Material didáctico del curso: **Métodos Numéricos**

Competencia general: Aplicar el análisis numérico, mediante la determinación y utilización de los métodos y las técnicas adecuadas con el apoyo de recursos tecnológicos, para la solución de problemas cotidianos, de ciencias e ingeniería, con disposición para el trabajo colaborativo, actitud crítica y responsable.

Contenido	**Página**
1. Conceptos básicos	3
1.1 Uso de los métodos numéricos	3
1.2 Errores numéricos y propagación	4
1.3 Exactitud y precisión	7
1.4 Modelos matemáticos	7
Actividades extraclase para el estudiante correspondientes a la unidad 1	10
Autoevaluación 1 de la unidad 1	13
2. Solución numérica de ecuaciones de una variable	14
2.1 Método gráfico	15
2.2 Método de bisecciones sucesivas	16
2.3 Método de interpolación lineal. (Regla falsa)	17
2.4 Método de Newton Raphson. Primer orden	19
2.5 Método de Newton Raphson. Segundo orden	22
2.6 Método de Von Mises	23
2.7 Método de Birge Vieta	
Actividades extraclase para el estudiante correspondientes a la unidad 2	26
Autoevaluación 1 de la unidad 2	29
3. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales	30
3.1 Método de matriz inversa	36
3.2 Método de Gauss Jordan	43
3.3 Método de aproximaciones sucesivas (Gauss seidel y Jacobi)	45
Actividades extraclase para el estudiante correspondiente a la unidad 3	51
Autoevaluación 1 de la unidad 3	55
4. Aproximación polinomial y funcional	56
4.1 Método de Interpolación	56
4.2 Métodos de Interpolación de Newton	56
4.3 Método de interpolación de Lagrange de Primer Orden	57
4.4 Métodos de Interpolación mediante Polinomios de grado “n”	58
4.5. Método de mínimos cuadrados	58
4.5.1 Regresión lineal	59
4.5.2 Linealización de regresiones	60
4.5.3 Regresión polinomial	63
Actividades extraclase para el estudiante correspondiente a la unidad 4	64
Autoevaluación 1 de la unidad 4	66
5. Integración numérica	67
5.1 Método analítico	67
5.2 Método de la Regla del Trapecio	68
5.3 Método Simpson 1/3 y 3/8	68
5.4 Método de diferenciación	

Actividades extraclase para el estudiante correspondiente a la unidad 5 73
Autoevaluación 1 de la unidad 5 77

6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales 78
6.1 Método de Euler y Euler mejorado 78
6.2 Método de Runge-Kutta 87
Actividades extraclase para el estudiante correspondiente a la unidad 6 87
Autoevaluación 1 de la unidad 6 88
Bibliografía 89

1. Conceptos básicos

El análisis numérico es el desarrollo y estudio de procedimientos para resolver problemas con ayuda de una computadora o calculadora. El término algoritmo se emplea para designar un procedimiento sistemático que resuelve un problema. Quien se dedica al análisis numérico suele interesarse en determinar cuál de varios algoritmos que resuelven el problema es el más eficiente, en cierto sentido. La eficiencia puede medirse mediante el número de pasos del algoritmo, el tiempo y la capacidad de memoria que requiere la computadora o calculadora, o mediante otras formas. Una ventaja fundamental del análisis numérico es que puede obtenerse una respuesta numérica, aun cuando el problema no tenga solución analítica. Por ejemplo, la siguiente integral, que proporciona la longitud de un arco de la curva de $y = sen(x)$, no tiene solución analítica.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + cos^2(x)}dx$$

El análisis numérico puede calcular la longitud de esta curva con métodos estándar que se aplican a cualquier integrando; para obtener el resultado nunca es necesario realizar sustituciones especiales ni efectuar integración por partes. Además, las únicas operaciones matemáticas necesarias son las básicas, suma, resta, multiplicación y división, más la realización de comparaciones. Debido a que estas simples operaciones son exactamente las funciones que realizan las calculadoras o computadoras, estas y el análisis numérico constituyen una combinación perfecta.

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas de tal forma que pueden resolverse usando operaciones aritméticas.

1.1 Uso de los métodos numéricos

Los métodos numéricos requieren operaciones aritméticas tan tediosas y repetitivas, que solo cuando se cuenta con calculadora o computadora que realice tantas operaciones por separado es práctico resolver problemas de esta forma.

La distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo de la estadística es la distribución normal. Su gráfica llamada curva normal, es la curva en forma de campana, la cual describe la distribución de muchos conjuntos de datos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

Con frecuencia la distribución normal se denomina distribución gaussiana en honor a Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien también dedujo su ecuación a partir de un estudio de errores cometidos en mediciones repetidas de la misma cantidad.

Una variable aleatoria continua x que tiene la distribución en forma de campana, lleva el nombre de variable aleatoria normal. La ecuación de la distribución de probabilidad de la variable normal, depende de los parámetros μ y σ, su media y de su desviación estándar. En consecuencia, se designan los valores de la función de densidad de x por $n(x;\ \mu, \sigma)$.

La función de densidad de la variable aleatoria normal x, con media μ y σ^2, es:

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty, \text{ donde } \pi = 3.14159\ldots \text{ y } e = 2.71828\ldots$$

En este sentido cuando se requiere resolver el problema del cálculo de probabilidad o área bajo la curva normal, la integral de la función densidad descrita no es viable descifrar de manera analítica, por ello se recurre a métodos como el Trapecial, Simpson $1/3$ entre otros, estos son métodos numéricos que implican operaciones matemáticas sencillas llevadas a cabo en modelos planteados para tal efecto. Es decir los métodos numéricos cobran fuerza cuando el método analítico se ve superado por la complejidad de la ecuación o modelos matemáticos generados.

1.2 Errores numéricos y propagación

Error numérico
Se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas, ejemplos de ellos son los errores por truncamiento y por redondeo.

Error por truncamiento
La expresión error por truncamiento se refiere a los errores provocados por el método en si (esta expresión se origina del hecho de que los métodos numéricos normalmente pueden compararse con una serie de Taylor truncada). Por ejemplo, e^x podría aproximarse mediante la cúbica:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Sin embargo, se sabe que para calcular e^x realmente se requiere de una serie infinita, como la que se muestra a continuación:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

Se observa que al aproximar e^x con la cúbica se obtiene una respuesta inexacta. El error se debe al truncamiento de la serie y no tiene nada que ver con la computadora o con la calculadora. Para métodos iterativos, este error puede reducirse mediante iteraciones repetidas.

Error por redondeo
Todos los dispositivos para realizar cálculos representan números, salvo los enteros, con alguna imprecisión, Algunas calculadoras y computadoras actualmente pueden efectuar cálculos con números fraccionarios e incluso irracionales logrando incrementar la precisión de los cálculos. Las computadoras digitales casi siempre operan con números de punto flotante de longitud de fija, los valores verdaderos no se expresan exactamente mediante tales representaciones. El error ocasionado por esta imperfección de las calculadoras y computadoras se denomina error por redondeo.

Error en los datos originales
Los problemas del mundo real, donde una situación física existente o propuesta es modelada por una ecuación matemática, casi siempre presentan coeficientes conocidos de manera imperfecta. La razón de esto es que los problemas a menudo dependen de mediciones cuya exactitud no es confiable. Además, el modelo en si puede no reflejar perfectamente el comportamiento de la situación.

Fallos
En la aplicación profesional del análisis numérico casi siempre se recurre a computadoras o calculadoras programables y simbólicas. Estas herramientas de cálculo también se utilizan ampliamente en el aprendizaje de los temas planteados. Las personas participan en la programación, operación, preparación de los datos de entrada e interpretación de los resultados obtenidos, en virtud de ello, precisamente se presentan errores graves con mayor frecuencia de lo que se reconoce. La solución está en el cuidado que tengan las personas que trabajan con métodos numéricos, aunque esto no garantiza la existencia de errores triviales.

Error propagado
El error propagado es más sutil que los demás errores. Por error propagado se entiende una falla en los pasos sucesivos de un procedimiento debido a la ocurrencia de un error previo; este error existe además de los errores locales. De alguna manera es semejante a los errores en las condiciones iniciales.

Error numérico total
Se refiere a la suma de los errores de redondeo y de truncamiento

Error absoluto y error relativo
La exactitud de cualquier cálculo siempre es de gran importancia. Hay dos formas comunes para expresar el tamaño del error en un resultado calculado: el error absoluto y error relativo. El error absoluto se define como:

$$Error\ absoluto = |Valor\ verdadero - valor\ aproximado|$$

Un tamaño de error dado suele ser más grave cuando la magnitud del valor verdadero es pequeña.
El empleo del error relativo es más práctico y elimina la imprecisión por la pequeña magnitud del valor verdadero, es decir, el error relativo es más independiente de la escala de valor, lo cual es un atributo deseable. Cuando el valor verdadero es cero, el error relativo es indefinido.

El error relativo se define como:

$$Error\ relativo = \frac{Error\ absoluto}{|valor\ verdadero|}$$

y el error relativo porcentual puede escribirse como:

$$Error\ relativo = \frac{Error\ absoluto}{|valor\ verdadero|}(100)$$

Aplicaciones en donde se calcula el error absoluto y el error relativo porcentual
Calcular $\cos(23)$ grados utilizando la serie de Maclaurin, considere un error relativo menor que 0.02% y 6 cifras significativas.

Para tal efecto se sugiere realizar los siguientes pasos:

i) Determinar la fórmula recursiva para el caso de la función $f(x) = \cos(x)$

Definición de la serie de Taylor y Maclaurin
Si una función f tiene derivadas de todo orden en $x = c$, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f(c)}{0!}(x-c)^0 + \frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Se llama la serie de Taylor de $f(x)\ en\ c$. Si $c = 0$, tal serie se conoce como la serie de Maclaurin de f.

La cual puede escribirse:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = \frac{f(0)}{0!}(x)^0 + \frac{f'(0)}{1!}(x)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \cdots$$

Al calcular la función y las derivadas de $f(x) = \cos(x)$ en $x = 0$ tenemos la serie:

$$\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

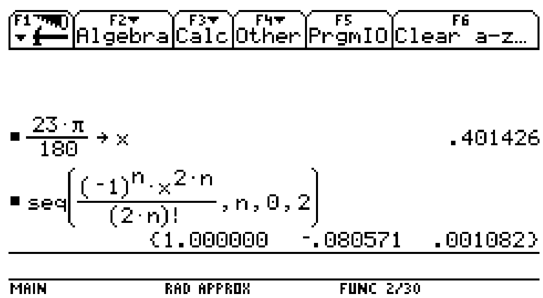
Por lo que la fórmula de recurrencia es:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

ii) Efectuar los cálculos con la fórmula recursiva

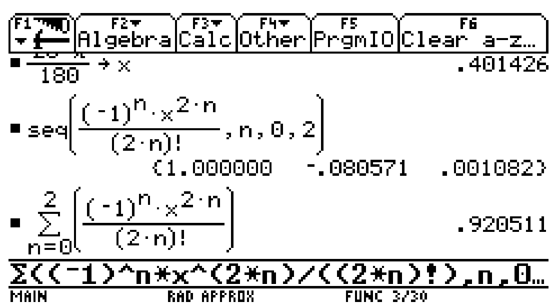
Aquí se muestra (ver Figura 1) una manera de utilizar la instrucción sucesión o secuencia de la calculadora TI-89, TI-92 o voyage 200 para obtener los términos de la serie, por espacio únicamente se exhiben los tres primeros. Se sugiere que previamente la calculadora se ajuste en el modo radián, aproximado y con despliegue fijo de 6 dígitos.

Figura 1. Uso de la instrucción sucesión o secuencia en la calculadora



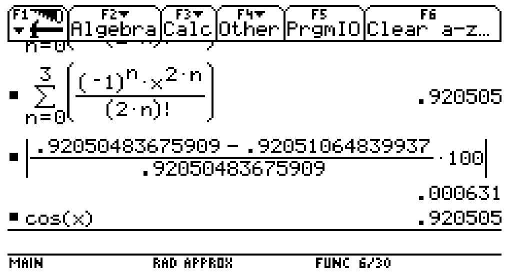
El cálculo con los primeros tres términos se observa en la Figura 2, en donde se utiliza el comando de suma, la sintaxis puede apreciarse en el renglón de edición.

Figura 2. Uso del comando de suma en la calculadora



En la Figura 3 puede observarse el cálculo del error relativo porcentual, con el modelo especificado en el apartado correspondiente al de error absoluto y relativo, note que se obtiene un error relativo inferior al requerido. Es apropiado observar y comparar el resultado obtenido usando la tecla *cos* de la calculadora, no olvidando que el modo de esta debe ser el radián.

Figura 3. Cálculo del error relativo porcentual en la calculadora



En este sentido es viable concluir que el cos(23) es igual a 0.920505 con 6 cifras significativas y un error relativo de 0.000631%.

1.3 Exactitud y Precisión

Los errores en cálculos y medidas se pueden caracterizar con respecto a su exactitud y su precisión. La exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. La precisión se refiere a que tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos. La inexactitud también se conoce como sesgo y se define como una desviación sistemática del valor verdadero. La imprecisión también llamada incertidumbre se refiere a la magnitud en la dispersión de los cálculos o medidas. Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgo para satisfacer los requisitos de un problema particular de ingeniería.

1.4 Modelos matemáticos

Un modelo matemático es una descripción matemática (con frecuencia mediante una función o una ecuación de un fenómeno del mundo real, como por ejemplo el tamaño de una población, la demanda por un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto o reacción química, la expectativa de vida de una persona cuando nace o el costo de la reducción de emisiones. El propósito de este modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones con respecto al comportamiento futuro. Una vez que se especifica un problema del mundo real, la primer tarea consiste en formular un modelo matemático identificado y designando un nombre a las variables independientes y dependientes así como hacer supuestos que simplifiquen lo suficiente el fenómeno como para hacer que sea susceptible de rastrearse en forma matemática

Un modelo matemático nunca es una representación totalmente precisa de una situación física, es una idealización. Un modelo simplifica la realidad lo suficiente como para permitir cálculos matemáticos pero es lo suficientemente preciso para promover conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de los límites del modelo. Existen muchos tipos diferentes de funciones que pueden usarse para modelar relaciones que se observen en el mundo real

En el proceso de resolución de problemas de la vida real se utiliza habitualmente modelos matemáticos, una gráfica o una expresión algebraica son ejemplos típicos de modelos matemáticos. Al desarrollar un modelo matemático como representación de datos reales, se busca con frecuencia que sea sencillo pero preciso, es decir un modelo simple con resultados significativos.

El proceso para determinar una ecuación como modelo matemático puede resumirse en los siguientes dos pasos:

- Leer con cuidado el problema, hacer un dibujo o esquema, verbalizar el problema y utilizar un caso particular (antes de generalizar) son buenas estrategias para lograr la comprensión del problema.

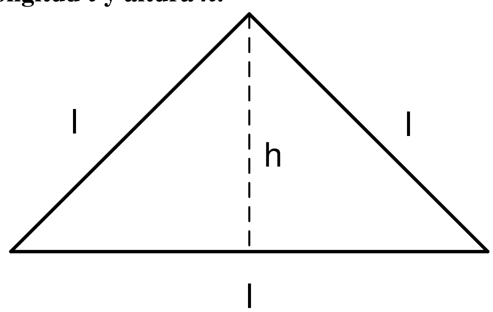
- Determinar las cantidades conocidas y desconocidas, definir una o más variables para las cantidades desconocidas. Generar una o más expresiones que puedan relacionarse junto con sus variables para obtener una expresión algebraica en términos de una variable.

Considerar el siguiente problema matemático en el cual se requiere el establecimiento de un modelo matemático.

El área de un triángulo equilátero disminuye con cierta velocidad $\frac{dA}{dt}$. Determine el modelo matemático referido a la variación de la longitud de sus lados cuando el área tiene un valor A.
Sugerencia: previamente establezca el modelo correspondiente a la longitud de los lados del triángulo en función del área, es decir $l(A)$.

Sea l la medida del lado del triángulo equilátero, h es la altura del triángulo equilátero, ver figura no. 4

Figura 4. Triángulo equilátero con longitud l y altura h.



El área del triángulo en términos de l es: $A(l) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. De lo anterior puede determinarse la longitud l de los lados en términos del área A del triángulo $l(A) = \frac{2\sqrt{A}}{3^{1/4}}$. Finalmente el modelo matemático de la variación de la longitud de los lados del triángulo equilátero cuando el área es A y esta disminuye a una velocidad $\frac{dA}{dt}$ es: $\frac{dl}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{3^{1/4}\sqrt{A}}$

Resolución de problemas matemáticos
El proceso generalizado de solución de problemas matemáticos se lo debemos a George Pólya, quien enfatiza más en el proceso de descubrimiento que en el proceso de desarrollo de ejercicios rutinarios

1. Entender el problema
Es la primera etapa del proceso de resolución de problemas matemáticos y ello implica tener las respuestas a los siguientes cuestionamientos, ¿Entiendes todo lo que dice?, ¿Puedes replantear el problema con tus propias palabras?, ¿Distingues cuáles son los datos?, ¿Sabes a que quieres llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña?

2. Configurar un plan
La segunda etapa del proceso de resolución sugiere la utilización de alguna de las estrategias siguientes: Conjeturar y probar la conjetura, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema parecido, hacer una figura o diagrama, usar un razonamiento directo o indirecto, usar y respetar las propiedades de los números, trabajar hacia atrás, usar casos, resolver una ecuación, buscar una fórmula, usar un modelo.

3. Ejecutar el plan
Implementar la(s) estrategia(s) seleccionada(s), a veces la implementación sugiere o promueve modificar el plan, no temer volver a empezar con una nueva estrategia.

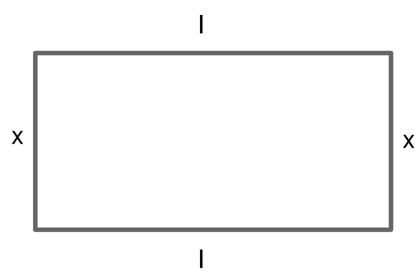
4. Probar el resultado
Revisar si la solución satisface lo requerido en el problema, advertir una solución más sencilla, extender la solución a lo general.

Algunas sugerencias para resolver de manera exitosa los problemas matemáticos tienen que ver con la aceptación del reto, la posibilidad de replantear el problema con palabras y/o lenguaje propio, pensar, explorar y reflexionar son también características que favorecen el proceso de resolución de los problemas.

Ejemplo del proceso de resolución de un problema matemático
Un rectángulo tiene un largo de 3 centímetros menos que cuatro veces su ancho, y su perímetro es de 19 centímetros, ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sea x la medida del ancho del rectángulo, ver Figura 5. Luego la longitud del rectángulo estará dado por: $l = 4x - 3$. El perímetro P es: $P = 2x + 2l$. Como $l = 4x - 3$ y $P = 19$ queda que: $2x + 8x - 6 = 19$. Por lo tanto $x = 2.5$ cm. y $l = 7$ cm.

Figura 5. Rectángulo de ancho x y longitud l



Comprobación: Si el ancho x es 2.5 y la longitud l del rectángulo es 7, entonces: $2(2.5) + 2(7) = 19$. Se concluye que el ancho es 2.5 cm. y el largo del rectángulo es 7 cm.

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (antecedentes de los métodos numéricos)

1. ¿Qué son los métodos numéricos?
2. ¿Cuáles son las razones por las que se debe estudiar métodos numéricos?
3. ¿A qué se refieren los problemas de raíces de ecuaciones?
4. ¿A qué se refieren los problemas que incluyen sistemas de ecuaciones algebraicas lineales?
5. ¿Cuáles son las categorías generales del ajuste de curvas
6. Mencione algunos ejemplos de la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
7. ¿Cómo se define un modelo matemático?
8. ¿Qué es un programa computacional?
9. ¿Qué es un diagrama de flujo?
10. ¿Qué es Excel?
11. ¿Cuáles son los recursos numéricos con los que cuenta Excel?
12. ¿A qué se deben los errores de redondeo?
13. ¿Qué representan los errores de truncamiento?
14. Describa el concepto de dígitos significativos.
15. ¿A qué se refiere la exactitud?
16. ¿A qué se refiere la precisión?
17. ¿Cómo surgen los errores numéricos?
18. ¿Qué es el error numérico total?
19. Describa los errores por equivocación
20. ¿A qué se refiere la incertidumbre en los datos?
21. ¿Cómo se calcula el error relativo porcentual?

Apartado B (Series y cálculo de errores)

22. ¿Cuál es la serie infinita de la función $f(x) = e^x$

23. ¿Cuál es la serie infinita de la función $f(x) = \cos(x)$

24. ¿Cuál es la serie infinita de la función $f(x) = sen(x)$

25. Determinar la fórmula recursiva para e^x, utiliza para tal efecto la serie de Maclaurin y calcula su valor para x = 2, considere un error relativo menor que 0.02% y 6 cifras significativas.

26. Calcular cos de 78 grados utilizando la serie de Maclaurin, considere un error relativo menor que 0.02% y 6 cifras significativas.

27. Calcular sen de 50 grados utilizando la serie de Maclaurin, considere un error relativo menor que 0.02% y 6 cifras significativas.

28. Determinar la fórmula recursiva para la siguiente serie: $S = \frac{1}{1}x^0 - \frac{3}{1}x^2 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{7}{6}x^6 + \frac{9}{24}x^8 - \cdots$ y encuentre el valor de la suma para $x = 0.5$ con un error relativo menor que 0.02 % utilizando 6 cifras significativas.

29. Determinar la fórmula recursiva para la siguiente serie de datos: $S = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{9}{7} + \frac{16}{9} + \frac{25}{11} + \frac{36}{13} \ldots$

30. Calcular $sen(30)$ con un error relativo menor de 0.05 % y 6 cifras significativas, (utilizar la serie de Maclaurin)

31. Determinar la fórmula recursiva para la siguiente serie: $S=\frac{1x^0}{1}-\frac{3x^2}{1}+\frac{5x^4}{2}-\frac{7x^6}{6}+\frac{9x^8}{24}-...$ y calcular el valor de la suma para $x=0.5$ con un error relativo menor que 0.002 % utilizando 6 cifras significativas.

32. Determinar la fórmula recursiva para la siguiente serie: $S=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+...$ y calcular el valor de la suma con un error relativo menor que 0.002 % utilizando 6 cifras significativas.

Apartado C (Modelos y resolución de problemas)

33. Se va a construir una caja con base cuadrada y abierta en la parte superior con volumen V. Si las dimensiones son x para los lados de la base y h para la altura de la caja, determinar el modelo matemático de: a) El volumen V de la caja con respecto a sus dimensiones x y h, es decir, $V(x,h)$. b) El área de material requerido para su respectiva construcción, es decir, $A(x,h)$

34. En una cisterna cónica fluye agua con cierto gasto $\frac{dv}{dt}$, si la altura de la cisterna es h y el radio de su base circular es r. Determinar el modelo matemático correspondiente a la variación del nivel del agua con respecto al tiempo para un tirante z de agua.

35. Una mujer de pie en un acantilado, observa un bote de motor con un telescopio, cuando el bote se aproxima a la playa que está directamente abajo de ella. Si el telescopio está a una altura h sobre el nivel del mar y si el bote se acerca con cierta velocidad $\frac{dx}{dt}$, determinar el modelo matemático de la variación del ángulo del telescopio con respecto al tiempo cuando el bote se encuentra a una distancia x de la playa.

36. Un tanque de aceite en forma de cilindro circular de radio r se está llenando a razón constante $\frac{dv}{dt}$. Determinar el modelo matemático concerniente a la variación del nivel del agua, es decir, $\frac{dh}{dt}$.

37. Un cable de k centímetros de longitud es cortado en dos piezas; una pieza se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Suponga que el corte se hace a una distancia x de la punta del cable y que la suma de área total equivale al área del triángulo más el área del cuadrado. Determinar la variación del área total con respecto a x .

38. Una persona recoge en un recipiente el agua que fluye a través de una manguera y contabiliza el tiempo t que transcurre mientras el recipiente se llena. En la siguiente tabla se especifican los valores medidos. Establecer un modelo para calcular el volumen de agua para un cierto tiempo t. ¿Cuál es el volumen de agua después de 120 segundos?.

Volumen de agua (litros)	15	30	60	90
Tiempo (segundos)	5	10	20	30

39. Para una cuerda que vibra, el número de vibraciones depende de la tensión a la que se someta. La tabla siguiente muestra un conjunto de mediciones tomadas:

Tensión (kg)	6	12	18	24	30
Número de vibraciones	432	611	748	864	966

Observe que el número de vibraciones es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Encontrar un modelo matemático que exprese el número de vibraciones como una función de la tensión. ¿Cuál es el número de vibraciones de la cuerda si esta se tensa con 42 kilogramos?, ¿Qué tensión se requiere para que la cuerda vibre 800 veces?

40. Un depósito abierto con fondo cuadrado, lados rectangulares y una altura de 3 metros es construido con un costo de $63 de material. Si el material para el fondo cuesta $5.40 por metro cuadrado y el material de los lados tiene un costo de $2.40 por metro cuadrado. ¿Cuál deberá ser el volumen del depósito?

Autoevaluación 1 de la unidad 1

Contestar los siguientes cuestionamientos

1. Definir Métodos Numéricos

2. Escribir dos razones por las cuales conviene utilizar Métodos Numéricos

3. Definir Modelo Matemático, ¿Cuáles son los tipos de Modelo Matemático que existen?, mencione un ejemplo de cada uno de ellos.

4. Describir cada uno de los tipos de errores numéricos.

5. ¿Cómo se calcula el error absoluto y error relativo porcentual

6. Para un gas a presión constante, su volumen es directamente proporcional a la temperatura absoluta, y a una temperatura de 180 grados Celsius el gas ocupa 100 metros cúbicos. Expresar el número de metros cúbicos del volumen del gas como una función del número de grados en la temperatura absoluta. Determinar el volumen del gas a una temperatura de 150 grados Celsius.

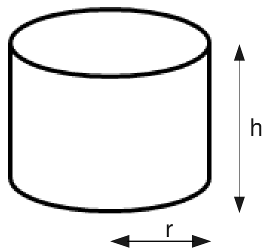
7. Calcular el valor de la suma dada por $\boldsymbol{S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots +}$, utilice tantos términos como sea necesario hasta obtener un error relativo igual a 0.0977517107 %, considere el cálculo con 10 dígitos después del punto decimal.

