica de $f(x)$ si existen n polinomios cúbicos $S_k(x)$ tales que

1. $S(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$
2. $S(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$
3. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$
4. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$
5. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$

Las condiciones dadas en la definición anterior se pueden utilizar para construir cerchas cubicas, en efecto como

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

y $y_k = f(x_k) = S_k(x_k) = a_k$, entonces, $S_{k+1}(x_{k+1}) = a_{k+1} = y_{k+1}$ y por la condición 3 de la definición $S_{k+1}(x_{k+1}) = S_k(x_{k+1})$, entonces

$$y_{k+1} = a_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3,$$

sea $h_k = x_{k+1} - x_k$, entonces,

$$y_{k+1} = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 \quad (4.1)$$

para determinar b_k sea $b_n = S'(x_n)$, pero

$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2,$$

entonces $S'_k(x_k) = b_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, luego por la condición 4

$$b_{k+1} = S'_{k+1}(x_{k+1}) = S'_k(x_{k+1}) = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 \quad (4.2)$$

y $S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k)$, luego si tomamos $\lambda_k = S''_k(x_k) = 2c_k$, por 5 de la definición se tiene que,

$$2c_{k+1} = S''_{k+1}(x_{k+1}) = S''_k(x_{k+1}) = 2c_k + 6d_k h_k.$$

Pero entonces $d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$ y al reemplazar en 4.1 y 4.2 tenemos que

$$y_{k+1} = y_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} h_k^3 = y_k + b_k h_k + \frac{(2c_k + c_{k+1})}{3} h_k^2 \quad (4.3)$$

y

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + \frac{3h_k^2(c_{k+1} - c_k)}{3h_k} = b_k + h_k(c_k + c_{k+1}). \quad (4.4)$$

De 4.3 se tiene que

$$b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) \quad (4.5)$$

reduciendo el índice en una unidad se tiene que

$$b_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3}(2c_{k-1} + c_k) \quad (4.6)$$

y como

$$b_k = b_{k-1} + h_{k-1}(c_{k-1} + c_k) \quad (4.7)$$

la cual es obtenida al reducir el orden en 4.4, reemplazando 4.5 y 4.6 en 4.7 tenemos que

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3}(2c_{k-1} + c_k) + h_{k-1}(c_{k-1} + c_k),$$

luego

$$3\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 2h_k c_k - h_k c_{k+1} = 3\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - 2h_{k-1} c_{k-1} - h_{k-1} c_k + 3h_{k-1}(c_{k-1} + c_k),$$

de modo que

$$3\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} = 2h_k c_k + h_k c_{k+1} - 2h_{k-1} c_{k-1} - h_{k-1} c_k + 3h_{k-1} c_{k-1} + 3h_{k-1} c_k,$$

o sea que

$$3\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} = h_{k-1} c_{k-1} + 2h_{k-1} c_k + 2h_k c_k + h_k c_{k+1},$$

sea $\beta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, entonces

$$3\beta_k - 3\beta_{k-1} = h_{k-1} c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) c_k + h_k c_{k+1},$$

pero como $\lambda_k = 2c_k$, entonces $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$, así que

$$3(\beta_k - \beta_{k-1}) = h_{k-1} \frac{\lambda_{k-1}}{2} + 2(h_{k-1} + h_k) \frac{\lambda_k}{2} + h_k \frac{\lambda_{k+1}}{2},$$

de modo que,

$$6(\beta_k - \beta_{k-1}) = h_{k-1} \lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \lambda_k + h_k \lambda_{k+1},$$

si hacemos $v_k = 6(\beta_k - \beta_{k-1})$ se tiene que

$$h_{k-1} \lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \lambda_k + h_k \lambda_{k+1} = v_k \quad (4.8)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ que representa un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n+1$ variables $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, observemos que la primera ecuación es

$$\lambda_0 h_0 + 2(h_0 + h_1) \lambda_1 + \lambda_2 h_1 = v_1$$

y la última es

$$h_{n-2} \lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \lambda_{n-1} + \lambda_n h_{n-1} = v_{n-1}$$

ahora si fijamos valores para λ_0 y para λ_n se tiene entonces que la primera y última ecuación se transforman en

$$2(h_0 + h_1) \lambda_1 + \lambda_2 h_1 = v_1 - \lambda_0 h_0$$

y

$$h_{n-2} \lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \lambda_{n-1} = v_{n-1} - \lambda_n h_{n-1}$$

las cuales junto con el sistema

$$\lambda_{k-1} h_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \lambda_k + \lambda_{k+1} h_k = v_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-2$$

forman un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n-1$ variables.

	Estrategia	Ecuación para λ_0 y λ_n
I	<u>Cúbica Sujeta:</u> se especifican $S'(x_0)$, $S'(x_n)$ (es la mejor si se conocen las derivadas)	$\lambda_0 = \frac{3}{h_0}(\beta_0 - S'(x_0)) - \frac{\lambda_1}{2},$ $\lambda_n = \frac{3}{h_{n-1}}(S'(x_n) - \beta_{n-1}) - \frac{\lambda_{n-1}}{2}$
II	<u>Cúbica Natural</u> (una curva relajada)	$\lambda_0 = 0, \lambda_n = 0$
III	<u>Extrapolada</u> se extrapola $S''(x_0)$ en los extremos	$\lambda_0 = \lambda_1 - \frac{h_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{h_1},$ $\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{h_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})}{h_{n-2}}$
IV	<u>Con terminación parabólica</u> $S''(x_0)$ es constante cerca de los extremos	$\lambda_0 = \lambda_1, \lambda_n = \lambda_{n-1}$
V	<u>Curvatura en los extremos</u> se especifica $S''(x)$ en los extremos	$\lambda_0 = S''(x_0), \lambda_n = S''(x_n)$

TABLA 21

Los valores escogidos para λ_0 y λ_n , son habitualmente denominados restricción en los extremos, para su escogencia existen cinco estrategias muy usuales las cuales relacionamos en la tabla 21.

Conocido λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ entonces se tiene que $a_k = f(x_k)$, $b_k = \beta_k - \frac{h_k}{6}(2\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$ y $d_k = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{6h_k}$.

Teorema 4.6.1. *Cercha Cúbica Sujeta.* *Existe una única cercha cúbica sujeta que satisface las condiciones sobre la derivada primera en la frontera dadas por $S'(a) = \beta_0$, $S'(b) = \beta_n$.*

Demostración. Sean

$$\lambda_0 = \frac{3}{h_0}(\beta_0 - S'(x_0)) - \frac{\lambda_1}{2},$$

y

$$\lambda_n = \frac{3}{h_{n-1}}(S'(x_n) - \beta_{n-1}) - \frac{\lambda_{n-1}}{2}$$

Si $k = 1$, se tiene de 4.8 que

$$h_0\lambda_0 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

es decir

$$h_0 \left[\frac{3}{h_0} (\beta_0 - S'(x_0)) - \frac{\lambda_1}{2} \right] + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

luego

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - h_0 \left[\frac{3}{h_0} (\beta_0 - S'(x_0)) - \frac{\lambda_1}{2} \right],$$

o sea que

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - 3(\beta_0 - S'(x_0)) + \frac{h_0\lambda_1}{2},$$

luego

$$\lambda_1 \left(2h_0 + 2h_1 - \frac{h_0}{2} \right) + h_1\lambda_2 = v_1 - 3(\beta_0 - S'(x_0))$$

y por tanto

$$\left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1 \right) \lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - 3(\beta_0 - S'(x_0))$$

que es la primera ecuación del sistema, pero si $k = n - 1$, entonces

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} + h_{n-1}\lambda_n = v_{n-1},$$

luego

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1} - h_{n-1} \left[\frac{3}{h_{n-1}} (S'(x_n) - \beta_{n-1}) - \frac{\lambda_{n-1}}{2} \right],$$

así que

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1} - 3(S'(x_n) - \beta_{n-1}) + \frac{h_{n-1}\lambda_{n-1}}{2},$$

luego

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + \left(2h_{n-2} + \frac{3}{2}h_{n-1} \right) \lambda_{n-1} = v_{n-1} - 3(S'(x_n) - \beta_{n-1}),$$

que es la última ecuación del sistema, las dos ecuaciones anteriores junto con

$$h_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\lambda_k + h_k\lambda_{k+1} = v_k \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-2,$$

forman un sistema lineal de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ variables de la forma $AX = b$ cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}h_0 + 2h_1 & h_1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2h_{n-2} + \frac{3}{2}h_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} v_1 - 3(\beta_0 - S'(x_0)) \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1} - 3(S'(x_n) - \beta_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

En el sistema anterior podemos observar que la matriz A es tridiagonal estrictamente diagonal dominante lo cual implica que el sistema tiene solución única y el teorema queda probado. \square

Ejemplo 4.6.1. *Determinar la cercha cúbica sujeta que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$, $(4, 1)$ y verifica las condiciones sobre la primera derivada en los extremos dados por $S'(-3) = -1$, $S'(4) = 1$.*

Solución

Sabemos que $a_k = f(x_k)$, $b_k = \beta_k - \frac{h_k}{6}(2\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$ y $d_k = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{6h_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, como es cercha cúbica sujeta se toma $\lambda_0 = \frac{3}{h_0}(\beta_0 - S'(x_0)) - \frac{\lambda_1}{2}$ y $\lambda_3 = \frac{3}{h_2}(S'(x_3) - \beta_2) - \frac{\lambda_2}{2}$, faltaría determinar λ_1 y λ_2 para esto se resuelve el sistema

$$\left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1\right)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - 3(\beta_0 - S'(x_0))$$

$$h_1\lambda_1 + \left(2h_1 + \frac{3}{2}h_2\right)\lambda_2 = v_2 - 3(S'(x_3) - \beta_2),$$

recordemos que $h_k = x_{k+1} - x_k$, $\beta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, $v_k = 6(\beta_k - \beta_{k-1})$, así que

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = 3, \quad h_2 = x_3 - x_2 = 3,$$

$$\beta_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = -2, \quad \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = 1, \quad \beta_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{-2}{3},$$

$$v_1 = 6(\beta_1 - \beta_0) = 18, \quad v_2 = 6(\beta_2 - \beta_1) = -10.$$

El sistema a resolver es entonces

$$\frac{15}{2}\lambda_1 + 3\lambda_2 = 21$$

$$3\lambda_1 + \frac{21}{2}\lambda_2 = -15$$

cuya solución es $\lambda_1 = \frac{118}{31}$ y $\lambda_2 = -\frac{78}{31}$, además $\lambda_0 = \frac{3}{1}(-2+1) - \frac{\frac{118}{31}}{2} = -\frac{152}{31}$
y $\lambda_3 = \frac{3}{3}(1 + \frac{2}{3}) + \frac{\frac{78}{31}}{2} = \frac{272}{93}$, luego

$$a_0 = f(x_0) = 2,$$

$$b_0 = \beta_0 - \frac{h_0}{6}(2\lambda_0 + \lambda_1) = -\frac{93}{93} = -1,$$

$$c_0 = \frac{\lambda_0}{2} = -\frac{76}{31}$$

y

$$d_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{6h_0} = \frac{45}{31},$$

luego

$$S_0(x) = 2 - (x+3) - \frac{76}{31}(x+3)^2 + \frac{45}{31}(x+3)^3 \quad -3 \leq x \leq -2.$$

Además se tiene también que

$$a_1 = f(x_1) = 0,$$

$$b_1 = \beta_1 - \frac{h_1}{6}(2\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{48}{31},$$

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{59}{31}$$

y

$$d_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{6h_1} = -\frac{98}{279},$$

luego

$$S_1(x) = -\frac{48}{31}(x+2) + \frac{59}{31}(x+2)^2 - \frac{98}{279}(x+2)^3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

pero también

$$a_2 = f(x_2) = 3,$$

$$b_2 = \beta_2 - \frac{h_2}{6}(2\lambda_2 + \lambda_3) = \frac{12}{31},$$

$$c_2 = \frac{\lambda_2}{2} = -\frac{39}{31}$$

y

$$d_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{6h_2} = \frac{253}{837},$$

luego

$$S_2(x) = 3 + \frac{12}{31}(x-1) - \frac{39}{31}(x-1)^2 + \frac{253}{837}(x-1)^3 \quad 1 \leq x \leq 4,$$

de modo que la cercha cúbica sujeta es en este ejemplo

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 - (x+3) - \frac{76}{31}(x+3)^2 + \frac{45}{31}(x+3)^3 & -3 \leq x \leq -2 \\ S_1(x) = -\frac{48}{31}(x+2) + \frac{59}{31}(x+2)^2 - \frac{98}{279}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq 1 \\ S_2(x) = 3 + \frac{12}{31}(x-1) - \frac{39}{31}(x-1)^2 + \frac{253}{837}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

■

Teorema 4.6.2. Cercha Cúbica Natural. *Existe una única cercha cúbica natural que satisface las condiciones sobre la derivada primera en la frontera dadas por $S'(x_0) = 0$, $S'(x_n) = 0$.*

Demostración. Si $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = 0$, la primera y la última ecuación están dadas por

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

y

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1},$$

el sistema a resolver es entonces

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

$$h_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\lambda_k + h_k\lambda_{k+1} = v_k \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-2,$$

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1},$$

que es de la forma $AX = b$ con A como matriz de coeficientes dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz A puede observarse es tridiagonal con diagonal estrictamente dominante, por tanto el sistema tiene solución única y el teorema queda probado. \square

Ejemplo 4.6.2. *Determinar la cercha cúbica natural que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$, $(4, 1)$ y verifica las condiciones sobre la primera derivada en los extremos dados por $S'(-3) = 0$, $S'(4) = 0$.*

Solución

Igual que para el ejemplo anterior, sabemos que $a_k = f(x_k)$, $b_k = \beta_k - \frac{h_k}{6}(2\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$ y $d_k = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{6h_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, como es cercha natural se toma $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_3 = 0$, falta entonces determinar λ_1 y λ_2 para esto se resuelve el sistema

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

$$h_1\lambda_1 + 2(h_1 + h_2)\lambda_2 = v_2,$$

recordemos que $h_k = x_{k+1} - x_k$, $\beta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, $v_k = 6(\beta_k - \beta_{k-1})$, así que

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = 3, \quad h_2 = x_3 - x_2 = 3,$$

$$\beta_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = -2, \quad \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = 1,$$

$$\beta_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{-2}{3},$$

$$v_1 = 6(\beta_1 - \beta_0) = 18, \quad v_2 = 6(\beta_2 - \beta_1) = -10.$$

El sistema a resolver es entonces

$$8\lambda_1 + 3\lambda_2 = 18$$

$$3\lambda_1 + 12\lambda_2 = -10$$

cuya solución es $\lambda_1 = \frac{82}{29}$ y $\lambda_2 = -\frac{134}{87}$, se tiene entonces que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{82}{29}$, $\lambda_2 = -\frac{134}{87}$, $\lambda_3 = 0$.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}a_0 &= f(x_0) = 2, \\b_0 &= \beta_0 - \frac{h_0}{6}(2\lambda_0 + \lambda_1) = -\frac{215}{87}, \\c_0 &= \frac{\lambda_0}{2} = 0\end{aligned}$$

y

$$d_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{6h_0} = \frac{41}{87},$$

luego

$$S_0(x) = 2 - \frac{215}{87}(x+3) + \frac{41}{87}(x+3)^2 + \frac{41}{87}(x+3)^3 \quad -3 \leq x \leq -2.$$

Ahora

$$\begin{aligned}a_1 &= f(x_1) = 0, \\b_1 &= \beta_1 - \frac{h_1}{6}(2\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{92}{87}, \\c_1 &= \frac{\lambda_1}{2} = \frac{41}{29}\end{aligned}$$

y

$$d_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{6h_1} = -\frac{190}{783},$$

luego

$$S_1(x) = -\frac{92}{87}(x+2) + \frac{41}{29}(x+2)^2 - \frac{190}{783}(x+2)^3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

y

$$\begin{aligned}a_2 &= f(x_2) = 3, \\b_2 &= \beta_2 - \frac{h_2}{6}(2\lambda_2 + \lambda_3) = \frac{76}{87}, \\c_2 &= \frac{\lambda_2}{2} = -\frac{67}{87}\end{aligned}$$

y

$$d_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{6h_2} = \frac{67}{783},$$

luego

$$S_2(x) = 3 + \frac{76}{87}(x-1) - \frac{67}{87}(x-1)^2 + \frac{67}{783}(x-1)^3 \quad 1 \leq x \leq 4,$$

de modo que la cercha cúbica natural es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 - \frac{215}{87}(x+3) + \frac{41}{87}(x+3)^2 + \frac{41}{87}(x+3)^3 & -3 \leq x \leq -2 \\ S_1(x) = -\frac{92}{87}(x+2) + \frac{41}{29}(x+2)^2 - \frac{190}{783}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq 1 \\ S_2(x) = 3 + \frac{76}{87}(x-1) - \frac{67}{87}(x-1)^2 + \frac{67}{783}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

■

Teorema 4.6.3. Cercha Cúbica Extrapolada. *Existe una única cercha cúbica que usa extrapolación desde los nodos x_1 y x_2 y también extrapolación desde los nodos x_{n-1} y x_{n-2} con el fin de determinar $S''(x_n)$.*

Demostración. Como en este caso se tiene que

$$\lambda_0 = \lambda_1 - \frac{h_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{h_1}$$

y

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{h_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})}{h_{n-2}},$$

la primera esta dada por

$$h_0\lambda_0 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

o sea

$$h_0 \left[\lambda_1 - \frac{h_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{h_1} \right] + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

por tanto,

$$h_0 \left(\lambda_1 - \frac{h_0}{h_1}\lambda_2 + \frac{h_0}{h_1}\lambda_1 \right) + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

de modo que

$$h_0\lambda_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\lambda_1 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\lambda_2 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

así que

$$\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1} \right) \lambda_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1} \right) \lambda_2 = v_1,$$

ahora la última ecuación es

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} + h_{n-1}\left(\lambda_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\lambda_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\lambda_{n-2}\right) = v_{n-1},$$

o sea que

$$\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-2} + \left(2h_{n-2} + 2h_{n-1} + h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-1} = v_{n-1},$$

luego

$$\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-2} + \left(2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-1} = v_{n-1}.$$

El sistema a resolver es entonces

$$\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right)\lambda_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right)\lambda_2 = v_1,$$

$$h_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\lambda_k + h_k\lambda_{k+1} = v_k \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-2,$$

$$\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-2} + \left(2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-1} = v_{n-1}.$$

que es de la forma $AX = b$ con A como matriz de coeficientes dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1} & h_1 - \frac{h_0^2}{h_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & 2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz A puede observarse es tridiagonal con diagonal estrictamente dominante, ya que $h_1 + \frac{h_0^2}{h_1} > h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}$, luego $3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1} > h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}$ y $2h_{n-2} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} > h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}$, luego, $2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} > h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}$ además $2(h_{k-1} + h_k) > h_{k-1} + h_k$, por tanto el sistema tiene solución única y el teorema queda probado. \square

Ejemplo 4.6.3. *Determinar la cercha cúbica extrapolada que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$ y $(4, 1)$.*

Solución

De los ejemplos anteriores tenemos que

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 3,$$

$$\beta_0 = -2, \quad \beta_1 = 1,$$

$$\beta_2 = \frac{-2}{3},$$

$$v_1 = 18, \quad v_2 = -10.$$

como es cercha cúbica extrapolada el sistema es

$$(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1})\lambda_1 + (h_1 - \frac{h_0^2}{h_1})\lambda_2 = v_1,$$

$$\left(h_1 - \frac{h_2^2}{h_1}\right)\lambda_1 + \left(2h_1 + 3h_2 + \frac{h_2^2}{h_1}\right)\lambda_2 = v_2,$$

o sea

$$\frac{28}{3}\lambda_1 + \frac{8}{5}\lambda_2 = 18$$

$$18\lambda_2 = -10,$$

cuya solución es $\lambda_1 = \frac{263}{126}$ y $\lambda_2 = -\frac{5}{9}$, pero $\lambda_0 = \lambda_1 - \frac{h_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{h_1} = \frac{187}{63}$ y

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \frac{h_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{h_1} = -\frac{1069}{126}.$$

Se tiene entonces que

$$a_0 = f(x_0) = 2, \quad b_0 = -\frac{841}{252},$$

$$c_0 = \frac{187}{126} \quad d_0 = -\frac{37}{52},$$

luego

$$S_0(x) = 2 - \frac{841}{252}(x+3) + \frac{187}{126}(x+3)^2 - \frac{37}{252}(x+3)^3 \quad -3 \leq x \leq -2.$$

Ahora

$$a_1 = f(x_1) = 0, \quad b_1 = -\frac{17}{21},$$

$$c_1 = \frac{263}{252} \quad d_1 = -\frac{37}{252},$$

luego

$$S_1(x) = -\frac{17}{21}(x+2) + \frac{263}{252}(x+2)^2 - \frac{37}{252}(x+2)^3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

y

$$a_2 = f(x_2) = 3, \quad b_2 = \frac{347}{84},$$

$$c_2 = -\frac{5}{18} \quad d_2 = -\frac{37}{84},$$

luego

$$S_2(x) = 3 + \frac{347}{84}(x-1) - \frac{5}{18}(x-1)^2 - \frac{37}{84}(x-1)^3 \quad 1 \leq x \leq 4,$$

de modo que la cercha extrapolada es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 - \frac{841}{252}(x+3) + \frac{187}{126}(x+3)^2 - \frac{37}{252}(x+3)^3 & -3 \leq x \leq -2 \\ S_1(x) = -\frac{17}{21}(x+2) + \frac{263}{252}(x+2)^2 - \frac{37}{252}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq 1 \\ S_2(x) = 3 + \frac{347}{84}(x-1) - \frac{5}{18}(x-1)^2 - \frac{37}{84}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

■

Teorema 4.6.4. Cercha con Terminación Parabólica. *Existe una única cercha cúbica con $S'''(x) \equiv 0$, en $[a, b]$ y $S'''(x) \equiv 0$, en $[x_{n-1}, x_n]$.*

Demostración. Como en este caso se tiene que

$$\lambda_0 = \lambda_1$$

y

$$\lambda_n = \lambda_{n-1},$$

como la primera ecuación es

$$h_0\lambda_0 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

entonces

$$h_0\lambda_1 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

por tanto,

$$(3h_0 + 2h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

ahora la última ecuación es

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} + h_{n-1}\lambda_n = v_{n-1},$$

pero entonces se tiene que

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} + h_{n-1}\lambda_{n-1} = v_{n-1}$$

o sea que

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + (2h_{n-2} + 3h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1}$$

El sistema a resolver es entonces

$$(3h_0 + 2h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

$$h_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\lambda_k + h_k\lambda_{k+1} = v_k \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-2,$$

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + (2h_{n-2} + 3h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1}.$$

que es de la forma $AX = b$ con A como matriz de coeficientes dada por

$$A = \begin{pmatrix} (3h_0 + 2h_1) & h_1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2h_{n-2} + 3h_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz A puede observarse es tridiagonal con diagonal estrictamente dominante, por tanto el sistema tiene solución única y el teorema queda probado. \square

Ejemplo 4.6.4. *Determinar la cercha con terminación parabólica dada en los extremos que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$ y $(4, 1)$, que satisface las condiciones $S''(-3) = -1$ y $S''(4) = -2$.*

Solución

De los ejemplos anteriores tenemos que

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 3,$$

$$\beta_0 = -2, \quad \beta_1 = 1,$$

$$\beta_2 = \frac{-2}{3},$$

$$v_1 = 18, \quad v_2 = -10.$$

como es cercha con terminación parabólica $\lambda_0 = \lambda_1$ y $\lambda_2 = \lambda_3$, luego entonces el sistema es

$$(3h_0 + 2h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 = 18,$$

$$h_1\lambda_1 + (2h_1 + 3h_2)\lambda_2 = v_2 = -10$$

o sea

$$9\lambda_1 + 3\lambda_2 = 18$$

$$3\lambda_1 + 15\lambda_2 = -10,$$

que tiene como solución $\lambda_1 = \frac{50}{21}$ y $\lambda_2 = -\frac{8}{7}$ luego, $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{50}{21}$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{8}{7}$, además recordemos que $a_k = f(x_k)$, $b_k = \beta_k - \frac{h_k}{6}(2\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$ y $d_k = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{6h_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

Se tiene entonces que

$$a_0 = f(x_0) = 2, \quad b_0 = -\frac{67}{21},$$

$$c_0 = \frac{25}{21} \quad d_0 = 0,$$

luego

$$S_0(x) = 2 - \frac{67}{21}(x+3) + \frac{25}{21}(x+3)^2 \quad -3 \leq x \leq -2$$

Ahora

$$a_1 = f(x_1) = 0, \quad b_1 = -\frac{17}{21},$$

$$c_1 = \frac{25}{21} \quad d_1 = -\frac{37}{189},$$

luego

$$S_1(x) = -\frac{17}{21}(x+2) + \frac{25}{21}(x+2)^2 - \frac{37}{189}(x+2)^3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

y

$$a_2 = f(x_2) = 3, \quad b_2 = \frac{22}{21},$$

$$c_2 = -\frac{4}{7} \quad d_2 = 0,$$

luego

$$S_2(x) = 3 + \frac{22}{21}(x-1) - \frac{4}{7}(x-1)^2 \quad 1 \leq x \leq 4,$$

de modo que la cercha con terminación parabólica es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 - \frac{67}{21}(x+3) + \frac{25}{21}(x+3)^2 & -3 \leq x \leq -2 \\ S_1(x) = -\frac{17}{21}(x+2) + \frac{25}{21}(x+2)^2 - \frac{37}{189}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq 1 \\ S_2(x) = 3 + \frac{22}{21}(x-1) - \frac{4}{7}(x-1)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

■

Teorema 4.6.5. Cercha con curvatura en los extremos. *Existe una única cercha cúbica que satisface las condiciones sobre la derivada segunda en los extremos con valores dados $S''(a)$, y $S''(b)$.*

Demostración. Como en este caso se tiene que

$$\lambda_0 = S''(x_0)$$

y

$$\lambda_n = S''(x_n),$$

como la primera ecuación es

$$h_0\lambda_0 + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1$$

entonces

$$h_0S''(x_0) + 2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1,$$

por tanto,

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - h_0S''(x_0),$$

ahora la última ecuación es

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} + h_{n-1}\lambda_n = v_{n-1},$$

o sea que

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1} - h_{n-1}S''(x_n).$$

El sistema a resolver es entonces

$$2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 = v_1 - h_0S''(x_0),$$

$$h_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\lambda_k + h_k\lambda_{k+1} = v_k \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-2,$$

$$h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\lambda_{n-1} = v_{n-1} - h_{n-1}S''(x_n).$$

que tiene forma $AX = b$ con A como matriz de coeficientes dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz A puede observarse es tridiagonal con diagonal estrictamente dominante, por tanto el sistema tiene solución única y el teorema queda probado. \square

Ejemplo 4.6.5. *Determinar la cercha con curvatura dada en los extremos que pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$ y $(4, 1)$ que satisface las condiciones $S''(-3) = -1$ y $S''(4) = 2$.*

Solución

De los ejemplos anteriores tenemos que

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 3,$$

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -2, & \beta_1 &= 1, \\ \beta_2 &= \frac{-2}{3}, \\ v_1 &= 18, & v_2 &= -10.\end{aligned}$$

como es cercha cúbica con curvatura en los extremos el sistema es

$$\begin{aligned}2(h_0 + h_1)\lambda_1 + h_1\lambda_2 &= v_1 - h_0S''(x_0) = 18 + 1, \\ h_1\lambda_1 + 2(h_1 + h_2)\lambda_2 &= v_2 - h_2S''(x_3) = -10 - 6\end{aligned}$$

o sea

$$8\lambda_1 + 3\lambda_2 = 19$$

$$3\lambda_1 + 12\lambda_2 = -16,$$

que tiene como solución $\lambda_1 = \frac{92}{29}$ y $\lambda_2 = -\frac{185}{87}$ pero, $\lambda_0 = S''(-3) = -1$ y

$\lambda_3 = S''(1) = 2$, además recordemos que $a_k = f(x_k)$, $b_k = \beta_k - \frac{h_k}{6}(2\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $c_k = \frac{\lambda_k}{2}$ y $d_k = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{6h_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

Se tiene entonces que

$$a_0 = f(x_0) = 2, \quad b_0 = -\frac{191}{87},$$

$$c_0 = -\frac{1}{2} \quad d_0 = \frac{121}{174},$$

luego

$$S_0(x) = 2 - \frac{191}{87}(x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{121}{174}(x+3)^3 \quad -3 \leq x \leq -2$$

Ahora

$$a_1 = f(x_1) = 0, \quad b_1 = -\frac{193}{174},$$

$$c_1 = \frac{46}{29} \quad d_1 = -\frac{461}{1566},$$

luego

$$S_1(x) = -\frac{193}{174}(x+2) + \frac{46}{29}(x+2)^2 - \frac{461}{1566}(x+2)^3 \quad -2 \leq x \leq 1$$

y

$$a_2 = f(x_2) = 3, \quad b_2 = \frac{40}{87},$$

$$c_2 = -\frac{185}{174} \quad d_2 = \frac{359}{1566},$$

luego

$$S_2(x) = 3 + \frac{40}{87}(x-1) - \frac{185}{174}(x-1)^2 - \frac{359}{1566}(x-1)^3 \quad 1 \leq x \leq 4,$$

de modo que la cercha con curvatura en los extremos es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 - \frac{191}{87}(x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{121}{174}(x+3)^3 & -3 \leq x \leq -2 \\ S_1(x) = -\frac{193}{174}(x+2) + \frac{46}{29}(x+2)^2 - \frac{461}{1566}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq 1 \\ S_2(x) = 3 + \frac{40}{87}(x-1) - \frac{185}{174}(x-1)^2 - \frac{359}{1566}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

■

4.7. Aproximación con Polinomios Trigonométricos

Definición 4.7.1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números, entonces, la suma

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

se llama *serie infinita*.