2. Solución numérica de ecuaciones de una variable

Esta unidad se inicia con el planteamiento de un problema de fabricación de un depósito cilíndrico, el cual se toma como base para desarrollar los algoritmos que coadyuvan a la resolución del mismo, no obstante, se pretende ir definiendo el concepto de raíz desde sus distintas representaciones, por considerar importante la identificación, tratamiento y articulación entre estas, el problema al que se hace alusión se plantea de la siguiente manera.

Se desea construir un recipiente cilíndrico (ver Figura 6) de metal, con ambas tapas, que tenga de capacidad de 1 metro cúbico. Encuentre las dimensiones –radio r y altura h- que debe tener sabiendo que la superficie total del mismo es de 6 metros cuadrados.

Figura 6. Recipiente cilíndrico de radio r y altura h



El volumen del depósito está dado por $V(r,h) = \pi\, r^2 h$, donde r es el radio y h la altura del depósito, como la capacidad propuesta es de 1 m^3, podemos escribir entonces que $\pi\, r^2 h = 1$, a la cual denominaremos como ecuación A, ahora en relación a la superficie del depósito decimos que: $S(r,h) = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$, dado que la superficie con la que se cuenta es de 6 m^2, podemos escribir entonces la ecuación B, de la siguiente forma: $2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h = 6$
Para obtener una ecuación con una sola incógnita, despejamos h de la ecuación A, y la sustituimos en la ecuación B, quedando de la forma siguiente: $2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\left(\frac{1}{\pi\, r^2}\right) = 6$, simplificando queda: $\pi\, r^3 - 3r + 1 = 0$.

Entre estos artificios algebraicos no debemos perder de vista que respecto de la ecuación obtenida, su solución concibe la determinación del valor o de los valores de radio que cumplen con los parámetros de volumen y superficie establecidos. Finalmente es lo que se busca como parte de la resolución del problema, además de establecer el valor o valores de la altura h. En términos un tanto estrictos matemáticamente hablando, la solución de la ecuación significa determinar el número de r o números de r que satisfacen la igualdad.

Es común que a partir de ciertos problemas de ingeniería se planteen para su resolución ecuaciones polinomiales (como es el caso que se ilustra) o incluso trascendentes, es decir que incluyen términos exponenciales, logaritmos o trigonométricos.

Se Define la función $f(r) = \pi\, r^3 - 3r + 1$ de manera que a partir de una tabulación se tenga la oportunidad de ubicar los intervalos dentro de los cuales se espera encontrar la solución. La tabulación resultante puede anotarse de la siguiente manera.

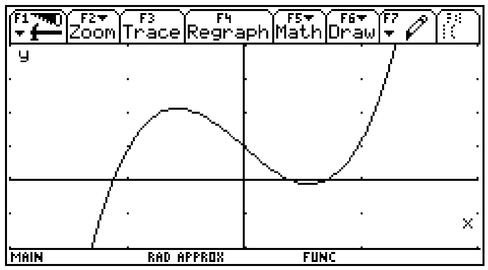
r	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00
$f(r)$	1.00	-0.11	1.14	7.10	20.13

Debe observarse el cambio de signo que hay en los valores de las ordenadas correspondientes a las abscisas $r_1 = 0$ y $r_2 = 0.50$, este cambio es muy importante, significa que en este intervalo hay al menos una solución de la ecuación, es decir, existe al menos un número r que satisface la igualdad. De igual forma se presenta el cambio de signo para las abscisas $r_2 = 0.50$ y $r_3 = 1.00$

Una forma de asegurar que dentro del citado intervalo existe al menos una raíz, es mediante la realización del producto $f(r_1)f(r_2)$, este debe ser menor que cero.

Este intervalo puede ser retomado para efecto de hacer los cálculos mediante métodos numéricos que utilizan intervalos para la determinación de raíces o ceros de la función, nos referimos a métodos como el de bisecciones sucesivas e interpolación lineal, antes de abordar dichos métodos, daremos un vistazo a la gráfica (ver Figura 7) de la función $f(r)$.

Figura 7. Gráfica de la función $f(r) = \pi r^3 - 3r + 1$



Ahora, se aprovecha el gráfico para definir en términos geométricos el concepto de raíz real, al valor de r en donde la gráfica de $f(r)$ corta el eje horizontal se le llama raíz o cero de la función, también puede llamársele solución de la ecuación.

2.1 Método gráfico

Raíz de una ecuación
Suponga que se desea resolver la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, entonces los valores de x que logran que se satisfaga la igualdad son la soluciones o raíces de la ecuación, en este caso, la utilización de la fórmula general proporciona de manera inmediata las raíces de la ecuación cuadrática. Sin embargo para resolver la ecuación $f(x) = e^{-x} - x = 0$ es menester aplicar los métodos numéricos, como se observará en los siguientes apartados.

Los métodos numéricos se dividen en dos grandes categorías: métodos cerrados y abiertos. Los primeros requieren dos valores iniciales que estén a ambos lados de la raíz para acotarla. Este acotamiento se mantiene en tanto se aproxima a la solución, así, dichas técnicas son siempre convergentes, sin embargo, en estos casos la velocidad de convergencia es lenta. Las técnicas abiertas difieren de los métodos cerrados inicialmente en que se usa la información de un solo punto, aunque llevan a una rápida solución se corre el riesgo de que la solución diverja. Una aproximación inicial a la raíz $f(x) = 0$ puede llevarse a cabo mediante el método gráfico, el consiste en encontrar visualmente en donde la gráfica corta el eje x (eje horizontal), el valor de x en donde la gráfica corta el eje es una aproximación inicial de la raíz.

2.2 Método de Bisecciones Sucesivas

Este método se basa en dividir a la mitad el intervalo en el cual aseguramos se encuentra al menos una solución de la ecuación. *El método divide sucesivamente a la mitad el intervalo y sustituye un punto extremo por el punto medio de modo que otra vez la raíz está comprendida en el nuevo intervalo. (Gerald-Wheatley 2000).*

El algoritmo para el método de bisecciones sucesivas puede describirse mediante la siguiente serie de pasos.

1. Elección del intervalo, es decir r_1 y r_2 , verificando que $f(r_1)f(r_2) < 0$

2. La aproximación se calcula mediante $r_a = \frac{r_1+r_2}{2}$

3. Efectúe las siguientes evaluaciones:

   a) Si $f(r_1)f(r_a) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el primer subintervalo, y se define $r_2 = r_a$

   b) Si $f(r_1)f(r_a) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el segundo subintervalo, y se define $r_1 = r_a$

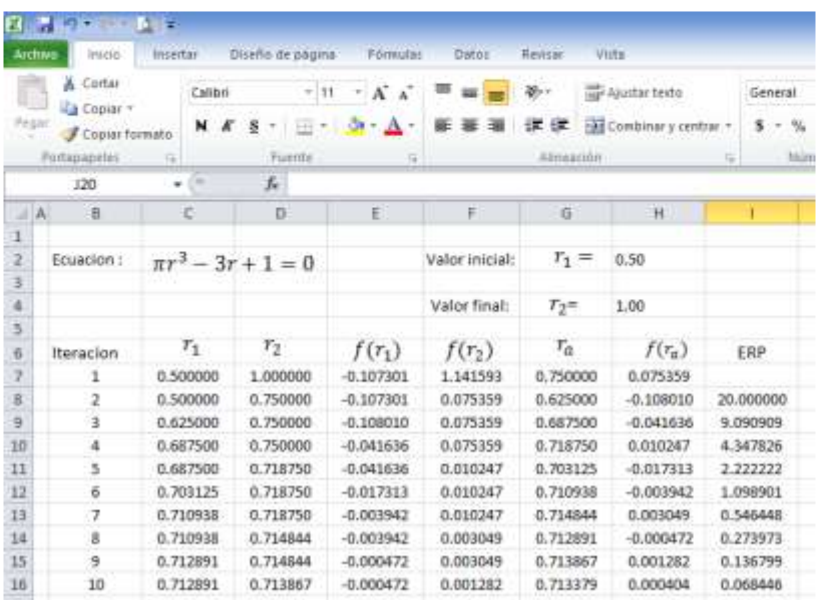
   c) Si $f(r_1)f(r_a) = 0$, entonces la solución de la ecuación es r_a

4. Se calcula una nueva aproximación

5. Revise si la aproximación estimada cumple con la tolerancia previamente fijada. De no ser así, regrese al paso número 3.

Para efecto de realizar los cálculos, se propone que estos se hagan con los encabezados indicados como se muestra en el Cuadro 1. Como ejemplo de aplicación del algoritmo y el llenado de la tabla se retoma el problema del depósito cilíndrico, las consideraciones para el cálculo son: La ecuación $\pi r^3 - 3r + 1 = 0$, valor inicial $r_1 = 0.50$, valor final $r_2 = 1.00$, 6 dígitos después del punto y error relativo menor que 0.1%

Cuadro 1. Cálculos de las aproximaciones a la raíz mediante el método de bisecciones sucesivas y el error relativo porcentual.



Ecuacion : $\pi r^3 - 3r + 1 = 0$ Valor inicial: $r_1 =$ 0.50

Valor final: $r_2 =$ 1.00

Iteracion	r_1	r_2	$f(r_1)$	$f(r_2)$	r_a	$f(r_a)$	ERP
1	0.500000	1.000000	-0.107301	1.141593	0.750000	0.075359	
2	0.500000	0.750000	-0.107301	0.075359	0.625000	-0.108010	20.000000
3	0.625000	0.750000	-0.108010	0.075359	0.687500	-0.041636	9.090909
4	0.687500	0.750000	-0.041636	0.075359	0.718750	0.010247	4.347826
5	0.687500	0.718750	-0.041636	0.010247	0.703125	-0.017313	2.222222
6	0.703125	0.718750	-0.017313	0.010247	0.710938	-0.003942	1.098901
7	0.710938	0.718750	-0.003942	0.010247	0.714844	0.003049	0.546448
8	0.710938	0.714844	-0.003942	0.003049	0.712891	-0.000472	0.273973
9	0.712891	0.714844	-0.000472	0.003049	0.713867	0.001282	0.136799
10	0.712891	0.713867	-0.000472	0.001282	0.713379	0.000404	0.068446

De lo anterior se puede decir que una solución de la ecuación es $r_a = 0.713379$ con un error relativo porcentual de 0.06845%.

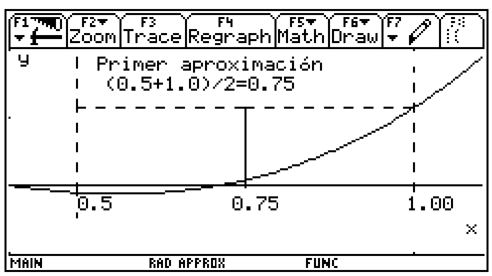
Una vez calculado el radio del depósito ($r_a = 0.713379$ metros) es posible estimar el valor de la altura h del mismo, mediante la evaluación $h(r) = \frac{1}{\pi r^2}$ tal que $r = 0.713379$ metros, resulta que $h = 0.625472$ metros.

Verifique que si el intervalo utilizado es $r_1 = 0$ y $r_1 = 0.50$ con 5 cifras y un error relativo porcentual menor a 0.1% obtenemos en la iteración 11 una aproximación a la raíz $r_a = 0.40063$. De igual forma se estima la altura h del depósito, $h = 1.98318$.

Puede notarse que el método de bisecciones no se caracteriza por lograr convergencia rápidamente, esto se debe a que la aproximación se realiza bisectando cada nuevo intervalo sin considerar la curvatura de la gráfica de la función ni la magnitud de las ordenadas.

A continuación presentamos gráficamente (ver Figura 8) lo que correspondería la primera iteración del cálculo desarrollado en la tabla anterior. Note que el producto de las ordenadas $f(r_1)f(r_a) < 0$, por lo que el punto extremo $r_2 = 1$ se sustituye por el punto medio calculado, es decir $r_2 = r_a$ resulta ser ahora el punto extremo, en esta caso 0.75

Figura 8. Gráfica y cálculo de la primera aproximación a la raíz de la ecuación $f(r)$ por el método de bisecciones sucesivas.



2.3 Método de Interpolación lineal (falsa posición o regla falsa)

Este método se basa en la determinación de la intersección con el eje horizontal de una línea recta que une dos puntos sobre la gráfica de la función.

En este método también se requiere del establecimiento de un intervalo dentro del cual se asegure que existe al menos una raíz, el algoritmo y las condiciones para sustituir un punto extremo por la aproximación calculada son exactamente las mismas que las del método de bisecciones sucesivas.

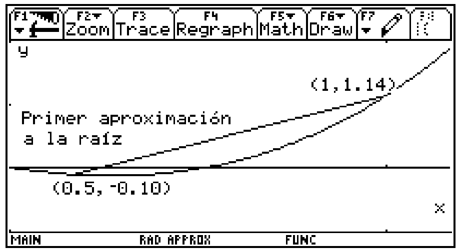
Trazando la recta entre los puntos (0.5, -0.10) y (1, 1.14) es posible observar la intersección de dicha recta con el eje horizontal, esta intersección es precisamente la primer aproximación, para hacer la estimación es suficiente resolver la ecuación lineal, $\frac{1.14-(-.10)}{1-0.5}(r_a - 0.5) + (-0.1) = 0$ de donde se obtiene que $r_a = 0.54$.

Determinar el modelo del método de interpolación no es muy difícil, considerando que se trata de la resolución de una ecuación lineal. En este caso el modelo puede expresarse como: $r_a = r_1 - \frac{f(r_1)}{m}$

Donde m es la pendiente de la recta, la cual a su vez puede estimarse mediante: $m = \frac{f(r_2)-f(r_1)}{r_2-r_1}$

Trazando la recta entre los puntos $(0.5, -0.1)$ y $(1, 1.14)$ es posible observar la intersección (ver Figura 9) de dicha recta con el eje horizontal, esta intersección es precisamente la primera aproximación, para hacer la estimación es suficiente resolver la ecuación lineal: $\frac{1.14-(-.10)}{1-0.5}(r_a - 0.5) + (-0.1) = 0$. De donde se obtiene que $r_a = 0.54$.

Figura 9. Gráfica ilustrativa de la primera iteración para aproximar la raíz de la ecuación $\pi r^3 - 3r + 1 = 0$ por el método de falsa posición.



Es posible apoyarse en el mismo formato tabular que se utilizó para el método de bisecciones sucesivas (ver Cuadro 2), el intervalo utilizado es: $r_1 = 0.50$, $r_2 = 1.00$, 5 dígitos después del punto y un error relativo menor que 0.1%

Cuadro 2. Cálculos de la aproximación a la raíz mediante el método de regla falsa

Ecuacion :	$\pi r^3 - 3r + 1 = 0$			Valor inicial:	$r_1 =$	0.50	
				Valor final:	$r_2 =$	1.00	
Iteracion	r_1	r_2	$f(r_1)$	$f(r_2)$	r_a	$f(r_a)$	ERP
1	0.50000	1.00000	-0.10730	1.14159	0.54296	-0.12601	
2	0.54296	1.00000	-0.12601	1.14159	0.58839	-0.12522	7.72178
3	0.58839	1.00000	-0.12522	1.14159	0.62908	-0.10513	6.46753
4	0.62908	1.00000	-0.10513	1.14159	0.66036	-0.07641	4.73659
5	0.66036	1.00000	-0.07641	1.14159	0.68166	-0.04991	3.12572
6	0.68166	1.00000	-0.04991	1.14159	0.69500	-0.03036	1.91847
7	0.69500	1.00000	-0.03036	1.14159	0.70290	-0.01769	1.12424
8	0.70290	1.00000	-0.01769	1.14159	0.70743	-0.01004	0.64072
9	0.70743	1.00000	-0.01004	1.14159	0.70998	-0.00562	0.35931
10	0.70998	1.00000	-0.00562	1.14159	0.71140	-0.00312	0.19967
11	0.71140	1.00000	-0.00312	1.14159	0.71219	-0.00172	0.11039
12	0.71219	1.00000	-0.00172	1.14159	0.71262	-0.00095	0.06086

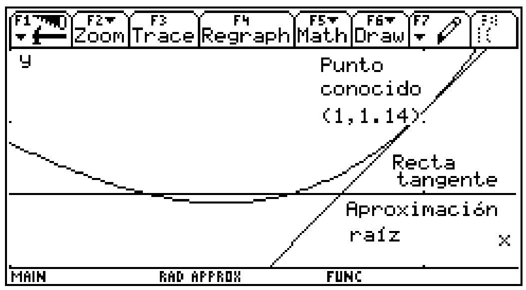
Aunque pudiera parecer que el método de interpolación lineal converge más lentamente que el método de bisecciones, en general no es así, la cantidad de iteraciones depende en cierta forma del intervalo seleccionado, y de lo cerca que este alguno de los puntos extremos de la raíz. Verifique que si el intervalo utilizado es $r_1 = 0$ y $r_2 = 0.50$ con 5 cifras y un error relativo porcentual menor a 0.1% se obtiene en la iteración 8 una aproximación a la raíz $r_a = 0.40082$. Corrobore que la altura h del depósito es $h = 1.98131$.

2.4 Método de Newton Raphson primer orden

El método de newton primer orden se considera como un método abierto y se basa en una aproximación lineal, a partir de un punto conocido sobre la gráfica la de función se traza una recta tangente, la intersección de esta recta con el eje horizontal es la primera aproximación a la raíz, se evalúa la función para la aproximación determinada, y el proceso se repite tantas veces como sea requerido, esto es en relación a la tolerancia y el número de cifras significativas utilizadas. La velocidad de convergencia de este método es mucho mayor que la de los métodos por intervalos.

Una representación geométrica del método de newton primer orden lo observamos en la figura 10, la gráfica de la función pertenece al problema de depósito cilíndrico.

Figura 10. Gráfica de la primera aproximación a la raíz de la ecuación $\pi r^3 - 3r + 1 = 0$

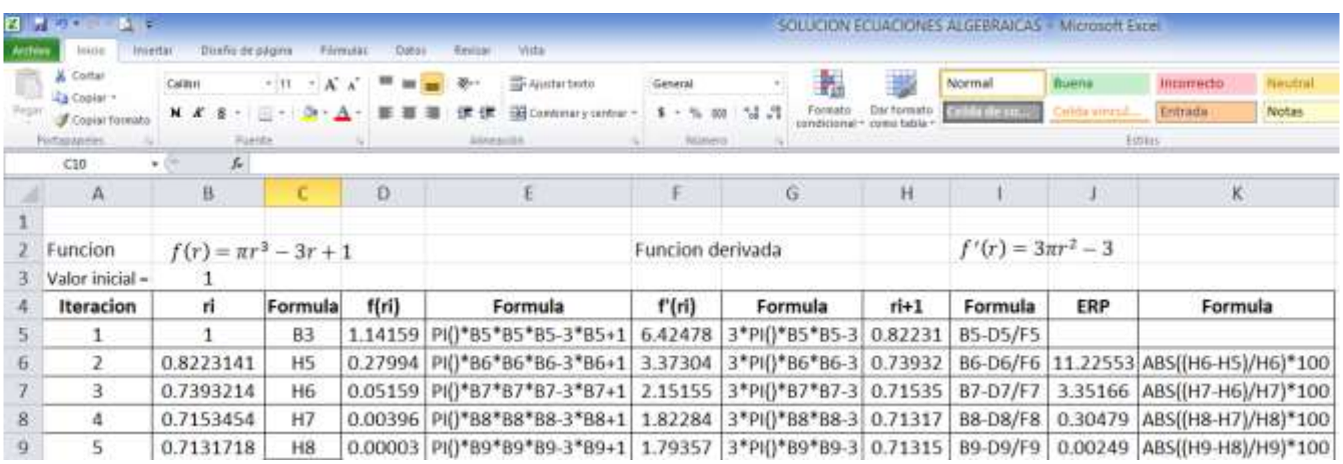


Una manera de establecer el modelo matemático correspondiente al método de Newton es mediante el siguiente criterio.

Tomando como base la ecuación punto pendiente y como variable independiente r de radio del depósito cilíndrico tenemos que: $f'(r_i)[r_{i+1} - r_i] + f(r_i) = 0$, despejando r_{i+1} obtenemos que: $r_{i+1} = r_i - \frac{f(r_i)}{f'(r_i)}$, donde r_i es la $i - ésima$ abscisa del punto conocido propuesto y r_{i+1} es $i - ésima$ mas uno aproximación a la raíz.

Nos apoyaremos en el siguiente formato tabular (ver Cuadro 3) para desarrollar y verificar los cálculos respectivos de la función del problema del depósito cilíndrico, consideraremos como valor inicial $r_i = 1$, para un error relativo menor que 0.01% utilizando 5 cifras después del punto.

Cuadro 3. Hoja electrónica con los cálculos respectivos de la función del problema del depósito cilíndrico mediante el Método de Newton Raphson primer orden.

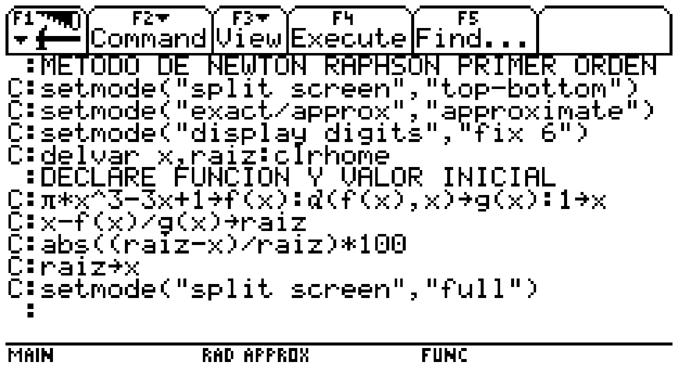


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Funcion	$f(r) = \pi r^3 - 3r + 1$				Funcion derivada			$f'(r) = 3\pi r^2 - 3$		
3	Valor inicial =	1									
4	**Iteracion**	**ri**	**Formula**	**f(ri)**	**Formula**	**f'(ri)**	**Formula**	**ri+1**	**Formula**	**ERP**	**Formula**
5	1	1	B3	1.14159	PI()*B5*B5*B5-3*B5+1	6.42478	3*PI()*B5*B5-3	0.82231	B5-D5/F5		
6	2	0.8223141	H5	0.27994	PI()*B6*B6*B6-3*B6+1	3.37304	3*PI()*B6*B6-3	0.73932	B6-D6/F6	11.22553	ABS((H6-H5)/H6)*100
7	3	0.7393214	H6	0.05159	PI()*B7*B7*B7-3*B7+1	2.15155	3*PI()*B7*B7-3	0.71535	B7-D7/F7	3.35166	ABS((H7-H6)/H7)*100
8	4	0.7153454	H7	0.00396	PI()*B8*B8*B8-3*B8+1	1.82284	3*PI()*B8*B8-3	0.71317	B8-D8/F8	0.30479	ABS((H8-H7)/H8)*100
9	5	0.7131718	H8	0.00003	PI()*B9*B9*B9-3*B9+1	1.79357	3*PI()*B9*B9-3	0.71315	B9-D9/F9	0.00249	ABS((H9-H8)/H9)*100

El uso de rutinas es muy adecuado en los métodos numéricos, a continuación se muestra la construcción y utilización de una rutina para el método de Newton primer orden.

Básicamente las primeras instrucciones son para ajustar el formato (ver figura 11), el resto forman parte del cálculo de la aproximación a la raíz y el error relativo porcentual.

Figura 11. Instrucciones para ajuste de formato en la calculadora



La instrucción setmode (“split screen”,top-bottom”) tiene la finalidad de dividir la pantalla de manera horizontal con proporciones iguales, quedando en la parte superior el editor de texto, de esta manera es viable continuar dentro del editor y ejecutar las instrucciones convenientes.

La instrucción setmode(“exact/approx”,”approximate”) y setmode(“display digits”,”fix 6”) ajustan la calculadora al modo aproximado y con un despliegue de 6 dígitos fijos.

El comando delvar sirve para limpiar los valores que alguna(s) variable(s) tengan en el momento de efectuar los cálculos. El siguiente renglón sirve para declarar la función $\boldsymbol{\pi\, x^3 - 3x + 1 \rightarrow f(x)}$, declarar el valor inicial y la determinación de la función derivada $\boldsymbol{g(x)}$.

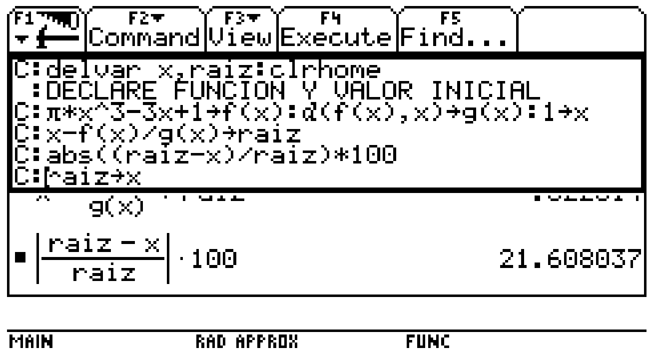
El resto de los renglones corresponden al cálculo de la aproximación a la solución, el error relativo porcentual, la reasignación del nuevo valor para ser utilizado en el modelo y finalmente una instrucción de formato para eliminar la división horizontal de la pantalla, esto es: setmode (“split screen”,”full”).

La ejecución de la rutina se lleva a cabo con la función F4, previamente se verifica que el renglón en cuestión cuente con el comando de ejecución, mismo que se activa con la función F2. El cálculo de la primera aproximación se exhibe en la Figura 12.

Figura 12. Cálculo de la primera aproximación

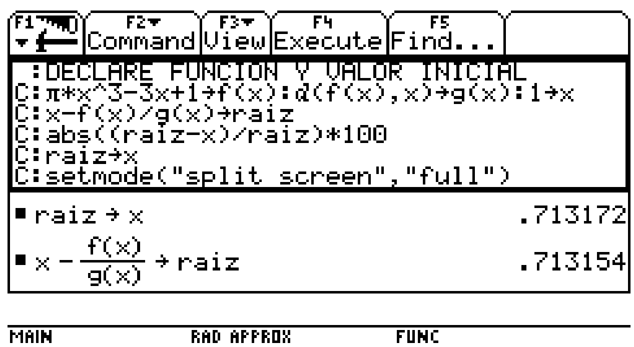
El error relativo porcentual se determina inmediatamente después (ver figura 13) que la aproximación a la raíz, contraste con el proporcionado en la tabla superior.

Figura 13. Cálculo del error relativo porcentual



Como se trata de un método iterativo, se ejecutan tantas veces como sea pertinente los renglones que corresponden al cálculo de la raíz y el error relativo porcentual.

Figura 14. Ejecución reiterada del método



En la quinta iteración se verifica que la aproximación a la raíz es 0.713154, como se observa en la figura superior.

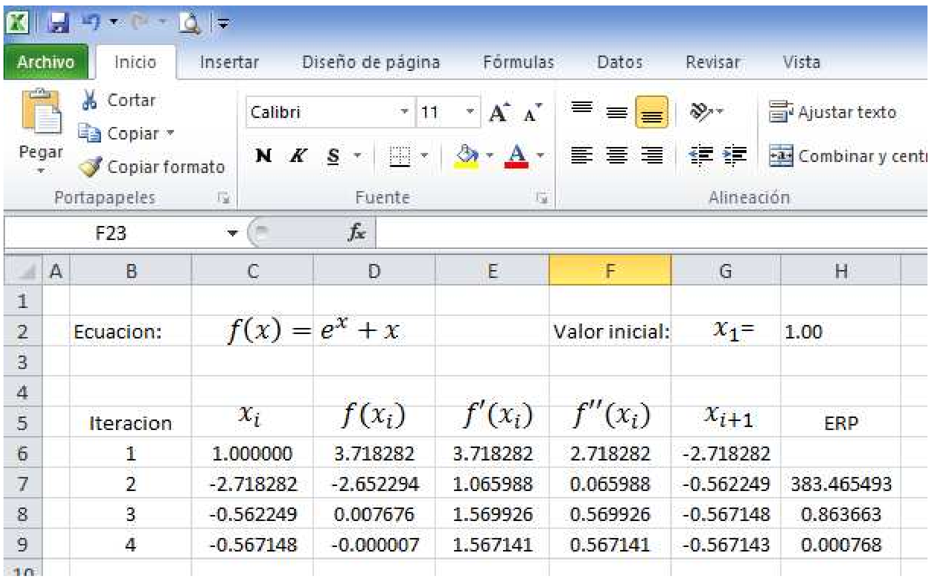
2.5 Método de Newton Raphson segundo orden

Este método se deriva precisamente del método de las tangentes (Newton Raphson primer orden), y el modelo es el siguiente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

Calcular una raíz real de la función $f(x) = e^x + x$, considere el valor inicial $x_i = 1$ con 6 cifras significativas para un error relativo menor que 0.05%. Ver Cuadro 4.

Cuadro 4. Hoja electrónica con los cálculos de la ecuación dada mediante el Método de Newton Raphson segundo orden

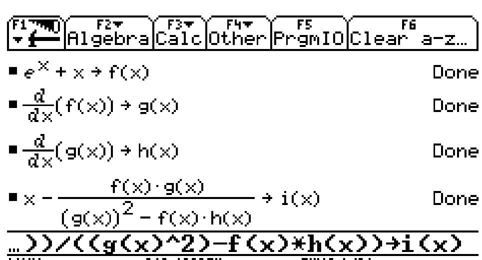


	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Ecuacion:	$f(x) = e^x + x$			Valor inicial:	$x_1=$	1.00
3								
4								
5		Iteracion	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}	ERP
6		1	1.000000	3.718282	3.718282	2.718282	-2.718282	
7		2	-2.718282	-2.652294	1.065988	0.065988	-0.562249	383.465493
8		3	-0.562249	0.007676	1.569926	0.569926	-0.567148	0.863663
9		4	-0.567148	-0.000007	1.567141	0.567141	-0.567143	0.000768

El cálculo puede automatizarse en la pantalla principal de la calculadora, a través de convertir en una función el modelo matemático del método de Newton segundo orden, se trata de una medida que agiliza los cálculos finales, a continuación se muestra la forma de generar la función compuesta en la calculadora.

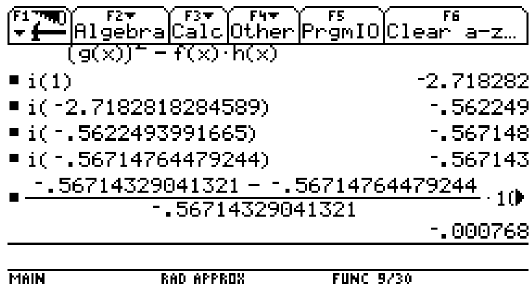
Inicialmente se declara la función objeto de tratamiento (ver Figura 18), en este caso la función $e^x + x$ se declara como $f(x)$, posteriormente la primera y segunda derivada se declaran como $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente, el modelo matemático del método de Newton segundo orden se declara convencionalmente con la función compuesta $i(x)$.

Figura 18. Declaración de funciones



Con un valor inicial $x = 1$ se evalúa la función compuesta (ver Figura 19), los primeros 4 resultados se exhiben en la figura no. 10, así como el cálculo del error relativo porcentual, se puede verificar la igualdad de los resultados mostrados en el Cuadro 6.

Figura 19. Evaluación de la función compuesta



2.6 Método de Von Mises

Este método se basa en el de aproximación de tangentes, es decir, en el método de newton, a diferencia que únicamente la primera aproximación se realiza mediante una recta tangente, el resto es a través de rectas paralelas, significa que el denominador de la razón del modelo de newton se convierte en una constante. Este método tiene como ventaja la facilidad de la manipulación del modelo, por ser todavía más sencillo que el propio modelo de newton, sin embargo el costo de esta economía es la disminución de la velocidad de convergencia, en algunos casos muy especiales no se logra la convergencia, por diversas razones, como por ejemplo, el valor inicial propuesto y el tipo de curvatura de la gráfica de la función, empero este obstáculo puede salvarse mediante la propuesta de otro valor inicial. Las siguientes tres figuras (15, 16 y 17) muestran geométrica la convergencia a una raíz de la función $f(x) = \frac{(x-9)(x-1)(x+8)}{50}$, En la primer figura se nota que la primer aproximación es mediante la intersección con el eje horizontal de una recta tangente, trazada en el punto propuesto (4, -3.60), la aproximación calculada es –0.61538, el resto de las rectas que aproximan la raíz son paralelas a la inicial.

Figura 15 Convergencia de la raíz

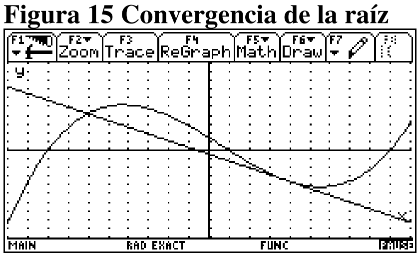


Figura 16 Convergencia de la raíz

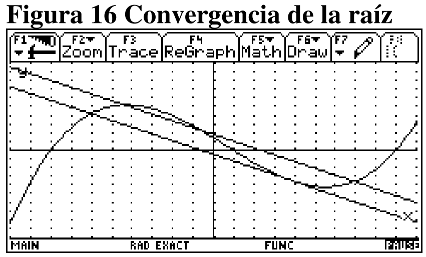
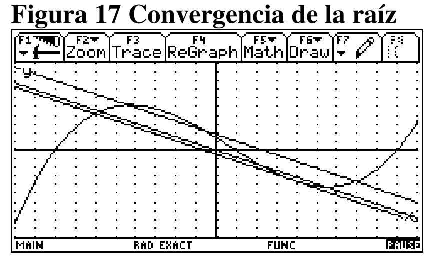


Figura 17 Convergencia de la raíz



Se utilizará el mismo formato tabular (ver Cuadro 5) para desarrollar los cálculos mediante el método de Von Mises en el caso de la función del problema del depósito cilíndrico, consideraremos como valor inicial $r_i = 1$, para un error relativo menor que 0.1% utilizando 5 cifras después del punto.

Cuadro 5. Hoja electrónica con los cálculos mediante el método de Von Mises

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Funcion	$f(r) = \pi r^3 - 3r + 1$			Funcion derivada	$f'(r) = 3\pi r^2 - 3$	
3	Valor inicial :	1					
4	**Iteracion**	**ri**	**f(ri)**	**f'(ri)**	**Formula**	**ri+1**	**ERP**
5	1	1	1.14159	6.42478	3*PI()*B5*B5-3	0.82231	
6	2	0.82231407	0.27994	6.42478	D5	0.77874	5.59512
7	3	0.7787425	0.14742	6.42478	D6	0.75580	3.03600
8	4	0.75579655	0.08894	6.42478	D7	0.74195	1.86574
9	5	0.74195359	0.05730	6.42478	D8	0.73304	1.21661
10	6	0.73303545	0.03834	6.42478	D9	0.72707	0.82067
11	7	0.72706862	0.02626	6.42478	D10	0.72298	0.56541
12	8	0.7229808	0.01827	6.42478	D11	0.72014	0.39498
13	9	0.72013638	0.01285	6.42478	D12	0.71814	0.27852
14	10	0.71813623	0.00910	6.42478	D13	0.71672	0.19767
15	11	0.71671953	0.00648	6.42478	D14	0.71571	0.14092
16	12	0.71571097	0.00463	6.42478	D15	0.71499	0.10078
17	13	0.7149904	0.00332	6.42478	D16	0.71447	0.07224

Puede verificarse que utilizando el método de rectas paralelas se encuentra otra raíz $r_{i+1} = 0.40051$ en la iteración 9, considerando valor inicial $r_i = 0$, con 5 cifras significativas y un error relativo = 0.05092%.

De igual manera para la raíz negativa encontramos que $r_{i+1} = -1.11385$ con un error relativo = 0.00494% a partir del valor inicial $r_i = -1.0$

Ejemplo ilustrativo de una aplicación de las ecuaciones algebraicas

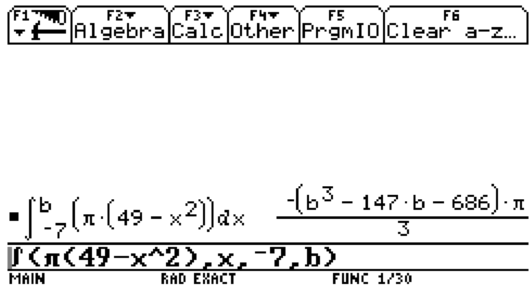
Un depósito esférico de agua (ver Figura 20), de 7 metros de radio, está al 70 % de su capacidad, ¿cuál es el tirante de agua?

Figura 20. Depósito de agua de radio r

El método de discos (visto en el curso de cálculo integral) es apropiado en este caso para determinar la cota en la cual se cumple el 70 % de la capacidad del tanque, esto es: $(0.7)\left(\frac{4}{3}\pi\, r^3\right) = \pi \int_{-7}^{b}(49 - x^2)dx$

En la Figura 21 se exhibe el cálculo de la integral en términos de la variable b, que representa la cota superior.

Figura 21. Cálculo de la integral en términos de la variable que representa la cota superior



Resta igualar el resultado de la integral al 70% de la capacidad y resolver en términos de la variable b. Finalmente la suma absoluta permite conocer la altura o tirante de agua. Utilizando alguno de los métodos numéricos estudiados (cerrados o abiertos) puede comprobar que $b = 1.914395$, por lo tanto se concluye que el tirante es $8.914395\ m$.

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (Métodos cerrados)

1. Aplicar el Método de bisecciones sucesivas para determinar todas las raíces reales de las funciones señaladas. Considerar 6 cifras significativas y un error relativo porcentual menor a 0.01.

a) $f(x) = e^{-x} - x$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 10x + 1$ d) $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 3$

2. Aplicar el Método de regla falsa para determinar todas las raíces reales de las funciones señaladas. Considerar 6 cifras significativas y un error relativo porcentual menor a 0.01.

a) $f(x) = e^{-x} - x$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 10x + 2$ d) $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 4$

Apartado B (Métodos abiertos)

3. Aplicar el Método de Newton Raphson primer orden para determinar todas las raíces reales de las funciones señaladas. Considerar 6 cifras significativas y un error relativo porcentual menor a 0.01.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ b) $f(x) = 2cos^2x + cosx - 1$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 10x + 1$ d) $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 3$

4. Aplicar el Método de Newton Raphson segundo orden para determinar todas las raíces reales de las funciones señaladas. Considerar 6 cifras significativas y un error relativo porcentual menor a 0.01.

a) $f(x) = e^{-x} - x$ b) $f(x) = x^3 - 4.83x^2 + 1.764$

5. Aplicar el Método de Von Mises para determinar todas las raíces reales de las funciones señaladas. Considerar 6 cifras significativas y un error relativo porcentual menor a 0.01.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

6. Para la siguiente tabulación determinar entre que par de coordenadas existe al menos una raíz.

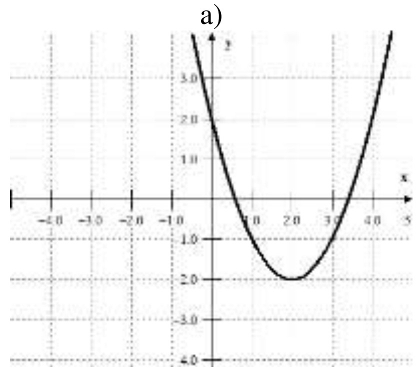
x	-3	-1	1	3	5
$f(x)$	7	-5	-9	-5	7

7. Decir cuál es el número máximo de raíces reales de la función $f(x) = x^4 - x^2 - 2$, después utilizar la calculadora o computadora para obtener el gráfico respectivo, contestar nuevamente la pregunta y argumentar su respuesta.

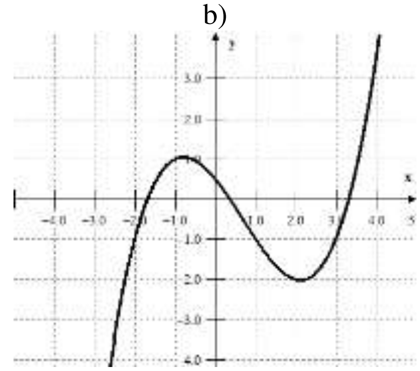
8. Utilizar el método de bisecciones sucesivas para estimar una raíz de la función $f(x) = x^3 - e^x + 1$, en el intervalo [4, 5], considerar 6 cifras significativas para un error relativo menor que 0.05%.

9. De manera visual, estimar el valor de las raíces en cada una de las gráficas de funciones que se presentan a continuación.

a)



b)



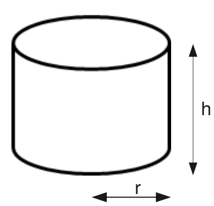
10. Proponer una función de quinto grado con solo 3 raíces reales, apoyar su respuesta utilizando la calculadora o computadora.

11. Utilizar el método de interpolación lineal (regla falsa) para estimar una raíz de la función $f(x) = x^3 - e^x + 1$, en el intervalo [-1, -0.5], considerar 6 cifras significativas para un error relativo menor que 0.05%.

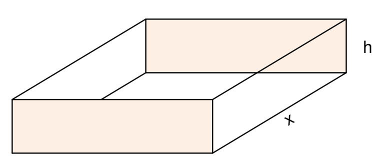
12. Utilizar el método de interpolación lineal (regla falsa) para resolver la ecuación $\frac{1}{x} + x^4 - e^x - 1 = 0$, considerar que dicha ecuación tiene 4 soluciones.

Apartado C (Aplicaciones)

13. Se desea construir un recipiente cilíndrico –ver figura anexa- de metal, con ambas tapas, que tenga de capacidad de 1.2 metro cúbico. Calcular las dimensiones –radio r y altura h- que debe tener sabiendo que se puede contar con 7 metros cuadrados de material.



14. Se desea construir una caja abierta con base cuadrada, como la que se muestra en la figura anexa, empleando 19 decímetros cuadrados de material sin considerar pérdidas por recortes. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea de 6.2 decímetros cúbicos?



15. Miguel arroja una pelota hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 160 pies de altura, con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. Sus compañeros registraron la posición de la pelota en distintos momentos y la anotaron en la siguiente tabla:

Tiempo (en seg)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Posición (en pies)	160	180	192	196	192	180	160

Determinar el tiempo que transcurre para que la pelota llegue al suelo.

16. Un granjero dispone de 200 metros de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares, ¿qué dimensiones debe elegir para que el área sea de 1580 metros cuadrados?

17. Una pieza larga y rectangular de lámina de 23 centímetros de ancho va a convertirse en canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. Después de hacer varios ensayos se obtuvo la información que se muestra en la siguiente tabla (en donde $\boldsymbol{x}$ es la medida de los lados doblados en centímetros y A el área generada en centímetros cuadrados):

x	6	6.5	8.5	7	5.75
$A(x)$	66	65	51	63	66.125

Determinar la medida del doblez de tal manera que el área sea de 41.625 centímetros cuadrados, considerando que por cuestiones de estabilidad la medida del doblez no deberá ser mayor que la medida de la base.

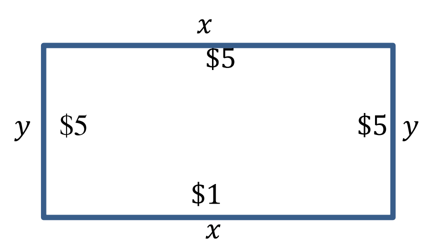
18. La información que se muestra en la tabulación siguiente corresponde al registro de la posición con respecto al tiempo de un objeto lanzado en forma vertical desde cierta altura. El tiempo está en segundos y la posición en pies.

t	1.5	2.2	3	4	5.5
$P(t)$	2108	2111	2096	2048	1916

Contestar las siguientes preguntas. a) ¿En qué momento el objeto está en el suelo y cuál es la velocidad de impacto?. b) ¿En qué momento el objeto alcanza una velocidad igual a cero?. c) ¿En qué instante el objeto alcanza una velocidad V = 30 pies por segundo?. d) ¿En qué momento el objeto alcanza la posición de 1000 pies?. e) ¿Cuál fue la posición inicial del objeto?

19. Un depósito esférico de agua, de 4 metros de radio, está al 80 % de su capacidad, ¿cuál es el tirante de agua?

20. Se debe construir un corral rectangular para animales. Para ahorrar material, se usará una pared como uno de los cuatro lados. El pie de cerca para los otros tres lados cuesta \$5 y debe gastar \$1 por cada pie de pintura para la parte de la pared que forma el cuarto lado del corral. Si puede gastar \$180, ¿cuáles son las dimensiones de manera que el área del corral sea de 129.60 m^2?



El corral para los animales.

21. Se usan 10 metros de cable para formar un triángulo rectángulo isósceles y un círculo. ¿Cuánto cable hay que usar en el círculo para que su área sea de 1.27 m^2?

Autoevaluación 1 de la unidad 2

Circule o subraye la respuesta correcta.

1. Método Numérico para resolver ecuaciones algebraicas que no considera la curvatura de la gráfica de la función ni la magnitud de las ordenadas.

A) Bisecciones Sucesivas B) Newton Raphson C) Regla Falsa D) Von Mises

2. Para el siguiente conjunto de parejas ordenadas $(f(x), x)$, determine la cantidad mínima (que podemos asegurar) de raíces reales.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-11	-4	2	-7	6	7	-1

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

3. Es un intervalo cerrado dentro del cual hay al menos una solución de la ecuación $\cos(x-2) - 2e^{-x} + 0.80 = 0$

A) [4, 5] B) [6, 7] C) [8, 9] D) [7, 8]

4. La tercera aproximación a la raíz real de la ecuación $x^5 - 2x - 1 = 0$ con el método de Newton Raphson Primer Orden, y con las siguientes consideraciones: valor inicial $x_i = 1.5$ y 6 cifras después del punto, es:

A) 1.345845 B) 1.290693 C) 1.295598 D) Ninguna de las anteriores

5. Se desea construir una caja con tapa y base cuadrada, empleando 60 decímetros cuadrados de material sin considerar pérdidas por recortes, debe tener un volumen de 24 decímetros cúbicos. La ecuación cuya solución permite conocer las dimensiones de la base de la caja es:

A) $x^3 - 30x + 96 = 0$ B) $-x^3 + 30x + 96 = 0$ C) $x^3 + 20x + 48 = 0$ D) $x^3 - 30x + 48 = 0$

6. Un depósito esférico de agua, de 4 metros de radio está al 70% de su capacidad, ¿Cuál es el tirante de agua?

A) 4.6939 m B) 4.8939 m C) 5.0939 m D) 6.2939

3. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones tienen múltiples aplicaciones. Se tiene conocimiento que los babilonios, egipcios, chinos y griegos las utilizaban para solucionar problemas de tipo práctico. En la actualidad, entre otras cosas, son útiles para encontrar el punto de intersección entre dos rectas, una recta y una curva o entre dos curvas. Las aplicaciones prácticas se encuentran en casi todos los campos del saber: ingeniería, física, contabilidad, costos, mercadotecnia, psicología, etc.

Iniciaremos con algunos conceptos y propiedades importantes que nos permitan desarrollar operaciones con matrices, buscando particularmente su uso en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Abordaremos operaciones como la suma, resta, multiplicación transpuesta y algunas propiedades básicas de las matrices.

[1]*Una matriz consta de un arreglo rectangular de elementos representados por un símbolo simple, [A] es la notación abreviada para la matriz y* a_{ij} *representa un elemento individual de la matriz. Al conjunto de elementos se le llama renglón y al conjunto vertical se le llama columna. El primer subíndice i siempre denota el número de renglón en que se encuentra el elemento. El segundo subíndice j denota la columna.* Por ejemplo, el elemento a_{43} está en el cuarto renglón y tercer columna.

El tamaño de una matriz depende del número de renglones y columnas, siempre se lee primero el número de renglones y luego el número de columnas. Dada la matriz $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ es de dimensiones 1 x 3, y regularmente recibe el nombre de vector renglón. Dada la matriz $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ es de dimensiones 3 x 1, y regularmente se le identifica como vector columna,

Una matriz cuyo número de renglones es igual que el número de columnas se le conoce como matriz cuadrada. Las matrices cuadradas son particularmente importantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Para tales sistemas el número de ecuaciones (correspondiente a los renglones) y el número de incógnitas (correspondiente a las columnas) deben ser iguales en orden para que sea posible una solución única. Por consiguiente, las matrices cuadradas se encuentran al trabajar con tales sistemas.

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Una matriz identidad es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.
El símbolo $[I]$ *denota la matriz identidad.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz triangular superior es aquella donde todos sus elementos bajo la diagonal principal son cero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

[2]*Suma de dos Matrices*

---

[1] Steven C. Chapra / Raymond P. Canale. Métodos Numéricos para Ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. 1988. Editorial Mc Graw Hill.
[2] Leithold Louis. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 1994. Editorial Harla.

Si A y B son dos matrices del mismo orden, la suma de A y B, denotada por A + B, es la matriz para la que cada uno de sus elementos es la suma de los correspondientes elementos de A y B.

Teorema 1
Si H es cualquier matriz y 0 es la matriz cero del mismo orden que H, entonces:

$$H + 0 = H \text{ y } 0 + H = H$$

Teorema 2
La suma de una matriz H y la inversa aditiva de H es una matriz cero: esto es, si H es cualquier matriz, entonces:

$$H + (-H) = 0$$

Diferencia de dos Matrices
Si A y B son dos matrices del mismo orden, entonces la diferencia de A y B, denotada por A-B, se define como:

$$A - B = A + (-B)$$

Teorema 3
Si A, B y C son matrices del mismo orden, entonces:

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

Transpuesta de la Matriz
La transpuesta de una matriz H, denotada como H^T, es la matriz para la que el i-ésimo renglón de H^T es la i-ésima columna de H, y la j-ésima columna de H' es el j-ésimo renglón de H; esto es, los correspondientes renglones y columnas se intercambian.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ la transpuesta $A^T = \begin{bmatrix} k & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

Producto de un Escalar por una Matriz
El producto de un escalar k y una matriz H, denotado por kH, es la matriz en la que cada elemento se obtiene multiplicando k por el correspondiente elemento de H.

Producto de dos Matrices
Supóngase que A es una matriz de orden m x p, y que B es una matriz de orden p x n. Entonces, el producto de A y B, denotado por AB, es la matriz m x n para la que el elemento del i-ésimo renglón y la j-ésima columna, es la suma de los productos formados mediante la multiplicación de cada elemento del renglón i-ésimo de A por el correspondiente elemento en la columna j-ésima de B.

Teorema 4
Si A, B y C son matrices tales que existan los siguientes productos y sumas, entonces

(i) $A (BC) = (AB) C$ (ii) $A (B + C) = AB + AC$ (iii) $(B + C) A = BA + CA$

El método de multiplicación de matrices puede servir para expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Por ejemplo, el sistema puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices en la calculadora

Iniciemos definiendo un par de matrices y hagamos algunos cálculos (suma, transpuesta e inversa), de manera que esta actividad nos permita entender la sintaxis para el manejo matricial (ver Figuras 22, 23 y 24). Las matrices se definen mediante corchetes y se les atribuye un nombre que puede incluir o no números y letras. Recuerde que la matriz es un arreglo rectangular compuesto por elementos que pueden ser números o letras.

Figura 23. Definición de una matriz

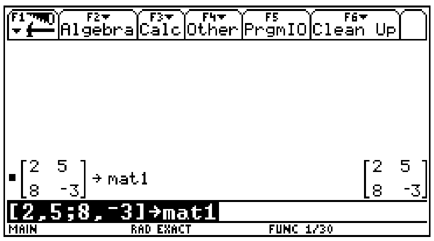


Figura 24. Suma de dos matrices

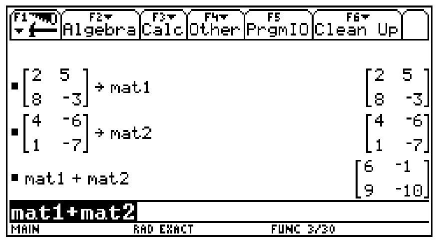
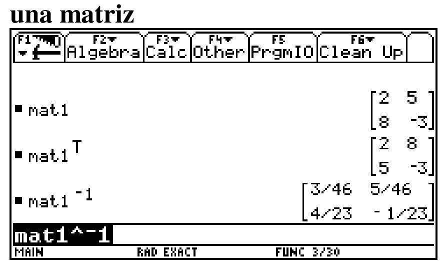
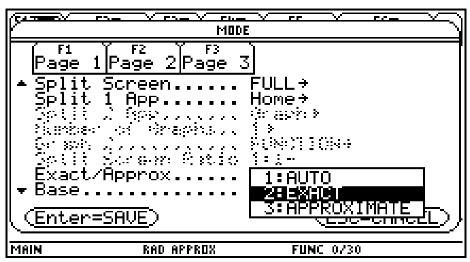


Figura 25. Transpuesta e inversa de una matriz



Para la ejecución de esta actividad la calculadora deberá estar en el modo exacto (ver Figura 26).