Definición 4.7.2. Sea $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, una serie infinita, los números $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$, se definen como *sumas parciales*.

Definición 4.7.3. Sea $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, una serie infinita, se dice que la serie converge,

si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ existe y en este caso $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$

Nota: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ no existe se dice que la serie no converge.

Ejemplo

Probar que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ converge y $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1}{1-x}$, con $|x| < 1$.

Solución

Se tiene que

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n,$$

luego,

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1},$$

de modo que

$$S_n - xS_n = 1 - x^{n+1},$$

así que

$$S_n(1-x) = 1 - x^{n+1},$$

por tanto

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} (1 - x^{n+1}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Pero si $-1 < x < 1$, entonces, $x^{n+1} \rightarrow 0$, cuando, $n \rightarrow \infty$, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo

Probar que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge y encontrar la suma.

Solución

Observemos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

luego,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 = S.$$

Definición 4.7.4. Sea S_n , una sucesión de funciones en un intervalo I , se dice que S_n converge uniformemente a S si para cada $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon)$, tal que

$$|S_n(x) - S| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > N, \quad \forall x \in I$$

Esto significa que si se traza la gráfica de $y = S(x)$ y se centra una banda de ancho vertical 2ϵ sobre esta curva entonces, para la convergencia uniforme debe existir un N tal que para $n > N$, la gráfica de $y = S_n$ se encuentra en todas partes dentro de la banda (fig 4.4).

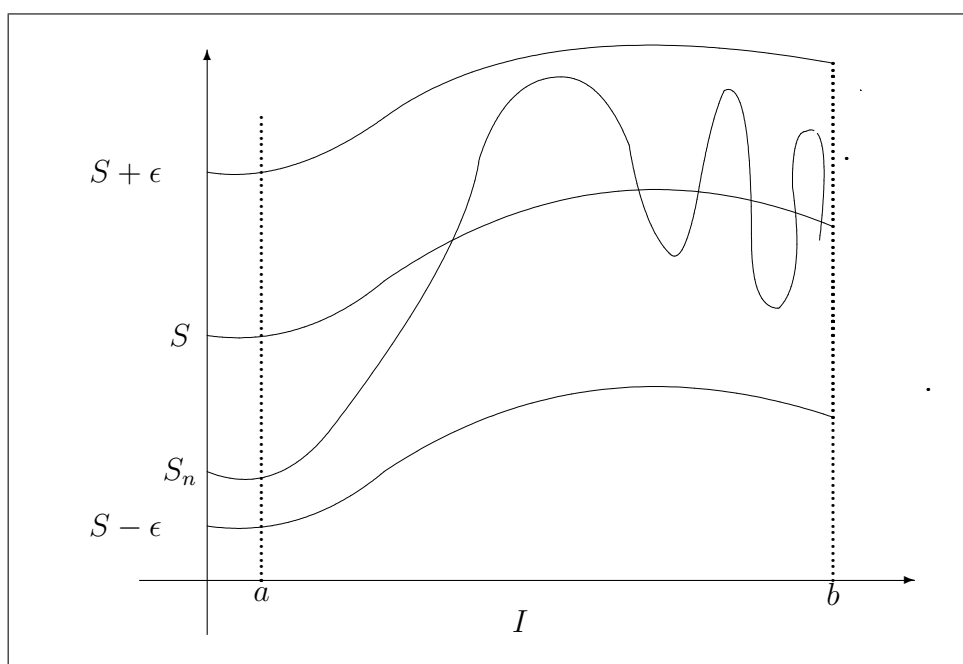


Figura 4.4 Convergencia Uniforme

Definición 4.7.5. Una función $f(x)$ es periódica de período P si $\forall x$

$$f(x + P) = f(x)$$

El problema de representar una función mediante una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.9)$$

surge de manera natural en muchos problemas, queremos encontrar las relaciones que existen entre los coeficientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y la función f .

Para ello recordemos primero las siguientes fórmulas trigonométricas de gran utilidad

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

teniendo en cuenta las relaciones anteriores se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m+n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m-n)x dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nxdx &= -\frac{1}{2(m+n)} \left(\cos(m+n)\pi - \cos(m+n)(-\pi) \right) \\ &+ \frac{1}{2(m-n)} \left(\cos(m-n)\pi - \cos(m-n)(-\pi) \right) = 0 \quad m \neq n. \end{aligned}$$

Si $m = n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2nxdx = -\frac{1}{4n} (\cos 2n\pi - \cos 2n(-\pi)) = 0,$$

luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mxdx = 0$$

para todo m, n .

Ahora si $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx &= \frac{1}{2(m+n)} \left(\operatorname{sen}(m+n)\pi + \operatorname{sen}(m+n)\pi \right) \\ &+ \frac{1}{2(m-n)} \left(\operatorname{sen}(m-n)\pi + \operatorname{sen}(m-n)\pi \right) = 0, \end{aligned}$$

pero si $m = n > 0$, entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx = \frac{1}{2n}(2n\pi) = \pi,$$

si $m = n = 0$, entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi + \pi = 2\pi.$$

De la misma manera, si $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2(m-n)} \left(\sin(m-n)\pi - \sin(m-n)(-\pi) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2(m+n)} \left(\sin(m+n)\pi - \sin(m+n)(-\pi) \right) = 0, \end{aligned}$$

pero si $m = n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi,$$

por lo anterior se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad \forall m, n \quad (4.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n > 0 \\ 2\pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n > 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Las ecuaciones 4.10, 4.11 y 4.12 se llaman fórmulas de ortogonalidad.

Supongamos ahora se tiene una serie trigonométrica dada por

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.13)$$

si la convergencia de la serie permite integrar término a término (por ejemplo que tenga convergencia uniforme), entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right),$$

pero $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$, luego $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi$ de modo que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (4.14)$$

Si $k \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos kx dx \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right), \end{aligned}$$

o sea que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos kx dx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx,$$

ya que $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0$ por 4.10, pero por 4.12 solo se tiene el término distinto de cero si $n = k$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

así que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (4.15)$$

Pero también si $k \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin kx dx \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx \right), \end{aligned}$$

luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin x dx + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx,$$

ya que $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0$ por 4.10, pero por 4.12 solo se tiene el término distinto de cero si $n = k$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \pi,$$

así que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (4.16)$$

.

De lo anterior se tiene que, si $f(x)$ es integrable en $x \in (-\pi, \pi)$, los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ pueden calcularse mediante las fórmulas 4.15 y 4.16. En este caso la serie 4.13 se llama **serie de Fourier** de f .

Ejemplo 4.7.1. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x$

Solución

Como $f(x) = x$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

puesto que $x \cos nx$ es una función impar.

Ahora,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx,$$

como la función $x \sin nx$ es par ya que x , y $\sin nx$ son impares y el producto de funciones impares es una función par, se tiene entonces que

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx,$$

de modo que

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

luego

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

El símbolo \sim se lee genera. ■

Ejemplo 4.7.2. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Solución

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1.$$

Para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - \cos 0] = -\frac{1}{n\pi} [(-1)^n - 1],$$

luego

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

■

Ejercicios

Para los ejercicios 1-10 encuentre

- La forma interpolante de Lagrange
- La forma interpolante de Newton

1.

x	1	2	3
y	1	4	8

2.

x	1	4	9
y	1	2	3

3.

x	4	9	16
y	2	3	4

4.

x	-1	0	1
y	-2	3	2

5.

x	0	1	2
y	1	2	4

6.

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

7.

x	-1	0	1	2
y	1/3	1	3	9

8.

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

9.

x	0	1	2	3
y	0	1	0	-1

10.

x	0	1	2	3
y	1	1	2	4

Para los ejercicios 11-15 encuentre

a) La forma interpolante de Lagrange

b) La forma interpolante de Newton

c) Las funciones cubicas interpolantes o spline cubicos

x	0	2/3	1	2
y	4	-4	-2	-1/2

11.

x	0	2/3	1	2
y	4	-4	-7/2	-1/2

12.

x	0	2/3	1	2
y	2	-2	-1	-1/2

13.

x	1	2	3	4
y	2	4	8	6

14.

x	0	1/2	1	3/2
y	1	2	1	0

15.

x	0	1	2	3
y	1	1	2	4

Para los ejercicios 16-20 encuentre

- a) La forma interpolante de Lagrange
- b) la interpolación polinomial (cualquier forma)
- c) Las funciones cubicas interpolantes o spline cubicos

x	0	1	8	27
y	0	1	2	3

Compare los valores interpolados en $x = 5.5, 3.5$ y $x = 18$ con los correspondientes valores de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

16.

x	0	1	4	9
y	0	-41	2	3

Compare los valores interpolados en $x = 0.5, 2.5$ y $x = 6.5$ con los correspondientes valores de $f(x) = \sqrt{x}$

17.

x	-1	-0.75	-0.25	0.25	0.75	1
y	0	-0.7	-0.7	0.7	0.7	0

Compare los valores interpolados en $x = -0.5, 0$ y $x = 0.5$ con los correspondientes valores de $f(x) = \sin \pi x$

18.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-0.33	-0.20	-0.08	0.00	0.04	0.06	0.07

Compare los valores interpolados con los correspondientes valores de $z = \frac{x-3}{9+x^2}$

19.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.5	0.5	0.375	0.25	0.1562	0.0938	0.0547	0.0312	0.01764

Compare los valores interpolados con los correspondientes valores de $z = x2^{-x}$

20.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2.0	0	0.6667	0	0.40	0	0.2587	0	0.2222	0	0.1818

Compare los valores interpolados con los correspondientes valores de $z = \frac{1+\cos(\pi x)}{1+x}$

21. Usando los siguientes datos para la capacidad calorífica C_p (kJ/kgK°) del metilciclohexalona C_7H_{14} como una función de la temperatura

(K^o) , interpole para estimar la capacidad calorífica a 175, 225, y 275 K^o

T	150	200	250	300
C_p	1.43	1.54	1.70	1.89

22. La viscosidad μ de un fluido depende de la temperatura T del fluido de acuerdo a la relación representada en la siguiente tabla

$T(C^o)$	5	20	30	50	55
$\mu(N - seg/m^2)$	0.08	0.015	0.09	0.006	0.0055

Use la interpolación para encontrar un estimativo para la viscosidad a $T = 25$ y $T = 40$.

Capítulo 5

Derivación e Integración Numérica

5.1. Derivación Numérica

Sabemos que la definición de la derivada de una función $f(x)$ está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

esto indica que para calcular la aproximación numérica de la derivada en un punto, debemos tomar una sucesión $\{h_k\}$, tal que $h_k \rightarrow 0$ y calculamos entonces el cociente

$$D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = \frac{f_k - f}{h_k}, \quad (5.1)$$

generamos entonces una sucesión $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ y tomamos a D_n como la aproximación deseada, el problema está en conocer cual valor de h_k garantiza una buena aproximación, ya que si se toma un valor muy grande de h_k la aproximación no es aceptable y se toma un valor muy pequeño la diferencia $f(x+h_k) - f(x) \approx 0$ ya que hay pérdida de dígitos significativos, lo anterior se muestra en tabla 22, en la que se observan los cocientes D_k para aproximar la derivada de $f(x) = \sin x$ en $x = 2$ cuyo valor con nueve cifras significativas

h_k	f_k	$f_k - f$	$\frac{f_k - f}{h_k}$
10^{-1}	0.863209367	-0.04608806	-0.4608806
10^{-2}	0.905090563	-0.04206864	-0.4206864
10^{-3}	0.98880825	-0.000416602	-0.416602
10^{-4}	0.909255808	-0.000041619	-0.41619
10^{-5}	0.909293265	-0.00000416514	-0.416514
10^{-6}	0.909297017	-0.000000416148	-0.416148
10^{-7}	0.909297385	-0.000000041615	-0.41615
10^{-8}	0.909297423	-0.000000004162	-0.4162
10^{-9}	0.909297426	-0.00000000416	-0.416
10^{-10}	0.909297427	-0.00000000	0.0000000

TABLA 22

es $f'(2) = -0.416146837$.

Como podemos observar $h = 10^{-6}$, proporciona el mejor valor para $f'(2)$ en tanto que valores más pequeños van desmejorando la aproximación. Lo anterior es una justificación para desarrollar una teoría que permita investigar la exactitud de los métodos para la derivación numérica.

Teorema 5.1.1. *Supongamos $f \in C^3[a, b]$, $x - h, x + h \in [a, b]$, entonces,*

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Además existe $\alpha = \alpha(x) \in [a, b]$, tal que

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E_t(f, h),$$

$$\text{siendo } E_t(f, h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(\alpha)}{6} = \mathcal{O}(h^2)$$

Demostración. Las series de Taylor de orden 2 de $f(x+h)$ y $f(x-h)$ alrededor de x son

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(x+h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x+h-x)^2 + \frac{f'''(\alpha_1)}{3!}(x+h-x)^3$$

o sea que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\alpha_1)}{3!}h^3 \quad (5.2)$$

y

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(x-h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-h-x)^2 + \frac{f'''(\alpha_2)}{3!}(x-h-x)^3$$

de modo que

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\alpha_2)}{3!}h^3 \quad (5.3)$$

luego

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{f'''(\alpha_1)}{3!}h^3 + \frac{f'''(\alpha_2)}{3!}h^3.$$

Como $f \in C^3[a, b]$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $\alpha \in [a, b]$ tal que,

$$f'''(\alpha) = \frac{f'''(\alpha_1) + f'''(\alpha_2)}{2},$$

así que $2f'''(\alpha) = f'''(\alpha_1) + f'''(\alpha_2)$, luego

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2f'''(\alpha)}{3!}h^3$$

por tanto

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\alpha)}{6}h^2.$$

A la expresión $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, se le llama fórmula de la **diferencia centrada de orden $O(h^2)$** , ya que $x+h$ y $x-h$ se sitúan a izquierda y a derecha de x . \square

Teorema 5.1.2. Supongamos $f \in C^5[a, b]$, $x-2h, x-h, x+h, x+2h \in [a, b]$, entonces,

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}.$$

Además existe $\alpha = \alpha(x) \in [a, b]$, tal que

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + E_t(f, h),$$

siendo $E_t(f, h) = \frac{h^4 f^{(5)}(\alpha)}{30} = O(h^4)$

Demostración. Las series de Taylor de orden 4 de $f(x+h)$ y $f(x-h)$ alrededor de x son

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + f'(x)(x+h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x+h-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x+h-x)^3 \\ + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}(x+h-x)^4 + \frac{f^{(5)}(\alpha_1)}{5!}(x+h-x)^5 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 \\ + \frac{f^{(5)}(\alpha_1)}{5!}h^5 \end{aligned} \quad (5.4)$$

y

$$\begin{aligned} f(x-h) = f(x) + f'(x)(x-h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-h-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-h-x)^3 \\ + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}(x-h-x)^4 + \frac{f^{(5)}(\alpha_2)}{5!}(x-h-x)^5 \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 \\ - \frac{f^{(5)}(\alpha_2)}{5!}h^5 \end{aligned} \quad (5.5)$$

así que

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{2f^{(5)}(c_1)}{5!}h^5, \quad (5.6)$$

siendo $2f^{(5)}(c_1) = f^{(5)}(\alpha_1) + f^{(5)}(\alpha_2)$, si reemplazamos a h por $2h$ se tiene que

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + 16\frac{f'''(x)}{3!}h^3 + 64\frac{f^{(5)}(c_1)}{5!}h^5, \quad (5.7)$$

además si multiplicamos 5.6 por 8 se tiene que

$$8[f(x+h) - f(x-h)] = 16hf'(x) + \frac{16f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{16f^{(5)}(c_1)}{5!}h^5. \quad (5.8)$$

Restándole a 5.8 la ecuación 5.7 se tiene que

$$8[f(x+h)-f(x-h)]-[f(x+2h)-f(x-2h)] = 12hf'(x) + \frac{16f^{(5)}(c_1) - 64f^{(5)}(c_2)}{5!}h^5.$$

Si $f^{(5)}(x)$ tiene signo constante y cambia muy poco cerca de x se puede tomar $c \in [x-2h, x+2h]$ tal que $c = c_1 = c_2$ y por tanto $16f^{(5)}(c_1) - 64f^{(5)}(c_2) = -48f^{(5)}(c)$ y entonces

$$8f(x+h) - 8f(x-h) - f(x+2h) + f(x-2h) = 12hf'(x) - \frac{48f^{(5)}(c)h^5}{120},$$

luego

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + \mathbf{O}(h^4) \quad (5.9)$$

□

La ecuación 5.9 se conoce como la fórmula de la diferencia centrada de orden $\mathbf{O}(h^4)$.

Ejemplo 5.1.1. Si $f(x) = \sin x$, calcular la aproximación de $f'(2)$, usando las fórmulas de las diferencias centradas con $h = 0.1$

Solución

Con las diferencias centradas de orden $\mathbf{O}(h^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{1}{2 \times 0.1} [\sin(2.1) - \sin(1.9)] = \frac{1}{0.2} [0.863209366649 - 0.946300087687] \\ &= \frac{-0.083090721038}{0.2} = -0.41545360519. \end{aligned}$$

Con la fórmula de las diferencias centradas de orden $\mathbf{O}(h^4)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{1}{1.2} [-0.80849640382 + 6.9905674933 - 7.570400702 + 0.973847630878] \\ &= -0.416145451042, \end{aligned}$$

la respuesta exacta como hemos visto es -0.416146836547 . ■

Otra alternativa para calcular la aproximación numérica de la derivada, es por medio de las llamadas fórmulas de los tres puntos y las fórmulas

de los cinco puntos, las cuales se obtienen usando los polinomios de Lagrange, para esto se tiene por el teorema 4.2 que,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{n,i}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

para algún $c = c(x) \in [a, b]$ y $L_{n,i}(x)$ es el i -ésimo polinomio de Lagrange para f en x_0, x_1, \dots, x_n , luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) L'_{n,i}(x) + \frac{d[(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]}{dx} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+2)}(c), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_{n,i}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \right. \\ &\quad \left. + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) \right] + \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_j - x_k)}{(n+1)!} f^{(n+2)}(c). \end{aligned}$$

Si $x = x_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces se tiene que

$$f'(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L'_{n,i}(x_j) + \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+1)!} \prod_{j=0, j \neq k}^n (x_j - x_k) \quad (5.10)$$

La fórmula 5.10 es llamada la fórmula de los $n+1$ puntos, naturalmente se tiene una mejor aproximación a la derivada si se toma una mayor cantidad de puntos, pero esto a su vez implica un alto costo computacional debido a la gran cantidad de evaluaciones que deben realizarse por esto es suficiente tomar 3 o 5 puntos.

Para los puntos x_0, x_1, x_2 , se tiene que

$$\begin{aligned} L_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \\ L_{2,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \end{aligned}$$

y

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

así que,

$$L'_{2,0}(x) = \frac{x - x_2 + x - x_1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L'_{2,1}(x) = \frac{x - x_0 + x - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

y

$$L'_{2,2}(x) = \frac{x - x_1 + x - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

luego para $j = 0, 1, 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x_j) &= f(x_0) \frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + f(x_2) \frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} \prod_{k=0, k \neq j}^2 (x_j - x_k). \end{aligned}$$

Ahora si x_i , $i = 0, 1, 2$ están igualmente espaciado, esto es, si $x_1 - x_0 = h$ y $x_2 - x_1 = h$, entonces $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$, luego entonces se tiene que si $j = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f(x_0) \frac{2x_0 - x_0 - h - x_0 - 2h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)} + f(x_1) \frac{2x_0 - x_0 - x_0 - 2h}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h)} \\ &\quad + f(x_2) \frac{2x_0 - x_0 - x_0 - h}{(x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - x_0 - h)} + \frac{f^{(3)}[c(x_0)]}{3!} (x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h), \end{aligned}$$

luego

$$f'(x_0) = \frac{-3hf(x_0)}{2h^2} + \frac{-2hf(x_1)}{-h^2} + \frac{-hf(x_2)}{2h^2} + \frac{f^{(3)}[c(x_0)]}{3} h^2,$$

de modo que

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2) \right] + \frac{f^{(3)}[c(x_0)]}{3} h^2 \quad (5.11)$$

Ahora

$$f'(x_1) = f'(x_0 + h) = f(x_0) \frac{2x_0 + 2h - x_0 - h - x_0 - 2h}{2h^2} +$$

$$f(x_1) \frac{2x_0 + 2h - x_0 - x_0 - 2h}{-h^2} + f(x_2) \frac{2x_0 + 2h - x_0 - x_0 - h}{2h^2} + \frac{f^{(3)}[c(x_1)]}{3!} (x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h),$$

luego

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h} \left[-\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} \right] + \frac{f^{(3)}[c(x_1)]}{3!} h^2. \quad (5.12)$$

Pero también

$$f'(x_2) = f'(x_0 + 2h) = f(x_0) \frac{2x_0 + 4h - x_0 - h - x_0 - 2h}{2h^2} + f(x_1) \frac{2x_0 + 4h - x_0 - x_0 - 2h}{-h^2} + f(x_2) \frac{2x_0 + 4h - x_0 - x_0 - h}{2h^2} + \frac{f^{(3)}[c(x_2)]}{3!} (x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - x_0 - h),$$

por tanto

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_0)}{2} - 2f(x_1) + \frac{3f(x_2)}{2} \right] + \frac{f^{(3)}[c(x_2)]}{3} h^2 \quad (5.13)$$

De 5.11 y puesto que $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ tenemos que

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) \right] + \frac{f^{(3)}(c_0)}{3} h^2 \quad (5.14)$$

Por motivos prácticos sustituimos en 5.12 a $x_0 + h$ por x_0 y en 5.13 a $x_0 + 2h$ por x_0 , se obtiene entonces que

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h) \right] - \frac{f^{(3)}(c_1)}{3!} h^2 \quad (5.15)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0) \right] + \frac{f^{(3)}(c_2)}{3} h^2. \quad (5.16)$$

Obsérvese que las ecuaciones 5.14 y 5.16 son equivalentes ya que si en 5.16 reemplazamos a h por $-h$ se tiene que

$$f'(x_0) = -\frac{1}{2h} \left[f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0) \right] + \frac{f^{(3)}(c_2)}{3} h^2,$$

o sea que

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) \right] + \frac{f^{(3)}(c_2)}{3} h^2,$$

que es la ecuación 5.14. Lo anterior implica que solo se tienen dos ecuaciones que son

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) \right] + \frac{f^{(3)}(c_0)}{3} h^2 \\ \quad c_0 \in [x_0, x_0 + 2h] \\ \\ f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h) \right] + \frac{f^{(3)}(c_1)}{3!} h^2 \\ \quad c_1 \in [x_0 - h, x_0 + h] \end{array} \right. \quad (5.17)$$

las ecuaciones 5.17 son las llamadas fórmulas de los tres puntos

Ejemplo 5.1.2. Usar las fórmulas 5.17 para aproximar $f'(2)$ si $f(x) = \sin x$.