Figura 26. Declaración del modo exacto en la calculadora



Respecto de la sintaxis. La coma separa a los elementos en el mismo renglón, y el punto y coma se utiliza para cambiar de renglón.
La matriz identidad es la matriz constituida por unos en la diagonal principal, el resto de los elementos son ceros. Se obtiene mediante la instrucción **identity(** y el número de renglones correspondiente. En nuestro caso evocaremos una matriz identidad de 3 por 3 (ver Figuras 27 y 28).

Figura 27. Declaración de la instrucción matriz identidad.

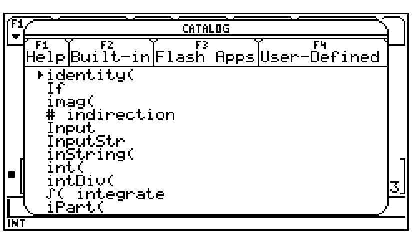
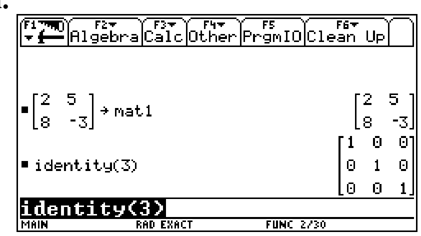


Figura 28. Declaración del tamaño de la matriz identidad.



Con la instrucción **augment(** es posible adicionar matrices, y con la instrucción **submat(** es factible tomar una submatriz de la original. Las Figuras 29 y 30 muestran el procedimiento respectivo.

Figura 29. Matriz aumentada

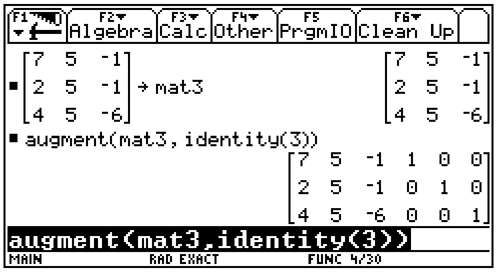
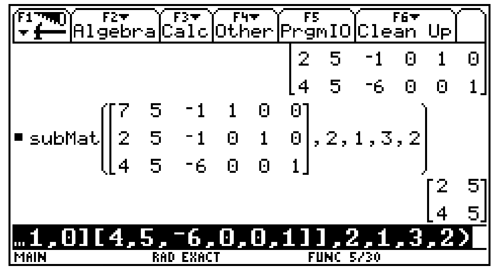


Figura 30. Definición de submatriz [2,5;4,5]



Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Determinantes y Regla de Cramer

[3]*Existe un concepto asociado con cualquier matriz cuadrada, el cual se conoce como determinante. Los determinantes pueden servir para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante fórmulas llamadas en conjunto Regla de Cramer.*

Otros conceptos muy relacionados son el subdeterminante y el cofactor, los cuales se describen brevemente a continuación.

Menor (o subdeterminante)
Sea e un elemento de la matriz cuadrada H y sea G la matriz obtenida al eliminar el renglón y la columna a las que pertenece e. Entonces, el menor o subdeterminante de e es determinante de G.

Cofactor
Sea e el elemento del renglón i y la columna j de la matriz cuadrada H, y sea M el menor o subdeterminante de e. Entonces, el factor k del elemento e se define como: $K = (-1)^{i+j}M$

Determinante de segundo orden

Si H es la matriz cuadrada de segundo orden $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Entonces, el determinante de H, denotado por det H, o bien por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Se define como: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ y es de segundo orden.

Regla de Cramer para un sistema de dos ecuaciones lineales. Supóngase el sistema de dos ecuaciones lineales de x y y.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Donde $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, y asimismo $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$. Sean:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Si $D \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución representada por: $x = \frac{D_x}{D}$ y $y = \frac{D_y}{D}$

Ejemplo de aplicación de la Regla de Cramer

Usar la Regla de Cramer para obtener el conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 6 \\ 2x - 5y &= 16 \end{aligned}$$

[3] Leithold Louis. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 1994. Editorial Harla.

Como $a_1 = 4,\ a_2 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -5,\ c_1 = 6$ y $c_2 = 16$, se tiene que $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$, luego $D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 16 & -5 \end{vmatrix} = -30 - 48 = -78$, $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = 64 - 12 = 52$, lo que permite calcular directamente $x = \frac{-78}{-26} = 3$ y $y = \frac{52}{-26} = -2$

Determinante de tercer orden

Si H es la matriz cuadrada de tercer orden $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. Entonces, el determinante de H, denotado por det H, o bien por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ Se define como: $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ y es de tercer orden.

La definición del determinante de tercer orden, e inclusive de orden n, puede obtenerse con apoyo de la calculadora (ver Figuras 31 y 32). Definiendo previamente la matriz de coeficientes, como se indica a continuación:

Figura 31. Definición de la matriz y cálculo del determinante.

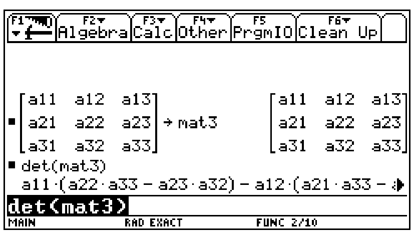
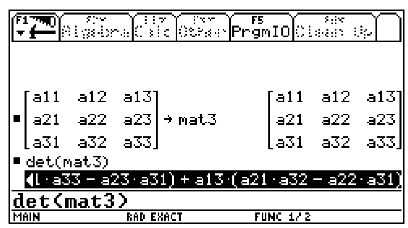


Figura 32. Definición de la matriz y cálculo del determinante.



Regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones lineales. Supóngase el sistema de tres ecuaciones lineales de x, y y z

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ Donde $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, también $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$.

Asimismo $a_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $c_3 \neq 0$. Sean: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

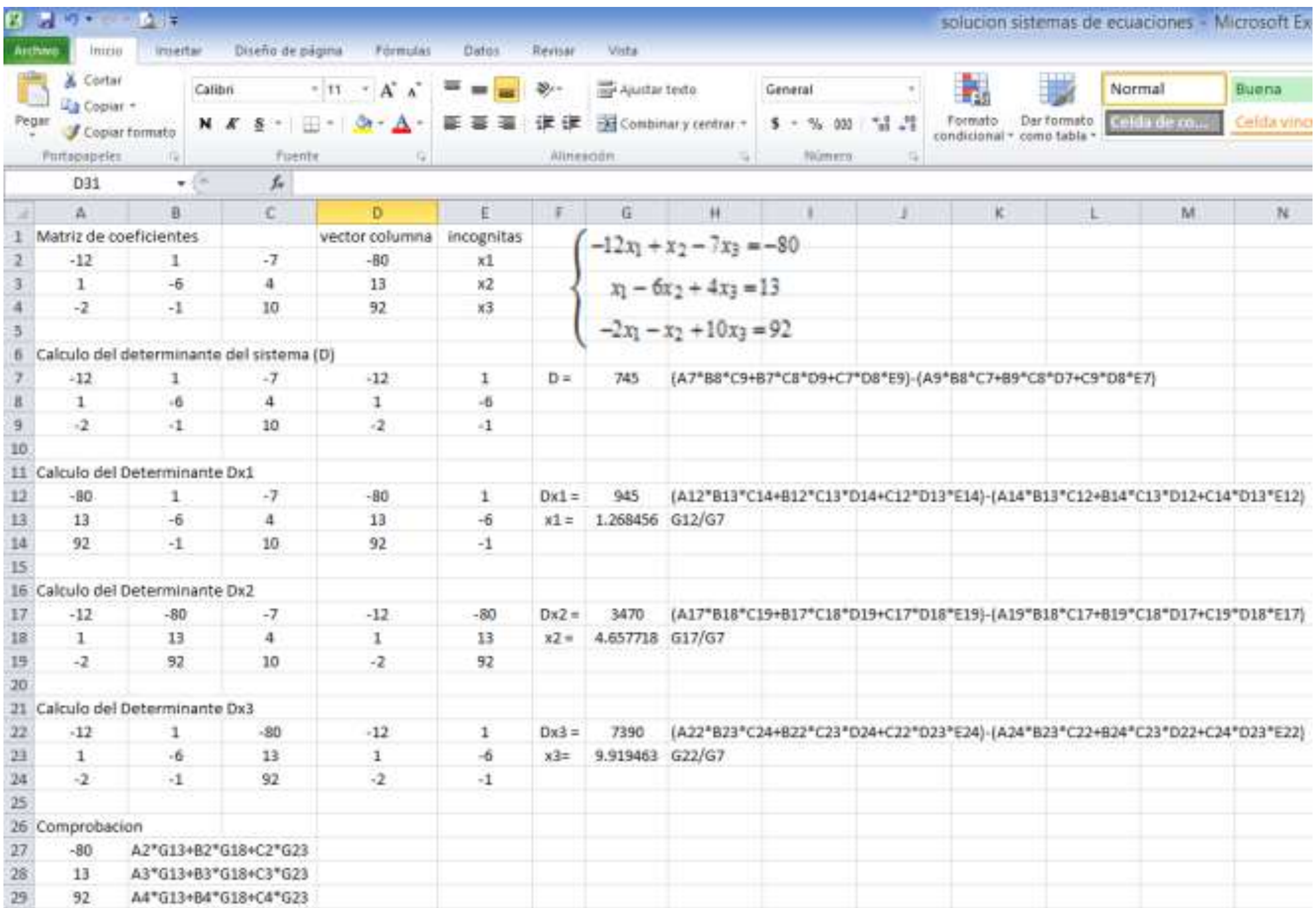
Si $D \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución representada por: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ y $x = \frac{D_z}{D}$

Ejemplo de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el Método de Cramer en hoja de Excel.

Resolver el sistema $\begin{cases} -12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92 \end{cases}$ mediante la Regla de Cramer

Para el cálculo de los determinantes habitualmente se aumenta la matriz de tres a cinco columnas, las dos primeras se repiten aumentando a cinco columnas y llevando a cabo la diferencia de productos cruzados, (ver Cuadro 7).

Cuadro 7. Fórmulas y cálculo de determinantes en hoja electrónica para la resolución de un sistema de tres ecuaciones.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Matriz de coeficientes			vector columna	incognitas	$-12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80$		
2	-12	1	-7	-80	x1			
3	1	-6	4	13	x2	$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13$		
4	-2	-1	10	92	x3	$-2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92$		
5								
6	Calculo del determinante del sistema (D)							
7	-12	1	-7	-12	1	D =	745	(A7*B8*C9+B7*C8*D9+C7*D8*E9)-(A9*B8*C7+B9*C8*D7+C9*D8*E7)
8	1	-6	4	1	-6			
9	-2	-1	10	-2	-1			
10								
11	Calculo del Determinante Dx1							
12	-80	1	-7	-80	1	Dx1 =	945	(A12*B13*C14+B12*C13*D14+C12*D13*E14)-(A14*B13*C12+B14*C13*D12+C14*D13*E12)
13	13	-6	4	13	-6	x1 =	1.268456	G12/G7
14	92	-1	10	92	-1			
15								
16	Calculo del Determinante Dx2							
17	-12	-80	-7	-12	-80	Dx2 =	3470	(A17*B18*C19+B17*C18*D19+C17*D18*E19)-(A19*B18*C17+B19*C18*D17+C19*D18*E17)
18	1	13	4	1	13	x2 =	4.657718	G17/G7
19	-2	92	10	-2	92			
20								
21	Calculo del Determinante Dx3							
22	-12	1	-80	-12	1	Dx3 =	7390	(A22*B23*C24+B22*C23*D24+C22*D23*E24)-(A24*B23*C22+B24*C23*D22+C24*D23*E22)
23	1	-6	13	1	-6	x3=	9.919463	G22/G7
24	-2	-1	92	-2	-1			
25								
26	Comprobacion							
27	-80	A2*G13+B2*G18+C2*G23						
28	13	A3*G13+B3*G18+C3*G23						
29	92	A4*G13+B4*G18+C4*G23						

Se puede concluir que la solución del sistema es $x_1 = 1.268456$, $x_2 = 4.657718$ y $x_3 = 9.919463$

3.1 Método de matriz inversa

[4]*En el ámbito de las operaciones con matrices, se menciona que si una matriz es cuadrada, entonces existe otra matriz* $[A]^{-1}$*, llamada la matriz inversa de [A], para el cual:* $[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$

También se demuestra que la inversa se puede usar para resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas, si se toma: $[X] = [A]^{-1}\,[C]$

La aplicación de la inversa ocurre cuando se require resolver sistemas de ecuaciones de la forma: $[A]\,[X] = [C]$

Que difieren únicamente en el vector de términos independientes [C]. En vez de resolver cada sistema por separado, una alternativa diferente consiste en determinar la inversa de la matriz de coeficiente. Entonces, se puede usar la ecuación $[X] = [A]^{-1}\,[C]$ *para obtener la soluciones, simplemente multiplicando la matriz* $[A]^{-1}$ *por el vector de términos independientes correspondientes [C], ya que la multiplicación matricial es mucho más rápida que la inversión, el consumo de tiempo se lleva a cabo una vez y después se obtienen las soluciones adicionales de una manera eficiente.*

$$\begin{array}{c} \qquad [A] \qquad\qquad\qquad\qquad [I] \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a11 & A12 & A13 & 1 & 0 & 0 \\ a21 & A22 & A23 & 0 & 1 & 0 \\ a31 & A32 & A33 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \Downarrow & & \\ 1 & 0 & 0 & A11^{-1} & a12^{-1} & a13^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & A21^{-1} & a22^{-1} & a23^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & A31^{-1} & a32^{-1} & a33^{-1} \end{array}\right) \\ \qquad [I] \qquad\qquad\qquad\qquad [A]^{-1} \end{array}$$

Con el método de Gauss-Jordan se puede calcular directamente la inversa. Para hacerlo, la matriz de coeficientes se aumenta con una matriz identidad (ver figura inferior). Posteriormente se aplica el método de Gauss-Jordan para reducir la matriz de coeficiente a la matriz identidad. Cuando se completa esta tarea, el lado derecho de la matriz aumentada contiene la matriz inversa. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

Utilice el algoritmo de Gauss-Jordan para determinar la matriz inversa, luego utilice los vectores siguientes para obtener las soluciones del sistema. Por el vector de términos independientes: [C] = [7.85, -19.3, 71.4]. Además, obténgase la solución para un vector de términos independientes diferentes: [C] = [20 50 15].

Solución: Auméntese la matriz de coeficientes con una matriz identidad:

$$[A] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -0.1 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Usando a_{11} *como pivote, el renglón uno se normaliza y se usa para eliminar a* x_1 *de los otros renglones.*

[4] Steven C. Chapra / Raymond P. Canale. Métodos Numéricos para Ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. 1988. Editorial Mc Graw Hill.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 0.333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -0.03333 & 1 & 0 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & -0.1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En seguida, se usa a_{22} como pivote y x_2 se elimina de los otros renglones.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -0.068057 & 0.333175 & 0.004739 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0417061 & -0.00474 & 0.14218 & 0 \\ 0 & 0 & 10.0121 & -0.1009 & 0.027014 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente, se usa a_{33} como pivote y x_3 se elimina de los renglones restantes:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0.332489 & 0.004923 & 0.006798 \\ 0 & 1 & 0 & -0.00516 & 0.142293 & 0.004183 \\ 0 & 0 & 1 & -0.01008 & 0.002698 & 0.09988 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la inversa es:

$$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.332489 & 0.00492297 & 0.006798 \\ -0.0051644 & 0.142293 & 0.004183 \\ -0.0100779 & 0.00269816 & 0.09988 \end{pmatrix}$$

Ahora, la inversa se multiplica por el primer vector de términos independientes, obteniendo la solución:

X1 = 7.85 (0.332489) – 19.3 (0.00492297 0 + 71.4 (0.00678913)
= 3.00041181

X2 = 7.85 (-0.0051644) – 19.3 (0.142293) + 71.4 (0.00418346)
= -2.48809640

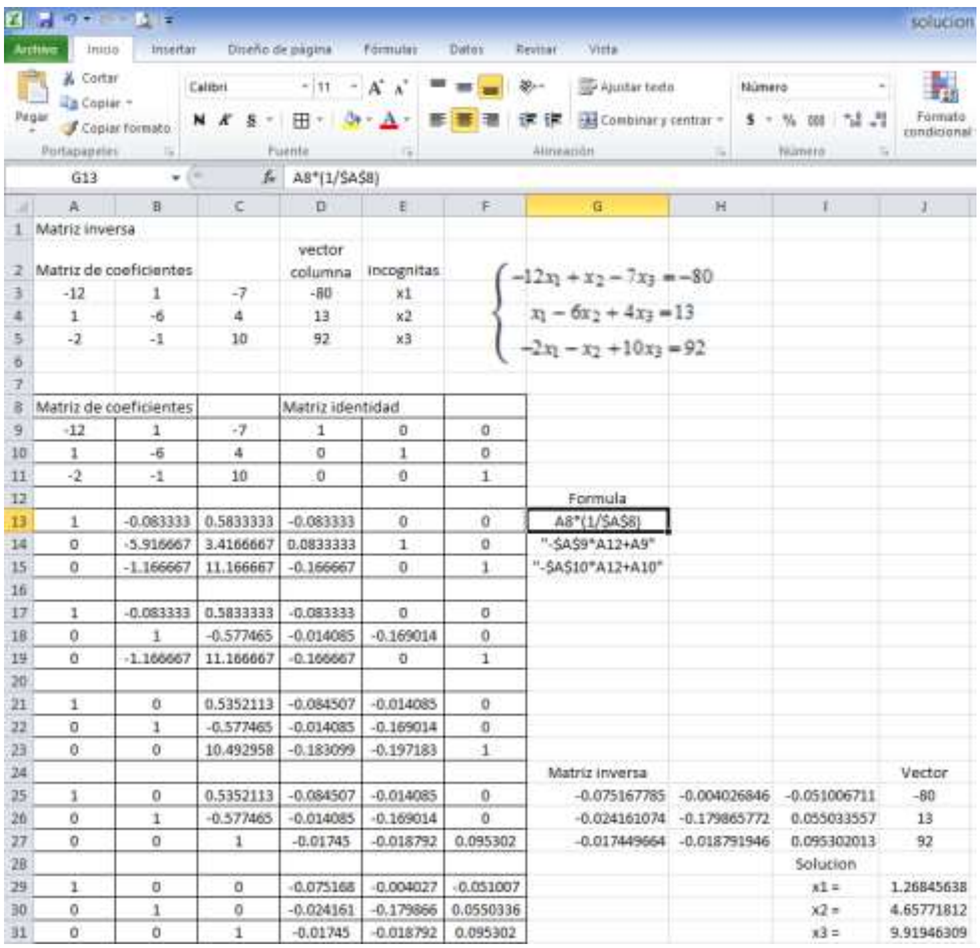
X3 = 7.85 (-0.0100779) – 19.3 (0.00269816) + 71.4 (0.0998801)
= 7.00025314

Ejemplo de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método de matriz inversa en hoja de Excel

Resolver el sistema $\begin{cases} -12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92 \end{cases}$ mediante el Método de Matriz Inversa

A continuación se presenta el desarrollo de la resolución del sistema en hoja de Excel, recuerde que primeramente se aumenta la matriz con una identidad del mismo tamaño, se aplica el algoritmo de Gauss Jordan para producir los unos (en la diagonal principal) y ceros (en el resto de la matriz original), finalmente se multiplica la matriz inversa por el vector columna o parámetros de las ecuaciones, las fórmulas y cálculos paso a paso se muestran en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Fórmulas y cálculo de determinantes en hoja electrónica para la resolución de un sistema de tres ecuaciones mediante matriz inversa.



G13 | A8*(1/$A$8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Matriz inversa									
2	Matriz de coeficientes			vector columna	incognitas		$-12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80$			
3	-12	1	-7	-80	x1		$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13$			
4	1	-6	4	13	x2		$-2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92$			
5	-2	-1	10	92	x3					
6										
7										
8	Matriz de coeficientes			Matriz identidad						
9	-12	1	-7	1	0	0				
10	1	-6	4	0	1	0				
11	-2	-1	10	0	0	1				
12							Formula			
13	1	-0.083333	0.5833333	-0.083333	0	0	A8*(1/$A$8)			
14	0	-5.916667	3.4166667	0.0833333	1	0	"-$A$9*A12+A9"			
15	0	-1.166667	11.166667	-0.166667	0	1	"-$A$10*A12+A10"			
16										
17	1	-0.083333	0.5833333	-0.083333	0	0				
18	0	1	-0.577465	-0.014085	-0.169014	0				
19	0	-1.166667	11.166667	-0.166667	0	1				
20										
21	1	0	0.5352113	-0.084507	-0.014085	0				
22	0	1	-0.577465	-0.014085	-0.169014	0				
23	0	0	10.492958	-0.183099	-0.197183	1				
24							Matriz inversa			Vector
25	1	0	0.5352113	-0.084507	-0.014085	0	-0.075167785	-0.004026846	-0.051006711	-80
26	0	1	-0.577465	-0.014085	-0.169014	0	-0.024161074	-0.179865772	0.055033557	13
27	0	0	1	-0.01745	-0.018792	0.095302	-0.017449664	-0.018791946	0.095302013	92
28									Solucion	
29	1	0	0	-0.075168	-0.004027	-0.051007			x1 =	1.26845638
30	0	1	0	-0.024161	-0.179866	0.0550336			x2 =	4.65771812
31	0	0	1	-0.01745	-0.018792	0.095302			x3 =	9.91946309

Se puede concluir que la solución del sistema es $x_1 = 1.268456$, $x_2 = 4.657718$ y $x_3 = 9.919463$

Método de reducción Gaussiano

[5]*El método de Reducción Gaussiano, en honor del matemático alemán Kart Friedrich Gauss (1777-1855), requiere reducir la matriz a la forma escalonada. En el álgebra lineal de cursos avanzados, se estudia un proceso paso a paso para hacer esto. En el caso de los sistemas simples de este texto, la forma escalonada*

[5] Leithold Louis. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 1994. Editorial Harla.

puede obtenerse mediante una secuencia de operaciones elementales con reglones, que se llevan a cabo por observación, ensayo y error.

En el siguiente ejemplo se resuelve un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro variables, con el Método de Gaussiano de Reducción.

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ 3z + x = w - 2 \\ 2x + 2y = 3w + 2 \\ y = w + z \end{cases}$$

Sustituimos cada ecuación por otra equivalente, en la que los términos variables estén del lazo izquierdo, y los constantes en el lado derecho. Con esto se obtiene el siguiente sistema equivalente, en el que las ecuaciones están escritas de manera que cada columna está formada por términos de la misma variable.

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ -w + x + 3z = -2 \\ -3w + 2x + 2y = 2 \\ -w + y - z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes aumentada con el vector columna es: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Se comienza por obtener ceros como primeros elementos del segundo, tercero y cuarto renglones. Se sustituye el segundo renglón por la suma del primer y el segundo; sustituimos el tercero por la suma de 3 veces el primero y el tercero; luego se sustituye el cuarto por la suma del primer y cuarto. Se obtiene entonces la matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Ahora se intercambia el segundo y el cuarto renglones, pues de esta manera resulta 1 como elemento del segundo renglón y la segunda columna; esto facilitará obtener ceros en el tercero y el cuarto renglones de la segunda columna. Resulta así la matriz;

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Sustituyendo el tercer renglón por la suma del tercero y -5 veces el segundo, y sustituyendo el cuarto por la suma del cuarto y -2 veces el segundo, se obtiene;

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

Sustituyendo el cuarto renglón por la suma de 3 veces el tercero y -5 veces el curto se obtiene la matriz;

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right]$$

Ahora multiplicamos el cuarto renglón por -1/11 para tener;

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Esta matriz está en forma escalonada y corresponde a la matriz aumentada del sistema en forma triangular;

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ x + 2y = 5 \\ -5y + 3z = -8 \\ z = -1 \end{cases}$$

Retro-sustituimos en la tercera ecuación el valor de z de la cuarta ecuación y resulta y = 1; después retro-sustituimos y por 1 en la segunda ecuación y obtenemos x = 3. Al retro-sustituir x por 3 en la primera ecuación, así como y por 1 y z por -1, queda w = 2. Se obtiene entonces el siguiente sistema, que es equivalente al sistema original.

$$\begin{cases} w = 2 \\ x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Por lo que el conjunto de soluciones del sistema dado es {(2, 3, 1, -1)}.

Ahora consideremos el siguiente ejemplo adicional para un sistema de tres ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema es;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

Sustituyendo el segundo renglón por la suma de 3 veces el primero y -2 el segundo, y reemplazando el tercero por la suma del primero y -2 veces el tercero se obtiene;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

Ahora sustituimos el tercer renglón por la suma de 3 veces el segundo más el tercero para obtener;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz está en forma escalonada y es la matriz aumentada del sistema;

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -y - z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En la tercera ecuación se observa que las ecuaciones de este sistema son dependientes. La tercera ecuación es una identidad para cualquier terna o tríada ordenada (x, y, z), y en particular para (0, 0, t). Por tanto, se sustituye la ecuación 0 = 0 por z=t y resulta así el sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -y - z = -4 \\ z = t \end{cases}$$

Ahora retro-sustituimos el valor de z del tercer renglón en el segundo y despejamos y. Con esto se llega al sistema equivalente;

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$$

Retro-sustituyendo los valores de y y z de la segunda y tercera ecuaciones en la primera, nos da;

$$\begin{cases} 2x + (4 - t) - 3t = 0 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$$

Que es equivalente a: $\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$

Por lo que el conjunto de soluciones del sistema es {(2t-2, 4-t, t)}.

El ejemplo anterior es un caso de sistemas de ecuaciones dependientes. Verifica su solución utilizando el sistema de resolución para ecuaciones (ver Figuras 33, 34 y 35) que está incluido en la calculadora.

Figura 33. Representación icónica de la resolución de ecuaciones simultáneas.

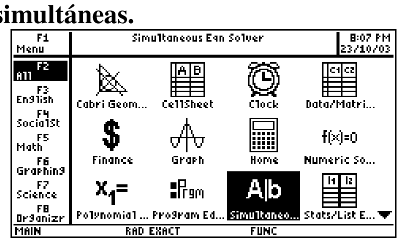


Figura 34. Declaración de coeficientes y parámetros del sistema de ecuaciones.

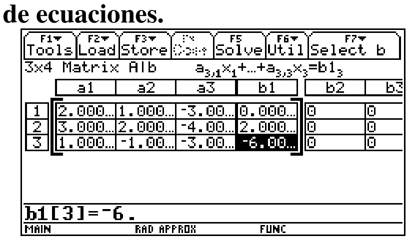
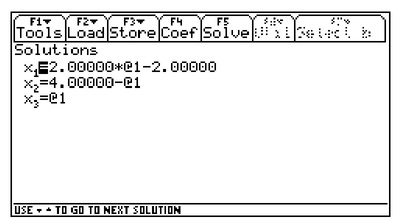


Figura 35. Solución del sistema de ecuaciones.