Solución

Si $h = 0.1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{1}{0.2} [-3f(2) + 4f(2.1) - f(2.2)] \\ &= \frac{1}{0.2} (-3 \times 0.909297427 + 4 \times 0.863209367 - 0.808496404) = -0.417756085. \end{aligned}$$

Si $h = -0.1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx -\frac{1}{0.2} [-3f(2) + 4f(1.9) - f(1.8)] \\ &= \frac{1}{0.2} (-3 \times 0.909297427 + 4 \times 0.946300088 - 0.9733847631) = -0.4173022, \end{aligned}$$

el error en la primera respuesta es $E = 1.61 \times 10^{-2}$ y en la segunda es $E = 1.155 \times 10^{-2}$ ■

Para deducir la fórmula de los cinco puntos consideremos

$$\begin{aligned} L_{4,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}, \\ L_{4,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}, \\ L_{4,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}, \end{aligned}$$

$$L_{4,3}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)},$$

$$L_{4,4}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)},$$

con $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$, $x_4 = x_0 + 4h$, es decir x_0 , x_1 , x_2 , x_3 y x_4 igualmente espaciados, luego entonces, se tiene que

$$L'_{4,0}(x) = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} [(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)],$$

$$L'_{4,1}(x) = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} [(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)],$$

$$L'_{4,2}(x) = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} [(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) \\ + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)],$$

$$L'_{4,3}(x) = \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} [(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) \\ + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)]$$

y

$$L'_{4,4}(x) = \frac{1}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} [(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)],$$

de modo que

$$L'_{4,0}(x_0) = -\frac{25}{12h} \quad L'_{4,1}(x_0) = \frac{4}{h} \quad L'_{4,2}(x_0) = -\frac{3}{h}$$

$$L'_{4,3}(x_0) = \frac{4}{3h} \quad y \quad L'_{4,4}(x_0) = -\frac{1}{4h},$$

así que

$$f'(x_0) = -\frac{25}{12h}f(x_0) + \frac{4}{h}f(x_1) - \frac{3}{h}f(x_2) + \frac{4}{3h}f(x_3) - \frac{1}{4h}f(x_4) + \frac{f^{(5)}(c_0)h^4}{5},$$

es decir que

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) +$$

$$16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{f^{(5)}(c_0)h^4}{5} \quad (5.18)$$

pero también

$$L'_{4,0}(x_1) = -\frac{1}{4h} \quad L'_{4,1}(x_1) = -\frac{5}{6h} \quad L'_{4,2}(x_1) = \frac{3}{2h}$$

$$L'_{4,3}(x_1) = -\frac{1}{2h} \quad y \quad L'_{4,4}(x_1) = \frac{1}{12h}$$

luego

$$f'(x_0 + h) = -\frac{1}{4h}f(x_0) - \frac{5}{6h}f(x_0 + h) + \frac{3}{2h}f(x_0 + 2h) - \frac{1}{2h}f(x_0 + 3h)$$

$$+ \frac{1}{12h}f(x_0 + 4h) - \frac{f^{(5)}(c_1)h^4}{20},$$

por lo tanto,

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{12h}[-3f(x_0) - 10f(x_0 + h) + 18f(x_0 + 2h) - 6f(x_0 + 3h)$$

$$+ f(x_0 + 4h)] - \frac{f^{(5)}(c_1)h^4}{20} \quad (5.19)$$

ahora

$$L'_{4,0}(x_2) = \frac{1}{12h} \quad L'_{4,1}(x_2) = -\frac{2}{3h} \quad L'_{4,2}(x_2) = 0$$

$$L'_{4,3}(x_2) = \frac{2}{3h} \quad y \quad L'_{4,4}(x_2) = -\frac{1}{12h},$$

así que

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{12h}f(x_0) - \frac{2}{3h}f(x_0 + h) + \frac{2}{3h}f(x_0 + 3h) - \frac{1}{12h}f(x_0 + 4h) + \frac{f^{(5)}(c_2)h^4}{30}$$

y por tanto

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{12h}[f(x_0) - 8f(x_0 + h) + 8f(x_0 + 3h)$$

$$- f(x_0 + 4h)] + \frac{f^{(5)}(c_2)h^4}{30}, \quad (5.20)$$

pero

$$L'_{4,0}(x_3) = \frac{1}{3h} \quad L'_{4,1}(x_3) = \frac{1}{2h} \quad L'_{4,2}(x_3) = -\frac{2}{3h}$$

$$L'_{4,3}(x_3) = \frac{17}{6h} \quad y \quad L'_{4,4}(x_3) = \frac{1}{4h},$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 3h) &= \frac{1}{3h}f(x_0) + \frac{1}{2h}f(x_0 + h) - \frac{2}{3h}f(x_0 + 2h) + \frac{17}{6h}f(x_0 + 3h) \\ &\quad + \frac{1}{4h}f(x_0 + 4h) - \frac{f^{(5)}(c_3)h^4}{20} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 3h) &= \frac{1}{12h}[4f(x_0) + 6f(x_0 + h) - 8f(x_0 + 3h) + 34f(x_0 + 3h) \\ &\quad + 3f(x_0 + 4h)] - \frac{f'(c_3)h^4}{20} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$L'_0(x_4) = \frac{1}{4h} \quad L'_1(x_4) = -\frac{4}{3h} \quad L'_2(x_4) = \frac{3}{h}$$

$$L'_3(x_4) = -\frac{4}{h} \quad y \quad L'_4(x_4) = \frac{25}{12h},$$

luego,

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 4h) &= \frac{1}{4h}f(x_0) - \frac{4}{h}f(x_0 + h) + \frac{3}{h}f(x_0 + 2h) - \frac{4}{h}f(x_0 + 3h) \\ &\quad - \frac{25}{12h}f(x_0 + 4h) + \frac{f^{(5)}(c_4)h^4}{5} \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 4h) &= \frac{1}{12h}[f(x_0) - 3f(x_0 + h) + 4f(x_0 + 2h) - 36f(x_0 + 3h) \\ &\quad + 25f(x_0 + 4h)] + \frac{f^{(5)}(c_4)h^4}{5}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pero si en 5.19 se reemplaza a $x_0 + h$ por x_0 , en 5.20 a $x_0 + 2h$ por x_0 , en 5.21 a $x_0 + 3h$ por x_0 y en 5.22 a $x_0 + 4h$ por x_0 , se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) \\ \quad - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{f^{(5)}(c_0)h^4}{5} \\ \\ f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-3f(x_0 - h) - 10f(x_0) + 18f(x_0 + h) \\ \quad - 6f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h)] - \frac{f^{(5)}(c_1)h^4}{5} \\ \\ f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) \\ \quad - f(x_0 + 2h)] + \frac{f^{(5)}(c_2)h^4}{30} \\ \\ f'(x_0) = \frac{1}{12h} [4f(x_0 - 3h) + 6f(x_0 + 2h) - 8f(x_0 - h) \\ \quad + 34f(x_0) + 3f(x_0 + h)] - \frac{f^{(5)}(c_3)h^4}{30} \\ \\ f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 4h) - 3f(x_0 - 3h) + 4f(x_0 - 2h) \\ \quad - 36f(x_0 - h) + 25f(x_0)] + \frac{f^{(5)}(c_4)h^4}{5} \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Las ecuaciones de 5.23 son las fórmulas de los cinco puntos.

De las fórmulas anteriores, las más útiles son

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) \\ - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{f^{(5)}(c_0)h^4}{5}$$

y

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] \\ + \frac{f^{(5)}(c_2)h^4}{30}.$$

Podemos establecer fórmulas que permitan calcular derivadas se orden superior, en efecto, sea

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4,$$

de modo

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}h^4,$$

y

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}h^4,$$

por lo tanto si $f^{(4)}(\alpha_1) \approx f^{(4)}(\alpha_2)$ se tiene que

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + 2\frac{f^{(4)}(\alpha)}{24}h^4$$

así que

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) \right] - \frac{f^{(4)}(\alpha)}{12}h^2$$

5.1.1. Análisis de Error

Si e_k es el error de redondeo cometido al evaluar a $f(x + kh)$, entonces para las formulas de los cinco puntos sugerida, tenemos que

$$E_t(h) = \frac{-25e_0 + 48e_1 - 36e_2 + 16e_3 - 3e_4}{12h} - \frac{h^4 f^{(5)}(c_0)}{5},$$

y se además se supone que $\forall k, |e_k| < \epsilon$ y que $|f^{(5)}(x)| \leq M, \forall x \in [x_0, x_0 + 4h]$, entonces

$$|E_t(h)| \leq \frac{1}{12h} [25|e_0| + 48|e_1| + 36|e_2| + 16|e_3| + 3|e_4|] + \frac{h^4 |f^{(5)}(c_0)|}{5},$$

o sea que

$$|E_t(h)| \leq \frac{128\epsilon}{12h} + \frac{h^4 M}{5} = \frac{32\epsilon}{3h} + \frac{h^4 M}{5}.$$

Si hacemos

$$H(h) = \frac{32\epsilon}{3h} + \frac{h^4 M}{5},$$

entonces el incremento óptimo se tiene en el valor de h que minimice $H(h)$. Pero como

$$H'(h) = -\frac{32\epsilon}{3h^2} + \frac{4Mh^3}{5},$$

luego si

$$-\frac{32\epsilon}{3h^2} + \frac{4Mh^3}{5} = 0,$$

entonces

$$\frac{8\epsilon}{3h^2} = \frac{Mh^3}{5},$$

luego

$$h^5 = \frac{40\epsilon}{3M},$$

o sea que

$$h = \left(\frac{40\epsilon}{3M} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

De la misma manera si usamos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] \\ &\quad + \frac{f^{(5)}(c_2)h^4}{30}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$E_t(h) = \frac{e_{-2} - 8e_{-1} + 8e_1 + e_2}{12h} + \frac{h^4 f^{(5)}(c_2)}{30},$$

si $|e_k| < \epsilon$, $\forall k$ y $|f^{(5)}(x)| \leq M$, $\forall x \in [x_0 - 2h, x_0 + 2h]$, entonces

$$|E_t(h)| \leq \frac{18\epsilon}{12h} + \frac{h^4 M}{30} = \frac{3\epsilon}{2h} + \frac{h^4 M}{30},$$

con lo que obtenemos que

$$h = \left(\frac{45\epsilon}{4M} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

5.2. Extrapolación de Richardson

Supongamos $G(h)$ es una expresión que aproxima a una cantidad G , luego entonces se tiene que $G - G(h) = E_T$, donde E_T es el error de truncamiento que se comete al aproximar a G por $G(h)$.

Supongamos

$$E_T = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots,$$

luego

$$G = G(h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots \quad h > 0, \quad (5.24)$$

si tomamos $h = \frac{h}{2}$, entonces

$$G = G\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 \frac{h}{2} + c_2 \frac{h^2}{4} + c_3 \frac{h^3}{8} + c_4 \frac{h^4}{16} + \dots \quad h > 0, \quad (5.25)$$

si a dos veces la ecuación 5.25 le restamos la ecuación 5.24 se tiene que

$$2G - G = 2G\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 h + c_2 \frac{h^2}{2} + c_3 \frac{h^3}{4} + c_4 \frac{h^4}{8} + \dots - G(h) - c_1 h - c_2 h^2 - c_3 h^3 - c_4 h^4 - \dots$$

o sea que

$$G = 2G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h) - c_2 \frac{h^2}{2} - \frac{3}{4}c_3 h^3 - \frac{7}{8}c_4 h^4 - \dots,$$

luego

$$G = \left[G\left(\frac{h}{2}\right) + \left(G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h) \right) \right] - c_2 \frac{h^2}{2} - \frac{3}{4}c_3 h^3 - \frac{7}{8}c_4 h^4 - \dots,$$

para simplificar los cálculos tomemos $G(h) \equiv G_1(h)$, la expresión para $\mathbf{O}(h^2)$, es entonces

$$G = G_2(h) - c_2 \frac{h^2}{2} - \frac{3}{4}c_3 h^3 - \frac{7}{8}c_4 h^4 - \dots, \quad (5.26)$$

donde $G_2(h) = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h) \right)$, si igual que antes reemplazamos h por $\frac{h}{2}$ en 5.26, se tiene que,

$$G = G_2\left(\frac{h}{2}\right) - c_2 \frac{h^2}{8} - \frac{3}{32}c_3 h^3 - \frac{7}{128}c_4 h^4 - \dots \quad (5.27)$$

Pero si a cuatro veces la ecuación 5.27 le restamos la ecuación 5.26 se tiene que

$$\begin{aligned} 4G - G &= 4G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) - c_2 \frac{h^2}{2} - \frac{3}{8}c_3 h^3 - \frac{7}{32}c_4 h^4 - \dots \\ &\quad + c_2 \frac{h^2}{2} + \frac{3}{4}c_3 h^3 + \frac{7}{8}c_4 h^4 + \dots, \end{aligned}$$

o sea que

$$3G = 4G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) + \frac{3}{8}c_3 h^3 + \frac{21}{32}c_4 h^4 + \dots$$

luego

$$G = \left[G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{3} \right] + \frac{1}{8}c_3 h^3 + \frac{7}{32}c_4 h^4 + \dots,$$

si tomamos

$$G_3(h) = G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{3},$$

se tiene la expresión para $\mathbf{O}(h^3)$ dada por

$$G = G_3(h) + \frac{1}{8}c_3h^3 + \frac{7}{32}c_4h^4 + \dots \quad (5.28)$$

reemplacemos nuevamente a h por $\frac{h}{2}$, entonces se tiene que

$$G = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{64}c_3h^3 + \frac{7}{512}c_4h^4 + \dots \quad (5.29)$$

ahora si a ocho veces la ecuación 5.29 le restamos la ecuación 5.28 se tiene que

$$7G = 8G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h) - \frac{7}{64}c_4h^4 + \dots$$

o sea que

$$7G = 7G_3\left(\frac{h}{2}\right) + G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h) - \frac{7}{64}c_4h^4 + \dots$$

luego

$$G = \left[G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h)}{7} \right] - \frac{1}{64}c_4h^4 + \dots,$$

así que si

$$G_4(h) = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h)}{7},$$

se tiene la aproximación $\mathbf{O}(h^4)$ dada por

$$G = G_4(h) - \frac{1}{64}c_4h^4 + \dots,$$

continuando con este proceso, la aproximación $\mathbf{O}(h^n)$ es

$$G = \left[G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{n-1}(h)}{2^{n-1} - 1} \right] + \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j + O(h^m) \quad (5.30)$$

o sea

$$G = G_n(h) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j + O(h^m),$$

donde

$$G_n(h) = \left[G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{n-1}(h)}{2^{n-1} - 1} \right] \quad (5.31)$$

Ejemplo 5.2.1. Usar la extrapolación de Richardson para encontrar $f'(2)$, siendo $f(x) = \sin x$.

Solución

Tomando $h = 0.1$ se tiene los resultados mostrados en la tabla 23 y 24

$G_1(0.1) = -0.41545360519$	
$G_1(0.05) = -0.41597346371$	$G_2(0.1) = -0.416146749883$
$G_1(0.025) = -0.41610348928$	$G_2(0.05) = -0.416146831137$
$G_1(0.0125) = -0.41613599948$	$G_2(0.025) = -0.416146836213$
$G_1(0.00625) = -0.41614412728$	$G_2(0.0125) = -0.416146836547$

TABLA 23

$G_3(0.1) = -0.416146836554$
$G_3(0.05) = -0.416148026379$
$G_3(0.025) = -0.416146836547$

TABLA 24

■

Usemos la extrapolación de Richardson para generar las expresiones $O(h^n)$ en la fórmula de diferencias centrada dadas en la sección 5.1.

Sea entonces

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \frac{h^6}{5040}f^{(7)}(x_0) - \dots,$$

haciendo $G(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$, se tiene entonces que

$$f'(x_0) = G(h) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \frac{h^6}{5040}f^{(7)}(x_0) - \dots, \quad (5.32)$$

si reemplazamos a h por $\frac{h}{2}$ en la expresión anterior se tiene que

$$f'(x_0) = G\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24}f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920}f^{(5)}(x_0) - \frac{h^6}{322560}f^{(7)}(x_0) - \dots, \quad (5.33)$$

si a cuatro veces 5.33 le restamos 5.32 se tiene que

$$3f'(x_0) = \left[4G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h)\right] + \frac{h^4}{160}f^{(5)}(x_0) + \frac{15h^6}{80640}f^{(7)}(x_0) + \dots,$$

o sea que

$$f'(x_0) = \left[G\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h)}{3} \right] + \frac{h^4}{480} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{16128} f^{(7)}(x_0) + \dots,$$

y por tanto la aproximación para $\mathbf{O}(h^2)$ está dada por

$$f'(x_0) = G_2(h) + \frac{h^4}{480} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{16128} f^{(7)}(x_0) + \dots, \quad (5.34)$$

siendo $G_2(h) = G\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h)}{3}$ si en 5.34 reemplazamos nuevamente a h por $\frac{h}{2}$, obtenemos que

$$f'(x_0) = G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h^4}{7680} f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{1032192} f^{(7)}(x_0) + \dots, \quad (5.35)$$

ahora restándole a dieciséis veces la ecuación 5.35, la ecuación 5.34 se tiene que

$$15f'(x_0) = 16G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) + \frac{h^6}{64512} f^{(7)}(x_0) - \frac{h^6}{16128} f^{(7)}(x_0) \dots,$$

o sea que

$$15f'(x_0) = 15G_2\left(\frac{h}{2}\right) + G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) - \frac{3h^6}{64512} f^{(7)}(x_0) + \dots,$$

o sea que la aproximación para $\mathbf{O}(h^4)$ es

$$f'(x_0) = G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \left[\frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{15} \right] - \frac{h^6}{322560} f^{(7)}(x_0) + \dots, \quad (5.36)$$

la cual podemos escribir como

$$f'(x_0) = G_3(h) - \frac{h^4}{480} f^{(5)}(x_0) - \frac{h^6}{322560} f^{(7)}(x_0) + \dots, \quad (5.37)$$

siendo $G_3(h) = G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{15}$, continuando con este proceso se tiene la aproximación $\mathbf{O}(h^{2^j})$, $j = 2, 3, 4, \dots$ dada por

$$G_j(h) = G_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1} \quad (5.38)$$

5.3. Integración Numérica

Si deseamos calcular la integral dada por

$$\int_a^b x e^{-x^2} dx$$

podemos usar el método de sustitución y tomar entonces a $u = x^2$ de modo que $du = 2x dx$, así que $x dx = \frac{du}{2}$, por lo tanto la integral resulta ser

$$\int_a^b x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2} (e^{-a^2} - e^{-b^2}).$$

Pero si deseamos calcular la integral

$$\int_a^b e^{-x^2} dx,$$

es claro que al no ser posible calcularla por ninguno de los métodos conocidos del cálculo integral, la vía entonces es, buscar un valor aproximado de la integral en cuestión.

En esta sección obtendremos métodos que permitan calcular el valor aproximado de una integral dada.

Un método para aproximar la integral dada por $\int_a^b f(x) dx$ se basa en los polinomios de Lagrange, en efecto sea

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{n,i}(x)$$

el polinomio de aproximación de Lagrange que aproxima a la función $f(x)$, pero como

$$f(x) = P_n(x) + E_T(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{n,i}(x) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}[c(x)]}{(n+1)!},$$

al integrar término a término se tiene que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{n,i}(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}[c(x)]}{(n+1)!} dx,$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_{n,i}(x)dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}[c(x)]dx,$$

con $c(x) \in [a, b]$, luego entonces ,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_{n,i}(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i f_i(x),$$

siendo $w_i = \int_a^b L_{n,i}(x)dx$.

Miremos el caso para $L_{1,0}(x)$ y $L_{1,1}(x)$, en este caso $P(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} f''[c(x)](x-x_0)(x-x_1)dx, \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio generalizado para las integrales, existe $c \in [a, b]$, tal que

$$\int_{x_0}^{x_1} f''[c(x)](x-x_0)(x-x_1)dx = f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx,$$

pero,

$$f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx = f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x^2 - (x_1+x_0)x + x_0x_1)dx$$

de modo que

$$f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx = f''(c) \left[\frac{x^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_1} - (x_0+x_1) \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} + x_0x_1x \Big|_{x_0}^{x_1} \right],$$

o sea que

$$f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx = f''(c) \left[\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} - (x_0+x_1) \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} + x_0x_1(x_1-x_0) \right],$$

así que

$$f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx = f''(c)(x_1-x_0) \left[\frac{x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2}{3} - \frac{(x_0+x_1)^2}{2} + x_0x_1 \right],$$

de modo que si $h = x_1 - x_0$, entonces

$$f''(c) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx = \frac{hf''(c)}{6}(-x_1^2 + 2x_1x_0 - x_0^2) = -\frac{hf''(c)}{6}(x_1-x_0)^2$$

luego

$$\frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} f''[c(x)](x-x_0)(x-x_1)dx = -\frac{h^3 f''(c)}{12},$$

por lo anterior se tiene que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = -\frac{f(x_0)}{2} \frac{(x_0-x_1)^2}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)}{2} \frac{(x_1-x_0)^2}{(x_1-x_0)} - \frac{h^3 f''(c)}{12},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \frac{f(x_0)}{2}(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)}{2}(x_1-x_0) - \frac{h^3 f''(c)}{12} \\ &= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3 f''(c)}{12} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3 f''(c)}{12}, \quad (5.39)$$

la ecuación 5.39 es llamada la regla del trapecio

Deduzcamos ahora la regla de Simpson utilizando una via diferente a

la utilizada para calcular la regla del trapecio, para ello utilizamos el polinomio de Taylor de $f(x)$ de cuarto orden alrededor de x_1 , la cual como sabemos está dado por

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + f''(x_1)\frac{(x - x_1)^2}{2!} + f'''(x_1)\frac{(x - x_1)^3}{3!} \\ + f^{(4)}[c(x)]\frac{(x - x_1)^4}{4!},$$

luego

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = f(x_1) \int_{x_0}^{x_2} dx + f'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)dx + \frac{f''(x_1)}{2!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 dx \\ + \frac{f'''(x_1)}{3!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^3 dx + \frac{1}{4!} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}[c(x)](x - x_1)^4 dx,$$

pero por el teorema del valor medio ponderado existe $c \in [x_0, x_2]$, con $a = x_0$ y $b = x_2$, tal que

$$\frac{1}{4!} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}[c(x)](x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx,$$

pero

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \frac{(x - x_1)^5}{5} \Big|_{x_0}^{x_2},$$

ahora si $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h$, entonces

$$\frac{f^{(4)}(c)}{4!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60}.$$

Se tiene entonces que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = f(x_1)x \Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 \Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 \Big|_{x_0}^{x_2} \\ + \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60},$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= f(x_1)[(x_2 - x_1) - (x_0 - x_1)] + \frac{f'(x_1)}{2}[(x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \\ &+ \frac{f''(x_1)}{6}[(x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3] + \frac{f'''(x_1)}{24}[(x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4] + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= f(x_1)[(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)] + \frac{f'(x_1)}{2}[(x_2 - x_1)^2 - (x_1 - x_0)^2] \\ &+ \frac{f''(x_1)}{6}[(x_2 - x_1)^3 + (x_1 - x_0)^3] + \frac{f'''(x_1)}{24}[(x_2 - x_1)^4 - (x_1 - x_0)^4] + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60}, \end{aligned}$$

pero como hemos dicho $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$, luego

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = f(x_1)[(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)] + \frac{f''(x_1)}{6}[(x_2 - x_1)^3 + (x_1 - x_0)^3] + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60},$$

se puede escribir como

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + h^3 \frac{f''(x_1)}{3} + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60},$$

pero

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c_1),$$

luego entonces

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3h^2}[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)] - \frac{h^5 f^{(4)}(c_1)}{36} + \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{60},$$

de modo que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h}{3}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{f^{(4)}(c_1)}{3} - \frac{f^{(4)}(c)}{5}\right],$$

se puede probar que existe α , tal que,

$$\frac{h^5}{12} \left[\frac{f^{(4)}(c_1)}{3} - \frac{f^{(4)}(c)}{5} \right] = \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90}$$

por consiguiente tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [6f(x_1) + f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90},$$

y por tanto

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90}, \quad (5.40)$$

la ecuación 5.40 es la regla de Simpson

Otra regla para aproximar numéricamente la integral es, la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson la cual discutiremos a continuación.

Sea

$$\begin{aligned} f(x) \approx & f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ & + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}, \end{aligned}$$

luego entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx & \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) dx \\ & + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) dx \\ & + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) dx, \end{aligned}$$

si tomamos la sustitución $x = x_0 + uh$ y como $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3$, entonces $x_3 = x_0 + 3h$, luego si $x = x_0$, se tiene que $u = 0$ y si $x = x_3$, entonces $x_3 = x_0 + uh$, o sea que $x_0 + 3h = x_0 + uh$, de modo que $u = 3$, además $dx = hdu$, $x - x_1 = x - x_0 - h = uh - h = h(u - 1)$, $x - x_2 = x - x_0 - 2h = uh - 2h = h(u - 2)$ y $x - x_3 = x - x_0 - 3h = uh - 3h = h(u - 3)$, y $x_k - x_j = (k - j)h$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx &\approx \frac{f(x_0)}{(-h)(-2h)(-3h)} \int_0^3 h(u-1)h(u-2)h(u-3)hdu \\ &+ \frac{f(x_1)}{(h)(-h)(-2h)} \int_0^3 uhh(u-2)h(u-3)hdu + \frac{f(x_2)}{(2h)(h)(-h)} \int_0^3 uhh(u-1)h(u-3)hdu \\ &+ \frac{f(x_3)}{(3h)(2h)(h)} \int_0^3 uhh(u-1)h(u-2)hdu, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx &\approx \frac{-h^4 f(x_0)}{6h^3} \int_0^3 (u^3 - 6u^2 + 11u - 6)du + \frac{h^4 f(x_1)}{2h^3} \int_0^3 (u^3 - 5u^2 + 6u)du \\ &+ \frac{-h^4 f(x_2)}{2h^3} \int_0^3 (u^3 - 4u^2 + 3u)du + \frac{h^4 f(x_3)}{6h^3} \int_0^3 (u^3 - 3u^2 + 2u)du, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx -\frac{hf(x_0)}{6} \frac{-9}{4} + \frac{hf(x_1)}{2} \frac{9}{4} - \frac{hf(x_2)}{2} \frac{-9}{4} + \frac{hf(x_3)}{6} \frac{9}{4},$$

luego

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3hf(x_0)}{8} + \frac{9hf(x_1)}{8} + \frac{9hf(x_2)}{8} + \frac{3hf(x_3)}{8},$$

así que

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \quad (5.41)$$

la ecuación 5.41 es la llamada regla de los $\frac{3}{8}$ de Simpson.

La regla del trapecio, la de Simpson, y la de los $\frac{3}{8}$ de Simpson con sus respectivos errores están entonces dadas por

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(c) \quad c \in [x_0, x_1] \quad (5.42)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(c) \quad c \in [x_0, x_2] \quad (5.43)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(c) \quad c \in [x_0, x_3] \quad (5.44)$$

las reglas anteriores se conocen como las fórmulas cerradas de Newton-Cotes.

Definición 5.3.1. *El **grado de Exactitud** de una fórmula de integración numérica o fórmula de cuadratura es el número natural n tal que para todo polinomio $P_i(x)$ de grado $i \leq n$, el error $E[P_i(x)]$ es cero y existe $P_{n+1}(x)$ de grado $n+1$ con $E[P_{n+1}(x)] \neq 0$.*

Más concretamente, el **grado de Exactitud** o de precisión es el entero positivo i , tal que la fórmula de integración es exacta para x^i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

Así que la regla del trapecio tiene un grado de exactitud uno, en tanto que la de Simpson y la de los tres octavo de Simpson tiene un grado de exactitud tres.

Ya hemos dicho que las reglas anteriormente expuestas se llaman fórmulas cerradas de Newton, esto porque la integración se hace en el intervalo cerrado $[a, b]$, si la integración se hace en el intervalo abierto (a, b) se tiene entonces, las fórmulas abiertas de Newton - Cotes, en este caso si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ son los nodos, es claro que a y b no son parte de ellos, por tanto tomamos $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$. Algunas fórmulas abiertas de Newton - Cotes, están dadas por

$$\mathbf{n=0} \quad \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(c) \quad (\text{Regla del punto medio}) \quad (5.45)$$

$$\mathbf{n=1} \quad \int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4}f''(c) \quad (5.46)$$

$$\mathbf{n=2} \quad \int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45}f^{(4)}(c) \quad (5.47)$$

$$\mathbf{n=3} \quad \int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144}f^{(4)}(c) \quad (5.48)$$

Los dos teoremas que damos a continuación sin demostración permiten, obtener las fórmulas cerradas y abiertas de Newton - Cotes respectivamente.

Para las cerradas se tiene que

Teorema 5.3.1. *Supongamos que $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$, es la fórmula cerradas de Newton - Cotes con $x_0 = a$ y $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$, entonces existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)(t-2)(t-n)dt,$$

si n es par, $f \in C^{n+2}[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)(t-2)(t-n)dt$$

si n es impar, $f \in C^{n+1}[a, b]$, $a_i = \int_a^b L_i(x)dx$

Observemos que si $n = 4$ la fórmula cerrada de Newton - Cotes es

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(c) \quad (5.49)$$

llamada la **regla de Boole**

Para la fórmulas abiertas el teorema es

Teorema 5.3.2. Supongamos que $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$, es la fórmula abierta de Newton - Cotes con $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$, $h = \frac{b-a}{n+2}$, entonces existe $c \in (a, b)$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)(t-2)\dots(t-n)dt$$

si n es par y si $f \in C^{n+2}[a, b]$, y

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t+1)(t-2)\dots(t-n)dt$$

si n es impar y si $f \in C^{n+1}[a, b]$

Ejemplo 5.3.1. Utilizar las fórmulas cerradas de Newton - Cotes para aproximar la integral $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$

Solución

Primero observemos que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) \Big|_1^{1.5},$$

y por tanto el valor exacto de la integral con doce cifras significativas es

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx = 0.192259357733.$$

Usemos primero el método del trapecio, en el $h = 1.5 - 1 = 0.5$, luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{0.5}{2} [f(1) + f(1.5)] = \frac{1}{4} [1 \ln 1 + (1.5)^2 \ln 1.5],$$

o sea que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.2280741233,$$

resultado que presenta un error absoluto de $E = 0.0358147655674 \approx 3.58\%$, que como vemos es un error muy alto.

Con la regla de Simpson se tiene que $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{4}$, luego $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1.25$ y $x_2 = 1.5$, por tanto

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{12}[f(1) + 4f(1.25) + f(1.5)],$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx &\approx \frac{1}{12}[1 \ln 1 + 4(1.25)^2 \ln 1.25 + (1.5)^2 \ln 1.5] \\ &= \frac{1}{12}[1.39464719571 + 0.912296493243], \end{aligned}$$

así que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.192245307412,$$

teniéndose un error absoluto de $E = 0.000014050321$.

Apliquemos ahora la regla tres octavos de Simpson, aquí $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{6}$, además $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{6}$, $x_2 = 1 + \frac{1}{3}$ y $x_3 = 1.5$, luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)],$$

luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16}[0 + 0.62944860931 + 1.53430438639 + 0.912296493243],$$

por tanto

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.192253093059,$$

con un error absoluto de $E = 0.000006264674$

Finalmente usando la regla de Boole $h = \frac{b-a}{4} = \frac{0.5}{4} = \frac{1}{8} = 0.125$,
luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)],$$

pero $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 0.125 = 1.125$, $x_2 = 1 + 0.25 = 1.25$, $x_3 = 1 + 0.375 = 1.375$ y $x_4 = 1.5$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{180} [0 + 4.77021294406 + 4.18394158714 \\ + 19.2664507327 + 6.3860754527], \end{aligned}$$

luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.192259337314,$$

teniendo ahora un valor absoluto $E = 0.000000020419$.

Como podemos observar la regla de Boole es la que proporciona un menor error. ■

Ejemplo 5.3.2. Utilizar las fórmulas abiertas de Newton - Cotes para aproximar la integral $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$

Solución

Si aplicamos la regla del punto medio podemos observar que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0$$

ya que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 2hf(x_0) = 2 \times 1^2 \ln 1 = 0,$$

lo cual significa que el error es del 100 %.

Con $n = 1$ se tiene que $h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}$, luego $x_0 = a + h = 1 + \frac{1}{6}$ y $x_1 = a + 2h = 1 + \frac{1}{3}$, de modo que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{3}{2} \frac{1}{6} [f(x_0) + f(x_1)],$$

luego

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{4} [0.209816203103 + 0.511434795463] = 0.180312749642,$$

la cual proporciona un error absoluto de $E = 0.011946608091$.

Si tomamos $n = 2$, $h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{0.5}{4} = \frac{1}{8} = 0.125$, así que $x_0 = a + h = 1 + 0.125 = 1.125$, $x_1 = x_0 + h = 1.125 + 0.125 = 1.25$, y $x_2 = x_1 + h = 1.25 + 0.125 = 1.375$, luego,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)],$$

o sea que,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{6} [0.298138309004 - 0.348661798928 + 1.20415317079],$$

de modo que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{6} (1.19100821798) = 0.198501369663,$$

aproximación que presenta un error de $E = 0.00624201193$.

Veamos la aproximación cuando $n = 3$, en este caso $h = 0.1$ ya que $h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{0.5}{5} = \frac{1}{10}$, pero entonces, $x_0 = a + h = 1 + 0.1 = 1.1$, $x_1 = x_0 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$, $x_2 = x_1 + h = 1.2 + 0.1 = 1.3$, $x_3 = x_2 + h = 1.3 + 0.1 = 1.4$, así que

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx &\approx \frac{5 \times 0.1}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] \\ &= \frac{1}{48} [11f(1.1) + f(1.2) + f(1.3) + 11f(1.4)], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{48} [1.2685784932 + 0.262543041783 + 0.443395606949 + 7.25434142155],$$

y de ese modo

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{48} \times 9.22885856348 = 0.192267886739,$$

que proporciona un error absoluto de $E = 0.000008529006$. ■

5.4. Integración Compuesta

Ahora bien una mejor aproximación numérica a la integral la proporciona la llamada integración numérica compuesta, la cual estudiaremos en esta sección, mirando primero la integración numérica compuesta para la regla del trapecio, luego para la regla de Simpson y por último para la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson.

5.4.1. Regla Compuesta del Trapecio

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $x_k = x_0 + hk$, $h = \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces aplicamos a

cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ la regla del trapecio, esto es en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se tiene que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)],$$

luego

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{h}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)],$$

o sea que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\},$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right],$$

pero como $x_0 = a$ y $x_n = b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right], \quad (5.50)$$

la ecuación 5.50 se conoce como la **regla compuesta del trapecio**.

Ejemplo 5.4.1. *Aplicar la regla compuesta del trapecio con $n = 4$ y $n = 6$ para aproximar la integral $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$*

Solución

Como $h = \frac{b-a}{n}$, entonces $h = \frac{1}{8} = 0.125$, luego,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_4) + 2 \sum_{k=1}^3 f(x_k) \right],$$

por tanto,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16} \left[f(x_0) + f(x_4) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \right],$$

pero $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.125 = 1.125$, $x_2 = x_1 + h = 1.125 + 0.125 = 1.25$, $x_3 = x_2 + h = 1.25 + 0.125 = 1.375$ y $x_4 = 1.5$, luego,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16} \left[f(1) + f(1.5) + 2[f(1.125) + f(1.25) + f(1.375)] \right],$$

o sea que

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16} \left[0 + 0.912296493243 + 2[0.149069154502 \right. \\ \left. + 0.348661798928 + 0.602076585397] \right], \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16} [0.912296493243 + 2.19961507766],$$

así que,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{16} \times 3.119115709 = 0.194494473181.$$

Para $n = 6$ se tiene que $h = \frac{b-a}{n}$, luego $h = \frac{0.5}{6} = \frac{1}{12}$, de modo que $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1 + \frac{1}{12}$, $x_2 = x_0 + 2h = 1 + \frac{1}{6}$, $x_3 = x_0 + 3h = 1 + \frac{1}{4}$,

$x_4 = x_0 + 4h = 1 + \frac{1}{3}$, $x_5 = x_0 + 5h = 1 + \frac{5}{12}$, $x_6 = 1$, de modo que,

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_6) + 2 \sum_{k=1}^5 f(x_k) \right],$$

de modo que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{24} \left[f(x_0) + f(x_6) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)] \right],$$

o sea que

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{24} [0.912296493243 + 3.72576798698],$$

y de ese modo

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.193252686676.$$

■

Podemos observar que si bien la aproximación obtenida no es muy buena porque mantiene un error muy grande, si es mejor a la obtenida con la regla del trapecio, naturalmente entre más grande sea el valor de n usado en la regla compuesta del trapecio, se obtendrá una mejor aproximación.

5.4.2. Regla Compuesta de Simpson

Consideremos sub-intervalos de la forma $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots, n$, y apliquemos la regla de Simpson a cada uno de esos sub-intervalos, entonces se tiene que

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right],$$

luego

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx,$$

por tanto

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})],$$

o sea que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + 4f(x_5) \\ + \cdots + f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})], \end{aligned}$$

pero entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [\{f(x_0) + f(x_{2n})\} + 2\{f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\} \\ + 4\{f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\}], \end{aligned}$$

pero $x_0 = a$ y $x_{2n} = b$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) \quad (5.51)$$

la fórmula 5.51 es la regla compuesta de Simpson.

Ejemplo 5.4.2. Usar la regla compuesta de Simpson con 11 nodos para aproximar la integral $\int_2^5 x^2 \ln x dx$.

Solución Como se va aplicar la regla compuesta de Simpson con 11 nodos entonces $n = 5$, luego $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{3}{10}$, entonces

$$\int_2^5 x^2 \ln x dx \approx \frac{h}{3} [f(2) + f(5)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^4 f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^5 f(x_{2k-1}),$$

pero como $x_k = x_0 + kh$, entonces $x_0 = 2$, $x_1 = x_0 + h = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$,
 $x_2 = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$, $x_3 = \frac{29}{10}$, $x_4 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$, $x_5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$, $x_6 = \frac{38}{10} = \frac{19}{5}$,

$$x_7 = \frac{41}{10}, x_8 = \frac{44}{10} = \frac{22}{5}, x_9 = \frac{47}{10} \text{ y } x_{10} = \frac{50}{10} = 5, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \int_2^5 x^2 \ln x dx &\approx \frac{1}{10}[f(2) + f(5)] + \frac{1}{5}[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] \\ &\quad + \frac{2}{5}[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)], \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} \int_2^5 x^2 \ln x dx &\approx \frac{1}{10}[f(2) + f(5)] + \frac{1}{5}[f(2.6) + f(3.2) + f(3.8) + f(4.4)] \\ &\quad + \frac{2}{5}[f(2.3) + f(2.9) + f(3.5) + f(4.1) + f(4.7)], \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_2^5 x^2 \ln x dx &\approx \frac{1}{10}[2.77258872224 + 40.2359478108] \\ &\quad + \frac{1}{5}[6.45925736838 + 11.9106642925 + 19.2774154036 + 28.6838639122] \\ &\quad + \frac{2}{5}[4.40608926033 + 8.95421729809 + 15.3463463641 \\ &\quad + 23.7186910281 + 34.1856558176], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_2^5 x^2 \ln x dx &\approx \frac{1}{10}[43.008536533] + \frac{1}{5}[66.3312009767] + \frac{2}{5}[86.6109997682] \\ &= 4.3008536533 + 13.2662401953 + 34.6443999072, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_2^5 x^2 \ln x dx \approx 52.2114937558.$$

Hacemos notar que, el valor exacto de la integral con doce cifras significativas es

$$\int_2^5 x^2 \ln x dx = \frac{1}{9}x^3(3 \ln x - 1) \Big|_2^5 = 52.2115205364,$$

de modo que el error de aproximación es $E = |52.2115205364 - 52.2114937558| = 0.0000276806$ ■

5.4.3. Regla Compuesta de los $\frac{3}{8}$ Simpson

Consideremos nuevamente la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, del intervalo cerrado $[a, b]$, con $x_k = x_0 + hk$, $h = \frac{b-a}{3n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces aplicamos a cada subintervalo $[x_{3k-3}, x_{3k}]$ la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson, luego en cada subintervalo $[x_{3k-3}, x_{3k}]$ de tiene que

$$\int_{x_{3k-3}}^{x_{3k}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})],$$

luego entonces tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{3h}{8} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})],$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left[\sum_{k=1}^n f(x_{3k-3}) + 3 \sum_{k=1}^n f(x_{3k-2}) + 3 \sum_{k=1}^n f(x_{3k-1}) + \sum_{k=1}^n f(x_{3k}) \right],$$

luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [& f(x_0) + f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{3n-3}) + 3f(x_1) + 3f(x_4) + 3f(x_7) \\ & \dots + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_2) + 3f(x_5) + 3f(x_8) + \dots + 3f(x_{3n-1}) + f(x_3) + f(x_6) \\ & + f(x_9) + \dots + f(x_{3n})], \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx & \frac{3h}{8} [f(x_0) + f(x_{3n})] + \frac{6h}{8} [f(x_3) + f(x_6) + f(x_9) + \dots + f(x_{3n-3})] \\ & + \frac{9h}{8} [f(x_1) + f(x_4) + f(x_7) + \dots + f(x_{3n-2})] + \frac{9h}{8} [f(x_2) + f(x_5) + f(x_8) + \dots + f(x_{3n-1})], \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(a) + f(b)] + \frac{3h}{4} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{3k}) + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^n f(x_{3k-2}) + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^n f(x_{3k-1}) \quad (5.52)$$

la fórmula 5.52 es la regla compuesta de los $\frac{3}{8}$ de Simpson.

Ejemplo 5.4.3. Usar la regla compuesta de los $\frac{3}{8}$ de Simpson con 13 nodos para aproximar la integral $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$.

Solución Como se va aplicar la regla compuesta de los $\frac{3}{8}$ de Simpson con 13 nodos entonces $n = 4$, luego $h = \frac{b-a}{3n} = \frac{1}{24}$, entonces

$$\int_2^5 x^2 \ln x dx \approx \frac{3h}{8}[f(1)+f(1.5)] + \frac{3h}{4} \sum_{k=1}^3 f(x_{3k}) + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^4 f(x_{3k-2}) + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^4 f(x_{3k-1}),$$

pero como $x_k = x_0 + kh$, entonces $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}$, $x_2 = \frac{26}{24}$

$$x_3 = \frac{27}{24}, x_4 = x_3 = \frac{28}{24}, x_5 = \frac{29}{24}, x_6 = \frac{30}{24}, x_7 = \frac{31}{24}, x_8 = \frac{32}{24}, x_9 = \frac{33}{24},$$

$$x_{10} = \frac{34}{24}, x_{11} = \frac{35}{24} \text{ y } x_{12} = \frac{36}{24} = 1.5 \text{ luego}$$

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx \frac{1}{64}[f(1) + f(1.5)] + \frac{1}{32}[f(x_3) + f(x_6) + f(x_9)]$$

$$+ \frac{3}{64}[f(x_1) + f(x_4) + f(x_7) + f(x_{10})] + \frac{3}{64}[f(x_2) + f(x_5) + f(x_8) + f(x_{11})],$$

o sea que

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx & \frac{1}{64}[0 + 0.91229649] + \frac{1}{32}[0.14906915 + 0.3486618 + 0.60207659] \\ & + \frac{3}{64}[0.044294698 + 0.209816203 + 0.4269999 + 0.69903219 + 0.093939 + 0.2763065 \\ & + 0.5114348 + 0.80240537], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \approx 0.014254632 + 0.034368985 + 0.143635718,$$

de modo que

$$\int_2^5 x^2 \ln x dx \approx 0.192259335.$$

Es bueno observar que, el valor exacto de la integral con nueve cifras significativas es

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx = \frac{1}{9} x^3 (3 \ln x - 1) \Big|_1^{1.5} = 0.192259357,$$

de modo que el error de aproximación es $E = |0.192259357 - 0.192259335| = 2.2732 \times 10^{-8}$ ■

5.4.4. Cotas de Error para las Reglas Compuestas

Miremos primero el error para la regla compuesta del trapecio y luego lo haremos para las reglas compuestas de Simpson.

Sabemos que en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ la función $f(x)$, está dada por $f(x) = P_k(x) + E_k(x)$, siendo, $P_k(x)$ el k -ésimo polinomio de Lagrange y $E_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{2!} f''[c(x)]$, luego entonces,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx + \frac{1}{2!} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x - x_k) f''[c(x)] dx,$$

pero por el teorema del valor medio para integrales existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$, tal que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x) dx + \frac{f''(c_k)}{2!} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx,$$

sea $x = x_{k-1} + hv$, $x_k = x_{k-1} + h$, entonces $x - x_k = x - x_{k-1} - h = hv - h = h(v - 1)$ y $dx = h dv$, además si $x = x_{k-1}$, entonces $hv = 0$ y de ese modo $v = 0$, y si $x = x_k$, se tiene que $0 = h(v - 1)$ y entonces $v = 1$, de lo anterior se tiene que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx = \int_0^1 hv h(v - 1) h dv = h^3 \int_0^1 (v^2 - v) dv,$$

por lo tanto

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x - x_k) dx = -\frac{h^3}{6},$$

luego, el error en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$E_k = -\frac{f''(c_k)h^3}{12}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) dx - \sum_{k=1}^n \frac{f''(c_k)h^3}{12} = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \\ &\quad - \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n f''(c_k), \end{aligned}$$

pero $h = \frac{b-a}{n}$, luego

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] - \frac{b-a}{12n} h^2 \sum_{k=1}^n f''(c_k),$$

o sea que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] - \frac{(b-a)h^2}{12} \frac{\sum_{k=1}^n f''(c_k)}{n},$$

pero

$$\frac{\sum_{k=1}^n f''(c_k)}{n} = \frac{f''(c_1) + f''(c_2) + f''(c_3) + \cdots + f''(c_n)}{n},$$

es la media aritmética de la función continua f'' , por tanto esta se puede reemplazar por $f''(c)$ para algún $c \in (a, b)$, de modo que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c) \quad (5.53)$$

Para la regla compuesta de Simpson consideremos el intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos se divide en sub-intervalos de la forma $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, luego por 5.43 aplicada a ese intervalo se tiene que

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] - \frac{h^5 f^{(4)}[c_k(x)]}{90},$$

luego entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left[\frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] - \frac{h^5 f^{(4)}[c_k(x)]}{90} \right],$$

con $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_{2k-2} \leq c_k(x) \leq x_{2k}$, pero hemos visto que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \right] &= \frac{h}{3}[f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \\ &\quad + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}), \end{aligned}$$

siendo $a = x_0$ y $b = x_{2n}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}[f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) \\ &\quad - \frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)], \end{aligned}$$

así que el error es

$$E_T(x) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)].$$

Como $f \in C^4[a, b]$, tiene valores extremos, luego

$$\min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}[c_k(x)] \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

luego entonces

$$n \min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] \leq n \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

así que

$$\min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

luego por el teorema del valor intermedio existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f^{(4)}(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)]$$

luego

$$E_T(x) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] = -\frac{h^5 n f^{(4)}(c)}{90},$$

pero como $h = \frac{b-a}{2n}$, entonces

$$E_T = -h^4 \frac{(b-a)}{2n} \frac{n f^{(4)}(c)}{90} = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c),$$

así que la regla de Simpson con error es

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) \quad (5.54)$$

Con respecto a la regla compuesta de los $\frac{3}{8}$ Simpson consideremos el intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos se divide en sub-intervalos de la forma $[x_{3k-3}, x_{3k}]$, luego entonces al aplicar 5.44 en este intervalo se tiene que

$$\int_{x_{3k-3}}^{x_{3k}} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})] - \frac{3h^5 f^{(4)}[c_k(x)]}{80},$$

luego entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left[\frac{3h}{8} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})] - \frac{3h^5 f^{(4)}[c_k(x)]}{80} \right],$$

con $h = \frac{b-a}{3n}$, $x_{3k-3} \leq c_k(x) \leq x_{3k}$, pero

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{3h}{8} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})] \right] = \frac{3h}{8} [f(x_0) + f(x_n)]$$

$$+\frac{9h}{8}\sum_{k=1}^n f(x_{3k-2})+\frac{9h}{8}\sum_{k=1}^n f(x_{3k-1})+\frac{h}{4}\sum_{k=1}^n f(x_{3k-3})],$$

con $a = x_0$ y $b = x_{3n}$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left[\frac{3h}{8} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})] \right. \\ \left. - \frac{3h^5}{80} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)], \right.$$

así que el error es

$$E_T(x) = -\frac{3h^5}{80} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)].$$

Pero $f \in C^4[a, b]$, tiene valores extremos, de modo que

$$\min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}[c_k(x)] \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

por lo tanto

$$n \min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] \leq n \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

luego

$$\min_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] \leq \max_{a \leq x \leq b} f^{(4)}(x),$$

pero por el teorema del valor intermedio existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f^{(4)}(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)]$$

luego

$$E_T(x) = -\frac{3h^5}{80} \sum_{k=1}^n f^{(4)}[c_k(x)] = -\frac{3h^5 n f^{(4)}(c)}{80},$$

como $h = \frac{b-a}{3n}$, entonces

$$E_T = -h^4 \frac{(b-a)}{3n} \frac{n f^{(4)}(c)}{80} = -\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(c),$$

de modo que la regla de los $\frac{3}{8}$ de Simpson con error es

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(a) + f(b)] + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{3k-2}) + \frac{9h}{8} \sum_{k=1}^n f(x_{3k-1}) + \frac{h}{4} \sum_{k=1}^n f(x_{3k-3}) - \frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(c) \quad (5.55)$$

5.5. Método de Integración de Romberg

Como hemos visto la regla del trapecio nos proporciona la aproximación de una integral con un error considerablemente grande con el propósito de mejorar el procedimiento y hacerlo más eficiente estudiaremos a continuación el método de Romberg.

Consideremos la regla compuesta con nodos $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 4, \dots, n_i = 2^{i-1}$, la cual esta dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_i}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{2^{i-1}-1} f(x_k) \right] - \frac{b-a}{12} h_i^2 f''(c),$$

con $h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}}$ y $x_k = a + kh_i$, sea

$$R(i, 1) = \frac{h_i}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{2^{i-1}-1} f(a + kh_i) \right],$$

entonces

$$R(1, 1) = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)],$$

pero $h_1 = b - a$, luego

$$R(1, 1) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \quad (5.56)$$

ahora

$$R(2, 1) = \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] = \frac{b-a}{4} [f(a) + f(b)] + 2 \frac{b-a}{4} f(a + h_2),$$

ya que $h_2 = \frac{b-a}{2}$ luego

$$\begin{aligned} R(2, 1) &= \frac{b-a}{4}[f(a) + f(b)] + \frac{b-a}{2}f(a+h_2) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\} + (b-a)f(a+h_2)\right], \end{aligned}$$

pero por 5.56, se tiene que,

$$R(2, 1) = \frac{1}{2}\left[R(1, 1) + h_1f(a+h_2)\right]. \quad (5.57)$$

Pero

$$R(3, 1) = \frac{h_3}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^3 f(a+kh_3)\right],$$

luego

$$R(3, 1) = \frac{h_3}{2}[f(a) + f(b) + 2\{f(a+h_3) + f(a+2h_3) + f(a+3h_3)\}],$$

como $h_3 = \frac{b-a}{2^2}$, entonces

$$\begin{aligned} R(3, 1) &= \frac{h_3}{2}[f(a) + f(b) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{2^2}\right) + 2\{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\}] \\ &= \frac{h_3}{2}[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + 2\{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\}] \\ &= \frac{b-a}{8}[f(a) + f(b) + 2f(a+h_2) + 2\{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\}], \end{aligned}$$

de modo que

$$R(3, 1) = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{4}[f(a)+f(b)] + \frac{b-a}{2}f(a+h_2) + \frac{b-a}{2}\{f(a+h_3)+f(a+3h_3)\}\right],$$

pero de 5.57 se tiene que

$$R(3, 1) = \frac{1}{2}\left[R(2, 1) + h_2\{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\}\right].$$

Continuando con este proceso se tiene que

$$R(k, 1) = \frac{1}{2}\left[R(k-1, 1) + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}}\{f(a+(2i-1)h_k)\}\right] \quad (5.58)$$

Ejemplo 5.5.1. Usar el método de Romberg para aproximar

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$$

con $h = 5$

Solución

Al resolver la integral propuesta usando el cálculo integral se tiene que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = 2.$$

Ahora

$$R(1, 1) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} \left[\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} R(2, 1) &= \frac{1}{2} [R(1, 1) + \pi f(a + h_2)] \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + \pi \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \pi = 1.570879633. \\ R(3, 1) &= \frac{1}{2} \left[R(2, 1) + h_2 \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right\} \right] = \frac{1}{2} [1.57079633 + \frac{\pi}{2} \sqrt{2}] \\ &= 1.89611890524. \end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} R(4, 1) &= \frac{1}{2} \left[R(2, 1) + h_3 \left\{ \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1.89611890534 + h_3 \left\{ 2 \cos \frac{3\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} [1.89611890534 + 2.05234431668] = 1.97423161101. \end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} R(5, 1) &= \frac{1}{2} \left[R(4, 1) + h_4 \left\{ f(a + h_5) + f(a + 3h_5) + f(a + 5h_5) + f(a + 7h_5) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(a + 9h_5) + f(a + 11h_5) + f(a + 13h_5) + f(a + 15h_5) \right\} \right], \end{aligned}$$

luego,

$$R(5, 1) = \frac{1}{2} \left[R(4, 1) + \frac{\pi}{8} \left\{ 2 \cos \frac{7\pi}{16} + 2 \cos \frac{5\pi}{16} + 2 \cos \frac{3\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{16} \right\} \right],$$

por lo tanto

$$R(5, 1) = \frac{1}{2} \left[R(4, 1) + \frac{\pi}{4} \left\{ \cos \frac{7\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{3\pi}{16} + \cos \frac{\pi}{16} \right\} \right],$$

de modo que

$$R(5, 1) = \frac{1}{2} [1.97423161101 + 2.01290909611] = 1.99357035356.$$

el error es entonces $E = |2 - 1.99357035356| = 0.00642964644 \approx 0,6\%$

■

Con el fin de acelerar el método de Romberg, es común usar el proceso de extrapolación de Richardson que ya fue presentado en una sección anterior.