Otra opción es mediante la ejecución de las instrucciones **mrow** y **mrowadd** para efectuar operaciones con los renglones y columnas, como se muestra en las siguientes Figuras 36, 37, 38, 39, 40 y 41.

Figura 36. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd.

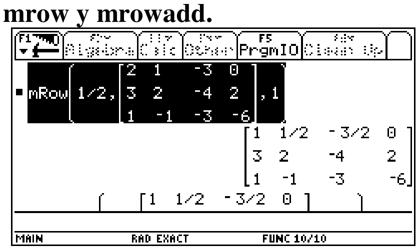


Figura 37. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd.

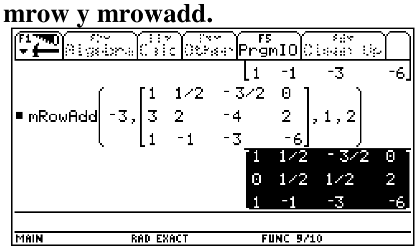


Figura 38. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd.

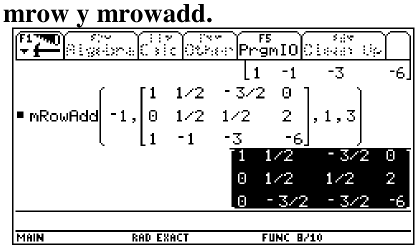


Figura 39. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd

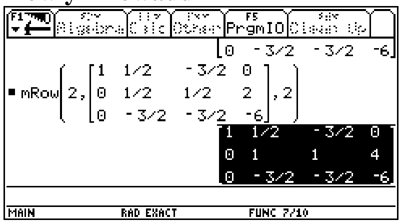


Figura 40. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd

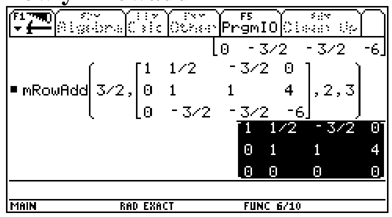
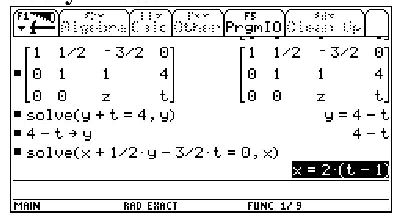
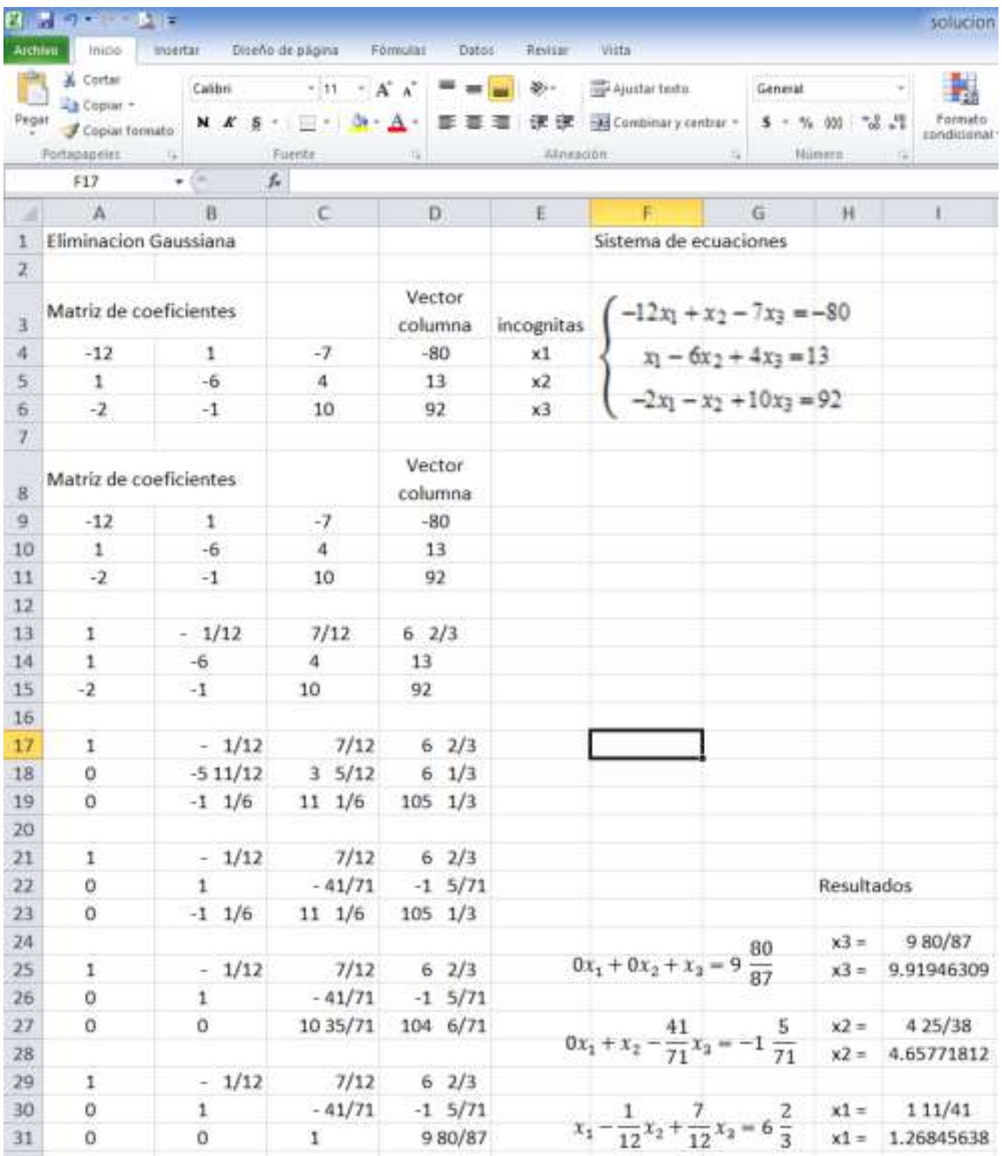


Figura 41. Uso de las instrucciones mrow y mrowadd



A continuación (ver Cuadro 9) se presenta el procedimiento de solución del sistema de ecuaciones mediante el Método de Eliminación o Reducción Gaussiana

Cuadro 9. Resolución del sistema de ecuaciones en hoja electrónica mediante el Método de Reducción Gaussiana.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Eliminacion Gaussiana					Sistema de ecuaciones			
2									
3	Matriz de coeficientes			Vector columna	incognitas	$\begin{cases} -12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92 \end{cases}$			
4	-12	1	-7	-80	x1				
5	1	-6	4	13	x2				
6	-2	-1	10	92	x3				
7									
8	Matriz de coeficientes			Vector columna					
9	-12	1	-7	-80					
10	1	-6	4	13					
11	-2	-1	10	92					
12									
13	1	- 1/12	7/12	6 2/3					
14	1	-6	4	13					
15	-2	-1	10	92					
16									
17	1	- 1/12	7/12	6 2/3					
18	0	-5 11/12	3 5/12	6 1/3					
19	0	-1 1/6	11 1/6	105 1/3					
20									
21	1	- 1/12	7/12	6 2/3					
22	0	1	- 41/71	-1 5/71				Resultados	
23	0	-1 1/6	11 1/6	105 1/3					
24								x3 =	9 80/87
25	1	- 1/12	7/12	6 2/3		$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 9\,\frac{80}{87}$		x3 =	9.91946309
26	0	1	- 41/71	-1 5/71					
27	0	0	10 35/71	104 6/71				x2 =	4 25/38
28						$0x_1 + x_2 - \frac{41}{71}x_3 = -1\,\frac{5}{71}$		x2 =	4.65771812
29	1	- 1/12	7/12	6 2/3					
30	0	1	- 41/71	-1 5/71				x1 =	1 11/41
31	0	0	1	9 80/87		$x_1 - \frac{1}{12}x_2 + \frac{7}{12}x_3 = 6\,\frac{2}{3}$		x1 =	1.26845638

3.2 Método de Gauss Jordan

[6]*El método de Gauss-Jordan es una variación de la Eliminación Gaussiana. La principal diferencia consiste en que el método de Gauss-Jordan cuando se elimina una incógnita no solo se elimina de las ecuaciones siguientes sino de todas las otras ecuaciones.*
De esta forma, el paso de eliminación genera una matriz identidad en vez de una matriz triangular. Por consiguiente, no es necesario emplear la sustitución hacia atrás para obtener la solución. El método se ilustra mejor con el siguiente esquema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a11 & a12 & a13 & c1 \\ a21 & a22 & a23 & c2 \\ a31 & a32 & a33 & c3 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c1^* \\ 0 & 1 & 0 & c2^* \\ 0 & 0 & 1 & c3^* \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc} x1 & & & = c1^* \\ & x2 & & = c2^* \\ & & x3 & = c3^* \end{array}$$

Esquema gráfico del método de Gauss-Jordan. Los asteriscos indican que el vector de términos independientes se ha modificado varias veces.

Considere el siguiente ejemplo para ilustrar explícitamente el algoritmo. Utilicemos el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones propuesto.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Solución: en primer lugar, se expresan los coeficientes y el vector de términos independientes como una matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{pmatrix}$$

[6] Steven C. Chapra / Raymond P. Canale. Métodos Numéricos para Ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. 1988. Editorial Mc Graw Hill.

En seguida se normaliza el primer renglón dividiéndose por el pivote 3, para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.06667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right)$$

El termino x1 se puede eliminar del segundo renglón restando 0.1 veces el primero del segundo renglón. De una manera similar, restando 0.3 veces el primero del tercer renglón se elimina el termina con x1 del tercer renglón:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.06667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & 70.615 \end{array}\right)$$

En seguida, se normaliza el segundo renglón dividiéndolo entre 7.00333:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.06667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.04188 & -2.7932 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & 70.615 \end{array}\right)$$

Reduciendo los términos en x2 de la primera y la tercera ecuación se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068063 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.041885 & -2.7932 \\ 0 & 0 & 10.012 & 70.0843 \end{array}\right)$$

El tercer renglón se normaliza dividiéndolo entre 10.0120:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068063 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.041885 & -2.7932 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right)$$

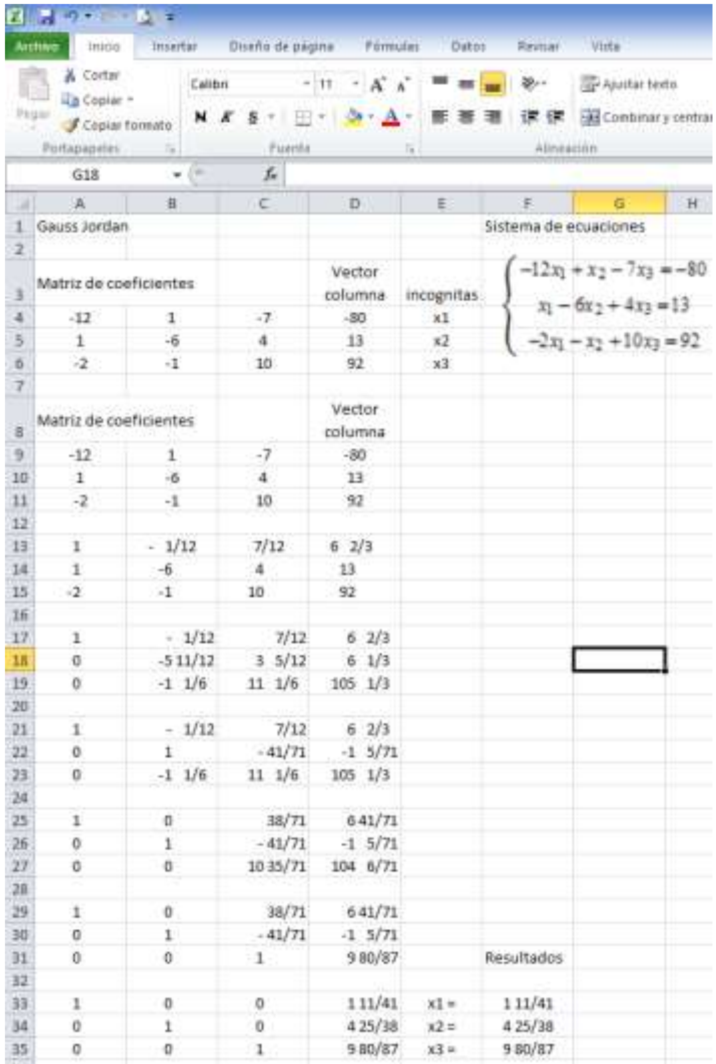
Finalmente, los terminas con x_3 se pueden reducir de la primera y segunda ecuación para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right)$$

De esta forma, como se muestra en la figura anterior, la matriz de coeficientes se ha transformado en matriz identidad y la solución se ha obtenido en el vector de términos independientes. Nótese que no se necesita sustitución hacia atrás para obtener la solución.

A continuación (ver Cuadro 10) se presenta el procedimiento de solución del sistema de ecuaciones mediante el Método Gauss Jordan.

Cuadro 10. Resolución del sistema de ecuaciones en hoja electrónica mediante el Método de Gauss Jordan.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Gauss Jordan					Sistema de ecuaciones		
2								
3	Matriz de coeficientes			Vector columna	incognitas			
4	-12	1	-7	-80	x1			
5	1	-6	4	13	x2			
6	-2	-1	10	92	x3			
7								
8	Matriz de coeficientes			Vector columna				
9	-12	1	-7	-80				
10	1	-6	4	13				
11	-2	-1	10	92				
12								
13	1	- 1/12	7/12	6 2/3				
14	1	-6	4	13				
15	-2	-1	10	92				
16								
17	1	- 1/12	7/12	6 2/3				
18	0	-5 11/12	3 5/12	6 1/3				
19	0	-1 1/6	11 1/6	105 1/3				
20								
21	1	- 1/12	7/12	6 2/3				
22	0	1	- 41/71	-1 5/71				
23	0	-1 1/6	11 1/6	105 1/3				
24								
25	1	0	38/71	6 41/71				
26	0	1	- 41/71	-1 5/71				
27	0	0	10 35/71	104 6/71				
28								
29	1	0	38/71	6 41/71				
30	0	1	- 41/71	-1 5/71				
31	0	0	1	9 80/87		Resultados		
32								
33	1	0	0	1 11/41	x1 =	1 11/41		
34	0	1	0	4 25/38	x2 =	4 25/38		
35	0	0	1	9 80/87	x3 =	9 80/87		

$$\begin{cases} -12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92 \end{cases}$$

3.3 Método iterativo de Gauss Seidel y Jacobi

[7]*Los métodos iterativos constituyen una alternativa a los métodos de eliminación descritos hasta ahora, para aproximar la solución. Estos métodos son similares a las técnicas que se desarrollan en la resolución de ecuaciones algebraicas para obtener las raíces. Aquellos métodos consistían en suponer un valor y luego usar un método sistemático para obtener una aproximación mejorada de la raíz. Ahora se trata con un problema similar (obtener los valores que simultáneamente satisfagan un conjunto de ecuaciones). Entonces se esperaría que tales métodos aproximados fuesen útiles en este contexto.*

El método de Gauss-Seidel es el método iterativo más comúnmente usado. Suponga que se da un sistema de n ecuaciones. $[A]\{X\} = \{B\}$

[7] Steven C. Chapra / Raymond P. Canale. Métodos Numéricos para Ingenieros con programas de aplicación. 2002. Editorial Mc Graw Hill Interamericana. Cuarta Edición.

Limitemos a un conjunto de ecuaciones de 3 X 3. Si los elementos de la diagonal no son todos cero, la primera ecuación se puede resolver para x_1*, la segunda para* x_2 *y la tercera para* x_3*, para obtener las ecuaciones:*

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}; \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}; \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

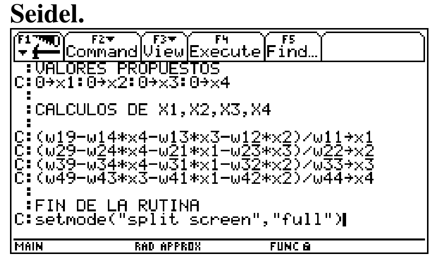
Ahora, se puede empezar el proceso de solución al escoger valores iniciales para las x*. Una forma simple para obtener los valores iniciales es suponer que todos son cero. Estos ceros se sustituyen en la ecuación, la cual se utiliza para calcular un nuevo valor* $x_1 = b_1/a_{11}$*. Después, se sustituye este nuevo valor de* x_1 *junto con el valor previo cero de* x_3 *en la ecuación y se calcula el nuevo valor de* x_2*. Este proceso se repite con la ecuación para calcular un nuevo valor de* x_3*. Después se regresa a la primera ecuación y se repite todo el procedimiento hasta que la solución converja suficientemente cerca de los valores verdaderos. Antes de iniciar un proceso de resolución mediante el método se verifica que* $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$*. Significa que el coeficiente de la diagonal en cada una de las ecuaciones debe ser mayor que la suma del valor absoluto de los otros coeficientes de la ecuación. Este criterio es suficiente pero no necesario para la convergencia. Es decir, el método puede funcionar aunque no se satisfaga el criterio mencionado, la convergencia se garantiza cuando la condición se satisface. A los sistemas que cumplen con tal condición se les conoce como diagonalmente dominantes.*

Las tres figuras siguientes (42, 43 y 44) exhiben la conformación de la rutina para la resolución de sistemas lineales con 3 o 4 ecuaciones mediante el método de Gauss Seidel.

Figura 42. Rutina del Método Gauss Seidel.

Figura 43. Rutina del Método Gauss Seidel.

Figura 44. Rutina del Método Gauss Seidel.



Ejemplo de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el Método de Gauss Seidel

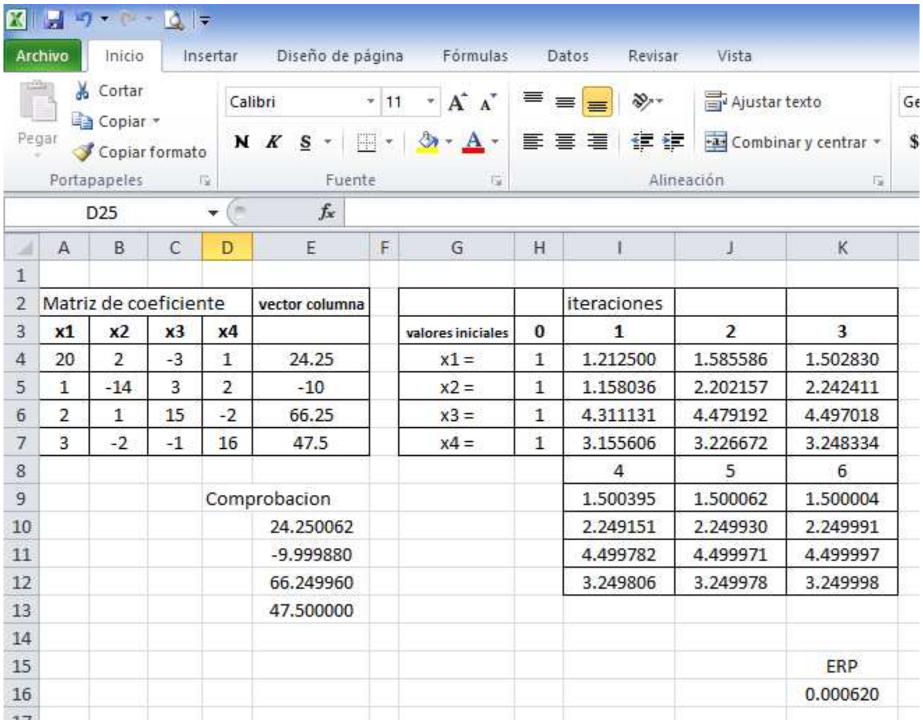
Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 24.25 \\ x_1 - 14x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -10 \\ 2x_1 + x_2 + 15x_3 - 2x_4 = 66.25 \\ 3x_1 - 2x_2 - 1x_3 + 16x_4 = 47.50 \end{cases}$.

Primeramente se verifica que el sistema es diagonalmente dominante, en consecuencia se procede con el algoritmo descrito anteriormente, es decir, se despeja cada una de las variables de la diagonal principal.

$$x_1 = (24.25 - 2x_2 + 3x_3 - x_4)/20$$
$$x_2 = (-10 - x_1 - 3x_3 - 2x_4)/-14$$
$$x_3 = (66.25 - 2x_1 - x_2 + 2x_4)/15$$
$$x_4 = (47.50 - 3x_1 + 2x_2 + x_3)/16$$

El cálculo y las fórmula necesarias se presentan a continuación (ver Cuadro 11) en una hoja electrónica, se hicieron 6 iteraciones y se alcanzó un error relativo porcentual para la variable x_4 de 0.015157%.

Cuadro 11. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas para resolver el sistema de ecuaciones mediante el Método de Gauss Seidel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Matriz de coeficiente				vector columna				iteraciones		
3	x1	x2	x3	x4			valores iniciales	0	1	2	3
4	20	2	-3	1	24.25		x1 =	1	1.212500	1.585586	1.502830
5	1	-14	3	2	-10		x2 =	1	1.158036	2.202157	2.242411
6	2	1	15	-2	66.25		x3 =	1	4.311131	4.479192	4.497018
7	3	-2	-1	16	47.5		x4 =	1	3.155606	3.226672	3.248334
8									4	5	6
9				Comprobacion					1.500395	1.500062	1.500004
10					24.250062				2.249151	2.249930	2.249991
11					-9.999880				4.499782	4.499971	4.499997
12					66.249960				3.249806	3.249978	3.249998
13					47.500000						
14											
15											ERP
16											0.000620

El método de Jacobi utiliza el mismo criterio que el método de Gauss Seidel respecto a la convergencia y en el proceso de resolución no recurre a los valores nuevos, ello provoca una menor velocidad de convergencia.

Aplicaciones

Un ejemplo de aplicación del uso de sistemas de ecuaciones y su resolución

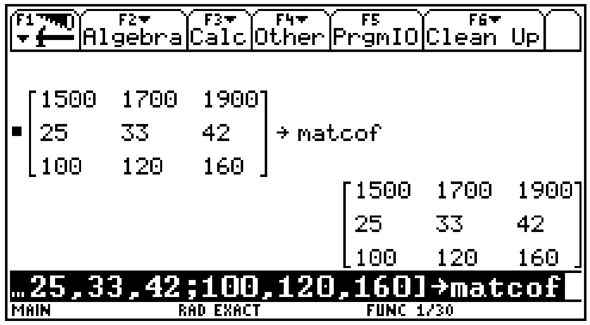
Un ingeniero supervisa la producción de tres tipos de automóviles. Se requieren tres clases de materiales –metal, plástico y caucho- para la producción. La cantidad necesaria para producir cada automóvil es de:

Automóvil	Metal Kg/auto	Plásticokg/auto	Caucho kg/auto
Tipo a	1500	25	100
Tipo b	1700	33	120
Tipo c	1900	42	160

Si se dispone de un total de 114.3 toneladas de metal, 2.249 toneladas de plástico y 8.52 toneladas de caucho diariamente. ¿Cuántos automóviles de cada tipo se pueden producir por día?

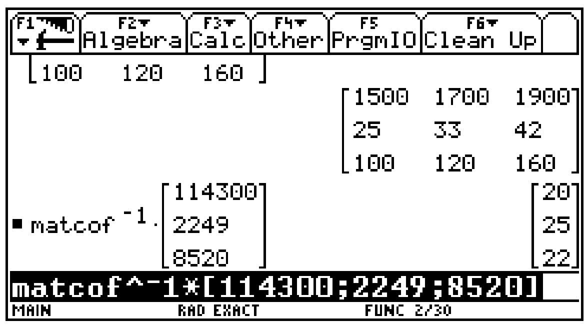
El planteamiento del sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera: $\begin{cases} 1500a + 1700b + 1900c = 114300 \\ 25a + 33b + 42c = 2249 \\ 100a + 120b + 160c = 8520 \end{cases}$. La declaración del sistema de coeficientes se ilustra a continuación (ver Figura 45).

La Figura 45. Declaración de la matriz de coeficientes



Aunque se puede utilizar cualquiera de los métodos estudiados con anterioridad, aquí se ilustra tal resolución mediante el método de matriz inversa (ver Figura 46), recordar que este procedimiento consiste en determinar primeramente la matriz inversa y posteriormente esta se multiplica por el vector columna, el resultado obtenido corresponde a los valores de a, b y c.

Figura 46. Resolución del sistema de ecuaciones mediante el método de matriz inversa



Otra de las formas en que puede resolverse el sistema de ecuaciones, incluso de una manera más rápida, es utilizando el apartado de ecuaciones simultáneas, en las figuras siguientes (47, 48 y 49) se puede observar la existencia del ícono respectivo y del procedimiento correspondiente.

Figura 47. Ícono de la resolución de sistemas de ecuaciones.

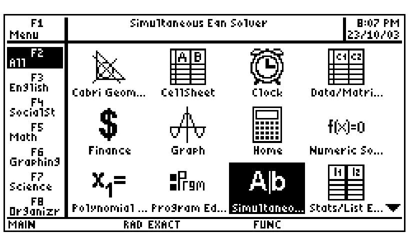


Figura 48. Incorporación de la matriz de coeficientes y vector columna.

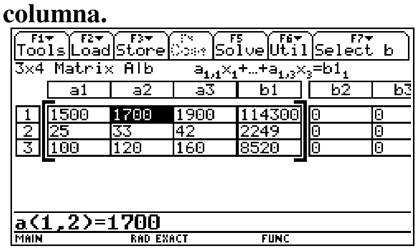
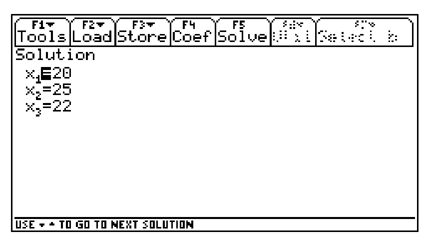


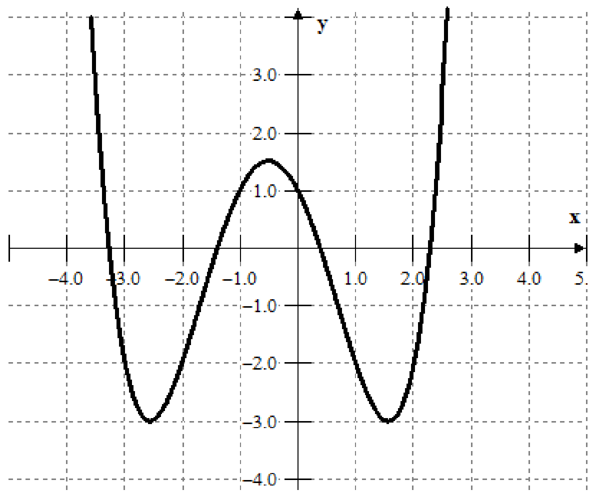
Figura 49. Resultados del sistema de ecuaciones.