Sea $f \in C^\infty[a, b]$, se puede probar que la regla compuesta del trapecio se puede escribir (omitimos la demostración) como

$$\int_a^b f(x) dx - R(k, 1) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots \quad (5.59)$$

así que si reemplazamos a k por $k+1$ y h por $\frac{h}{2}$ en 5.59 se tiene que

$$\int_a^b f(x) dx - R(k+1, 1) = a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + a_3 \frac{h^6}{64} + \dots \quad (5.60)$$

si a cuatro veces la ecuación 5.60 le restamos la ecuación 5.59 se tiene que

$$3 \int_a^b f(x) dx - 4R(k+1, 1) + R(k, 1) = a_2 \left(\frac{h^4}{4} - h^4 \right) + a_3 \left(\frac{h^6}{16} - h^6 \right) + \dots \quad (5.61)$$

luego

$$\int_a^b f(x) dx - \left[R(k+1, 1) + \frac{R(k+1, 1) - R(k, 1)}{3} \right] = \frac{a_2}{3} \left(\frac{h^4}{4} - h^4 \right) + \frac{a_3}{3} \left(\frac{h^6}{16} - h^6 \right) + \dots,$$

de modo que,

$$\int_a^b f(x)dx = R(k, 2) - \frac{a_2 h^4}{4} - \frac{5a_3 h^6}{16} + \dots, \quad (5.62)$$

donde

$$R(k, 2) = R(k+1, 1) + \frac{R(k+1, 1) - R(k, 1)}{3} = \frac{4R(k+1, 1) - R(k, 1)}{4-1},$$

que al reescribirlo se tiene que

$$R(k, 2) = R(k, 1) + \frac{R(k, 1) - R(k-1, 1)}{3} = \frac{4R(k, 1) - R(k-1, 1)}{4-1},$$

pero si en 5.62 reemplazamos nuevamente a k por $k+1$ y h por $\frac{h}{2}$, tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = R(k+1, 2) - a_2 \frac{h^4}{64} - a_3 \frac{5h^6}{1024} + \dots, \quad (5.63)$$

restándole a 16 veces la ecuación 5.63 la ecuación 5.62 se tiene que

$$15 \int_a^b f(x)dx = 16R(k+1, 2) - R(k, 2) + \dots,$$

por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = R(k+1, 2) + \frac{R(k+1, 2) - R(k, 2)}{15} +$$

por tanto

$$\int_a^b f(x)dx = R(k, 3) + \dots$$

donde

$$R(k, 3) = R(k+1, 2) + \frac{R(k+1, 2) - R(k, 2)}{15} = \frac{4^2 R(k+1, 2) - R(k, 2)}{4^2 - 1}$$

que al reescribirla se tiene que

$$R(k, 3) = R(k, 2) + \frac{R(k, 2) - R(k-1, 2)}{15} = \frac{4^2 R(k, 2) - R(k-1, 2)}{4^2 - 1}$$

continuando con el proceso se tiene que

$$R(k, i) = R(k, i - 1) + \frac{R(k, i - 1) - R(k - 1, i - 1)}{4^{i-1} - 1}$$

o sea que

$$R(k, i) = \frac{4^{i-1}R(k, i - 1) - R(k - 1, i - 1)}{4^{i-1} - 1} \quad (5.64)$$

5.6. Cuadratura Adaptativa

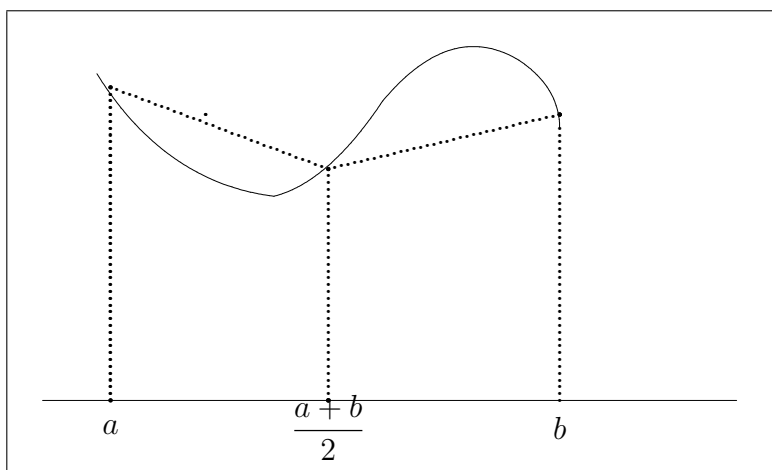


Figura 5.1 Regla de Simpson

En la regla compuesta de Simpson, Figura (5.1) y en la del trapecio se necesitan tomar nodos igualmente espaciados los cuales determinan subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$, donde $[a, b]$ es el intervalo de integración y n la cantidad de subintervalo, pero si la función presenta en alguno de estos sub-intervalos o en todos, oscilaciones muy fuertes, la aproximación no va a tener la exactitud deseada, en estos casos, es natural que quisiésemos proveernos de métodos en los cuales sea posible adaptar o ajustar la longitud del paso, a fin de que en los sub-intervalos en donde la función tenga oscilaciones muy pronunciadas el error en la aproximación sea menor y por lo tanto la exactitud de la aproximación sea ahora mucho mejor, estos métodos son llamados de **cuadratura adaptativa**, o métodos de **integración adaptativa**. Figura(5.2)

Presentamos a continuación la cuadratura adaptativa basada en la

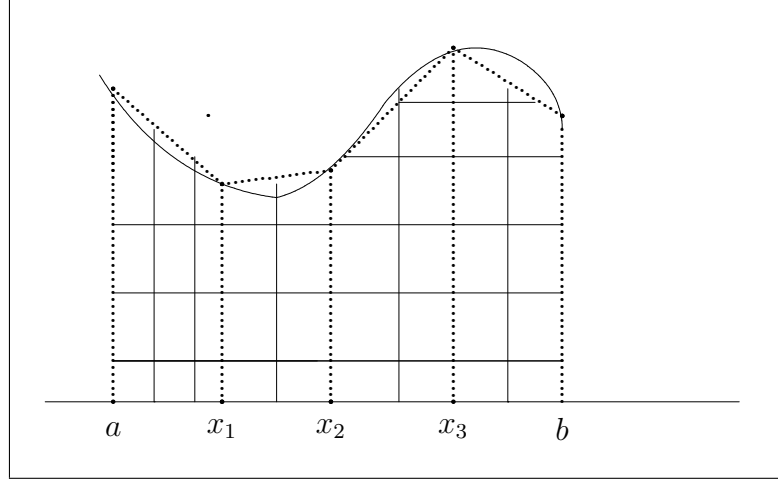


Figura 5.2 Cuadratura Adaptativa

regla compuesta de Simpson.

Consideremos el intervalo $[a_k, b_k]$ al aplicar la regla de Simpson en este intervalo se tiene que

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k)] - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_1)}{90},$$

donde $h = \frac{b_k - a_k}{2}$ y $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, obsérvese que $c_k = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{2a_k + b_k - a_k}{2} = a_k + \frac{b_k - a_k}{2} = a_k + h$, luego,

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a_k) + 4f(a_k + h) + f(b_k)] - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_1)}{90},$$

tomemos

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3} [f(a_k) + 4f(a_k + h) + f(b_k)],$$

entonces

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S(a_k, b_k) - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_1)}{90}.$$

Sea ahora a_{k1} y b_{k1} puntos medios de los sub-intervalos $[a_k, c_k]$ y $[c_k, b_k]$ respectivamente, aplicando nuevamente regla compuesta de Simpson con los

nodos $a_k, a_{k1}, c_k, b_{k1}, b_k$, con $h_1 = \frac{b_k - a_k}{4} = \frac{h}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx &= \frac{h_1}{3} \left[f(a_k) + 4f(a_{k1}) + 2f(c_k) + 4f(b_{k1}) + f(b_k) \right] - \frac{h^5}{16} \frac{f^{(4)}(\alpha_2)}{90}, \\ &= \frac{h}{6} \left[f(a_k) + 4f(a_{k1}) + f(c_k) + f(c_k) + f(b_{k1}) + 4f(b_k) \right] - \frac{h^5}{16} \frac{f^{(4)}(\alpha_2)}{90} \\ &= \frac{h}{6} \left[f(a_k) + 4f(a_{k1}) + f(c_k) \right] + \frac{h}{6} \left[f(c_k) + f(b_{k1}) + 4f(b_k) \right] - \frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_2)}{90}, \end{aligned}$$

sea

$$S(a_k, c_k) = \frac{h}{6} \left[f(a_k) + 4f(a_{k1}) + f(c_k) \right]$$

y

$$S(c_k, b_k) = \frac{h}{6} \left[f(c_k) + 4f(b_{k1}) + f(b_k) \right],$$

entonces

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S(a_k, c_k) + S(c_k, b_k) - \frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_2)}{90},$$

luego

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) + S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_2)}{90} \quad (5.65)$$

Nota: Obsérvese que $a_{k1} = a_k + h_1 = a_k + \frac{h}{2}$, $b_{k1} = c_k + h_1 = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{h}{2} = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{b_k - a_k}{4} = \frac{2a_k + 2b_k + b_k - a_k}{4} = \frac{a_k + 3b_k}{4} = \frac{4a_k + 3b_k - 3a_k}{4} = a_k + \frac{3(b_k - a_k)}{4} = a_k + \frac{3}{2}h$.

Si suponemos que $\alpha_1 \approx \alpha_2$, entonces, $f^{(4)}(\alpha_1) \approx f^{(4)}(\alpha_2)$ lo cual permite estimar el error, de modo que el método es exitoso dependiendo del grado de exactitud del supuesto. En particular si $f^{(4)}(\alpha_1) = f^{(4)}(\alpha_2) = f^{(4)}(\alpha)$, entonces

$$S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) + S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_2)}{90} \approx S(a_k, b_k) - \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha_1)}{90},$$

luego

$$\frac{15}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90} \approx S(a_k, b_k) - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right),$$

o sea que

$$\frac{1}{15} \left[S(a_k, b_k) - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) \right] \approx \frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90},$$

pero por 5.65

$$\frac{1}{16} \frac{h^5 f^{(4)}(\alpha)}{90} \approx \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right),$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{15} \left| S(a_k, b_k) - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) \right| \approx \\ \left| \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) \right|, \end{aligned}$$

así que si

$$M = \left| S(a_k, b_k) - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) \right| < 15\epsilon, \quad (5.66)$$

para una tolerancia ϵ predeterminada, entonces

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx - S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) - S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) \right| \approx \frac{1}{15} M < \frac{1}{15} 15\epsilon = \epsilon, \quad (5.67)$$

luego $S\left(a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right) + S\left(\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right)$ aproxima 15 veces mejor a $\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx$ que $S(a_k, b_k)$ y por tanto es una aproximación suficientemente exacta.

Ejemplo 5.6.1. *Mostrar la exactitud de la estimación del error que se da en 5.66 para $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$.*

Solución

Se tiene que

$$S(1; 1, 5) = \frac{0.25}{3} [f(1) + 4f(1.25) + F(1.5)] = \frac{1}{12} [0 + 1.39464719571 + 0.912296493243],$$

por lo tanto

$$S(1; 1, 5) = 0.192245307412.$$

Ahora

$$\begin{aligned} S(0; 1, 25) + S(1.25; 1, 5) &= \frac{1}{24} [f(0) + 4f(1.25) + 2f(1.25) + 4f(1.375) + f(1.5)] \\ &= \frac{1}{24} [0 + 0.59627668008 + 0.697323597856 + 2.40830634159 + 0.912296493243] \\ &= 0.192258460446. \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{1}{15} \left| S(1; 1, 5) - S(0; 1, 25) - S(1.25; 1, 5) \right| = \frac{1}{15} \times 0.000013153034 = 0.0000008769.$$

Esto es una buena aproximación al error real dado por

$$\left| \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx - 0.192258460446 \right| = 0.000000897.$$

■

El método de cuadratura adaptativa se concreta de la siguiente forma: Sea el intervalo $[a, b]$, que reescribimos $[a_0, b_0]$ tomamos el punto medio c_0 , y dividimos el intervalo en dos sub-intervalos y aplicamos el criterio de exactitud 5.66 con una tolerancia predeterminada ϵ_0 si se satisface aplicamos 5.65 y terminamos el proceso, si no se cumple el criterio de exactitud entonces se toman los dos sub-intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ con $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0 = a_2$ y $b_2 = b$.

Ahora el intervalo $[a_1, b_1]$, se divide en dos sub-intervalos tomando el punto medio c_1 , se tiene entonces los sub-intervalos $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$, se mira si se cumple el criterio de exactitud con una tolerancia $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{2}$, si se cumple el criterio entonces se aplica 5.65 y el proceso termina. Pero en este segundo paso también el subintervalo $[a_2, b_2]$ se divide en dos sub-intervalos $[a_2, c_2]$, $[c_2, b_2]$, con c_2 , punto medio y se aplica el criterio de exactitud con $\epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{2}$, si se cumple el criterio se aplica entonces 5.65 si no se cumple el criterio en $[a_1, b_1]$ ni en $[a_2, b_2]$, entonces cada uno de los sub-intervalos $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$, $[a_2, c_2]$, $[c_2, b_2]$ se dividen en sub-intervalos tomando sus puntos medios y se verifica el criterio de exactitud con una tolerancia igual a la mitad de la anterior y se continua el proceso.

Con estos refinamientos el proceso termina en un número finito de pasos debido a que el error se va reduciendo en un factor $\frac{1}{16}$.

5.7. Integración Gauss-Legendre

Tanto en las fórmulas cerradas de Newton-Cotes como en las abiertas, los nodos que utilizamos están igualmente espaciados, este procedimiento puede comprometer la exactitud de la aproximación, la cual puede ser mejorada tomando las reglas compuestas, pero para una mejor aproximación podemos optimizar la escogencia de los nodos a fin de que nuestro propósito se cumpla.

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y supongamos que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (5.68)$$

donde $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ son los pesos que tienen valores indeterminados, la selección de los pesos w_i y los nodos x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ se debe hacer de tal forma que la aproximación sea lo más exacta posible.

Encontrar pues los pesos y los nodos es equivalente a encontrar $2n$ parámetros, lo cual puede hacerse, si consideramos como parámetros los coeficientes de los polinomios de grado $2n - 1$, los cuales son los que proporcionan una mayor exactitud.

Para mostrar el procedimiento supongamos que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \quad (5.69)$$

donde w_1, w_2, x_1, x_2 son los parámetros a determinar de lo comentado anteriormente el resultado es exacto para polinomios de grado $2n - 1 = 3$ ya que el número de parámetros es cuatro.

Es suficiente exigir que 5.69 sea exacta para $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, así que las cuatro condiciones serían

$$1. \quad f(x) = 1, \quad \int_{-1}^1 dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 + w_2, \text{ luego}$$

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$2. \quad f(x) = x, \quad \int_{-1}^1 x dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2, \text{ luego}$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$3. \quad f(x) = x^2, \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, \text{ luego}$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$4. \quad f(x) = x^3, \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3, \text{ luego}$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$$

por lo tanto se tiene que

$$w_1 + w_2 = 2 \tag{5.70}$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0 \tag{5.71}$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \tag{5.72}$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0 \tag{5.73}$$

de 5.71, se tiene que $w_1 x_1 = -w_2 x_2$ y de 5.73 $w_1 x_1^3 = -w_2 x_2^3$, luego entonces

$$\frac{w_1 x_1}{w_1 x_1^3} = \frac{w_2 x_2}{w_2 x_2^3},$$

por lo tanto $x_1^2 = x_2^2$, así que $x_1 = -x_2$ ya que $x_1 \neq x_2$, puesto que son cuatro nodos distintos, pero entonces se tiene que por 5.71 $w_1 x_1 - w_2 x_1 = 0$ o sea que $w_1 = w_2$ y de 5.70 $w_1 = 1$ y $w_2 = 1$ por lo tanto al reemplazar en 5.72 se tiene que $x_1^2 = \frac{1}{3}$ luego $x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{3}$, de modo que $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ por lo tanto

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

esta última expresión es conocida como la regla de Gauss-Legendre de dos nodos

Ejemplo 5.7.1. Aproximar la integral $\int_{-1}^1 13(x^2 - x)e^{-\frac{3x}{2}} dx$ usando la integración Gauss-Legendre.

Solución

Como $f(x) = 13(x^2 - x)e^{-\frac{3x}{2}}$, entonces $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1.33429932893$
y
 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 28.1462747836$ así que

$$\int_{-1}^1 13(x^2 - x)e^{-\frac{3x}{2}} dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 26.8119754547.$$

■

Otra alternativa diferente para encontrar los pesos y los nodos es usando los polinomios de Legendre que a continuación definimos

Definición 5.7.1. *El n -ésimo polinomio de Legendre se define como*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}$$

donde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$

De la definición anterior se tiene que los cinco primeros polinomios de Legendre son:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
- $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Los polinomios de Legendre cumplen propiedades importantes entre las cuales podemos destacar las siguientes

★ $P_n(x)$ es un polinomio de grado n

★ Si $Q(x)$ es un polinomio de grado menor que n , $\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$

Las raíces de los polinomios de Legendre son los nodos que nos proporcionan resultados exactos para cualquier polinomio de grado menor que $2n$, lo cual se prueba con el siguiente teorema

Teorema 5.7.1. Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ las n raíces del polinomio de Legendre de grado n y además sea

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \quad (5.74)$$

Si $P(x)$ es cualquier polinomio de grado menor que $2n$, entonces

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i P(x_i).$$

Demostración. Primero probemos el teorema para un polinomio de grado menor n , en efecto sea $P(x)$ un polinomio cualquiera de grado menor n , entonces, $P(x)$ se puede escribir como un polinomio de Lagrange de grado $n-1$, esto es

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} P(x_i) + \frac{f^{(n)}[\epsilon(x)]}{n!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

con x_i $i = 1, 2, 3, \dots, n$ raíces del polinomio de grado n de Legendre, pero como $P(x)$ tiene grado n , entonces

$$\frac{f^{(n)}[\epsilon(x)]}{n!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = 0,$$

luego

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} P(x_i) dx,$$

o sea que

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{-1}^1 \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} P(x_i) dx \right) = \sum_{i=1}^n w_i P(x_i).$$

Sea ahora $P(x)$ un polinomio de grado menor que $2n$, y $P_n(x)$ el polinomio de Legendre de grado n , entonces por el algoritmo de la división

$$\frac{P(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)},$$

con $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios de grado menor que n , así que,

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x),$$

de modo que,

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 R(x)dx,$$

además como x_i es raíz de $P_n(x)$, entonces $P_n(x_i) = 0$ por lo tanto,

$$P(x_i) = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i).$$

Ahora como $R(x)$ es de grado menor que n , por la primera parte del teorema se tiene que

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i R(x_i),$$

luego entonces se obtiene que

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i P(x_i)$$

□

Como el polinomio de Legendre de grado 2 está dado por $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ sus raíces son $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y al aplicar la expresión 5.74 se puede fácilmente determinar que $w_1 = w_2 = 1$ que coinciden con los valores obtenidos anteriormente en el método de Gauss-Legendre de dos nodos.

Para el polinomio de Legendre de grado 3 que viene dado por

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3),$$

las raíces son $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ y entonces $w_1 = 0.5555555556$, $w_2 = 0.8888888888$ y $w_3 = 0.5555555556$

Pero no siempre los límites de integración son -1 y 1 , entonces si se quiere aproximar $\int_a^b f(x)dx$ usando la integración Gauss-Legendre, se puede usar la sustitución $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$ de modo que $dx = \frac{b-a}{2}du$, por lo tanto se tiene que,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\right) \frac{b-a}{2} du$$

5.8. Integrales Impropias

En esta sección miraremos la forma de aproximar integrales de la forma $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p} dx$, $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-b)^p} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, que como podemos observar son integrales impropias ya que presentan problemas en los límites de integración.

Supongamos $g \in C^5[a, b]$, y sea $P_4(x)$ el polinomio de Taylor de cuarto orden de $g(x)$ alrededor de $x = a$, luego

$$P_4(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} &= g(a)(x-a)^{-p} + g'(a)(x-a)^{1-p} + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^{2-p} \\ &\quad + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^{3-p} + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^{4-p}, \end{aligned}$$

pero entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx &= g(a) \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^p} dx + g'(a) \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^{p-1}} dx \\ &\quad + \frac{g''(a)}{2!} \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^{p-2}} dx + \frac{g'''(a)}{3!} \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^{p-3}} dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{g^4(a)}{4!} \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{bn} \frac{1}{(x-a)^{p-4}} dx,$$

pero $0 < p < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx &= \frac{g(a)}{1-p} \lim_{c \rightarrow a^+} \left[\frac{1}{(x-a)^{p-1}} \Big|_c^b \right] + \frac{g'(a)}{2-p} \lim_{c \rightarrow a^+} \left[\frac{1}{(x-a)^{p-2}} \Big|_c^b \right] \\ &+ \frac{g''(a)}{2!(3-p)} \lim_{c \rightarrow a^+} \left[\frac{1}{(x-a)^{p-3}} \Big|_c^b \right] + \frac{g'''(a)}{3!(4-p)} \lim_{c \rightarrow a^+} \left[\frac{1}{(x-a)^{p-4}} \Big|_c^b \right] \\ &+ \frac{g^4(a)}{4!(5-p)} \lim_{c \rightarrow a^+} \left[\frac{1}{(x-a)^{p-5}} \Big|_c^b \right], \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx &= \frac{g(a)}{1-p} \frac{1}{(b-a)^{p-1}} + \frac{g'(a)}{2-p} \frac{1}{(b-a)^{p-2}} + \frac{g''(a)}{2!(3-p)} \frac{1}{(b-a)^{p-3}} \\ &+ \frac{g'''(a)}{3!(4-p)} \frac{1}{(b-a)^{p-4}} + \frac{g^{(4)}(a)}{4!(5-p)} \frac{1}{(b-a)^{p-5}}, \end{aligned}$$

así que

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(a)}{k!(k+1-p)} (b-a)^{k+1-p} \quad (5.75)$$

por tanto

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p} dx = \int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx.$$

Sea

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} & \text{si } a < x \leq b \\ & \text{si } x = a \end{cases}$$

aplicamos ahora la regla compuesta de Simpson a $G(x)$ y agregamos a está aproximación el valor obtenido en 5.75 para obtener finalmente el valor de la integral deseada.

Para calcular el valor de $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-b)^p}$ con $0 < p < 1$, al igual que antes tomamos el polinomio de Taylor de cuarto orden de $g(x)$ alrededor de $x = b$, o sea

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^k(b)}{k!} (x-b)^{k-p},$$

luego,

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-b)^p} = - \sum_{k=0}^4 \frac{g^k(b)}{k!} (a-b)^{k+1-p}, \quad (5.76)$$

ya que

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-b)^p} dx = \sum_{k=0}^4 \int_a^b \frac{g^k(b)}{k!} (x-b)^{k-p} dx = \sum_{k=0}^4 \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c \frac{g^k(b)}{k!} (x-b)^{k-p} dx,$$

o sea,

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-b)^p} dx = \sum_{k=0}^4 \frac{g^k(b)}{k!} \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c (x-b)^{k-p} dx = \sum_{k=0}^4 \frac{g^k(b)}{k!} \lim_{c \rightarrow b^-} \left[\frac{(x-b)^{k+1-p}}{k+1-p} \Big|_a^c \right],$$

y así,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-b)^p} dx &= \sum_{k=0}^4 \frac{g^k(b)}{k!(k+1-p)} \left[\lim_{c \rightarrow b^-} \left(\frac{1}{(c-b)^{p-k-1}} - \frac{1}{(a-b)^{p-k-1}} \right) \right] \\ &= - \sum_{k=0}^4 \frac{(a-b)^{k+1-p}}{k!(k+1-p)g^k(b)} \end{aligned}$$

sea ahora

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = x \\ \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-b)^p} & \text{si } a \leq x < b \end{cases}$$

entonces aplicamos la regla de Simpson a $G(x)$ y a este valor le agregamos el valor de 5.76 teniendo la aproximación de la integral comentada.

Otras integrales impropias son como hemos dicho $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$, pero como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

solo analizaremos los casos $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Para estos casos sea $x = \frac{1}{u}$, entonces $dx = -\frac{du}{u^2}$, así que si $x = a$, entonces $u = \frac{1}{a}$ y si $x = \infty$, se tiene que $u = 0$ luego

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = - \int_{\frac{1}{a}}^0 \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

de la misma manera

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = - \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

las cuales se pueden resolver por medio del procedimiento analizado anteriormente.

Ejemplo 5.8.1. *Aproximar la integral*

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

usando la regla compuesta de Simpson con 13 nodos.

Solución

El polinomio de cuarto orden para e^{-x} alrededor de $x = 1$ es

$$P_4(x) = \frac{1}{e} \left[1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} \right]$$

$$= \frac{1}{e} \left[1 + (1-x) + \frac{(1-x)^2}{2!} + \frac{(1-x)^3}{3!} + \frac{(1-x)^4}{4!} \right]$$

así que

$$\frac{P_4(x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{e} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{2!} + \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{(1-x)^{\frac{7}{2}}}{4!} \right]$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{1-x}} dx &= \frac{1}{e} \int_0^1 \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{(1-x)^{\frac{7}{2}}}{24} \right] dx \\ &= -\frac{1}{e} \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[2(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{21}(1-x)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{108}(1-x)^{\frac{9}{2}} \right] \Big|_0^c \\ &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.92354497355. \end{aligned}$$

Ahora como son 13 nodos entonces $n = 6$, por lo tanto $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{12}$, sea

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 = x \\ \frac{e^{-x} - P_4(x)}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

aplicando la regla compuesta de Simpson tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x) dx &= \frac{1}{3} \left[G(a) + G(b) \right] + 2 \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} G(x_{2k}) + 4 \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} G(x_{2k-1}) \\ &= \frac{1}{36} \left[G(0) + G(1) \right] + \frac{1}{18} \left(G(x_2) + G(x_4) + G(x_6) + G(x_8) + G(x_{10}) \right) + \frac{1}{9} \left(G(x_1) \right. \\ &\quad \left. + G(x_3) + G(x_5) + G(x_7) + G(x_9) + G(x_{11}) \right) \end{aligned}$$

pero $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{5}{12}$, $x_6 = \frac{1}{2}$, $x_7 = \frac{7}{12}$, $x_8 = \frac{2}{3}$, $x_9 = \frac{3}{4}$, $x_{10} = \frac{5}{6}$, $x_{11} = \frac{11}{12}$, $x_{12} = 1$. Los resultados aparecen en la siguiente tabla

x_k	$G(x_k)$
x_0	0.003659846825
x_1	0.0024377356867
x_2	0.00156193127575
x_3	0.00095744521971
x_4	0.000555080563209
x_5	0.000299838565354
x_6	0.000147634572002
x_7	0.0000640469678866
x_8	0.00002312563921701
x_9	0.000006246298
x_{10}	0.000000993170111109
x_{11}	0.00000004328049
x_{12}	0

TABLA 25

de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x)dx &= 0.003659846825 + 0.00019073043502 + 0.000836745781 \\ &= 0.00458732304102, \end{aligned}$$

luego

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx \approx 2.92354497355 + 0.00458732304102 = 2,92823229659.$$

■

5.9. Integración Doble

Si R es una región rectangular dada por

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

y supongamos $f(x, y)$ está definida sobre R , si R se divide en pequeños elementos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$, los cuales numeramos

$\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3 \dots, \Delta A_n$, y escogemos un punto (x_i, y_i) en cada elemento ΔA_i , formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i,$$

entonces

$$\iint_A f(x, y) \Delta A = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

El siguiente teorema, que presentamos sin demostración, nos permite calcular una integral sobre una región

Teorema 5.9.1. *Si $f(x, y)$ es continua sobre la region R , dada por $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, entonces,*

$$\iint_R f(x, y) \Delta A = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Para aproximar una integral doble consideremos las particiones $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$ y $P_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m = d\}$ de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente con $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jk$ siendo $h = \frac{b-a}{2n}$ y $k = \frac{d-c}{2m}$, luego en el intervalo $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ y para un y fijo se tiene, por la regla compuesta de Simpson que,

$$\int_a^b f(x, y) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0, y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y) + f(x_{2n}, y) \right],$$

luego entonces,

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy &\approx \int_c^d \frac{h}{3} \left[f(x_0, y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y) + f(x_{2n}, y) \right] dy \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \approx \frac{h}{3} \left[\int_c^d f(x_0, y) dy + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \int_c^d f(x_{2i}, y) dy \right.$$

$$+4 \sum_{i=1}^n \int_c^d f(x_{2i-1}, y) dy + \int_c^d f(x_{2n}, y) dy \Big],$$

pero, nuevamente por la regla compuesta de Simpson en el intervalo $[y_{2j-1}, y_{2j}]$,

$$\int_c^d f(x_0, y) dy \approx \frac{k}{3} \left[f(x_0, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) + f(x_0, y_{2m}) \right],$$

además,

$$\int_c^d f(x_{2i}, y) dy \approx \frac{k}{3} \left[f(x_{2i}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + f(x_{2i}, y_{2m}) \right],$$

$$\int_c^d f(x_{2i-1}, y) dy \approx \frac{k}{3} \left[f(x_{2i-1}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + f(x_{2i-1}, y_{2m}) \right],$$

y

$$\int_c^d f(x_{2n}, y) dy \approx \frac{k}{3} \left[f(x_{2n}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + f(x_{2n}, y_{2m}) \right],$$

así que

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &\approx \frac{hk}{9} \left[f(x_0, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) + f(x_0, y_{2m}) \right. \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(f(x_{2i}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + f(x_{2i}, y_{2m}) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{i=1}^n \left(f(x_{2i-1}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + f(x_{2i-1}, y_{2m}) \right) \\ &\quad \left. + \left(f(x_{2n}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + f(x_{2n}, y_{2m}) \right) \right], \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &\approx \frac{hk}{9} \left[f(a, c) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(a, y_{2j-1}) + f(a, d) \right. \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, c) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 8 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, d) \\ &+ 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, c) + 8 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + 16 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) \\ &\left. + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, d) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(b, y_{2j-1}) + f(b, c) + f(b, d) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.1. Utilice la Regla de Simpson para aproximar la integral

$$\int_2^4 \int_{\ln 2x}^{4+e^{\frac{x}{2}}} \cos(x+y) dy dx$$

Solución

Dado que en el eje X el intervalo es $[2;4]$, entonces $h_x = \frac{4-2}{2} = 1$, luego los nodos en dicho eje son $x_2 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. Para la integral dada por

$$I = \int_2^4 \int_{\ln 2x}^{4+e^{\frac{x}{2}}} \cos(x+y) dy dx,$$

al aplicar la regla de Simpson obtenemos que

$$I = \frac{h_x}{3} [H(x_1) + 4H(x_2) + H(x_3)],$$

donde $H(x_i) = \int_{\ln 2x_i}^{4+e^{\frac{x_i}{2}}} \cos(x_i + y) dy$, por lo tanto

$$I \approx \frac{h_x}{3} \left[\int_{\ln 2}^{4+e^{\frac{1}{2}}} \cos(2+y) dy + 4 \int_{\ln 4}^{4+e} \cos(4+y) dy + \int_{\ln 6}^{4+e^{\frac{3}{2}}} \cos(6+y) dy \right].$$

Por lo tanto

$$I \approx \frac{h_x}{3} \left[\int_{0.6931}^{5.6487} \cos(2+y)dy + 4 \int_{1.3863}^{6.7183} \cos(4+y)dy + \int_{1.7918}^{8.4817} \cos(6+y)dy \right].$$

$$\text{Sean } I_1 = \int_{0.6931}^{5.6487} \cos(2+y)dy, \quad I_2 = \int_{1.3863}^{6.7183} \cos(4+y)dy \quad \text{y} \quad I_3 = \int_{1.7918}^{8.4817} \cos(6+y)dy.$$

Para I_1 , $h_{1y} = \frac{5.6487 - 0.6931}{2} = 2.4778$, luego entonces

$$I_1 = \frac{2.4778}{3} [\cos(2 + 0.6931) + 4\cos(2 + 3.1709) + \cos(2 + 5.6487)],$$

de modo que

$$I_1 = 0.82593(-0.90110 + 1.77045 + 0.20384) = 0.888637.$$

Para I_2 , $h_{2y} = \frac{6.7183 - 1.3863}{2} = 2.666$, por lo tanto

$$I_2 = \frac{2.666}{3} [\cos(3 + 1.3863) + 4\cos(3 + 4.0523) + \cos(3 + 6.7183)],$$

así que,

$$I_2 = 0.8887(-0.32034 + 2.8741 - 0.9572) = 1.418863.$$

y para I_3 , $h_{3y} = \frac{8.4817 - 1.7918}{2} = 3.34495$, por consiguiente,

$$I_3 = \frac{3.34495}{3} [\cos(4 + 1.7918) + 4\cos(4 + 5.13675) + \cos(4 + 8.4817)],$$

así que,

$$I_3 = 1.114983(0.88168 - 3.835224 + 0.99642) = -2.182156.$$

De modo que

$$\int_2^4 \int_{\ln 2x}^{4+e^{\frac{x}{2}}} \cos(x+y)dydx \approx \frac{1}{3}[I_1 + 4I_2 + I_3],$$

luego entonces

$$\int_2^4 \int_{\ln 2x}^{4+e^{\frac{x}{2}}} \cos(x+y) dy dx \approx \frac{1}{3}(0.888637 + 4 \times 1.418863 - 2.1821556),$$

y por lo tanto

$$\int_2^4 \int_{\ln 2x}^{4+e^{\frac{x}{2}}} \cos(x+y) dy dx \approx 1.460644$$

Ejercicios

- La fórmula 5.1 es llamada de diferencias progresiva, si $h > 0$, y de diferencias regresiva si $h < 0$. Use esta fórmula para determinar las aproximaciones que completan las siguientes tablas

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.8776	
0.6	0.8253	
0.7	0.7648	
0.8	0.6967	

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	4.3952	
0.3	5.1599	
0.5	5.8988	
0.7	6.6238	

- Los datos del ejercicio 1 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales del ejercicio 1 y obtenga las cotas por medio de las fórmulas de error

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = e^x + 3x - x^2 + 3$

- Use la fórmula de los tres puntos más conveniente para determinar las aproximaciones con que se completarían las siguientes tablas

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	0.1180	
1.2	0.0907	
1.3	0.07427	
1.4	0.06081	

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	-7.4719	
3	-8.4866	
3.1	-9.4728	
3.2	-10.4093	

c)

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.0	133.084	
8.1	137.247	
8.2	141.482	
8.3	145.789	

d)

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	0.1286	
2.1	0.1463	
2.2	0.1907	
2.3	0.2630	

4. Los datos del ejercicio 3 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales del ejercicio 1 y obtenga las cotas por medio de las fórmulas de error

a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$ c) $x^2 \ln x$
d) $x(\ln x)^2 + 2 \cos x$

5. Use la fórmula más precisa posible para determinar las aproximaciones con que se completarán las siguientes tablas

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	0.7451	
2.2	0.6537	
2.3	0.5561	
2.4	0.4563	
2.5	0.3582	
2.6	0.2657	

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	-2.7769	
-2.8	-2.5534	
-2.6	-2.3275	
-2.4	-2.0988	
-2.2	-1.8671	
-2.0	-1.6321	

6. Los datos del ejercicio 5 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales del ejercicio 5 y obtenga las cotas por medio de las fórmulas de error

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x$

7. Usando la expansión de Taylor demuestra que

$$f'''(x_0) \approx \frac{1}{2h^3} [f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)]$$

8. Usando la expansión de Taylor demuestra que

$$f''''(x_0) \approx \frac{1}{h^4} [f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + 6f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)]$$

9. Estime el valor óptimo de h para las fórmulas de tres puntos.
10. Estime el valor óptimo de h para las fórmulas que permiten aproximar $f''(x_0)$ y $f'''(x_0)$.
11. En un circuito eléctrico con un voltaje impreso $\varepsilon(t)$ y una inductancia L , la primera ley de Kirchhoff nos da la siguiente relación

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon(t),$$

donde R es la resistencia del circuito e i es la corriente. Suponga que medimos la corriente con varios valores de t y obtenemos

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

donde t se mide en segundos, i se da en amperes, la inductancia L es una constante de 0.098 henries y la resistencia es de 0.142 ohms. Aproxime el voltaje $\varepsilon(t)$ en los valores $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04$

12. La función error está definida como

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Encuentre $\operatorname{Erf}(2)$

13. Si

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Encuentre $\operatorname{Si}(2)$

14. Si

$$\operatorname{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt.$$

Encuentre $\operatorname{Ci}(2)$

15. Las integrales de Fresnel están definidas como

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

y

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Encontrar $C(2)$ y $S(2)$

16. Existen muchas formas de integrales elípticas

a) La integral elíptica completa de primera clase está definida como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 t}} dt.$$

Encuentre $K(1)$ y $K(4)$

- b) La integral elíptica completa de segunda clase está definida como

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 t} dt.$$

Encuentre $E(1)$ y $E(4)$

- c) La integral elíptica de primera clase está definida como

$$K(k, x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 t}} dt.$$

Encuentre $K(1, 1)$ y $K(2, 1)$

- d) La integral elíptica de segunda clase está definida como

$$E(k, x) = \int_0^x \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 t} dt.$$

Encuentre $E(1, 1)$ y $E(2, 1)$

17. Encuentre la longitud de arco de la curva descrita por la función $y = x^{-1}$, $1 < x < 2$; la longitud está dada por

$$\int_1^2 \sqrt{1 + x^{-4}} dx$$

18. Encuentre la longitud de arco de la curva descrita por la función $y = \operatorname{Sen} x$, $0 < x < \pi$; la longitud está dada por

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \cos^2} dx$$

19. Encuentre la longitud de arco de la curva descrita por la función $y = \ln(x)$, $1 < x < 2$; la longitud está dada por

$$\int_1^2 \sqrt{1 + x^{-2}} dx$$

20. Aplique la regla del trapecio con los valores indicados de n para aproximar la integrales siguientes

$$a) \int_1^2 x^2 \ln x dx, n = 4$$

$$b) \int_{-2}^2 x^2 e^x dx, n = 4$$

$$c) \int_0^2 \frac{3}{x^2+9} dx, n = 6$$

$$d) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx, n = 4$$

$$e) \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx, n = 8$$

$$f) \int_0^{\frac{3\pi}{8}} \tan x dx, n = 8$$

21. Aplique la regla compuesta de Simpson para aproximar las integrales del ejercicio 16.
22. Aplique la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson para aproximar las integrales del ejercicio 16.

En los problemas 19-25 aproxime las integrales dadas

- a) Usando el método compuesto del trapecio con 10 subintervalo
- b) Usando la regla de Simpson con dos subintervalos
- c) Usando el método compuesta de Simpson con 10 subintervalo
- d) Usando cuadratura Gaussiana con $n = 2$.
- e) Usando integración de Romberg.
23. $\int_0^1 x \sin(\pi x) dx.$
24. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$
25. $\int_0^2 e^x dx.$
26. $\int_1^2 \sqrt{x^3-1} dx.$
27. $\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x) dx.$

28. $\int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen}(x^2) dx.$

29. $\int_0^2 \ln(x^2 + 1) dx$

30. Use la regla de Simpson para calcular las siguientes integrales

a)

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x} \cos x (2y \operatorname{sen} x + \cos^2 x) dy dx$$

b)

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} (y^2 + x^3) dy dx$$

c)

$$\int_2^{2.2} \int_x^{2+x^2} (x^2 + y^3) dy dx$$

31. Use la regla de los $\frac{3}{8}$ de Simpson para calcular las integrales del ejercicio anterior.

Capítulo 6

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Condiciones Iniciales

Un paracaidista de masa m salta desde un avión en $t = 0$, supongamos que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en $t = 0$ y que la caída es vertical. Si el arrastre aerodinámico está dado por $f_{aire} = cv^2$, con c constante y v la velocidad vertical, entonces por la segunda ley de Newton el equilibrio de fuerzas satisface

$$ma = mg - f_{aire},$$

luego

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - cv^2, \quad v(0) = 0$$

o sea que

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2, \quad v(0) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$v'(t) = f(v, t), \quad v(0) = 0,$$

con $f(v, t) = g - \frac{c}{m}v^2$.

Observamos que la ecuación diferencial también se puede escribir como

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{c}{m}(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones iniciales.

En este capítulo, desarrollaremos métodos que aproximen la solución de problemas como el anteriormente expuesto.

6.1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Condiciones Iniciales

Estudiemos primero la ecuación diferencial dada por

$$t \frac{dy}{dt} = 2y \quad (6.1)$$

la cual al separar variable toma la forma

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dt}{t}$$

al integrar miembro a miembro se tiene que

$$\ln y = 2 \ln t + c_1 = 2 \ln t + \ln c,$$

o sea que

$$\ln y = \ln ct^2,$$

de modo que la solución de 6.1 está dada por

$$y(t) = ct^2 \quad (6.2)$$

ecuación que se satisface para cualquier constante c la cual puede escogerse arbitrariamente, en la figura 6.1 se muestra la gráfica de 6.2 para algunos valores de c .

En la práctica, estas fórmulas explícitas, al traducirlas como un modelo matemático, resulta una ecuación diferencial que involucra la razón de cambio de una función desconocida.

Si suponemos $P(t)$ es el número de individuos de una población, con índices de natalidad y mortalidad β y α respectivamente, entonces la razón de cambio de la población esta relacionada con la cantidad de nacimientos y muerte que se tengan en la población dada, teniendo entonces que

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\beta - \alpha)P(t) = kP(t)$$

.

Si conocemos el número de individuos en un instante $t = 0$, siendo $P(0) = P_0$, entonces el problema a resolver es

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t), \quad P(0) = P_0$$

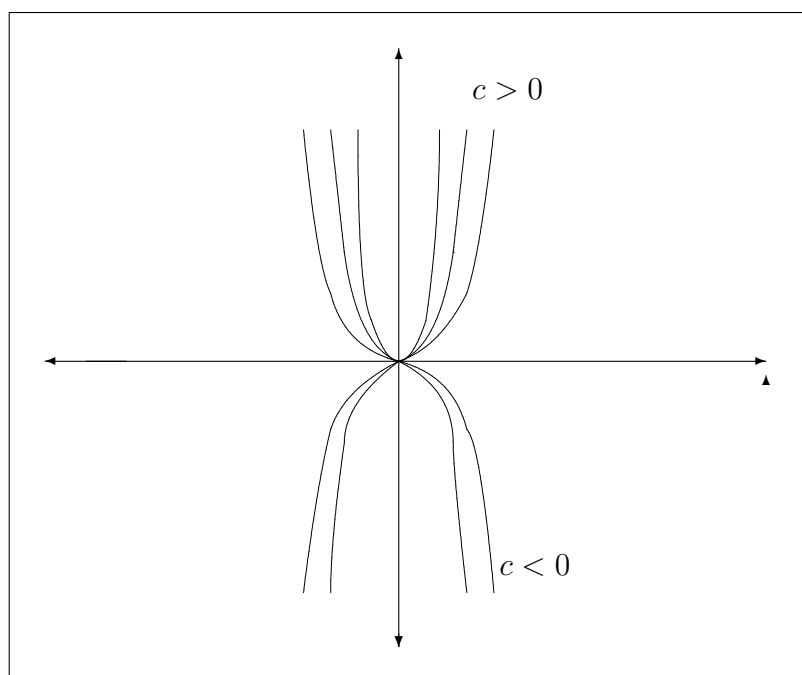


Figura 6.1

donde $k = \beta - \alpha$, cuya solución está dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Para cada P_0 escogido se tiene una solución, siendo k una constante que puede ser positiva o negativa. El problema anterior es un ejemplo de un problema de primer orden con condiciones iniciales, en general se tiene la siguiente definición

Definición 6.1.1. *Un problema de primer orden con condiciones iniciales está definido como*

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

Definición 6.1.2. *Sea $y'(t) = f(t, y)$ $y(t_0) = y_0$ un problema de primer grado con condiciones iniciales, una solución del problema es una función $g(t)$ derivable en $[t_0, t_1]$ tal que $g'(t) = f(t, g)$ $g(t_0) = y_0$ con $t \in [t_0, t_1]$.*

Definición 6.1.3. *Una función $f : R \rightarrow R$ se dice Lipschitz continua con constante γ en x , escribiéndose $f \in Lip_\gamma(x)$ si para toda y en una vecindad de x se cumple que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|$$

Definición 6.1.4. Sea $f : R^2 \longrightarrow R^2$, una función, $D = \{(t, y)/a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$ se dice f es Lipschitz continua con constante γ en $y \in D$, si se cumple que

$$|f(t, y) - f(t, y_1)| \leq \gamma|y - y_1|$$

El siguiente resultado muestra cuando una ecuación diferencial de primer orden con condiciones iniciales tiene solución única.

Teorema 6.1.1. Supongamos que $f(t, y)$ es continua en $R = \{(t, y)/t_0 \leq t \leq t_1, c \leq y \leq d\}$, si f es Lipschitz de constante γ con respecto a R y $(t_0, y_0) \in R$, entonces, el problema con condición inicial $y'(t) = f(t, y)$ $y(t_0) = y_0$, tiene solución única $y = y(t)$ en algún subintervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$

Demostración. Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ soluciones de el problema de primer orden con condiciones iniciales, sea $\phi(t) = [y_1(t) - y_2(t)]^2$ la cual satisface $\phi(t_0) = 0$ ya que $y_1(t_0) = y_0$ y $y_2(t_0) = y_0$, probemos que $\phi(t) = 0$. Consideremos $t > t_0$, entonces

$$\phi'(t) = 2[y_1(t) - y_2(t)][y_1'(t) - y_2'(t)],$$

luego,

$$|\phi'(t)| = 2|y_1(t) - y_2(t)||y_1'(t) - y_2'(t)|,$$

o sea que,

$$|\phi'(t)| = 2|y_1(t) - y_2(t)||f(t, y_1) - f(t, y_2)|,$$

pero como f es Lipschitz, entonces

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \gamma|y_1(t) - y_2(t)|,$$

por tanto,

$$\phi'(t) \leq 2\gamma|y_1(t) - y_2(t)|^2 = 2\gamma\phi(t). \quad (6.3)$$

Pero entonces tenemos que,

$$\phi'(t) - 2\gamma\phi(t) \leq 0,$$

de modo que

$$e^{-2\gamma t}\phi'(t) - 2e^{-2\gamma t}\gamma\phi(t) \leq 0,$$

así que,

$$(e^{-2\gamma t}\phi(t))' \leq 0,$$

luego por el teorema del valor medio se tiene que

$$\frac{\phi(t)e^{-2\gamma t} - \phi(t_0)e^{-2\gamma t_0}}{t - t_0} \leq 0,$$

por tanto,

$$\phi(t)e^{-2\gamma t} - \phi(t_0)e^{-2\gamma t_0} \leq 0,$$

o sea que,

$$\phi(t) - \phi(t_0)e^{-2\gamma t_0 + 2\gamma t} \leq 0,$$

de modo que,

$$\phi(t) \leq \phi(t_0)e^{2\gamma(t-t_0)},$$

así que,

$$0 \leq [y_1(t) - y_2(t)]^2 \leq [y_1(t_0) - y_2(t_0)]^2 e^{2\gamma(t-t_0)},$$

por consiguiente,

$$[y_1(t) - y_2(t)] \leq [y_1(t_0) - y_2(t_0)]e^{\gamma(t-t_0)},$$

pero como $y_1(t_0) - y_2(t_0) = 0$, entonces $y_1(t) = y_2(t)$, de modo que la solución es única. \square

6.2. Métodos de Euler y de Taylor

Para calcular la aproximación de la solución de una ecuación diferencial de primer orden con condiciones iniciales, en esta sección presentaremos primero el método de Euler y luego el de Taylor. Miraremos que el método de Euler es poco eficiente ya que acumula errores muy altos en el desarrollo del proceso iterativo, sin embargo su estudio y análisis resultan importantes porque nos sirve para el estudio de métodos más avanzados.

Primero estableceremos algunos resultados cuyo propósito es el análisis del error producido por el método de Euler.

Lema 6.2.1. Si $x \geq -1$ y $n \geq 0$, entonces $0 \leq (1+x)^n \leq e^{nx}$

Demostración. Por el teorema de Taylor para e^x , alrededor de $x = 0$, con $n = 1$ tenemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{f''(c)}{2!}x^2,$$

pero $f''(c) = e^c$, luego, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}e^c$.

Además

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!}e^c,$$

de modo que

$$0 \leq 1 + x \leq e^x,$$

pero como $n \geq 0$ entonces

$$0 \leq (1+x)^n \leq e^{nx}.$$

□

Lema 6.2.2. Sean $u, v \in R^+$, $\{a_i\}_{i=0}^k$ una sucesión tal que $a_0 \geq -\frac{v}{u}$ y además supongamos que

$$a_{i+1} \leq (1+u)a_i + v \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k,$$

entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)u} \left(a_0 + \frac{v}{u} \right) - \frac{v}{u}$$

Demostración. Como por hipótesis se tiene que para un i fijo

$$a_{i+1} \leq (1+u)a_i + v$$

$$a_i \leq (1+u)a_{i-1} + v$$

$$a_{i-1} \leq (1+u)a_{i-2} + v,$$

.

.

.

$$a_1 \leq (1+u)a_0 + v,$$

entonces,

$$a_{i+1} \leq (1+u)[(1+u)a_{i-1} + v] + v = (1+u)^2 a_{i-1} + [1 + (1+u)]v$$

de modo que

$$a_{i+1} \leq (1+u)^2 [(1+u)a_{i-2} + v] + [1 + (1+u)]v = (1+u)^3 a_{i-2} + [1 + (1+u) + (1+u)^2]v.$$

En general se tiene que

$$a_{i+1} \leq (1+u)^{i+1} a_0 + [1 + (1+u) + (1+u)^2 + \dots + (1+u)^i]v,$$

pero $1 + (1+u) + (1+u)^2 + \dots + (1+u)^i$ es una serie geométrica de razón $1+u$ de modo que

$$1 + (1+u) + (1+u)^2 + \dots + (1+u)^i = \frac{1 - (1+u)^{i+1}}{1 - (1+u)} = \frac{1 - (1+u)^{i+1}}{-u},$$

por tanto

$$1 + (1 + u) + (1 + u)^2 + \cdots + (1 + u)^i = \frac{1}{u}[(1 + u)^{i+1} - 1],$$

luego

$$a_{i+1} \leq (1 + u)^{i+1} a_0 + \frac{v}{u}[(1 + u)^{i+1} - 1] = (1 + u)^{i+1} a_0 + \frac{v}{u}(1 + u)^{i+1} - \frac{v}{u},$$

pero por el lema anterior $(1 + u)^{i+1} \leq e^{(i+1)u}$, luego

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)u} \left(a_0 + \frac{v}{u} \right) - \frac{v}{u}.$$

□

6.2.1. Método de Euler

Consideremos el intervalo cerrado $[a, b]$ y $P = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ una partición del intervalo con $t_i = t_0 + ih$, siendo $h = \frac{b-a}{n}$ el tamaño del paso, y consideremos además la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y)$, $y(0) = y_0$ en $[a, b]$, si $y(t)$, $y'(t)$ y $y''(t)$, son continuas, al aplicar el teorema de Taylor alrededor de t_i en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se tiene que

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(c_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2,$$

pero como $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$, y $h = t_{i+1} - t_i$ entonces,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{y''(c_i)}{2!}h^2,$$

pero si $t_{i+1} - t_i \approx 0$, entonces

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h,$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Si $u_i \approx y(t_i)$, entonces se tiene que

$$u_{i+1} \approx u_i + hf(t_i, u_i), \quad u_0 = y_0 \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (6.4)$$

que constituye el **método de Euler**.

Ejemplo 6.2.1. Aplicar el método de Euler para aproximar la ecuación $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 2]$ con $h = 0.2$

Solución

Como $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $t_i = 0 + hi$, y $h = 0.2$ entonces,

$$u_{i+1} = u_i + 0.2(u_i + 3(0.2i)^2 + 2) = u_i + 0.2u_i + 0.024i^2 + 0.4 = 1.2u_i + 0.024i^2 + 0.4,$$

se tiene entonces la siguiente tabla

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	$E_i = y(t_i) - u_i $
0	0	1	1	0
1	0.2	1.6	1.6726248234	0.726248234
2	0.4	2.344	2.5464222788	0.2024222
3	0.6	3.3088	3.7190692035	0.4102692
4	0.8	4.58656	5.3098683564	0.72530836
5	1	6.287872000000000	7.4645364561	1.176664456
6	1.2	8.545446400000000	10.3610523047	1.8156059
7	1.4	11.518535680000000	14.2167997016	2.69826402
8	1.6	15.398242816000000	19.2972918196	3.899049
9	1.8	20.413891379200000	25.9268271797	5.51293578
10	2.0	26.84066965504000	34.5015048904	7.66048083

TABLA 26



6.2.2. Cotas de Error

Una cota de error para el método de Euler se tiene mediante el siguiente teorema.

Teorema 6.2.1. *Sea f una función Lipschitz continua de constante γ , y supongamos $y''(t)$ está acotada. Si $y(t)$ es la solución del problema con condición inicial dado por $y'(t) = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$, $y(t_0) = y_0$ y sean $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$, la sucesión generada por el método de Euler, entonces,*

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{hK}{2\gamma} [e^{\gamma(t_i - y_0)} - 1],$$

siendo $K \geq |y''(t)|$.

Demostración. Sabemos que $\forall i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))h + y''(c_{i-1})\frac{h^2}{2},$$

como la aproximación de Euler está dada por

$$u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}),$$

entonces

$$\begin{aligned} |y(t_i) - u_i| &= |y(t_{i-1}) - u_{i-1} + f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))h - hf(t_{i-1}, u_{i-1}) + y''(c_{i-1})\frac{h^2}{2}| \\ &\leq |y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + |f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))h - hf(t_{i-1}, u_{i-1})| + |y''(c_{i-1})\frac{h^2}{2}| \\ &= |y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + h|f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| + |y''(c_{i-1})\frac{h^2}{2}| \end{aligned}$$

luego

$$|y(t_i) - u_i| \leq |y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + h\gamma|y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + \frac{h^2K}{2},$$

ya que $|f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| \leq \gamma|y(t_{i-1}) - u_{i-1}|$ por ser f Lipschitz continua de constante γ y $K \geq |y''(t)| \forall t$, entonces,

$$|y(t_i) - u_i| \leq (1 + h\gamma)|y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + \frac{h^2K}{2},$$

pero por el lema 6.2.2

$$|y(t_i) - u_i| \leq e^{(1+i)h\gamma} \left(|y(t_0) - u_0| + \frac{h^2K}{2} \right) - \frac{h^2K}{2} = e^{(1+i)h\gamma} \left(|y(t_0) - u_0| + \frac{Kh}{2\gamma} \right) - \frac{Kh}{2\gamma},$$

pero como $y_0 = u_0$ y $t_{i+1} = a + (i+1)h$, entonces, $|y(t_0) - u_0| = 0$ y $(i+1)h = t_{i+1} - a$, luego,

$$|y(t_i) - u_i| \leq e^{(t_{i+1}-t_0)\gamma} \frac{Kh}{2\gamma} - \frac{Kh}{2\gamma},$$

así que

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{Kh}{2\gamma} [e^{(t_{i+1}-t_0)\gamma} - 1]$$

□

Definición 6.2.1. Sea $y'(t) = \Phi(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ un problema con condiciones iniciales, el método de aproximación

$$u_0 = y_0, \quad u_{i+1} = u_i + h\Phi(t_i, u_i)$$

se define como el método de diferencias

Definición 6.2.2. *El método de diferencias tiene un error de discretización local $e_i(h)$ definido como*

$$e_i(h) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \Phi(t_{i-1}, y_{i-1}),$$

y un error de discretización global $\bar{e}_i(h)$ dado por

$$\bar{e}_i(h) = y(t_i) - u_i$$

Observemos que el método de Euler es un método de diferencias y por lo tanto su error de discretización local es

$$e_i(h) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - f(t_{i-1}, y_{i-1}),$$

donde $y_i = y(t_i)$ pero como

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + y''(c_{i-1}) \frac{h^2}{2}$$

o sea que

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1}) + y''(c_{i-1}) \frac{h^2}{2},$$

por tanto

$$y_i - y_{i-1} - hf(t_{i-1}, y_{i-1}) = y''(c_{i-1}) \frac{h^2}{2},$$

entonces

$$|e_i(h)| = |y''(c_{i-1}) \frac{h}{2}|,$$

pero como $|y''(c_{i-1})| \leq K$, se tiene que

$$|e_i(h)| \leq \frac{Kh}{2},$$

o sea que el error de discretización local del método de Euler es $O(h)$.