Ejemplo de aplicación del sistema de ecuaciones.

A continuación se presenta la gráfica de una función de cuarto grado (ver Figura 50), calcular todas las raíces reales, para ello utilice el método de Newton Raphson Primer Orden.

Figura 50. Gráfica de una función polinomial de cuarto grado

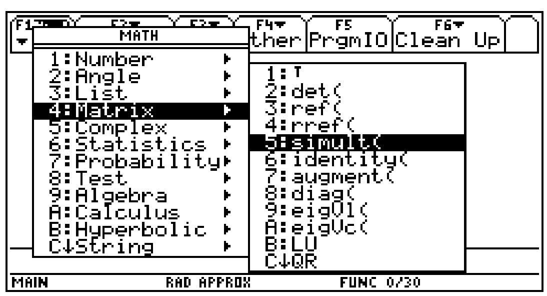


Se sabe que la ecuación general de cuarto grado puede escribirse de la siguiente manera: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Para su determinación es suficiente considerar 5 puntos y plantear el sistema de ecuaciones correspondiente, los puntos extraídos de la gráfica son: (-2, -2), (-1, 1), (0, 1), (1, -2), (2, -2).

Basándose en los puntos de la gráfica el sistema reducido puede escribirse: $\begin{cases} 16a - 8b + 4c - 2d = -3 \\ a - b + c - d = 0 \\ a + b + c + d = -3 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = -3 \end{cases}$

En el **HOME** escriba **clrhome ENTER** para despejar la pantalla. Resolviendo el sistema de ecuaciones por simultáneas. Oprimir 2nd MATH, para incorporar las siguientes ventanas (ver Figura 51).

Figura 51. Despliegue de ventanas iniciales para la resolución del sistema de ecuaciones.

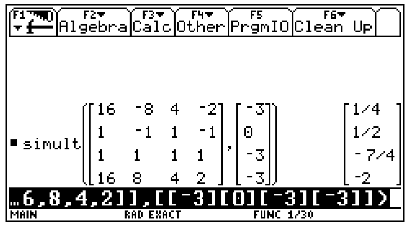


Presionar **ENTER** para dar inicio a la introducción de los elementos del sistema con la siguiente sintaxis: **simult([[16,-8,4,-2][1,-1,1,-1][1,1,1,1][16,8,4,2]],[[-3][0][-3][-3]]) ENTER**

Presionar **ENTER** para dar inicio a la introducción de los elementos del sistema con la siguiente sintaxis: **simult([[16,-8,4,-2][1,-1,1,-1][1,1,1,1][16,8,4,2]],[[-3][0][-3][-3]]) ENTER**

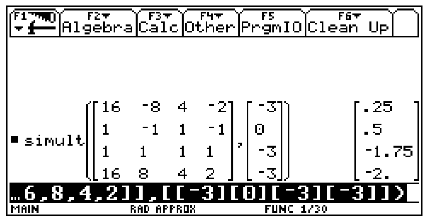
En caso de encontrarse en **MODE exact** la pantalla obtenida con los resultados es la siguiente (ver Figura 52).

Figura 52. Despliegue de resultados en modo exacto.



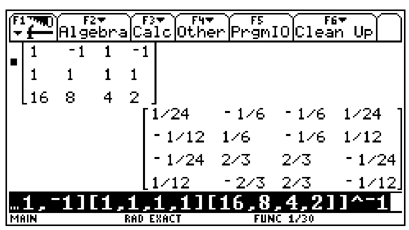
Aparecerá la siguiente pantalla con los resultados de los coeficientes a, b, c y d. Si la calculadora se encuentra en **MODE approximate** (ver Figura 53).

Figura 53. Despliegue de resultados en modo aproximado



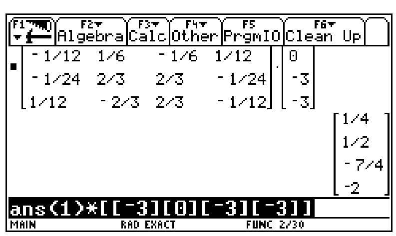
Resolviendo el sistema de ecuaciones por matriz inversa. Limpie la pantalla del HOME e inicie la incorporación de los datos bajo la sintaxis siguiente: [[16,-8,4,-2][1,-1,1,-1][1,1,1,1][16,8,4,2]]^-1 ENTER
La pantalla obtenida (ver Figura 54) despliega la matriz origen y la matriz inversa.

Figura 54. Despliegue de la matriz original y su inversa



Para obtener la solución del sistema de ecuaciones (ver Figura 55) resta efectuar el producto de la matriz inversa por el vector columna, que corresponde a los parámetros de la ecuación, presione **2nd ANSx[[-3][0][-3][-3]] ENTER** y emitirá los resultados correspondientes.

Figura 55. Producto de la matriz inversa por el vector columna.



Con la obtención de los coeficientes la ecuación puede entonces escribirse como: $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2-2x+1$

Conocida la ecuación de la gráfica se aplica el método de Newton como se hizo en la unidad 2, de suerte que se localicen las 4 soluciones de la ecuación.

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (Operaciones con matrices)

1. Efectúe las operaciones indicadas

a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ -7 & 6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

2. Obtenga a, b, c y d de manera que: $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Obtenga a, b, c, d, e y f de manera que: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 3 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$

4. Determine el producto [A] [B] $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

5. Determine la multiplicación de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

6. Verifique el siguiente enunciado:

a) A + (B+C) = (A+B) + C b) AI = A y IA = A c) A (B+C) = AB + AC d) A (BC) = (AB) C

7. Para los siguientes casos obtenga la matriz x que satisfaga la ecuación dada.

a) $X - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $2\begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & 6 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 3 & -6 \\ 7 & -7 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

8. Verifique las siguientes igualdades: a) $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$, b) $(M^{-1})^{-1} = M$, c) $(M^{-1})^{1} = (M^{1})^{-1}$, d) $(M^{-1})^{2} = (M^{2})^{-1}$

Apartado B (Método de Cramer)

9. Calcular el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

10. Calcular el valor de x de manera que se cumpla la igualdad.

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7$ b) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & x \end{vmatrix} = 14$ c) $\begin{vmatrix} x & o & o \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 8$ d) $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ x^2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

11. Resolver por el método de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 3 \\ 3x - y + 2z = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3z = 6 \\ 3y + 4z = 5 \\ 5z - 2x = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y - z = 5 \\ 3x - 4z = 8 \\ 4x + 7y = 7 \end{cases}$

12. Usar la Regla de Cramer para obtener el conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} -12x_1 + x_2 - 7x_3 = -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 17 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 92 \end{cases}$

Apartado C (Matriz inversa)

13. Calcular la inversa de las siguientes matrices y luego obtener la solución multiplicando por el vector columna.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 4z &= 11 \\ x + 3y + 9z &= 18 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -12x_1 + x_2 - 7x_3 &= -80 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 13 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 &= 92 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 13 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 &= -2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x + 6y + z &= -2 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ 5x - 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Apartado D (Reducción Gaussiana)

14. Resolver Los siguientes sistemas de ecuaciones mediante Reducción Gaussiana

a)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 4 \\ x + 2y - 5z = 6 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2w + x - 3y - 3z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ 2w - x + 3z = -3 \\ 5w - y + z = -6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2w + 3x - 4y - z = 3 \\ 3w + x + y + 2z = 1 \\ w - 2x + 3y - z = 0 \\ w - 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$$

Apartado E (Gauss Jordan)

15. Resolver Los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el Método de Gauss Jordan

a)
$$\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 6x+2y=1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x+3y-4z=4 \\ x+2y-5z=6 \\ 4x+5y-2z=0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2w+x-3y-3z=4 \\ x+2y+z=-3 \\ 2w-x+3z=-3 \\ 5w-y+z=-6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2w+3x-4y-z=3 \\ 3w+x+y+2z=1 \\ w-2x+3y-z=0 \\ w-2x-y-9z=5 \end{cases}$$

Apartado F (Gauss Seidel)

16. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por Gauss Seidel. Considerar 6 cifras y un error relativo menor que 0.01%, y los valores iniciales indicados: $x_1=1$, $x_2=1$ y $x_3=1$,

a)
$$\begin{aligned} 6x_1-2x_2+x_3&=11 \\ -2x_1+7x_2+2x_3&=5 \\ 1x_1+2x_2+5x_3&=-1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x_1+x_2+x_3&=5 \\ x_1+4x_2+x_3&=4 \\ x_1+x_2+3x_3&=3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -12x_1+x_2-7x_3&=-80 \\ x_1-6x_2+4x_3&=13 \\ -2x_1-x_2+10x_3&=92 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 20x_1+2x_2-3x_3+x_4&=24.25 \\ x_1-14x_2+3x_3+2x_4&=-10 \\ 2x_1+x_2+15x_3-2x_4&=66.25 \\ 3x_1-2x_2-1x_3+16x_4&=47.50 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 5x_1-x_2+x_3&=10 \\ 2x_1+8x_2-x_3&=11 \\ -x_1+x_2+4x_3&=3 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 4x_1+x_2-x_3&=13 \\ x_1-5x_2-x_3&=-8 \\ 2x_1-x_2-6x_3&=-2 \end{aligned}$$

Apartado H (Aplicaciones)

17. Una impresora de matriz de puntos gasta 9 cintas para imprimir tres libros y dos álbumes; la misma impresora gastó 19 cintas para imprimir cuatro libros y cinco álbumes. ¿Cuántas cintas se necesitan para imprimir un libro y cuántas para imprimir un álbum?. Resolver el sistema de ecuaciones por determinantes (regla de Cramer).

18. La parábola y = $y=ax^2+bx+c$ pasa a través de los puntos: (2,10), (3, 26), y (4, 48), halle a, b y c. Resolver el sistema de ecuaciones por matriz inversa.

19. La ecuación $y=ax^3+bx^2+cx+d$ pasa a través de los puntos: (-1, -10), (1,-4), (2,2), y (3,26) halle a, b c y d. Resolver el sistema de ecuaciones por eliminación Gaussiana.

20. Se compraron dos cajas de tornillos y tres de clavos que tuvieron un costo de \$1200 pesos; después se compraron dos cajas de clavos y una de tornillos con un costo de \$700 pesos. ¿Cuánto cuesta una caja de tornillos y una de clavos?

21. A un baile de generación asistieron dos grupos. Uno cuenta con 20 mujeres y 15 hombres, y el otro con 11 hombres y 19 mujeres. Si el primer grupo recolectó de entradas \$570 y el segundo \$483. ¿Cuánto costó la entrada para los hombres y cuánto para las mujeres?

22. El contador de una grabadora registra el número de revoluciones del carrete que enrolla. Para hacer que la cinta mantenga en movimiento las cabezas de grabación de manera uniforme, el carrete que enrolla debe girar más rápidamente al principio y luego más lentamente. Puede demostrarse que la relación entre el tiempo t al que

la cinta ha estado grabando (empezando en t=0), y el número del contador x (empezando en x=0) está dada por una función cuadrática de la forma $t(x) = ax^2 + bx$.

a) Suponer que una cinta tiene un total de grabación de 45 minutos. Halle las constantes a y b si la cinta produce 400 revoluciones en 25 minutos y 600 revoluciones en 45 minutos.

b) Suponer que una cinta en la parte a) se devuelve completamente y luego se adelanta hasta que pase el material previamente grabado a la posición 535 del contador, ¿cuántos minutos de grabación le quedan?

23. Un ingeniero supervisa la producción de tres tipos de automóviles. Se requieren tres clases de materiales – metal, plástico y caucho- para la producción. La cantidad necesaria para producir cada automóvil es de:

Automóvil	Metal Kg/auto	Plásticokg/auto	Caucho kg/auto
Tipo 1	1500	25	100
Tipo 2	1700	33	120
Tipo 3	1900	42	160

Si se dispone de un total de 114.3 toneladas de metal, 2.249 toneladas de plástico y 8.52 toneladas de caucho diariamente. ¿Cuántos automóviles de cada tipo se pueden producir por día?

24. Un ingeniero requiere 4800 m3 de arena, 5810 m3 de grava fina y 5690 m3 de grava gruesa para la construcción de un proyecto. Existen tres bancos donde se pueden obtener estos materiales. La composición de cada banco es de:

Banco	Arena %	Grava fina %	Grava gruesa %
1	52	30	18
2	20	50	30
3	25	20	55

¿Cuántos metros cúbicos se debe tomar de cada banco para cumplir con las necesidades del ingeniero?

Autoevaluación 1 de la unidad 3

Resolver los siguientes problemas

1. Una Compañía electrónica produce transistores, resistores y chips para computadoras. Cada transistor requiere tres unidades de cobre, una unidad de zinc y dos unidades de vidrio. Cada resistor requiere tres, dos y una unidades de los tres materiales respectivamente, y cada chip para computadora requiere dos, una y dos unidades de estos materiales, respectivamente. Poniendo esta información en una tabla tenemos:

Componente	Cobre	Zinc	Vidrio
Transistores	3	1	2
Resistores	3	2	1
Chips para computadora	2	1	2

El suministro de estos materiales varía de semana a semana, de manera que la compañía necesita determinar diferentes cantidades de producción cada semana. Por ejemplo, una semana las cantidades totales de materiales disponibles son 810 unidades de cobre, 410 unidades de zinc y 490 unidades de vidrio. (Considere que t es el número de transistores, r el número de resistores y c el número de chips para computadora). ¿Cuál es el número de transistores, resistores y chips de computadora a fabricar esta semana?

2. La parábola $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa a través de los puntos: $(1, 10.50)$, $(2, 14.00)$, $(3, 17.50)$ y $(4, 18.00)$, ¿Cuáles son los valores de los coeficientes a, b, c y d?

4. Aproximación polinomial y funcional

4.1 Método de Interpolación

Con frecuencia se encontrará con que tiene que estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos. La interpolación, que es el cálculo de valores para una función tabulada en puntos que no aparecen en la tabla, es históricamente una tarea fundamental.

El método más común que se usa para este propósito es la interpolación polinomial. Recuerde que la fórmula general para un polinomio de n-ésimo grado es $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$. Donde $n+1$ puntos, hay uno y solo un polinomio de grado n que pasa a través de todos los puntos. La interpolación polinomial consiste en determinar el polinomio único de n-ésimo grado que se ajuste a $n+1$ puntos. Este polinomio, entonces, proporciona una fórmula para calcular valores intermedios.

4.2 Métodos de Interpolación de Newton

Existe una gran variedad de formas alternativas para expresar una interpolación polinomial. El polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas es una de las formas más útiles.

Interpolación Lineal

La forma más simple de interpolación consiste en unir dos puntos con una línea recta. Dicha técnica, llamada interpolación lineal se efectúa con el siguiente modelo.

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ejemplo de aplicación del modelo de interpolación lineal

En un resorte se hizo pender objetos de diferente peso, los valores obtenidos respecto de la longitud (en centímetros) del resorte y el peso (en kilogramos) de los objetos se condensaron en la siguiente tabla.

Peso (kg)	0	1	2	3	4
Longitud (cm)	5	9	13	17	21

Determinar la longitud del resorte si en este se pende un objeto cuyo peso sea de 0.5 kilogramos
Como el 0.5 se encuentra entre 0 y 1, se toman tales coordenadas, esto es, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $f(x_0) = 5$ y $f(x_1) = 9$, al aplicar el modelo se tiene que $f_1(0.5) = 5 + \frac{9-5}{1-0}(0.5 - 0) = 7.00$

Determinar la longitud del resorte si en este se pende un objeto cuyo peso sea de 2.3 kilogramos.
Como el 2.3 se encuentra entre 2 y 3, se toman tales coordenadas, esto es, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $f(x_0) = 13$ y $f(x_1) = 17$, al aplicar el modelo se tiene que $f_1(2.3) = 13 + \frac{17-13}{3-2}(2.3 - 2) = 14.20$

Interpolación Cuadrática

Una estrategia para mejorar la estimación consiste en introducir alguna curvatura a la línea que une los puntos. Si se tienen tres puntos como datos, estos pueden ajustarse en un polinomio de segundo grado, conocido como polinomio cuadrático o parábola. El modelo de interpolación cuadrático es el que se presenta a continuación.

$$f_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

Ejemplo de aplicación de la interpolación cuadrática
A una muestra de suelo se le aplica energía (como parte de una investigación) con medios mecánicos, de tal manera que con el paso del tiempo el peso específico del suelo va aumentando. Una medición elaborada durante el proceso arrojó los siguientes datos:

T	0	1	1.5	2.5	3	5
P	1.25	1.29	1.35	1.54	1.66	2.16

En donde *t* es el tiempo en horas y P es el peso específico en tonelada por metro cúbico alcanzado a las *t* horas. Se requiere determinar el peso específico en tonelada por metro cúbico obtenido en un tiempo *t* = 1.9 horas.

Como el valor de la abscisa es 1.9 y este se encuentra más cercano a los tiempos 1 y 1.5, se utilizarán tales coordenadas y una más que sobrepase al tiempo de 1.9, esto es, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$, $f(x_0) = 1.29$, $f(x_1) = 1.35$ y $f(x_2) = 1.54$, al aplicar el modelo se tiene que:

$$f_2(1.9) = 1.29 + \frac{1.35 - 1.29}{1.5 - 1.0}(1.9 - 1) + \frac{\frac{1.54 - 1.35}{2.5 - 1.5} - \frac{1.35 - 1.29}{1.5 - 1}}{2.5 - 1}(1.9 - 1)(1.9 - 1.5) = 1.4148$$

Se concluye que el peso específico alcanzado en $t = 1.9$ horas es de 1.4148 tonelada por metro cúbico.

4.3 Método de interpolación de Lagrange de Primer Orden

El polinomio de interpolación de Lagrange es simplemente una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de las diferencias divididas y se representa de manera concreta en el siguiente modelo matemático.

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Ejemplo de aplicación de los Polinomios de interpolación de Lagrange
Una persona recoge en un recipiente el agua que fluye a través de una manguera y contabiliza el tiempo t que transcurre mientras el recipiente se llena. En la siguiente tabla se especifican los valores medidos. Establezca un modelo para calcular el volumen de agua para un cierto tiempo t. ¿Cuál será el volumen de agua para un tiempo de 22 segundos.

Volumen de agua (litros)	15	30	60	90
Tiempo (segundos)	5	10	20	30

Los datos son: $x_0 = 20$, $x_1 = 30$, $f(x_0) = 60$ y $f(x_1) = 90$, al aplicar el modelo se tiene que:

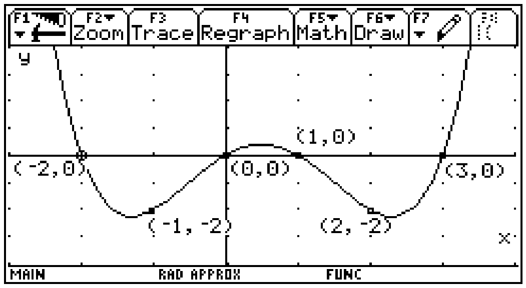
$$f_1(22) = \frac{22 - 30}{20 - 30}(60) + \frac{22 - 20}{30 - 20}(90) = 66.00$$

Se concluye que el volumen de agua es de 66 litros para un tiempo $t = 22$ segundos.

4.4 Métodos de Interpolación mediante Polinomios de grado "n"

A continuación se presenta la gráfica de una función (ver figura 56), determine el valor de y para $x = 0.50$ mediante aproximación gráfica y luego de manera analítica (previa determinación de la expresión algebraica correspondiente, considerar que se trata de una expresión de cuarto grado).

Figura 56. Gráfica de una función de cuarto grado



Se trata de una expresión de la forma $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Como son 5 incógnitas se requiere de 5 puntos o coordenadas totalmente conocidas, de la gráfica se eligen de manera arbitraria los siguientes puntos: $P_1(-2, 0)$, $P_2(-1, -2)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(2, -2)$ y $P_5(3, 0)$. Con el P_1 la ecuación es $16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$, Con el P_2 la ecuación es $a - b + c - d + e = -2$, con el punto P_3 se tiene $a + b + c + d + e = 0$, con el punto P_4 queda la ecuación $16a + 8b + 4c + 2d + e = -2$ y finalmente con el último punto $81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$. El sistema de 5 ecuaciones queda conformado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = -2 \\ a + b + c + d + e = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = -2 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 0 \end{cases}$$

Mismo que al resolverlo por alguno de los métodos se obtiene que $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{5}{4}$, $d = \frac{3}{2}$ y $e = 0$. La ecuación polinomial queda conformada como $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$. Entonces el valor de la interpolación para $x = 0.50$ es $f(0.50) = \frac{1}{4}(0.50)^4 - \frac{1}{2}(0.50)^3 - \frac{5}{4}(0.50)^2 + \frac{3}{2}(0.50) = 0.39$

4.5. Método de mínimos cuadrados

Es común que los datos se dan como valores discretos a lo largo de un continuo. Sin embargo, quizás se requiera la estimación de un punto entre valores discretos, también pueda necesitar la versión simplificada de una función complicada. Una manera de hacerlo es calcular valores de la función en un número discreto de valores en el intervalo de interés. Después, se obtiene una función más simple para ajustar dichos valores. Estas dos aplicaciones se conocen como ajuste de curvas.

Existen dos métodos generales para el ajuste de curvas que se distinguen entre si al considerar la cantidad de error asociado con los datos. Primero, si los datos exhiben un grado significativo de error, la estrategia será obtener una sola curva que represente la tendencia general de los datos. Como cualquier dato individual puede ser incorrecto, no se busca intersecar todos los puntos. En lugar de esto, se construye una curva que siga la tendencia de los puntos tomados como un grupo. Un procedimiento de este tipo se llama regresión por mínimos cuadrados.

Segundo, si se sabe que los datos son muy precisos, el procedimiento básico será colocar una curva o una serie de curvas que pasen por cada uno de los puntos en forma directa. Usualmente tales datos provienen de tablas. Recuerde que la estimación de valores entre puntos discretos bien conocidos se llama interpolación.

4.5.1 Regresión lineal

El ejemplo más simple de una aproximación por mínimos cuadrados es ajustar una línea recta a un conjunto de observaciones definidas por puntos: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , … , (x_n, y_n) . La expresión matemática para la línea recta es: $y = a_0 + a_1 x$, y el modelo matemático para la obtención de sus coeficientes es:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i * y_i) \end{cases}$$

Cuantificación del error en la regresión

La manera objetiva de establecer la proximidad de la regresión contra el conjunto de datos es mediante la evaluación del coeficiente de correlación r, el cual se obtiene mediante los siguientes modelos. Coeficiente de correlación $r = \sqrt{\frac{St - Sr}{St}}$ donde: $St = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ es la cuantificación de la dispersión cuadrada entre la media y el conjunto de datos, y $Sr = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_e)^2$ es la cuantificación de la dispersión cuadrada entre el conjunto de datos y la regresión calculada.

Ejemplo de aplicación de la regresión lineal

Los ingenieros encargados del diseño y fabricación de productos tales como automóviles, televisores y computadoras, pueden verse implicados en otros aspectos de los negocios. Estas implicaciones incluyen las ventas, mercadeo, y distribución del producto. Supóngase que un ingeniero trabaja para la compañía de tipo Micro 1. Las consideraciones sobre planificación y localización de recursos requieren que este ingeniero determine: a) El número de computadoras disponibles en el mercado a los 9 meses. b) En qué momento no se tendrá disponibilidad de computadoras en el mercado.

Los datos con los que cuenta el ingeniero son los siguientes:

Tiempo en meses	0	1	2	3	4	5	6
# computadoras en el mercado en miles	70	62	51	42	37	34	30

La ecuación de regresión lineal es de la forma $y = a_0 + a_1 x$, y el modelo para su determinación es el siguiente:

$$na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i * y_i)$$

La información se concentrará en la matriz que se describe a continuación.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_{er}	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-y_{er})^2$
0	70	0	0	66.93	548.90	9.42
1	62	1	62	60.14	238.04	3.46
2	51	4	102	53.35	19.61	5.52
3	42	9	126	46.56	20.90	20.79
4	37	16	148	39.77	91.61	7.67
5	34	25	170	32.98	158.04	1.04
6	30	36	180	26.19	274.61	14.52
$\sum = 21$	$\sum = 326$	$\sum = 91$	$\sum = 788$		$S_t = \sum = 1351.71$	$S_r = \sum = 62.43$

Considerar que el número de puntos es $n = 7$, $\bar{y} = 46.57$

El modelo se estructura ahora mediante $\begin{cases} 7a_0 + 21a_1 = 326 \\ 21a_0 + 91a_1 = 788 \end{cases}$

Al resolver el sistema se obtiene que $a_0 = 66.93$ y $a_1 = -6.79$. Ahora puede utilizarse la ecuación de regresión para recalcular los valores de y_{er}. Se asume que $y_{er} = 66.93 - 6.79x_i$. El primer cálculo se ilustra a continuación, si $x_i = 3$, se tiene que $y_{er} = 66.93 - 6.79(3) = 46.56$. El resto pueden verificarse en la matriz de cálculo.

El número de computadoras disponibles en el mercado a los 9 meses.
Con el modelo lineal es posible estimar el número de computadoras en el mercado a los 9 meses, esto es, $y_{er} = 66.93 - 6.79(9) = 5.82$ miles de computadoras.

En qué momento no se tendrá disponibilidad de computadoras en el mercado
Para esta situación se resuelve $66.93 - 6.79x_i = 0$, al despejar x_i se obtiene que $x_i = 9.86$ meses.

A la medida de proximidad entre la ecuación de regresión y el conjunto de datos original se le llama coeficiente de correlación y se calcula mediante $r = \sqrt{\frac{St - Sr}{St}}$, en donde $St = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ es la cuantificación de la dispersión cuadrada entre la media y el conjunto de datos, y $Sr = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_e)^2$ es la cuantificación de la dispersión cuadrada entre el conjunto de datos y la regresión calculada. Los cálculos de tales cuantificaciones se ilustran en la matriz anterior. Finalmente se obtiene que $r = \sqrt{\frac{1351.71 - 62.43}{1351.71}} = 0.98$.

4.5.2 Linealización de regresiones

La regresión lineal ofrece una poderosa técnica para ajustar una mejor línea a los datos. Sin embargo, se considera el hecho de que la relación entre las variables dependiente e independiente es lineal. Este no es siempre el caso, y el primer paso en cualquier análisis de regresión deberá ser graficar e inspeccionar los datos en forma visual, para asegurarnos que sea posible usar un modelo lineal. En algunos casos las técnicas como la regresión polinomial son apropiadas. En otros, se pueden utilizar transformaciones para expresar los datos en una forma que sea compatible con la regresión lineal. Los modelos exponencial, logarítmico e hiperbólico que a continuación se presentan (ver Cuadro 12) son ejemplos de estas transformaciones.

Cuadro 12. Transformaciones

$f(x)=\alpha e^{\beta x}$ (exponencial)	$\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i*\ln y_i-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln y_i*\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}x_i]^2}{n}}$	$\ln\alpha=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln y_i}{n}-\dfrac{\beta\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$
$f(x)=\alpha x^{\beta}$ (potencia)	$\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i*\log y_i-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\log y_i*\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n}\log^2 x_i-\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}\log x_i]^2}{n}}$	$\alpha=10^{[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log y_i}{n}-\frac{\beta\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}]}$
$f(x)=\dfrac{\alpha}{\beta+x}$ (hiperbólica)	$\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}[x_i y_i]^2-\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}x_i y_i]^2}{n}}{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i^2-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i*\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{n}}*-1$	$\alpha=\beta[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\beta n}]$
$f_4(x)=\dfrac{\alpha x}{\beta+x}$ (hiperbólica)	$\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{y_i^2}{x_i}-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i*\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}}{n}}{\sum_{i=1}^{n}[\frac{y_i}{x_i}]^2-\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}]^2}{n}}*-1$	$\alpha=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}+\beta\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}}{n}$
$f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x}$ (hiperbólica)	$\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{y_i}{x_i}-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i*\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}-\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}]^2}{n}}$	$\alpha=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-\beta\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}$

$f(x)=\alpha+\beta \ln x$ (logarítmica)	$\beta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i * \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i - \dfrac{[\sum_{i=1}^{n} \ln x_i]^2}{n}}$	$\alpha = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \dfrac{\beta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$

Ejemplo de aplicación de la transformación $f(x) = \alpha e^{\beta x}$

En una prueba de calidad del acero se determinaron los datos del desgaste por rozamiento del acero dulce y la viscosidad del aceite. Los datos representativos, con x igual a la viscosidad del aceite y y el volumen del desgaste (10^{-2} mm) son:

x	1.6	1.8	2.1	2.5	3.0	4.0
y	2.7	3.5	5.0	8.0	14.5	48.5

Ajustar un modelo exponencial de la forma $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ para estimar el volumen de desgaste para una viscosidad $x = 6$. Determinar el coeficiente de correlación.

La rutina que se muestra en las figuras 57 y 58 abrevia sobremanera el desarrollo de la estimación.

Figura 57. Rutina para la determinación de la transformación exponencial

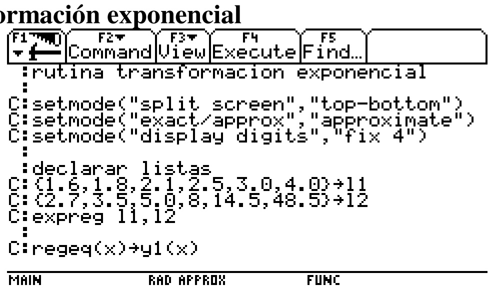
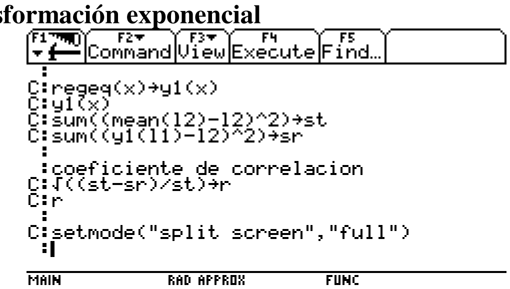


Figura 57. Rutina para la determinación de la transformación exponencial



Los cálculos para la obtención de la expresión algebraica y el coeficiente de correlación se muestran en las figuras 58 y 59

Figura 58. Cálculo de la transformación

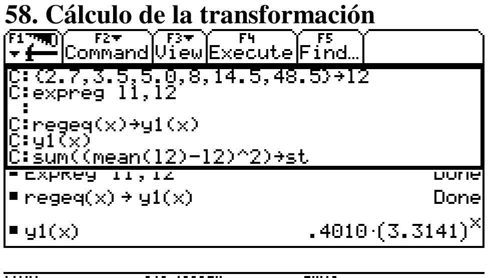
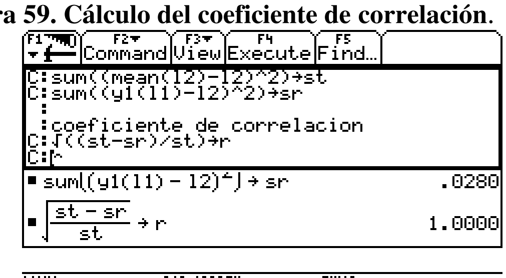


Figura 59. Cálculo del coeficiente de correlación.



Aunque la ecuación exponencial no tiene el formato $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ es relativamente simple determinar que $\alpha = 0.4010$ y $\beta = \ln(3.3141) = 1.2$, por lo que la estructura queda como $f(x) = 0.4010\ e^{1.2x}$

La estimación es entonces $f(6) = 531.29\ 10^{-2}$ mm.

4.5.3 Regresión polinomial

Algunos datos de ingeniería, aunque muestren un marcado patrón se representan pobremente mediante una línea recta. En estos casos se ajusta mejor una curva a los datos. La alternativa es ajustar polinomios a los datos usando regresión polinomial.

El procedimiento de mínimos cuadrados se puede extender fácilmente y ajustar datos a un polinomio de *m-ésimo* grado: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$, en donde el modelo para tal caso es el correspondiente al siguiente conjunto de ecuaciones normales.

$$
\begin{cases}
a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i) \\
\ldots \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^m y_i)
\end{cases}
$$

El caso del ajuste con un polinomio de segundo grado es fácil de establecer a partir del modelo general que hemos presentado, la ecuación de la forma: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, puede estimarse mediante el modelo matricial siguiente:

$$
\begin{aligned}
n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i)
\end{aligned}
$$

El cálculo del coeficiente de correlación se realiza de igual forma al establecido en la regresión lineal.

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (Interpolaciones)

1. El siguiente conjunto de datos exhibe la cantidad de material (en metros cuadrados) requerido en la fabricación de un cilindro circular recto con altura de 4 metros y radio k (en metros).

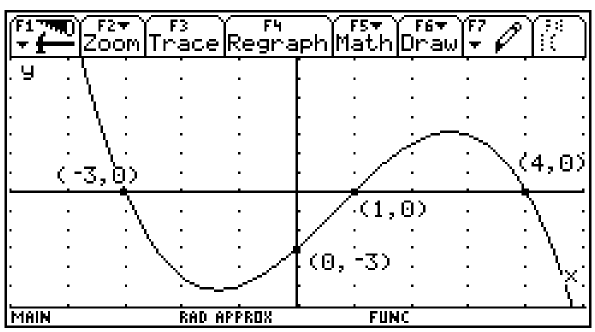
K	0	1	2	3	4
A(k)	0	31.4159	75.3982	131.9469	201.0619

Si sabe que el comportamiento es del tipo cuadrático. Determinar el área requerida para la fabricación de un cilindro circular recto de radio k = 3.5 metros

2. Para el siguiente conjunto de datos determine el valor de y para $x = 2.25$, previamente se sugiere establecer el grado del polinomio a determinar para posteriormente efectuar el cálculo. Compare el resultado con los obtenidos mediante interpolación lineal y cuadrática.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	-29	-6	-1	-2	3	26	79

3. A continuación se presenta la gráfica de una función, determine el valor de y para $x = 2$ mediante aproximación gráfica y luego de manera analítica (previa determinación de la expresión algebraica correspondiente, considere que se trata de una expresión de tercer grado).



Apartado B (Regresión lineal y cuadrática)

4. Se está llevando a cabo un estudio para determinar la relación entre la fuerza de fricción que actúa hacia arriba y la velocidad de caída de un paracaidista. Se llevan a cabo algunos experimentos para obtener la siguiente información sobre la velocidad (v medida en centímetros por segundo) y la fuerza de rozamiento (Fu medida en 10^6 dinas):

V	1000	2000	3000	4000	5000
Fu	5	15.3	29.3	46.4	66.3

Determinar la fuerza de fricción que se generaría si la velocidad del paracaidista alcanza los 6500 centímetros por segundo. Calcule la velocidad necesaria para la cual se genera una fuerza de fricción de $90x10^6$ dinas

5. Los siguientes datos son los precios de venta, de una cierta marca y modelo de automóviles usados.

Año	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Dólares	6350	5995	5750	5395	4985	4895

¿En qué año el precio de venta será de 3850 dólares?. Con el mismo comportamiento, ¿Cuál será el precio de venta en el año 2001?. ¿En qué año el vehículo no tendrá valor alguno?

6. Las calificaciones de un grupo de nueve estudiantes en un trabajo de mitad de curso ($\boldsymbol{x}$) y en el examen final ($\boldsymbol{y}$), son las siguientes:

$\boldsymbol{x}$	77	50	71	72	81	94	96	99	67
$\boldsymbol{y}$	82	66	78	34	47	85	99	99	68

a) Estimar la recta de regresión lineal y su coeficiente ($\boldsymbol{r}$) de correlación

b) Estimar la calificación en el examen final de un estudiante que obtuvo una calificación de 85 en el trabajo de mitad de curso

7. Se efectuó un estudio acerca de la cantidad transformada de azúcar en un cierto proceso a diferentes temperaturas. Se codificaron y registraron los datos como sigue:

Temperatura $\boldsymbol{t}$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Azúcar $\boldsymbol{y}$ (transformada)	7.8	8.5	9.8	9.5	8.9	8.6	10.2	9.3	9.2

Estimar la cantidad promedio de azúcar transformada, producida cuando la temperatura codificada es de 2.4. Utilizar regresión lineal.

8. Los siguientes datos fueron recolectados en un estudio entre la cantidad de lluvia y la cantidad de contaminación eliminada del aire:

Lluvia diaria $\boldsymbol{x}$ (en mm).	4.3	4.5	5.9	6.1	5.2	3.8	2.1	7.5
Partículas eliminadas $\boldsymbol{y}$ (miligramo por metro cúbico).	126	121	116	114	118	132	141	108

Pronosticar las partículas eliminadas de contaminación para un día en el cual alcanza una precipitación de 9 milímetros. Utilizar regresión cuadrática y calcular el coeficiente de correlación r.

9. Se registró la presión de un gas, P, correspondiente a diferentes volúmenes V como sigue:

V (cm^3)	50	60	70	90	100
P (kg/cm^2)	64.7	51.3	40.5	25.9	7.8

Estimar la presión P cuando V alcanza 105 cm^3, utilizar regresión lineal.

Autoevaluación 1 de la unidad 4

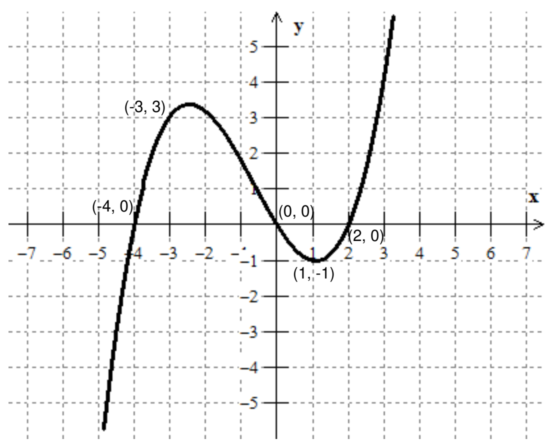
Resolver los siguientes problemas

1. El siguiente conjunto de datos exhibe la cantidad de material (en metros cuadrados) requerido en la fabricación de un cilindro circular recto con altura de 4 metros y radio k (en metros).

K	0	1	2	3	4
A(k)	0	31.4159	75.3982	131.9469	201.0619

Utilizar interpolación cuadrática de Newton, para determinar el área requerida para la fabricación de un cilindro circular recto de radio k = 3.6 metros.

2. A continuación se presenta la gráfica de una función de tercer grado de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, a partir de la expresión analítica determinar el valor de f tal que $x = -2.45$ (considerar que el resultado esta truncado a la cuarta cifra después del punto).



3. Los siguientes datos fueron recolectados en un estudio entre la cantidad de lluvia (en milímetros) y la cantidad de contaminación eliminada (miligramo por metro cúbico) del aire. Utilizar una regresión cuadrática para pronosticar las partículas eliminadas de contaminación para un día en el cual se alcanza una precipitación de 8.5 milímetros (considere el resultado truncado a cuatro cifras después del punto).

Lluvia diaria	3	4	5	6	7
Partículas eliminadas	112	120	135	148	170

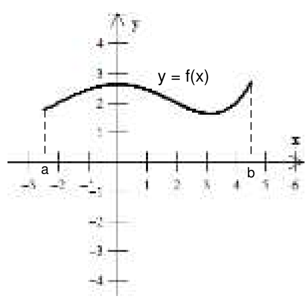
5. Integración numérica

Los orígenes del cálculo se remontan unos 2500 años, hasta los antiguos griegos, quienes hallaron áreas aplicando el "método del agotamiento". Sabían cómo hallar el área A de cualquier polígono al dividirlo en triángulos y sumar las áreas de estos triángulos. Hallar el área de una figura curva es un problema mucho más difícil. El método griego del agotamiento consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a la misma figura y, a continuación, hacer que el número de lados de los polígonos aumentará.

Los griegos no aplicaron explícitamente los límites, sin embargo, por razonamiento indirecto Euxodo (siglo V A.C) utilizó el agotamiento para probar la conocida fórmula del área de un círculo. El problema del área es el problema central de la rama del cálculo que se conoce como cálculo integral.

Las técnicas del cálculo integral permiten también conocer el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza del agua contra la cortina de una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo que se lleva a cabo al bombear agua hacia afuera de un tanque. Es conveniente recordar que para calcular el área bajo una curva es adecuado el uso de la integral definida, cuya definición dice que sí f es continua y no negativa en el intervalo cerrado [a, b] entonces el área de la región limitada por f (ver Figura 60), el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por $área = \int_a^b f(x)dx$.

Figura 60. Área bajo la curva $y = f(x)$



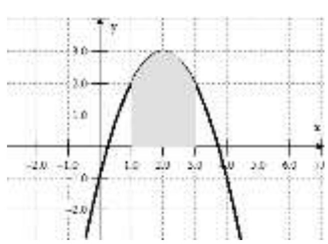
5.1 Método analítico

Con esta definición y el primer teorema fundamental del cálculo el problema del área bajo la curva es relativamente sencillo de resolver. El método analítico consiste en utilizar todas las herramientas del cálculo integral para determinar el área bajo la curva.

Ejemplo de cálculo de área bajo la curva mediante el método analítico

Considere el caso del cálculo del área bajo la curva de la región limitada por la gráfica de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ como se muestra en la Figura 9.

Figura 61. Gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x - 1$



El área de la región limitada entonces se representa mediante $A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 1)dx$. Al integrar se tiene que $A = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x\Big]_1^3$.

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo resulta que:

$$A = \left[-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - (3)\right] - \left[-\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 - (1)\right]$$

$$A = [-9 + 18 - 3] - \left[-\frac{1}{3} + 2 - 1\right] = [6] - \left[\frac{2}{3}\right] = \frac{16}{3}\ u^2$$

Existen varios métodos para aproximar el área bajo una curva, aquí se describen tres de ellos, el Método trapecial o trapezoidal, el Método Simpson $\frac{1}{3}$ y el Método Simpson $\frac{3}{8}$.

5.2 Método de la Regla del Trapecio

El método de la regla del trapecio utiliza una línea recta para unir las ordenadas y su modelo es el siguiente:

Método	**Modelo**	**Requisitos**
Trapezoidal	$A = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$	a = límite inferior b = límite superior n = número de secciones, requisito ninguno

5.3 Método Simpson 1/3 y 3/8

El método Simpson $\frac{1}{3}$ utiliza una curva de segundo grado para unir las ordenadas y el Método Simpson $\frac{3}{8}$ lo hace mediante una curva de tercer grado. Los modelos y requerimientos se exhiben a continuación:

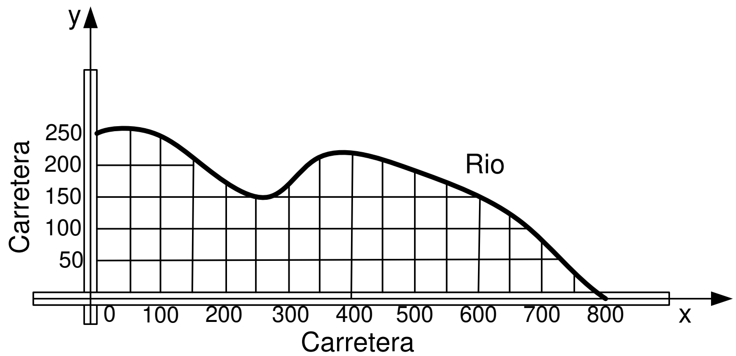
Método	**Modelo**	**Requisitos**
Simpson $\frac{1}{3}$	$A = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$	a = límite inferior b = límite superior n = número de secciones, requisito, n múltiplo de 2
Simpson $\frac{3}{8}$	$A = \frac{3(b-a)}{8n}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=,3,6,9}^{n-3} f(x_i) + 3\sum_{j=resto}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right]$	a = límite inferior b = límite superior n = número de secciones, requisito, n múltiplo de 3

Ejemplo de aplicación del Método Trapezoidal y Simpson $\frac{1}{3}$ para cálculo de áreas

Estimar mediante la regla trapezoidal el número de metros cuadrados de tierra en el terreno de la figura 62, donde x y y se mide en metros. En cada caso, el terreno está acotado por un río y por dos carreteras rectas que forman entre sí un ángulo recto. La tabla siguiente señala las coordenadas precisas para el cálculo del área.

x	0	100	200	300	400	500	600	700	800
y	250	240	160	160	210	190	150	80	0

Figura 62. Terreno acotado por un río y por dos carreteras.



El modelo es $A = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$, como $n = numero\ de\ puntos - 1$, entonces $n = 8$, $a = 0$ y $b = 800$, la identificación de ordenadas se hace fácilmente en una tabla numérica como la siguiente:

Abscisas	Ordenadas
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 250$
$x_1 = 100$	$f(x_1) = 240$
$x_2 = 200$	$f(x_2) = 160$
$x_3 = 300$	$f(x_3) = 160$
$x_4 = 400$	$f(x_4) = 210$
$x_5 = 500$	$f(x_5) = 190$
$x_6 = 600$	$f(x_6) = 150$
$x_7 = 700$	$f(x_7) = 80$
$x_8 = 800$	$f(x_8) = 0$

Al sustituir en el modelo se obtiene: $A = \left(\frac{800-0}{2(8)}\right)[250 + 2(240 + 160 + 160 + 210 + 190 + 150 + 80) + 0]$
Por lo que el área del terreno es $A = 131500$ metros cuadrados.
Se utilizará el mismo problema para hacer la estimación mediante el Método Simpson $\frac{1}{3}$ cuyo modelo es $A = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$ toda vez que cumple el requisito de que n sea número par, esto es, $n = 8$, $a = 0$ y $b = 800$, al sustituir en el modelo se obtiene:

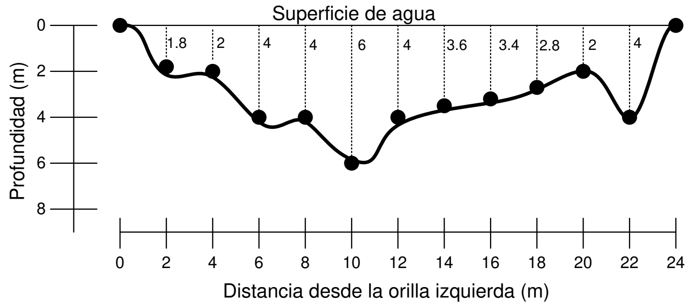
$$A = \left(\frac{800-0}{3(8)}\right)[250 + 4(240 + 160 + 190 + 80) + 2(160 + 210 + 150) + 0] = 132333.33\ m^2$$

Ciertamente los resultados de un método y otro no tienen necesariamente que ser iguales, ya que las curvas de aproximación son distintas como se mencionó anteriormente.

Ejemplo de aplicación del Método Trapezoidal, Simpson $\frac{1}{3}$ y Simpson $\frac{3}{8}$ para cálculo de áreas

Las áreas de la sección transversal de los ríos se necesitan en varias tareas en la ingeniería hidráulica, como pronósticos de inundación y diseño de presas. A menos que se disponga de dispositivos electrónicos de sonido para obtener perfiles continuos del fondo del río, el ingeniero debe basarse en mediciones discretas de la profundidad para calcular el área. Un ejemplo de la sección transversal en un río se muestra en la Figura 70. Los puntos representan las posiciones donde se ancló un bote y se tomaron lecturas de diferentes profundidades. Estimar el área de la sección transversal mediante el método trapecial y Simpson $\frac{3}{8}$

Figura 63. Sección transversal de un río



Se concentran las coordenadas en una tabla numérica

Abscisas	Ordenadas
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 1.8$
$x_2 = 4$	$f(x_2) = 2$
$x_3 = 6$	$f(x_3) = 4$
$x_4 = 8$	$f(x_4) = 4$
$x_5 = 10$	$f(x_5) = 6$
$x_6 = 12$	$f(x_6) = 4$
$x_7 = 14$	$f(x_7) = 3.6$
$x_8 = 16$	$f(x_8) = 3.4$
$x_9 = 18$	$f(x_9) = 2.8$
$x_{10} = 20$	$f(x_{10}) = 2$
$x_{11} = 22$	$f(x_{11}) = 4$
$x_{12} = 24$	$f(x_{12}) = 0$

El modelo trapecial es $A = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$, como $n = numero\ de\ puntos - 1$, entonces $n = 12$, $a = 0$ y $b = 24$. Al sustituir en el modelo se obtiene:

$$A = \left(\frac{24-0}{2(12)}\right)[0 + 2(1.8 + 2 + 4 + 4 + 6 + 4 + 3.6 + 3.4 + 2.8 + 2 + 4) + 0] = 75.20\ m^2$$

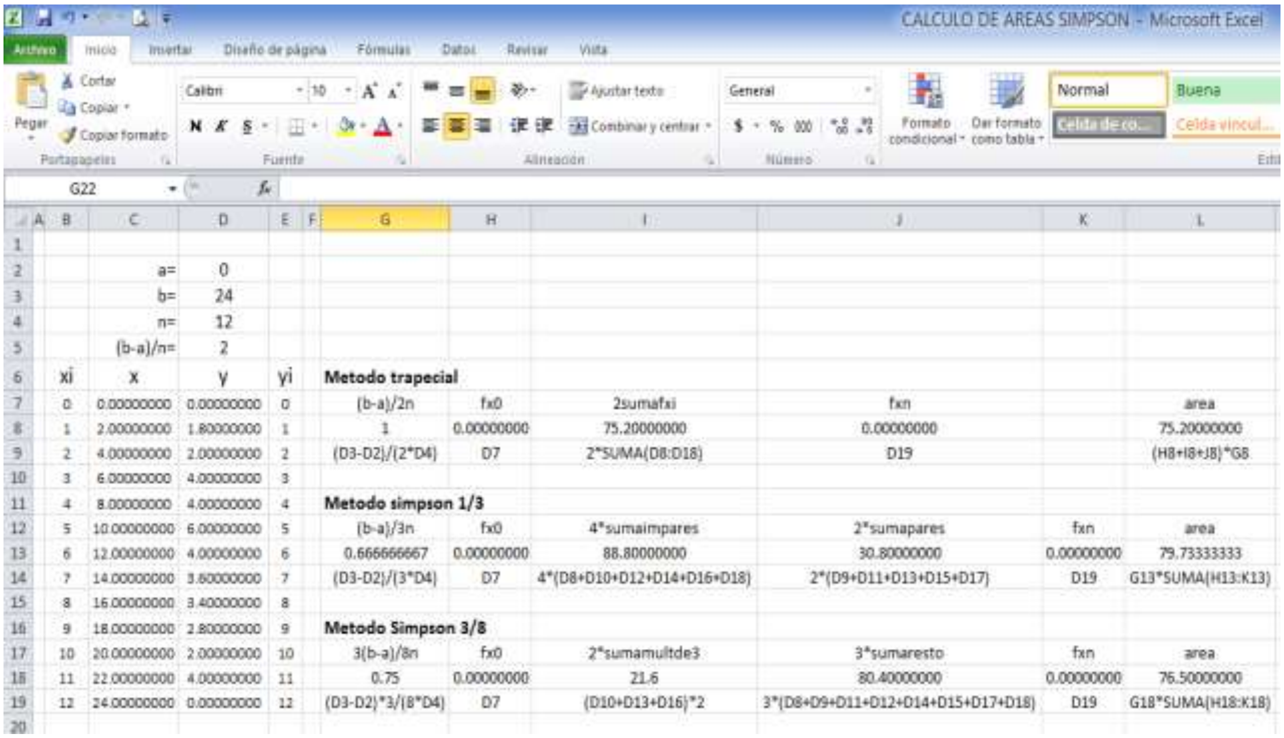
Se puede utilizar el Método Simpson $\frac{1}{3}$ cuyo modelo es $A = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$ toda vez que cumple el requisito de que n sea número par, esto es, $n = 12$, $a = 0$ y $b = 24$, al sustituir en el modelo se obtiene:

$$A = \left(\frac{24-0}{3(12)}\right)[0 + 4(1.8 + 4 + 6 + 3.6 + 2.8 + 4) + 2(2 + 4 + 4 + 3.4 + 2) + 0] = 79.73\ m^2$$

También es viable utilizar el Método Simpson $\frac{3}{8}$ cuyo modelo $A=\frac{3(b-a)}{8n}\left[f(x_0)+2\sum_{i=,3,6,9}^{n-3}f(x_i)+3\sum_{j=resto}^{n-1}f(x_j)+f(x_n)\right]$ toda vez que cumple el requisito de que n sea múltiple de 3, al sustituir en la fórmula se obtiene que el área es $A=\left(\frac{3(24-0)}{8(12)}\right)[0+2(4+4+2.8)+3(1.8+2+4+6+3.6+3.4+2+4)+0]=76.50\,m^2$

A continuación (ver Cuadro 13) se concentran los cálculos y las fórmulas del área de la sección transversal.