6.2.3. Método de Taylor

Consideremos el problema

$$y'(t) = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

y la serie de Taylor dada por

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \frac{y'''(t_i)}{3!}(t_{i+1} - t_i)^3$$

$$+ \cdots + \frac{y^{(n-1)}(t_i)}{(n-1)!} (t_{i+1} - t_i)^{n-1} + \frac{y^{(n)}(t_i)}{n!} (t_{i+1} - t_i)^n + \frac{y^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} (t_{i+1} - t_i)^{n+1}$$

o sea que

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(t_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(t_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{y^{(n-1)}(t_i)}{(n-1)!}h^{n-1} \\ + \frac{y^{(n)}(t_i)}{n!}h^n + \frac{y^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad (6.5)$$

pero como $y'(t) = f(t, y)$, entonces $y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y)$, luego

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k-1)}(t_i, y(t_i))}{k!} h^{k-1} + \frac{y^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} h^{n+1},$$

si $u_0 = y(t_0) = y_0$ y $u_i \approx y_i = y(t_i)$, entonces al suprimir el último sumando, se tiene el método de Taylor de orden n , el cual se concreta si tomamos

$$u_0 = y_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hT^n(t_i, u_i),$$

con

$$T^n(t_i, u_i) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k-1)}(t_i, u_i)}{k!} h^{k-1}.$$

En particular el método de Taylor de orden dos está dado por

$$u_0 = y_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hT^2(t_i, u_i),$$

con

$$T^2(t_i, u_i) = f(t_i, u_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, u_i).$$

y el de orden 4 como

$$u_0 = y_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hT^4(t_i, u_i),$$

con

$$T^4(t_i, u_i) = f(t_i, u_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, u_i) + \frac{h^2}{6} f''(t_i, u_i) + \frac{h^3}{24} f'''(t_i, u_i).$$

Ejemplo 6.2.2. Aplicar el método de Taylor de orden dos y orden cuatro para aproximar la ecuación $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.2$

Solución

a) Como $f(t, y) = y + 3t^2 + 2$, entonces $f'(t, y) = y' + 6t = y + 3t^2 + 2 + 6t$ y $f''(t, y) = y' + 6t + 6 = y + 3t^2 + 2 + 6t + 6 = y + 3t^2 + 6t + 8$, de modo que

$$T^2(t_i, u_i) = u_i + 3t_i^2 + 2 + \frac{h}{2}(u_i + 3t_i^2 + 6t_i + 2) = \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_i + \left(1 + \frac{h}{2}\right)3t_i^2 + \frac{h}{2}6t_i + 2\left(1 + \frac{h}{2}\right),$$

pero como $h = 0.2$, y $t_i = 0.2i$ entonces

$$T^2(t_i, u_i) = 1.1(u_i + 0.12i^2 + 2) + 0.12i$$

de modo que se tiene

$$u_0 = 1$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.2[1.1(u_i + 0.12i^2 + 2) + 0.12i] = 1.22u_i + 0.0264i^2 + 0.024i + 0.44$$

los resultados se muestran a continuación

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	$E_i = y(t_i) - u_i $
0	0	1	1	0
1	0.2	1.66	1.6726248234	0.0126
2	0.4	2.51560000	2.5464222788	0.00676164
3	0.6	3.662632	3.7190692035	0.0270461071
4	0.8	5.21801104	5.3098683564	0.05595472601
5	1	7.3243734688	7.4645364561	0.09630632813
6	1.2	10.15573563193600	10.3607737863	0.20503815
7	1.4	13.92439747096192	14.2167997016	0.29240223
8	1.6	18.88936491457355	19.2979918196	0.4086269
9	1.8	25.36662519577973	25.9268271797	0.56020198
10	2.0	33.74168273885127	34.5015048904	0.75982216

TABLA 27

b) Para el método de Taylor de cuarto orden se tiene que $f(t, y) = y + 3t^2 + 2$, entonces $f'(t, y) = y' + 6t = y + 3t^2 + 2 + 6t$ y $f''(t, y) = y'' + 6t + 6 =$

$y + 3t^2 + 2 + 6t + 6 = y + 3t^2 + 6t + 8$, $f'''(t, y) = y + 3t^2 + 6t + 8$, de modo que

$$T^4(t_i, u_i) = u_i + 3t_i^2 + 2 + \frac{h}{2}[u_i + 3t_i^2 + 6t_i + 2] + \frac{h^2}{6}[u_i + 3t_i^2 + 6t_i + 8] + \frac{h^3}{24}[u_i + 3t_i^2 + 6t_i + 8],$$

de modo que tenemos

$$u_0 = 1$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.2[1.107u_i + 3.321t_i^2 + 0.642t_i + 2.256]$$

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	$E_i = y(t_i) - u_i $
0	0	1	1	0
1	0.2	1.67260000	1.6726248234	0.0000248234
2	0.4	2.54636164	2.5464222788	0.0000606388
3	0.6	3.7189581071	3.7190692035	0.0001110964
4	0.8	5.309687443201	5.3098683564	0.0001809232
5	1	7.46426022945	7.4645364561	0.00027622665

TABLA 28

■

Como podemos observar los resultados obtenidos al aplicar los métodos de Taylor de orden dos y cuatro dan mejores resultados que el método de Euler, además observamos también, que el de orden cuatro arroja un error menor que el de orden dos.

Si observamos la ecuación 6.5 se tiene que

$$y_{i+1} - y_i - f(t_i, y_i)h - \frac{h^2}{2!}f'(t_i, y_i) - \frac{h^3}{3!}f''(t_i, y_i) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-2)}(t_i, y_i)$$

$$- \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(t_i, y_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(t_i, c_{i+1}),$$

o sea que

$$y_{i+1} - y_i - hT^n(t_i, y_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t_i, c_{i+1}),$$

por tanto

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^n(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t_i, c_{i+1})$$

de modo que el error de discretización local es $e_i = O(h^n)$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

6.3. Métodos de Runge-Kuta

Derivemos primero los métodos de Runge-Kuta de orden dos, para esto sea $y'(t) = f(t, y)$, luego entonces

$$y''(t, y) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} y'(t) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y),$$

pero por el desarrollo de Taylor de $y(t+h)$ alrededor de t se tiene que

$$y(t+h) = y(t) + (t+h-t)y'(t) + \frac{(t+h-t)^2}{2!}y''(t) + \frac{(y+h-t)^3}{3!}K + \dots,$$

donde K incluye a $y'''(t)$, o sea que

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y) \right] + K \frac{h^3}{6} + \dots$$

de modo que

$$y(t+h) = y(t) + h \left[f(t, y) + \frac{h}{2!} \left[\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y) \right] \right] + K \frac{h^3}{6} + \dots,$$

en los métodos de Runge-Kuta de orden dos se desea encontrar una función

$$Af(t, y) + Bf(t+ah, y+bhf(t, y))$$

de tal forma que

$$Af(t, y) + Bf(t+ah, y+bhf(t, y)) = f(t, y) + \frac{h}{2!} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{h}{2!} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y),$$

pero por el desarrollo de Taylor para dos variables se tiene que

$$f(t+ah, y+bhf(t, y)) = f(t, y) + (t+ah-t) \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + (t+bhf(t, y)-t) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + Hh^3,$$

donde H incluye las derivadas parciales segundas de $f(t, y)$, luego

$$f(t+ah, y+bhf(t, y)) = f(t, y) + ah \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + bhf(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + Hh^3,$$

luego entonces

$$f(t, y) + \frac{h}{2!} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{h}{2!} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y) = Af(t, y) + Bf(t, y) + aBh \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} +$$

$$bBhf(t, y)\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + HBh^3,$$

así que

$$A + B = 1,$$

$$aB = \frac{1}{2},$$

$$bB = \frac{1}{2},$$

pero como se tiene un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, para su solución se le debe asignar un valor a una de las variables. Si escogemos $B = \frac{1}{2}$, entonces $A = \frac{1}{2}$ de modo que $a = 1$ y $b = 1$, luego entonces

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + h \left[\frac{1}{2}f(t, y) + \frac{1}{2}f(t+h, y+hf(t, y)) \right] \\ &= y(t) + \frac{h}{2}[f(t, y) + f(t+h, y+hf(t, y))]. \end{aligned}$$

Con los valores escogidos anteriormente se genera la sucesión $\{(t_i, u_i)\}$, dada por

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_i + hf(t_i, u_i))], \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $u_i = y(t_i)$, $u_{i+1} = y(t_i + h) = y(t_{i+1})$, la expresión 6.6 se conoce como el **método de Heun**.

Ahora si tomamos $A = 0$, entonces, $B = 1$, $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{h}{2}f(t_i, u_i)\right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

la expresión 6.7 es el método **modificado de Euler**.

Ejemplo 6.3.1. *Aplicar el método modificado de Euler y método de Heun para aproximar la ecuación $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$*

Solución

Al aplicar 6.6 y 6.7 con $u_0 = 1$, se tienen los resultados mostrados en la tabla 29

i	t_i	$y(t_i)$	Heun	Modificado de Euler
0	0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	1.0000000000000000
1	0.2	1.6600000000000000	1.6680000000000000	1.6720000000000000
2	0.4	2.5156000000000000	2.5333600000000000	2.5422400000000000
3	0.6	3.6626320000000000	3.6922992000000000	3.7071328000000000
4	0.8	5.2180110400000000	5.2622050240000000	5.2843020160000000
5	1	7.3243734688000000	7.3862901292800000	7.4172484595200000
6	1.2	10.3607737863	10.23927395772160	10.28104312061440
7	1.4	14.2164952815	14.03431422842035	14.089927260714959
8	1.6	19.296964184	19.03146335867283	19.10251258072248
9	1.8	25.9264811644	25.54798529758085	25.63866534848142
10	2.0	34.5011483923	33.97094206304864	34.08557172514733

TABLA 29

■

Pero el más exitoso de los métodos de Runge-Kuta es el de cuarto orden y consiste en aproximar a $T^4(f, t)$ mediante la expresión

$$\begin{aligned}
& Af(t, y(t)) + Bf(t + h\alpha_1, y + \beta_1 f(t, y(t))) \\
& + Cf(t + h\alpha_2, y + \beta_2 f(t, y(t)) + \beta_3 f(t + h\alpha_1, y + \beta_1 f(t, y(t)))) \\
& + Df(t + h\alpha_3, y + \beta_4 f(t, y(t)) + \beta_5 f(t + h\alpha_1, y + \beta_1 f(t, y(t)))) \\
& + \beta_6 f(t + h\alpha_3, y + \beta_2 f(t, y(t)) + \beta_3 f(t + h\alpha_1, y + \beta_1 f(t, y(t))))
\end{aligned}$$

que como podemos observar tiene 13 incógnitas, Runge y Kuta lograron obtener 11 ecuaciones, lo cual obliga a asignar condiciones adicionales para poder resolver el sistema. La elección más útil es $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = 0$ y con esta elección se tiene que $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = 0$, $\beta_6 = 1$, $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$ y $D = \frac{1}{6}$.

Con estos valores se tiene entonces el **método de Runge-Kuta de cuarto orden** dado por

$$\begin{aligned}
u_0 &= y_0 \\
u_{i+1} &= u_i + \frac{1}{6} \left[hf(t_i, u_i) + 2hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)\right) \right. \\
&\quad \left. + 2hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)\right)\right) \right. \\
&\quad \left. + hf(t_i + h, u_i + hf(t_i, u_i)) \right]
\end{aligned}$$

$$+hf(t_i + h, u_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)))))] .$$

Ahora si tomamos

$$RK_1 = hf(t_i, u_i),$$

$$RK_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)),$$

$$RK_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)))$$

y

$$RK_3 = hf(t_i + h, u_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i))))),$$

entonces, se tiene que

$$RK_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}RK_1),$$

$$RK_4 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}RK_2),$$

y

$$RK_4 = f(t_{i+1}, u_i + RK_3),$$

de modo que el **método de Runge- Kutta de cuarto orden** se puede escribir ahora como

$$u_0 = y_0$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(RK_1 + 2RK_2 + 2RK_3 + RK_4) \quad (6.8)$$

Ejemplo 6.3.2. Aplicar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la ecuación $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 2]$

Solución

Aplicando la expresión 6.8 con $u_0 = 1$ se tienen los resultados mostrados en la tabla 30

i	t_i	$y(t_i)$	Runge-Kuta
0	0	1.000000000000000	1.000000000000000
1	0.2	1.660000000000000	1.672620000000000
2	0.4	2.515600000000000	2.546406068000000
3	0.6	3.662632000000000	3.71903237145520
4	0.8	5.218011040000000	5.30979813849538
5	1	7.324373468800000	7.46441544635828
6	1.2	10.3607737863	10.36085702618198
7	1.4	14.2164952815	14.21649877177867
8	1.6	19.296964184	19.29684359985047
9	1.8	25.9264811644	25.92617677285736
10	2.0	34.5011483923	34.5008031036799

TABLA 30

■

Los métodos de Euler, Taylor y de Runge-Kuta, son llamados métodos de un paso ya que para obtener la aproximación $(i + 1)$ -ésima se usa la i -ésima información, pero es posible desarrollar métodos más precisos para encontrar una aproximación i -ésima cualquiera usando las aproximaciones precedentes calculadas en los puntos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$, estos son los llamados métodos multipasos.

Definición 6.3.1. Sea $y'(t) = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$, $y(t_0) = \alpha_0$, un método multipaso es aquel cuya aproximación u_{i+1} puede representarse de la forma

$$u_{i+1} = \alpha_{m-1}u_i + \alpha_{m-2}u_{i-1} + \dots + \alpha_0u_{i+1-m}$$

$$+ h[\beta_m f(t_{i+1}, u_{i+1}) + \beta_{m-1}f(t_i, u_i) + \dots + \beta_0 f(t_{i+1-n}, u_{i+1-n})],$$

$m > 1$, $i = m - 1, m, \dots, n - 1$, $h = \frac{b-a}{n}$, $\alpha_0, \alpha_i, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ valores constantes y $u_i = \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$ las condiciones iniciales dadas

Definición 6.3.2. Si en la definición anterior $\beta_m = 0$ se dice que el método es explícito y si $\beta_m \neq 0$ el método multipaso es implícito.

6.4. Métodos Explícitos de Adams- Bashforth

6.4.1. Método de Adams- Bashforth de dos pasos

Encontremos primero el método de Adams-Bashforth de dos pasos para esto tomamos el polinomio de Lagrange de $f(t, y(t))$ que pasa por los puntos (t_{k-1}, f_{k-1}) , (t_k, f_k) donde $f_{k-1} = f(t_{k-1}, u_{k-1})$, $f_k = f(t_k, u_k)$ y $u_i \approx y(t_i)$, luego se tiene que

$$f(t, y(t)) = f_{k-1} \frac{(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_k)} + f_k \frac{(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})},$$

así que,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_k)} dt + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} dt$$

pero como $t_i = t_0 + ih$ y $t_j = t_0 + jh$, entonces $t_i - t_j = (i - j)h$, sea $t = t_k + hu$, entonces $dt = hdu$, $t_{k-1} - t_k = -h$, y $t_k - t_{k-1} = h$, además $t - t_{k-1} = t - t_k + h = uh + h = h(u + 1)$, ya que $t_{k-1} = t_k - h$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= f_{k-1} \int_0^1 \frac{huh}{-h} du + f_k \int_0^1 \frac{h(u+1)h}{h} du \\ &= -hf_{k-1} \int_0^1 u du + hf_k \int_0^1 (u+1) du \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = -\frac{1}{2}hf_{k-1} + \frac{3}{2}hf_k$$

de lo anterior se tiene que el método de Adams-Bashforth de dos pasos es

$$u_0 = \alpha_0, \quad u_1 = \alpha_1$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[3f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1})].$$

6.4.2. Método de Adams- Bashforth de tres pasos

En este método al igual que antes se toma el polinomio de Lagrange para $f(t, y(t))$ que pasa por los puntos (t_{k-2}, f_{k-2}) , (t_{k-1}, f_{k-1}) y (t_k, f_k) , donde $f_i = f(t_i, u_i)$, $i = k, k-1, k-2$, luego,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = f_{k-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)} dt$$

$$+ f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)} dt + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})} dt,$$

si $t = t_k + uh$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= f_{k-2} \int_0^1 \frac{huh(u+1)}{-h(-2h)} h du + f_{k-1} \int_0^1 \frac{huh(u+2)}{h(-h)} h du \\ &\quad + f_k \int_0^1 \frac{h(u+2)h(u+1)}{h2h} h du, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= \frac{hf_{k-2}}{2} \int_0^1 (u^2 + u) du - hf_{k-1} \int_0^1 (u^2 + 2u) du \\ &\quad + \frac{hf_k}{2} \int_0^1 (u^2 + 3u + 2) du \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= \frac{hf_{k-2}}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - hf_{k-1} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) + \frac{hf_k}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{5hf_{k-2}}{12} - \frac{4hf_{k-1}}{3} + \frac{23hf_k}{12} \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{12} [5f_{k-2} - 16f_{k-1} + 23f_k]$$

de modo que el método de Adams-Bashforth de tres pasos es entonces

$$u_0 = \alpha_0 \quad u_1 = \alpha_1 \quad u_2 = \alpha_2$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} [5f(t_{i-2}, u_{i-2}) - 16f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 23f(t_i, u_i)]$$

6.4.3. Método de Adams- Bashforth de cuatro pasos

Consideremos el polinomio de Lagrange para $f(t, y(t))$ que pasa por los puntos (t_{k-3}, f_{k-3}) , (t_{k-2}, f_{k-2}) , (t_{k-1}, f_{k-1}) y (t_k, f_k) , donde $f_i = f(t_i, u_i)$, $i = k, k-1, k-2, k-3$, entonces se tiene que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = f_{k-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-3} - t_{k-2})(t_{k-3} - t_{k-1})(t_{k-3} - t_k)} dt$$

$$\begin{aligned}
& + f_{k-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k-2}-t_{k-3})(t_{k-2}-t_{k-1})(t_{k-2}-t_k)} dt \\
& + f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_k)}{(t_{k-1}-t_{k-3})(t_{k-1}-t_{k-2})(t_{k-1}-t_k)} dt \\
& + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})}{(t_k-t_{k-3})(t_k-t_{k-2})(t_k-t_{k-1})} dt,
\end{aligned}$$

sea $t = t_k + hu$, luego $dt = hdu$ además como $t_i - t_j = (i - j)h$ y $t - t_{k-3} = h(u + 3)$, $t - t_{k-2} = h(u + 2)$, $t - t_{k-1} = h(u + 1)$ y $t - t_k = hu$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= f_{k-3} \int_0^1 \frac{h(u+2)h(u+1)hu}{-h(-2h)(-3h)} hdu + f_{k-2} \int_0^1 \frac{h(u+3)h(u+1)hu}{-h(h)(-2h)} hdu \\
&+ f_{k-1} \int_0^1 \frac{h(u+3)h(u+2)hu}{h2h(-h)} hdu + f_k \int_0^1 \frac{h(u+3)h(u+2)h(u+1)}{3h(2h)h} hdu,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-3}}{6} \int_0^1 (u^3 + 3u^2 + 2u) du + \frac{hf_{k-2}}{2} \int_0^1 (u^3 + 4u^2 + 3u) du \\
&- \frac{hf_{k-1}}{2} \int_0^1 (u^3 + 5u^2 + 6u) du + \frac{hf_k}{6} \int_0^1 (u^3 + 6u^2 + 11u + 6) du
\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-3}}{6} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) + \frac{hf_{k-2}}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \\
&- \frac{hf_{k-1}}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} + 3 \right) + \frac{hf_k}{6} \left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{11}{2} + 6 \right)
\end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-3}}{6} \frac{9}{4} + \frac{hf_{k-2}}{2} \frac{37}{12} - \frac{hf_{k-1}}{2} \frac{59}{12} + \frac{hf_k}{6} \frac{55}{4} \\
&= \frac{h}{24} [-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k]
\end{aligned}$$

entonces el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos está dado por

$$u_0 = \alpha_0 \quad u_1 = \alpha_1 \quad u_2 = \alpha_2 \quad u_3 = \alpha_3$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [-9f(t_{i-3}, u_{i-3}) + 37f(t_{i-2}, u_{i-2}) - 59f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 55f(t_i, u_i)]$$

6.5. Métodos de Adams-Moulton

Los métodos de Adams-Moulton son métodos implícitos y al igual que para los explícitos se pueden deducir por medio de los polinomios de Lagrange deduciremos primero el de Adams-Moulton de dos pasos y luego el de tres pasos.

6.5.1. Método de Adams-Moulton de dos pasos

Consideremos el polinomio de Lagrange que pasa por los puntos (t_{k-1}, f_{k-1}) , (t_k, f_k) , (t_{k+1}, f_{k+1}) , luego

$$\begin{aligned} f(y, y(t)) = & f_{k-1} \frac{(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k+1})} + f_k \frac{(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})}{(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} \\ & + f_{k+1} \frac{(t - t_k)(t - t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1} - t_{k-1})}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = & f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k+1})} dt \\ & + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})}{(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} dt + f_{k+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_k)(t - t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1} - t_{k-1})} dt \end{aligned}$$

tomando la sustitución $t = t_k + hu$ entonces $dt = hdu$ y como $t_i - t_j = (i - j)h$, $t - t_k = h$, $t - t_{k-1} = h(u + 1)$, $t - t_{k+1} = h(u - 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = & f_{k-1} \int_0^1 \frac{huh(u-1)}{-h(-2h)} hdu + f_k \int_0^1 \frac{h(u+1)h(u-1)}{-hh} hdu \\ & + f_{k+1} \int_0^1 \frac{h(u+1)hu}{h(2h)} hdu, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{hf_{k-1}}{2} \int_0^1 (u^2 - u) du - hf_k \int_0^1 (u^2 - 1) du + \frac{hf_{k+1}}{2} \int_0^1 (u^2 + u) du,$$

por lo tanto

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{hf_{k-1}}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - hf_k \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \frac{hf_{k+1}}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

así que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = -\frac{hf_{k-1}}{12} + \frac{2hf_k}{3} + \frac{5hf_{k+1}}{12} = \frac{h}{12}[5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}].$$

El método de Adams-Moulton de dos pasos es entonces

$$u_0 = \alpha_0 \quad u_1 = \alpha_1$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12}[5f(t_{i+1}, u_{i+1}) + 8f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1})]$$

6.5.2. Método de Adams-Moulton de tres pasos

Tomemos ahora como antes el polinomio de Lagrange que pasa por los puntos (t_{k-2}, f_{k-2}) , (t_{k-1}, f_{k-1}) , (t_k, f_k) , (t_{k+1}, f_{k+1}) , luego

$$\begin{aligned} f(y, y(t)) = & f_{k-2} \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)(t_{k-2} - t_{k+1})} \\ & + f_{k-1} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k+1})} + f_k \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} \\ & + f_{k+1} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)(t - t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_{k-2})(t_{k+1} - t_{k-1})(t_{k+1} - t_k)}, \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = & f_{k-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)(t_{k-2} - t_{k+1})} dt \\ & + f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} dt \\ & + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_{k+1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} dt \\ & + f_{k+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)(t - t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_{k-2})(t_{k+1} - t_{k-1})(t_{k+1} - t_k)} dt \end{aligned}$$

si sustituimos $t = t_k + hu$ entonces $dt = hdu$ y como $t_i - t_j = (i - j)h$, $t - t_{k-2} = h(u + 2)$, $t - t_{k-1} = h(u + 1)$, $t - t_k = h$, $t - t_{k+1} = h(u - 1)$, entonces

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = f_{k-2} \int_0^1 \frac{h(u+1)huh(u-1)}{-h(-2h)(-3h)} hdu$$

$$\begin{aligned}
& + f_{k-1} \int_0^1 \frac{h(u+2)huh(u-1)}{h(-h)(-2h)} h du + f_k \int_0^1 \frac{h(u+2)h(u+1)h(u-1)}{2h(-h)h} h du \\
& + f_{k+1} \int_0^1 \frac{h(u+2)h(u+1)hu}{h(2h)(-h)} h du,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-2}}{6} \int_0^1 (u^3 - u) du + \frac{hf_{k-1}}{2} \int_0^1 (u^3 + u^2 \\
& - 2u) du - \frac{hf_k}{2} \int_0^1 (u^3 + 2u^2 - u - 2) du + \frac{hf_{k+1}}{6} \int_0^1 (u^3 + 3u^2 + 2u) du,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-2}}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{hf_{k-1}}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \\
& - \frac{hf_k}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{hf_{k+1}}{2} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right)
\end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= \frac{hf_{k-2}}{24} - \frac{5hf_{k-1}}{24} + \frac{19hf_k}{24} + \frac{9hf_{k+1}}{24} \\
&= \frac{h}{24} [f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}].
\end{aligned}$$

El método de Adams-Moulton de tres pasos es entonces

$$u_0 = \alpha_0 \quad u_1 = \alpha_1 \quad u_2 = \alpha_2$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [f(t_{i-2}, u_{i-2}) - 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 19f(t_i, u_i) + 9f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$

Ejemplo 6.5.1. Considerar el problema con condiciones iniciales $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 2$, usar el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos y el de Adams-Moulton de tres pasos con $h = 0.2$

Solución

Para el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos se tiene que

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [55(u_i + 3t_i^2 + 2) - 59(u_{i-1} + 3t_{i-1}^2 + 2) + 37(u_{i-2} + 3t_{i-2}^2 + 2)$$

$$-9(u_{i-3} + 3t_{i-3}^2 + 2)]$$

pero $t_k = t_0 + hk = hk$, entonces se tiene que,

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [55u_i + 6.6i^2 + 110 - 59u_{i-1} - 7.08i^2 + 14.16i - 7.08 - 118 + 37u_{i-2} + 4.44i^2 - 17.76i + 17.76 + 74 - 9u_{i-3} - 1.08i^2 + 6.48i - 9.73 - 18]$$

o también

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [55u_i - 59u_{i-1} + 37u_{i-2} - 9u_{i-3} + 2.88i^2 + 2.88i + 48.96]$$

pero como $h = 0.2$, entonces

$$u_{i+1} = \frac{1}{24} [35u_i - 11.8u_{i-1} + 7.4u_{i-2} - 1.8u_{i-3} + 0.576i^2 + 0.576i + 9.792].$$

Para el método de Adams-Moulton de tres pasos se tiene que

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, u_{i+1}) + 19f(t_i, u_i) - 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) + f(t_{i-2}, u_{i-2})],$$

de modo que

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [9(u_{i+1} + 3t_{i+1}^2 + 2) + 19(u_i + 3t_i^2 + 2) - 5(u_{i-1} + 3t_{i-1}^2 + 2) + u_{i-2} + 3t_{i-2}^2 + 2],$$

pero entonces

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [9(u_{i+1} + 0.12i^2 + 0.24i + 2.12) + 19(u_i + 0.12i^2 + 2) - 5(u_{i-1} + 0.12i^2 - 0.24i + 2.12) + u_{i-2} + 0.12i^2 - 0.48i + 2.48]$$

o sea que

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{24} [9u_{i+1} + 19u_i - 5u_{i-1} + u_{i-2} + 2.88i^2 + 2.88i + 48.96] \\ &= u_i + \frac{1}{24} [1.8u_{i+1} + 3.8u_i - u_{i-1} + 0.2u_{i-2} + 0.576i^2 + 0.576i + 9.792] \end{aligned}$$

de modo que

$$u_{i+1} - \frac{1.8u_{i+1}}{24} = \frac{1}{24} [27.8u_i - u_{i-1} + 0.2u_{i-2} + 0.576i^2 + 0.576i + 9.792]$$

luego

$$u_{i+1} = \frac{1}{22.2} [27.8u_i - u_{i-1} + 0.2u_{i-2} + 0.576i^2 + 0.576i + 9.792].$$

Los resultados aparecen en la tabla siguiente

i	t_i	u_i	y_i	Adams-Bashforth	Adams-Moulton
0	0	u_0	1		
1	0.2	u_1	1.6726248234		
2	0.4	u_2	2.5464222788		
3	0.6	u_3	3.7190692035		3.71918533906
4	0.8	u_4	5.3098683564	5.30837762188	5.31015563568
5	1	u_5	7.4645364561	7.46054168108	7.46506422473
6	1.2	u_6	10.3610523047	10.353735621	10.3619129225
7	1.4	u_7	14.2167997016	14.20499176972	14.2181146914
8	1.6	u_8	19.2972918196	19.279123658	19.2992201956
9	1.8	u_9	25.9268271797	25.9001289049	25.929576096
10	2	u_{10}	34.5015048904	34.4634611452	34.5053431627

TABLA 31

■

En la tabla anterior podemos observar como el método implícito de Adams-Moulton de tres pasos produce una mejor aproximación que el método explícito de Adams-Bashforth de cuatro pasos.

6.6. Métodos Predictor-Corrector

A menudo los métodos de Adams-Bashforth se conocen como predictores, en el sentido en que estos predicen una aproximación y los métodos explícitos de Adams-Moulton se conocen como correctores ya que corrigen la aproximación dada por los predictores, si se combinan ambos métodos, establecemos los llamados métodos predictor-corrector, en estos si p_{i+1} es la aproximación dada por el método predictor, este valor se usa para calcular la aproximación u_{i+1} en el corrector.

Para ilustrar esto sea p_{i+1} la aproximación producida por el método predictor de Adams-Bashforth en el ejemplo anterior, luego

$$p_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [55(u_i + 3t_i^2 + 2) - 59(u_{i-1} + 3t_{i-1}^2 + 2) + 37(u_{i-2} + 3t_{i-2}^2 + 2) - 9(u_{i-3} + 3t_{i-3}^2 + 2)],$$

como hemos dicho esta aproximación se usa para calcular la aproximación en el método corrector, en este caso el de Adams-Moulton de tres pasos, entonces se tiene que

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, p_{i+1}) + 19f(t_i, u_i) - 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) + f(t_{i-2}, u_{i-2})].$$

Hacemos notar que al resolver el ejemplo hemos usado los primeros valores exactos del problema con condición inicial, estos naturalmente no siempre están disponibles puesto que en muchos casos la solución exacta del problema no se tiene de manera explícita, bastaría entonces con calcular estos valores usando uno cualquiera de los métodos de aproximación estudiados con anterioridad.

Ejemplo 6.6.1. Considerar el problema con condiciones iniciales $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 2$, usar el método predictor- corrector con $h = 0.2$

Solución

Para encontrar las primeras cuatro aproximaciones, hemos usado el método de Runge-Kuta de orden cuatro, los resultados están dados en la siguiente tabla

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	E_i
0	0	1	1	0
1	0.2	1.67262	1.6726248234	0.0000048224
2	0.4	2.54640473467	2.5464222788	0.000001754413
3	0.6	3.71902540959	3.7190692035	0.00004379391
4	0.8	5.30964596925	5.3098683564	0.00022238715
5	1	7.46428114957	7.4645364561	0.00025530643
6	1.2	10.3607737863	10.3610523047	0.0002785184
7	1.4	14.2164952815	14.2167997016	0.00030442201
8	1.6	19.296964184	19.2972918196	0.0003276356
9	1.8	25.9264811644	25.9268271797	0.0003460153
10	2	34.5011483923	34.5015048904	0.0003564981

TABLA 32



6.6.1. Método de Milne-Simpson

Otro método predictor-corrector es el de Milne-Simpson, y para deducirlo consideremos nuevamente el problema $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, $a \leq t \leq b$, por el teorema fundamental del cálculo en el intervalo $[t_{k-3}, t_{k+1}]$, tenemos que

$$\int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} y'(t) dt = \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt,$$

luego entonces

$$y(t_{k+1}) - y(t_{k-3}) = \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt,$$

o sea que

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt,$$

debemos por tanto evaluar la integral, para hacerlo consideremos el polinomio de Lagrange de $f(t, y(t))$ que pasa por los puntos (t_{k-3}, f_{k-3}) , (t_{k-2}, f_{k-2}) , (t_{k-1}, f_{k-1}) , (t_k, f_k) , luego

$$\begin{aligned} f(y, y(t)) = & f_{k-3} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-3} - t_{k-2})(t_{k-3} - t_{k-1})(t_{k-3} - t_k)} \\ & + f_{k-2} \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-3})(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)} \\ & + f_{k-1} \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_{k-3})(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)} \\ & + f_k \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-3})(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})}, \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = & f_{k-3} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-3} - t_{k-2})(t_{k-3} - t_{k-1})(t_{k-3} - t_k)} dt \\ & + f_{k-2} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-3})(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)} dt \\ & + f_{k-1} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_{k-3})(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)} dt \\ & + f_k \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_{k-3})(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-3})(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})} dt, \end{aligned}$$

sea $t = t_k + vh$, luego $dt = h dv$, pero $t - t_{k-3} = t - t_k - 3 = vh - 3 = h(v - 3)$ y $t - t_{k+1} = t - t_k - h = vh - h = h(v - 1)$ luego si $t = t_{k-3}$, entonces $v = -3$ y si $t = t_k$, entonces $v = 1$ además $t_i - t_j = (i - j)h$ y $t - t_{k-1} = h(v + 1)$, $t - t_{k-2} = h(v + 2)$, $t - t_{k-3} = h(v + 3)$ así que

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= f_{k-3} \int_{-3}^1 \frac{h(v+2)h(v+1)hv}{-h(-2h)(-3h)} h dv + f_{k-2} \int_{-3}^1 \frac{h(v+3)h(v+1)hv}{h(-h)(-2h)} h dv \\ &+ f_{k-1} \int_{-3}^1 \frac{h(v+3)h(v+2)vh}{2h(h)(-h)} h dv + f_k \int_{-3}^1 \frac{h(v+3)h(v+2)h(v+1)}{h(2h)(3h)} h dv, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= -\frac{hf_{k-3}}{6} \int_{-3}^1 (v^3 + 3v^2 + 2v) dv + \frac{hf_{k-2}}{2} \int_{-3}^1 (v^3 + 4v^2 + 3v) dv \\ &- \frac{hf_{k-1}}{2} \int_{-3}^1 (v^3 + 5v^2 + 6v) dv + \frac{hf_k}{6} \int_{-3}^1 (v^3 + 6v^2 + 11v + 6) dv, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{8hf_{k-2}}{3} - \frac{4hf_{k-1}}{3} + \frac{8hf_k}{3},$$

ya que $\int_{-3}^1 (v^3 + 3v^2 + 2v) dv = 0$ luego

$$\int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{4h}{3} [2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k],$$

si $u_i \approx y(t_i)$, entonces

$$u_{i+1}^* = u_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_{i-2}, u_{i-2}) - f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 2f(t_i, u_i)]$$

que es el valor predictor.

Para calcular el corrector, tomamos ahora el polinomio de Lagrange de $f(t, y(t))$ que pasa por los puntos (t_{k-1}, f_{k-1}) , (t_k, f_k) , (t_{k+1}, f_{k+1}^*) , donde $f_{k+1}^* = f(t_{k+1}, u_{k+1}^*)$ e integramos en el intervalo $[t_{k-1}, t_{k+1}]$.

Luego entonces se tiene que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = f_{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(t - t_k)(t - t_{k+1})}{(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k+1})} dt$$

$$+f_k \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})}{(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})} dt + f_{k+1}^* \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k-1})(t_{k+1}-t_k)} dt$$

de modo que si tomamos $t = t_k + vh$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &= f_{k-1} \int_{-1}^1 \frac{vh(v+1)h}{h(2h)} h dv \\ &+ f_k \int_{-1}^1 \frac{h(v+1)h(v-1)}{h(-h)} h dv + f_{k+1}^* \int_{-1}^1 \frac{hvh(v+1)}{h(2h)} h dv \end{aligned}$$

o sea que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{hf_{k-1}}{2} \int_{-1}^1 (v^2-v) dv - hf_k \int_{-1}^1 (v^2-1) dv + \frac{hf_{k+1}^*}{2} \int_{-1}^1 (v^2+v) dv,$$

de ese modo tenemos que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{hf_{k-1}}{3} + \frac{4hf_k}{3} + \frac{hf_{k+1}^*}{3},$$

luego entonces el valor del corrector es

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{3} [f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 4f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}^*)]$$

Ejemplo 6.6.2. Usar el método predictor-corrector de Milne-Simpson para aproximar el problema con condiciones iniciales $y'(t) = y + 3t^2 + 2$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 2$ con $h = 0.2$

Solución

El valor del predictor de Milne-Simpson está dado por

$$u_{i+1}^* = u_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_{i-2}, u_{i-2}) - f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 2f(t_i, u_i)]$$

y el valor del corrector es

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{3} [f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 4f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}^*)],$$

luego para el predictor se tiene que

$$u_{i+1}^* = \frac{1}{3} [1.6u_i - 0.8u_{i-1} + 1.6u_{i-2} + 3u_{i-3} + 0.288i^2 - 0.576i + 5.472]$$

y para el corrector

$$u_{i+1} = \frac{1}{3} [0.2u_{i+1}^* + 0.8u_i + 3.2u_{i-1} + 0.144i^2 + 2.448]$$

los resultados aparecen en la tabla siguiente

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	E_i
0	0	1		
1	0.2	1.67262		
2	0.4	2.54640473467		
3	0.6	3.71902540959		
4	0.8	5.3098053566	5.3098683564	0.0000629998
5	1	7.46443243907	7.4645364561	0.00018849767
6	1.2	10.3609055303	10.3610523047	0.0001467744
7	1.4	14.2165842474	14.2167997016	0.0002154542
8	1.6	19.2969954393	19.2972918196	0.0002963803
9	1.8	25.9264146804	25.9268271797	0.0004124993
10	2	34.5009483507	34.5015048904	0.0005565397

TABLA 33

Hacemos notar que usando solo el predictor los resultados obtenidos son

i	t_i	u_i	$y(t_i)$	E_i
0	0	1		
1	0.2	1.67262		
2	0.4	2.54640473467		
3	0.6	3.71902540959		
4	0.8	5.30850295587	5.3098683564	0.00136540053
5	1	7.46221639924	7.4645364561	0.00232005686
6	1.2	10.3581049608	10.3610523047	0.0029473439
7	1.4	14.2126392339	14.2167997016	0.0041604677
8	1.6	19.290236687	19.2972918196	0.0070551326
9	1.8	25.9165757422	25.9268271797	0.0102514375
10	2	34.4882898313	34.5015048904	0.0132150591

TABLA 34

Al comparar las tablas anteriores observemos que al aplicar solo el predictor la aproximación es buena, pero esta mejora si aplicamos luego el corrector.

■

6.7. Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Definición 6.7.1. *Un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales está dado por*

$$\begin{cases} y'(t) = f_1(t, y(t), x(t)) & y(a) = \alpha_1, \\ x'(t) = f_2(t, y(t), x(t)) & x(a) = \alpha_2 \end{cases} \quad (6.9)$$

con $a \leq t \leq b$

Definición 6.7.2. Las funciones $y_1(t)$ y $x_1(t)$ son soluciones del sistema 6.9 si $y_1(t)$ y $x_1(t)$ son derivables y además se cumple que

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), x_1(t)) & y_1(a) = \alpha_1, \\ x_1'(t) = f_2(t, y_1(t), x_1(t)) & x_1(a) = \alpha_2 \end{cases} \quad (6.10)$$

6.7.1. Aproximación Numérica

Una primera aproximación numérica del problema 6.9 se tiene si consideramos $dy = y_{k+1} - y_k$, $dx = x_{k+1} - x_k$, $dt = t_{k+1} - t_k$, de modo que el problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f_1(t_k, y(t_k), x(t_k)) & y_1(a) = \alpha_1, \\ \frac{dx}{dt} = f_2(t_k, y(t_k), x(t_k)) & x_1(a) = \alpha_2 \end{cases}$$

se puede aproximar escribiendo

$$y_{k+1} - y_k = f_1(t_k, y(t_k), x(t_k))h$$

$$x_{k+1} - x_k = f_2(t_k, y(t_k), x(t_k))h$$

donde $h = t_{k+1} - t_k$ por tanto se tiene que

$$u_{i+1} = u_i + f_1(t_i, y(t_i), x(t_i))h$$

$$v_{i+1} = v_i + f_2(t_i, y(t_i), x(t_i))h$$

donde $v_i \approx x(t_i)$ y $u_i \approx y(t_i)$, esta es la aproximación de Euler.

Una mejor aproximación para resolver 6.9 se tiene cuando usamos el método de Runge-Kuta de cuarto orden que como sabemos esta dado por

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{3}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{3}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4)$$

donde

$$F_1 = f_1(t_i, y(t_i), x(t_i)) \quad G_1 = f_2(t_i, y(t_i), x(t_i))$$

$$F_2 = f_1(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}F_1, v_i + \frac{h}{2}G_1) \quad G_2 = f_2(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}F_1, v_i + \frac{h}{2}G_1)$$

$$F_3 = f_1(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}F_2, v_i + \frac{h}{2}G_2) \quad G_3 = f_2(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}F_2, v_i + \frac{h}{2}G_2)$$

y

$$F_4 = f_1(t_i + \frac{h}{2}, u_i + hF_3, v_i + hG_3) \quad G_4 = f_2(t_i + \frac{h}{2}, u_i + hF_3, v_i + hG_3)$$

En general si se tiene el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales dado por

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = f_3(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

con $y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, y_3(a) = \alpha_3, \dots, y_n(a) = \alpha_n$ entonces, si suponemos que hemos calculado las aproximaciones $u_{1,j}, u_{2,j}, u_{3,j}, \dots, u_{n,j}$, para calcular las aproximaciones $u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, u_{3,j+1}, \dots, u_{n,j+1}$ por el método de Runge-Kuta de cuarto orden se calcula inicialmente los valores de

$$RK_{1,j} = hf_j(t_j, u_{1,j}, u_{2,j}, u_{3,j}, \dots, u_{n,j})$$

$$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$RK_{2,j} = hf_j(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2}RK_{1,1}, u_{2,j} + \frac{1}{2}RK_{1,2}, u_{3,j} + \frac{1}{2}RK_{1,3}, \dots, u_{n,j} + \frac{1}{2}RK_{1,n})$$

$$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$RK_{3,j} = hf_j(t_j + \frac{h}{2}, u_{1,j} + \frac{1}{2}RK_{2,1}, u_{2,j} + \frac{1}{2}RK_{2,2}, u_{3,j} + \frac{1}{2}RK_{2,3}, \dots, u_{n,j} + \frac{1}{2}RK_{2,n})$$

$$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$$

y por último

$$RK_{4,j} = hf_j(t_{j+1}, u_{1,j} + RK_{3,1}, u_{2,j} + RK_{3,2}, u_{3,j} + RK_{3,3}, \dots, u_{n,j} + RK_{3,n})$$

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ de modo que se tiene

$$u_{1,j+1} = u_{1,j} + \frac{(RK_{1,j} + 2RK_{2,j} + 2RK_{3,j} + RK_{4,j})}{6}$$

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$

Ejemplo 6.7.1. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$u_1' = u_2 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad u_1(0) = 1$$

$$u_2' = -u_1 - 2e^t + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad u_2(0) = 0$$

$$u_3' = -u_1 - e^t + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad u_3(0) = 1$$

Solución

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para sistema de ecuaciones con $h = 0.2$ los resultados se muestran en la siguiente tabla

i	t_i	u_1	u_2	u_3
0	0	1	0	1
1	0.2	0.9573287755	-0.4399988675	0.7814040135
2	0.4	0.8186474956	-0.9601667038	0.5316582668
3	0.6	0.5678513505	-1.561399861	0.2607193959
4	0.8	0.1885153676	-2.246152634	-0.02061102516
5	1	-0.3365112519	-3.019399866	-0.3011170837
6	1.2	-1.025716648	-3.889733852	-0.5696156421
7	1.4	-1.899771276	-4.870603803	-0.8154021404
8	1.6	-2.982636139	-5.981711933	-1.028677315
9	1.8	-4.302967654	-7.250588086	-1.200937819
10	2	-5.895857864	-8.714374822	-1.325315178

TABLA 35

6.8. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Una ecuación diferencial de orden superior, es una ecuación diferencial que contiene derivadas de orden superior $x''(t), x'''(t), \dots, x^n(t)$

Consideremos primero una ecuación diferencial de orden dos con condiciones iniciales, esto es, una ecuación de la forma

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

con $x(a_0) = \alpha$ y $x'(a_0) = \beta$

resolver una ecuación como la planteada antes es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo cual es posible si tomamos

$$v(t) = x'(t),$$

luego entonces

$$v'(t) = x''(t),$$

de modo que se tiene el sistema

$$x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = g(t, v(t))$$

con $x(a) = x_0, x'(a) = v_0$.

En general si se tiene una ecuación de orden n dada por

$$x^n(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{n-1}(t)) \quad a \leq t \leq b$$

con $x(t_0) = a_1, x'(t_0) = a_2, x''(t_0) = a_3, \dots, x^{n-1}(t_0) = a_n$, entonces si se toma $v_1(t) = x(t), v_2(t) = x'(t), v_3(t) = x''(t), \dots, v_n(t) = x^{n-1}(t)$ se tiene el sistema

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = v_3(t)$$

$$v_3'(t) = v_4(t)$$

.

.

.

$$v_n'(t) = f(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$$

con $v_1(a) = a_1, v_2(a) = a_2, v_3(a) = a_3, \dots, v_n(a) = a_n$, sistema que se puede resolver ahora por ejemplo usando el método de Runge-Kuta de cuarto orden mostrado en la sección anterior.

Ejemplo 6.8.1. *Aproxime la ecuación diferencial con valores iniciales dada por*

$$y'' - 2y' + y = te^t - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Solución

Sea $u_1(t) = y(t)$, y $u_2(t) = y'(t)$, entonces la ecuación diferencial de segundo orden se transforma en el sistema de ecuaciones lineales

$$u_1'(t) = u_2(t),$$

$$u_2'(t) = te^t - t + 2u_2(t) - u_1(t),$$

sistema que al aplicarle el método de Runge- Kutta se obtienen como resultado los mostrado en la tabla 36

i	t_i	u_1	u_2
0	0	0	0
1	0.2	0.000008972441866	0.0003639197722
2	0.4	0.0001535194529	0.003178822156
3	0.6	0.0008342683499	0.01171908535
4	0.8	0.002832054801	0.03035325337
5	1	0.007429677753	0.06479838816
6	1.2	0.01656148953	0.1224237448
7	1.4	0.03299617073	0.2126123301
8	1.6	0.06055896274	0.3471902812
9	1.8	0.104400702	0.5409355892
10	2	0.1713222417	0.81217952

TABLA 36

Ejercicios

Para los problemas 1-5, resuelva el problema con valor inicial y compare sus resultados con la solución exacta que se da.

- Usando el método de Euler con $h = 0.5$, y $h = 0.1$.
- Usando el método de Taylor de segundo orden con $h = 0.5$, y $h = 0.1$.
- Usando el método de Runge-Kuta con $h = 0.5$, y $h = 0.1$.
- Usando el método de punto medio con $h = 0.5$, y $h = 0.1$.

- $y' = xy + x$, $y(0) = 0$, en $[0; 1]$. La solución exacta es $y(x) = \frac{1}{x+1}$

2. $y' = -y^2$, $y(0) = 1$, en $[0; 1]$. La solución exacta es $y(x) = -1 + e^{\frac{x^2}{2}}$.
3. $y' = y + x$, $y(0) = 2$, en $[0; 1]$. La solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$.
4. $y' = x + 4yx^{-1}$, $y(1) = \frac{1}{2}$, en $[1; 2]$. La solución exacta es $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^4$.
5. $y' = y \cos x$, $y(0) = 1$, en $[0; 1]$. La solución exacta es $y(x) = e^{\sin x}$

Para los problemas 6-13, resuelva el problema con valor inicial y compare sus resultados con la solución exacta que se da. Investigue el efecto que se causa usando diferentes tamaños de paso

- a) Usando el método de Euler .
- b) Usando el método de Runge-Kuta
- c) Usando el método de punto medio .
- d) Usando el método de Adams-Bashforth-Moulton .

6. $y' = -y + \sin x$, $y(0) = 0$, en $[0; \pi]$. (Compare los resultados usando $n = 12, 20, 40$) La solución exacta es $y(x) = 1.5e^{-x} + 0.5 \sin x - 0.5 \cos x$
7. $y' = y \tan x + x$, $y(0) = 3$, en $[0; \pi/4]$. La solución exacta es $y(x) = x \tan x + 2 \sec x + 1$.
8. $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$, $y(1) = 2$, en $[1; 2]$. La solución exacta es $y(x) = x(x + 3)$.
9. $y' = -y \tan x + \sec x$, $y(0) = 2$, en $[0; \pi/4]$. La solución exacta es $y(x) = \sin x + 2 \cos x$.
10. $y' = y \cos x$, $y(0) = 1$, en $[0; 1]$. La solución exacta es $y(x) = e^{\sin x}$
11. $y' = (y + x)^2$, $y(0) = -1$, en $[0; \pi/2]$. La solución exacta es $y(x) = -x + \tan(x - \pi/4)$.
12. $y' = \frac{3x}{y} - xy$, $y(0) = 2$, en $[0; 2]$. La solución exacta es $y(x) = \sqrt{3 + e^{-x^2}}$.
13. $y' = xy^{-1} - xy$, $y(0) = 2$, en $[0; 2]$. La solución exacta es $y(x) = \sqrt{1 + 3e^{-x^2}}$.
14. Resolver $y' = xy + y^2 + x^2$, $y(0) = 1$, en $[0; 0.5]$
15. Resolver $y' = \frac{-1}{x}y - y^2 + \frac{1}{x^2}$, $y(1) = \frac{1}{3}$, en $[0.1; 1]$.
16. Resolver $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 + \frac{-2}{x}$, $y(2) = -3$, en $[2; 3]$
17. Resolver $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 + \frac{-2}{x}$, $y(0.1) = 1$, en $[0.1; 1]$

Índice alfabético

- algoritmo
 - de Newton para
 - ecuaciones no lineales , 46
 - de Newton para sistemas no lineales, 92
- análisis de error, 15
- aproximación
 - de Padé, 121
 - por redondeo, 12
 - por truncamiento, 12
- cercha
 - cúbica con curvatura en los extremos, 143
 - cúbica con terminación parabólica, 140
 - cúbica extrapolada, 137
 - cúbica natural, 134
 - cúbica sujeta, 130
- ceros de una función, 26
- convergencia
 - q-cuadrática, 27
 - q-cúbica, 27
 - q-lineal, 26
 - q-orden al menos p, 27
 - q-superlineal, 27
 - r-orden al menos p, 27
 - uniforme, 148
- cuadratura adaptativa, 204
- diferencia centrada
 - de orden $O(h^2)$, 159
 - de orden $O(h^4)$, 161
- diferencias divididas, 112
- ecuaciones diferenciales de orden superior, 260
- elemento pivote, 78
- elementos diagonales, 70
- eliminación gaussiana, 80
- epsilon de la máquina, 15
- error
 - absoluto, 12
 - de discretización global, 236
 - de discretización local, 236
 - relativo, 12
- extrapolación de Richardson, 171, 202
- factorización
 - LU, 83
- fila pivote, 78
- función Lipschitz, 229
- función periódica, 148
- fórmula
 - de los cinco puntos , 169
 - de los tres puntos , 165
- fórmulas
 - abiertas de Newton - Cotes, 182
 - cerradas de Newton-Cotes, 182
- grado de exactitud, 182
- integración
 - adaptativa, 204

- Gauss-Legendre, 208
- interpolación
 - cúbica, 127
 - lineal a trozos, 126
 - lineal de Lagrange, 103
 - polinomial a trozos o spline, 125
- iteración de punto fijo, 31
- matriz
 - ampliada del sistema, 75
 - bien condicionada, 73
 - cuadrada, 68
 - de ancho r , 70
 - de coeficientes, 75
 - definida positiva, 71
 - estrictamente diagonal dominante, 70
 - Hessemberg Inferior, 70
 - Hessemberg Superior, 70
 - identica, 68
 - invertible, 70
 - jacobiana, 70
 - nula, 68
 - número condición de una, 73
 - simétrica, 71
 - transpuesta, 71
 - triangular inferior, 69
 - triangular superior, 69
 - tridiagonal, 70
- multiplicadores, 78
- método
 - Δ^2 de Aitken, 59
 - de bisección, 38
 - de integración de Romberg, 199
 - de Adams-Bashforth de cuatro pasos, 247
 - de Adams-Bashforth de dos pasos, 245
 - de Adams-Bashforth de tres pasos, 246
 - de Adams-Moulton de dos pasos, 249
 - de Adams-Moulton de tres pasos, 250
 - de diferencias, 235
 - de Euler, 233
 - de Gauss-Saidel, 89
 - de Heun, 241
 - de Jacobi, 86
 - de la Secante, 55
 - de Milne-Simpson, 254
 - de Newton, 45, 91
 - de punto fijo, 27, 95
 - de Runge-Kuta de cuarto orden, 242
 - de Runge-Kuta de orden dos, 240
 - de Taylor, 236
 - de Taylor de Orden 2, 237
 - de Taylor de Orden 4, 237
 - modificado de Euler, 241
 - modificado de Newton, 52
 - predictor-corrector, 252
 - regula falsi, 43
- métodos
 - multipasos, 244
 - multipasos explícitos, 244
 - multipasos implícitos, 244
- norma
 - de una matriz, 72
 - vector, 11
- notación
 - científica normalizada, 9
 - $\text{fl}(x)$, 11
 - O de Landau, 16
- número
 - de máquina, 7
 - punto flotantes, 7

- operaciones elementales, 78
- pivoteo
 - parcial, 81
 - parcial escalado, 82
 - trivial, 81
- polinomio
 - de Hermite, 115
 - de Taylor, 101
 - interpolador de Lagrange, 106
 - interpolador de Newton, 110
 - osculante, 115
- punto fijo, 30
- punto flotante, 7
 - normalizado, 7
- regla
 - $\frac{3}{8}$ de Simpson, 182
 - compuesta de los $\frac{3}{8}$ de Simpson, 193
 - compuesta de Simpson, 191
 - compuesta del trapecio, 188
 - de Gauss-Legendre de dos nodos, 210
 - de Boole, 183
 - de Simpson, 180
 - del punto medio, 182
 - del trapecio, 178
- serie, 146
 - de Fourier, 152
- sistema
 - de ecuaciones lineales, 74
 - triangular superior de ecuaciones lineales, 75
 - de ecuaciones diferenciales, 257
 - de ecuaciones no lineales, 91
- sucesión
 - acotada inferiormente, 39
 - acotada superiormente, 39
 - convergente, 39
 - creciente, 38
 - decreciente, 38
 - divergente, 39
- Teorema
 - de Fermat, 28
 - de Rolle, 29
 - de Weierstrass, 39
 - del punto fijo, 32
 - del valor intermedio, 30
 - del valor medio, 29
 - generalizado del valor medio, 49
 - sustitución progresiva, 76
 - sustitución regresiva, 76
- transformaciones elementales, 78

Bibliografía

- [1] **Richard L. Burden., J.Douglas Faires.** *Análisis Numérico.* Thomson Learning
- [2] **Jhon H. Mathews., Kurtis D. Fink.** *Métodos Numéricos con MATLAB 3.^a Edición.* Prentice Hall
- [3] **Jorge Nocedal., Stephen J. Wright,** *Numerical Optimization.* Springer
- [4] **Ignacio Mantilla,** *Análisis Numérico.* Universidad Nacional de Colombia.
- [5] **Steven C. Chapra., Raymond P. Canale,** *Métodos Numéricos para Ingenieros.* Editorial McGraw-Hill .
- [6] **D. Kincaid., W. Cheney** *Análisis Numérico.* Editorial Addison Wesley Iberoamericana.
- [7] **Shoichiro Nakamura,** *Análisis Numérico y Visualización Grafica.* Editorial Prentice Hall.
- [8] **Shoichiro Nakamura,** *Métodos Numéricos Aplicados con Software.* Editorial Prentice Hall.
- [9] **Philips Clarke Jr.,** *Calculus and Analytic Geometry.* D.C. Heath and Company.
- [10] **Laurene V. Faussett.,** *Applied Numerical Analysis using MATLAB.* Editorial Prentice Hall.
- [11] *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation.* Cambridge Texts in Applied Mathematics.
- [12] **J.D.Hoffman.,** *Numerical Methods for enginers and scientists.* Editorial McGraw-Hill.

- [13] **Yu Takeuchi.**, *Sucesiones y Series*. Universidad Nacional de Colombia.
- [14] **E. Kreyszig.**, *Matemáticas Avanzadas para Ingenieros*. Editorial Limusa, Mexico.