Cuadro 13. Cálculos y fórmulas del área de la sección transversal del río mediante los Métodos Trapezoidal, Simpson$\frac{1}{3}$ y Simpson $\frac{3}{8}$

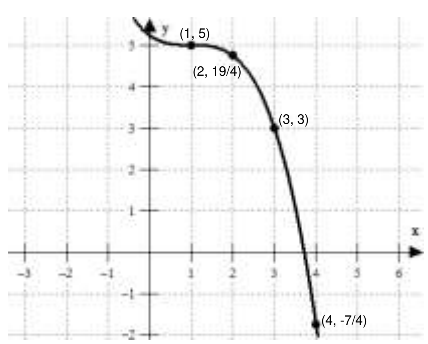


	B	C	D	E	G	H	I	J	K	L
1										
2		a=	0							
3		b=	24							
4		n=	12							
5		(b-a)/n=	2							
6	xi	x	y	yi	**Metodo trapecial**					
7	0	0.00000000	0.00000000	0	(b-a)/2n	fx0	2sumafxi	fxn		area
8	1	2.00000000	1.80000000	1	1	0.00000000	75.20000000	0.00000000		75.20000000
9	2	4.00000000	2.00000000	2	(D3-D2)/(2*D4)	D7	2*SUMA(D8:D18)	D19		(H8+I8+J8)*G8
10	3	6.00000000	4.00000000	3						
11	4	8.00000000	4.00000000	4	**Metodo simpson 1/3**					
12	5	10.00000000	6.00000000	5	(b-a)/3n	fx0	4*sumaimpares	2*sumapares	fxn	area
13	6	12.00000000	4.00000000	6	0.666666667	0.00000000	88.80000000	30.80000000	0.00000000	79.73333333
14	7	14.00000000	3.60000000	7	(D3-D2)/(3*D4)	D7	4*(D8+D10+D12+D14+D16+D18)	2*(D9+D11+D13+D15+D17)	D19	G13*SUMA(H13:K13)
15	8	16.00000000	3.40000000	8						
16	9	18.00000000	2.80000000	9	**Metodo Simpson 3/8**					
17	10	20.00000000	2.00000000	10	3(b-a)/8n	fx0	2*sumamultde3	3*sumaresto	fxn	area
18	11	22.00000000	4.00000000	11	0.75	0.00000000	21.6	80.40000000	0.00000000	76.50000000
19	12	24.00000000	0.00000000	12	(D3-D2)*3/(8*D4)	D7	(D10+D13+D16)*2	3*(D8+D9+D11+D12+D14+D15+D17+D18)	D19	G18*SUMA(H18:K18)
20										

Ejemplo del cálculo de área bajo la curva previa determinación de la expresión algebraica

La gráfica que se muestra (ver Figura 71) a continuación es una curva de tercer grado de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ que pasa por los puntos (1, 5), (2, $\frac{19}{4}$), (3, 3) y (4, $-\frac{7}{4}$).

Figura 64. Gráfica de la ecuación $y=ax^3+bx^2+cx+d$



Determinar (con 8 cifras después del punto decimal):
A) El área bajo la curva en el intervalo $[1,\ 3]$ mediante el Método Analítico.
Primeramente debe determinarse la expresión algebraica, para ello se utilizan los puntos dados sobre la gráfica, con el propósito de estructurar un sistema de 4 ecuaciones con las incógnitas $a, b, c\ y\ d$. Con el punto $P_1(1,5)$ se forma la ecuación $a+b+c+d=5$, con el punto $P_2(2,\frac{19}{4})$ se obtiene la ecuación $8a+4b+2c+d=\frac{19}{4}$, mientras que con el punto $P_3(3,3)$ se forma la ecuación $27a+9b+3c+d=3$, finalmente con el punto $P_4(4,-\frac{7}{4})$ la ecuación resultante es $64a+16b+4c+d=-\frac{7}{4}$, por lo tanto el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} a+b+c+d=5 \\ 8a+4b+2c+d=\dfrac{19}{4} \\ 27a+9b+3c+d=3 \\ 64a+16b+4c+d=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene que $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$, $c=-\frac{3}{4}$ y $d=\frac{21}{4}$. Por lo que la expresión algebraica queda estructurada mediante $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{24}{4}$. El área exacta se determina mediante la respectiva integral, esto es, $A=\int_1^3\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{24}{4}\right)dx=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{21}{4}x\Big|_1^3=9.00000000\ u^2$

B) El área bajo la curva en el intervalo $[1,\ 3]$ mediante el Método Trapecial con n = 12 figuras.
Conocida la función es factible ahora construir una tabla numérica con $n=12$, se sabe que $a=1$ y $b=3$, luego el paso es entonces $paso=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{12}=0.1666$

Abscisas	Ordenadas
$x_0=1.00000000$	$f(x_0)=5.00000000$
$x_1=1.16666667$	$f(x_1)=4.99884259$
$x_2=1.33333333$	$f(x_2)=4.99074074$
$x_3=1.50000000$	$f(x_3)=4.96875000$
$x_4=1.66666667$	$f(x_4)=4.92592593$
$x_5=1.83333333$	$f(x_5)=4.85532407$
$x_6=2.00000000$	$f(x_6)=4.75000000$
$x_7=2.16666667$	$f(x_7)=4.60300926$
$x_8=2.33333333$	$f(x_8)=4.40740741$
$x_9=2.50000000$	$f(x_9)=4.15625000$
$x_{10}=2.66666667$	$f(x_{10})=3.84259259$
$x_{11}=2.83333333$	$f(x_{11})=3.45949074$
$x_{12}=3.00000000$	$f(x_{12})=3.00000000$

Sustituyendo en el mo0delo se obtiene que: $A=\left(\frac{3-1}{2(12)}\right)[5.00000000+2(4.99884259+4.99074074+4.96875000+4.92592593+4.85532407+4.75000000+4.60300926+4.40740741+4.15625000+3.84259259+3.45949074)+3.00000000]=8.99305555\ u^2$

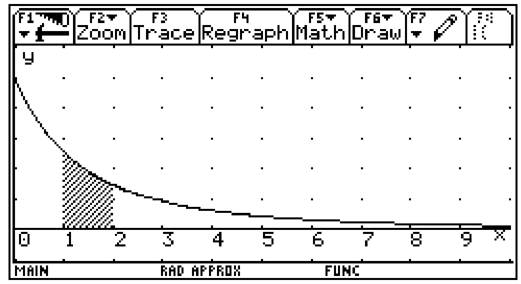
C) El error relativo porcentual calculado a partir del Método Analítico y el área por el Método Trapecial con n = 12 figuras.
El error relativo porcentual es entonces $ERP=\left|\frac{9.00000000-8.99305555}{9.00000000}\right|100=0.07716049\%$

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (Área bajo la curva)

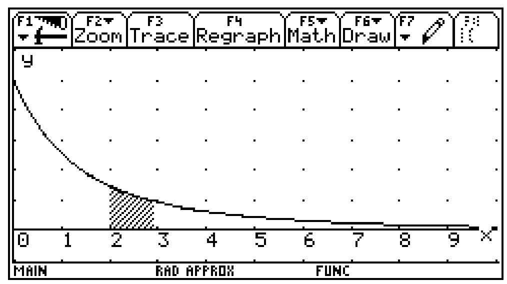
1. Calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{32}{(x+4)^3}$ en el intervalo [1, 2], que se muestra en la gráfica contigua, considerar las siguientes coordenadas de los puntos del gráfico y utilizar el método analítico, trapecial Simpson $\mathbf{\frac{1}{3}}$ para realizar la estimación del área.

Valor X	Valor Y
1.0	0.2560
1.1	0.2412
1.2	0.2276
1.3	0.2149
1.4	0.2032
1.5	0.1923
1.6	0.1822
1.7	0.1728
1.8	0.1640
1.9	0.1558
2.0	0.1481



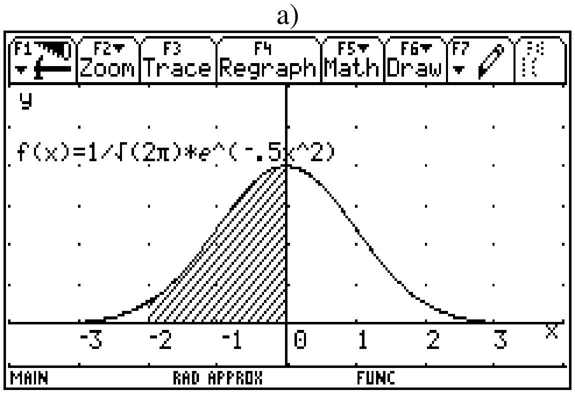
2. Calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{32}{(x+4)^3}$ en el intervalo [2, 2.9], que se muestra en la gráfica contigua, considerar las siguientes coordenadas de los puntos del gráfico y utilizar el método analítico, trapecial y Simpson $\mathbf{\frac{3}{8}}$ para realizar la estimación del área.

Valor X	Valor Y
2.0	0.1481
2.1	0.1410
2.2	0.1343
2.3	0.1280
2.4	0.1221
2.5	0.1165
2.6	0.1113
2.7	0.1064
2.8	0.1018
2.9	0.0974



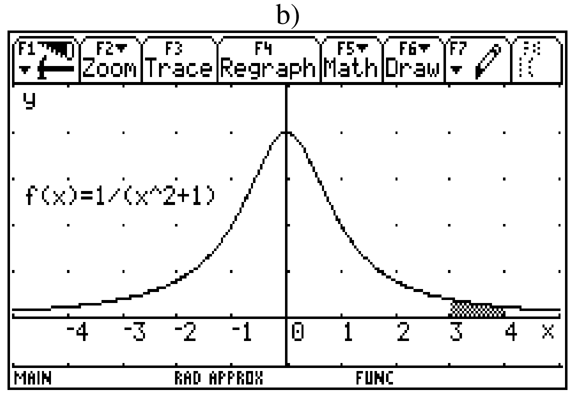
3. Para el siguiente par de gráficas, calcular el área señalada por la sombra, utilice los métodos: trapecial, Simpson 1/3 y Simpson 3/8, con n=12. Las funciones de las gráficas se indican en cada una de las gráficas.

a)



$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2}}$$

b)

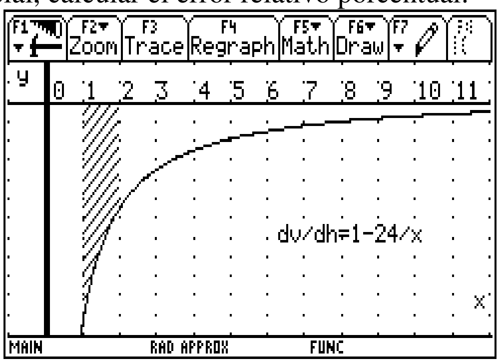


$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2+1}}$$

4. Los siguientes datos fueron recolectados en un estudio entre la cantidad de lluvia y la cantidad de contaminación eliminada del aire:

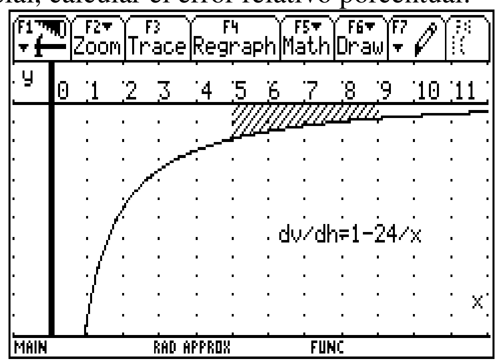
Lluvia diaria X (en mm).	1	2	3	4	5	6	7	8
Variación de partículas eliminadas por lluvia diaria (mg/m^3 por mm.)	-23.0	-11.0	-7.0	-5.0	-3.8	-3.0	-2.42	-2.0

a) Determinar el aumento de las partículas eliminadas de contaminación cuando la lluvia aumenta de 1 a 2 milímetros. Utilizar el método analítico y el método trapecial, calcular el error relativo porcentual.



$$\frac{dv}{dh} = 1 - \frac{24}{x}$$

b) Calcular el aumento de las partículas eliminadas de contaminación cuando la lluvia aumenta de 5 a 9 milímetros. Utilizar el método analítico y el método trapecial, calcular el error relativo porcentual.



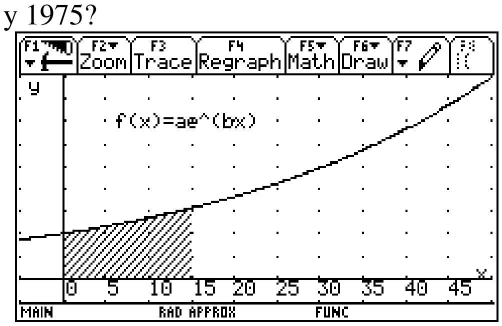
$$\frac{dv}{dh} = 1 - \frac{24}{x}$$

5. La información que se presenta en la tabulación siguiente corresponde a la tasa de crecimiento de la población de cierta entidad y el tiempo en el cual se presenta dicha tasa. Así por ejemplo, el número 0 corresponde al año de 1960 y la variación (tasa de crecimiento) de la población fue de 200 habitantes por año. El número 10 corresponde al año de 1970 donde la tasa de crecimiento es de 270 habitantes por año.

Tiempo (t) años	0	5	10	15	20	25	30	35
Tiempo (t) años	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Dp/dt (hab/año)	200	232	270	314	364	423	492	572

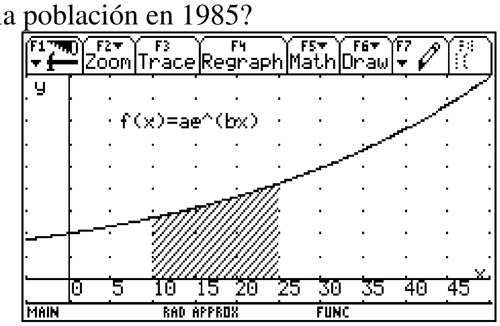
Calcular la variación de la población en el año 2000.

a) ¿Cuál será el aumento de población entre el año 1960 y 1975?



$$f(x) = ae^{bx}$$

b) Si la población en 1970 es 40,000 habitantes, ¿Cuál será la población en 1985?

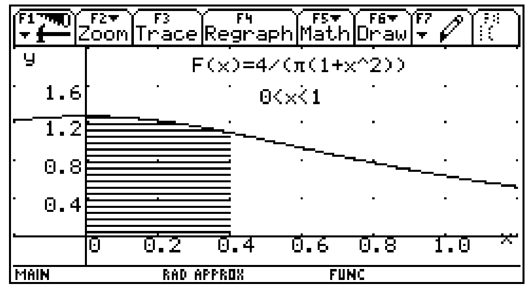


$$f(x) = ae^{bx}$$

6. La velocidad de un objeto en movimiento está dado por la función $s(t) = \frac{t^3 e^t}{(t^2+1)^2}$, determinar el cambio de posición en el intervalo de tiempo [1,2]. Utilizar los métodos analítico, Simpson $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$ y trapecial con 12 secciones.

7. Calcular el área bajo la curva en el intervalo [0, 0.40], que se muestra en la gráfica contigua, considerar las siguientes coordenadas de los puntos del gráfico y utilizar el método analítico, trapecial y Simpson $\frac{1}{3}$ para realizar la estimación. Calcular los errores relativos porcentuales en cada caso.

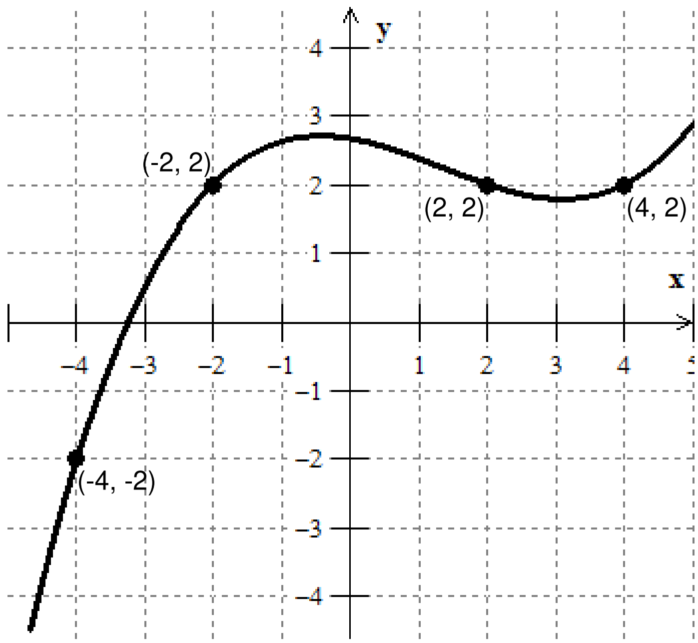
Valor X	Valor Y
0.00	1.2732
0.05	1.2701
0.10	1.2606
0.15	1.2452
0.20	1.2243
0.25	1.1983
0.30	1.1681
0.35	1.1343
0.40	1.0976



Autoevaluación 1 de la unidad 5

Resolver los siguientes cuestionamientos

La gráfica que se muestra a continuación es una curva de tercer grado de la forma $\boldsymbol{y = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ que pasa por los puntos (-4, -2), (-2, 2), (2, 2) y (4, 2).



Determinar:
A) El área bajo la curva en el intervalo $[0,\ 4]$ mediante el Método Analítico.
En todos los caso utilice 8 cifras después del punto

B) El área bajo la curva en el intervalo $[0,\ 4]$ mediante el Método Trapecial con n = 24 figuras.

C) El error relativo porcentual calculado a partir del Método Analítico y el área por el método Trapecial con n = 24 figuras.

D) El área bajo la curva en el intervalo $[0,\ 4]$ mediante el Método Simpson 1/3 con n = 24 figuras.

E) El área bajo la curva en el intervalo $[0,\ 4]$ mediante el Método Simpson 3/8 con n = 24 figuras.

6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función f con una o más de las derivadas de la función. Un ejemplo es la ecuación $\frac{d^2f(x)}{dx^2} + 2x\frac{df(x)}{dx} + f^2(x) = senx$. Observe que esta ecuación en particular incluye una función f además de su primera y segunda derivadas. Cualquier ecuación diferencial dada puede contener, o no, f o cualquier derivada de f. Sin embargo, para que una ecuación constituya una ecuación diferencial, por lo menos debe figurar una derivada de f. El objetivo de la resolución de una ecuación como la ecuación presentada consiste en determinar la función f.

Muchas de las leyes de la naturaleza –en física, química, biología, ingeniería y astronomía- encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales son el lenguaje de la naturaleza. Las aplicaciones también abundan en las mismas matemáticas, especialmente en la geometría, el análisis armónico y diseño de modelos. Las ecuaciones diferenciales se presentan en la economía, ciencia de sistemas y otros campos de las matemáticas.

No resulta difícil darse cuenta de la razón por la que las ecuaciones diferenciales se presentan con tanta facilidad en las ciencias. Si $y = f(x)$ es una función dada, entonces la derivada $\frac{df}{dx}$ puede interpretarse como la razón de cambio de f con respecto a x. En cualquier proceso de la naturaleza, las variables involucradas se relacionan con sus razones de cambio a través de los principios científicos que rigen el proceso, es decir, las leyes de la naturaleza. Cuando se expresa esta relación con notación matemática por lo general se obtiene como resultado una ecuación diferencial.

En razón de lo anterior una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial. Las ecuaciones diferenciales son objeto de estudio en este apartado, nos avocaremos a las de primero, segundo y tercer orden, específicamente su resolución mediante los métodos de Euler, Euler Mejorado y Runge Kutta de Cuarto orden. Presentaremos los modelos correspondientes y la ejemplificación de cada uno de ellos.

6.1 Método de Euler y Euler Mejorado

Una de las técnicas más sencillas para aproximar soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ se llama método de Euler o método de las tangentes. Aplica el hecho de que la derivada de una función $y(x)$, evaluada en un punto x_0, es la pendiente de la tangente a la gráfica de $y(x)$ en este punto. Como el valor de la derivada de la solución en (x_0, y_0), la pendiente de la tangente a la curva de solución en este punto es $f(x_0, y_0)$, Si recorremos una distancia corta por la línea tangente obtenemos una aproximación a un punto cercano de la curva de solución. Luego se repite el proceso en el punto nuevo. Los modelos de los Métodos de Euler y Euler Mejorado se exhiben a continuación.

Modelo del método de Euler: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ en donde $x_n = x_0 + nh$, h es el paso, habitualmente $h = 0.1$, aunque si se desea mejorar la aproximación se utilizan valores más pequeños como $h = 0.05$ o bien $h = 0.01$.

Modelo del método de Euler Mejorado o también fórmula de Heun $y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}\right]$ en donde $y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Dada la ecuación diferencial $y' - y = 2x$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$. Utilizar el método de Euler a fin de obtener una aproximación a $y(0.50)$ con $h = 0.1$. Utilizar el método de Euler Mejorado con el propósito de obtener una aproximación a $y(0.50)$ con $h = 0.1$. Resolver la ecuación diferencial mediante alguno de los métodos conocidos y calcular el error relativo porcentual.

El modelo es $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, se sabe que $y(0) = 0$ y $f(x_n, y_n) = 2x + y$
Se evalúa la función $f(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 = 2(0) + 0 = 0$, luego $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.000000$. Lo anterior significa que $y(0.1) = y_1 = 0.000000$

Ahora $x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$, se evalúa la función $f(x_1, y_1) = 2x_1 + y_1 = 2(0.1) + 0 = 0.20$, luego $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + .1(.20) = 0.020000$. Lo anterior significa que $y(0.2) = y_2 = 0.020000$

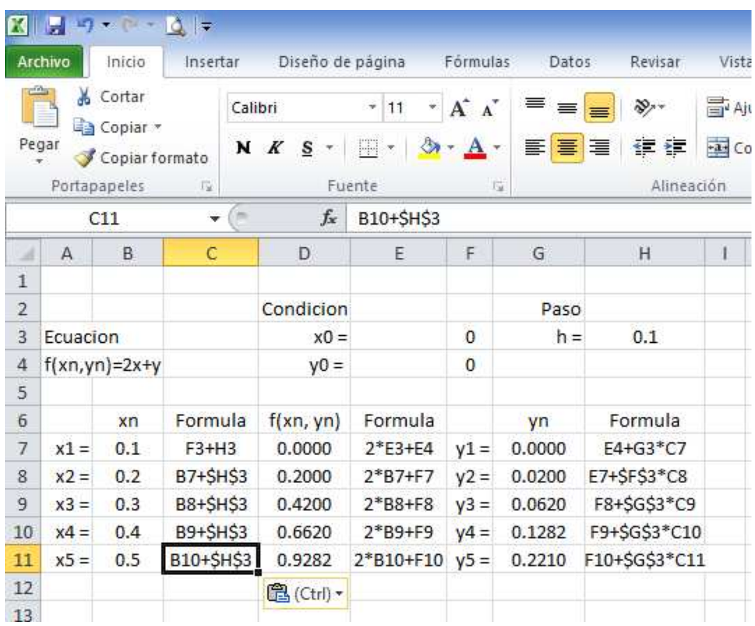
$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$, se evalúa la función $f(x_2, y_2) = 2x_2 + y_2 = 2(0.2) + 0.020000 = 0.420$, luego $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.02 + .1(.420) = 0.062000$. Lo anterior significa que $y(0.3) = y_3 = 0.062000$

$x_3 = 0.2 + 0.1 = 0.3$, se evalúa la función $f(x_3, y_3) = 2x_3 + y_3 = 2(0.3) + 0.0620000 = 0.6620$, luego $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 0.062 + .1(.6620) = 0.12820$. Lo anterior significa que $y(0.4) = y_4 = 0.12820$

Finalmente, $x_4 = 0.3 + 0.1 = 0.4$, se evalúa la función $f(x_4, y_4) = 2x_4 + y_4 = 2(0.4) + 0.12820 = 0.9282$, luego $y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 0.12820 + .1(.9282) = 0.221020$.
Lo anterior significa que $y(0.5) = y_5 = 0.221020$

A continuación (ver Cuadro 14) se presentan los cálculos y las fórmulas para la realización de los cálculos en una hoja electrónica.

Cuadro 14. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas de la ecuación $y' - y = 2x$ y la aproximación a $y(0.50)$ mediante el Método de Euler.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2				Condicion			Paso	
3	Ecuacion			x0 =		0	h =	0.1
4	f(xn,yn)=2x+y			y0 =		0		
5								
6		xn	Formula	f(xn, yn)	Formula		yn	Formula
7	x1 =	0.1	F3+H3	0.0000	2*E3+E4	y1 =	0.0000	E4+G3*C7
8	x2 =	0.2	B7+$H$3	0.2000	2*B7+F7	y2 =	0.0200	E7+$F$3*C8
9	x3 =	0.3	B8+$H$3	0.4200	2*B8+F8	y3 =	0.0620	F8+$G$3*C9
10	x4 =	0.4	B9+$H$3	0.6620	2*B9+F9	y4 =	0.1282	F9+$G$3*C10
11	x5 =	0.5	B10+$H$3	0.9282	2*B10+F10	y5 =	0.2210	F10+$G$3*C11

El modelo es $y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}\right]$ en donde $y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. se sabe que $y(0) = 0$ y $f(x_n, y_n) = 2x + y$

Se evalúa la función $f(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 = 2(0) + 0 = 0$, luego $y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + .1(0) = 0$. A continuación se valúa $f(x_1, y_1^*) = 2x_1 + y_1^* = 2(0.1) + 0 = 0.2$ y se estima el promedio mediante $y_1 = y_0 + h\left[\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^*)}{2}\right] = 0 + .1\left[\frac{0+0.2}{2}\right] = 0.01$. Lo cual significa que $y(0.1) = y_1 = 0.01$

En la segunda iteración se tiene, $f(x_1, y_1) = 2x_1 + y_1 = 2(0.1) + 0.01 = 0.21$, luego $y_2^* = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.01 + .1(0.21) = 0.031$. A continuación se valúa $f(x_2, y_2^*) = 2x_2 + y_2^* = 2(0.2) + 0.031 = 0.4310$ y se estima el promedio mediante $y_2 = y_1 + h\left[\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^*)}{2}\right] = 0.01 + .1\left[\frac{0.21+0.4310}{2}\right] = 0.04205$. Lo cual significa que $y(0.2) = y_2 = 0.04205$

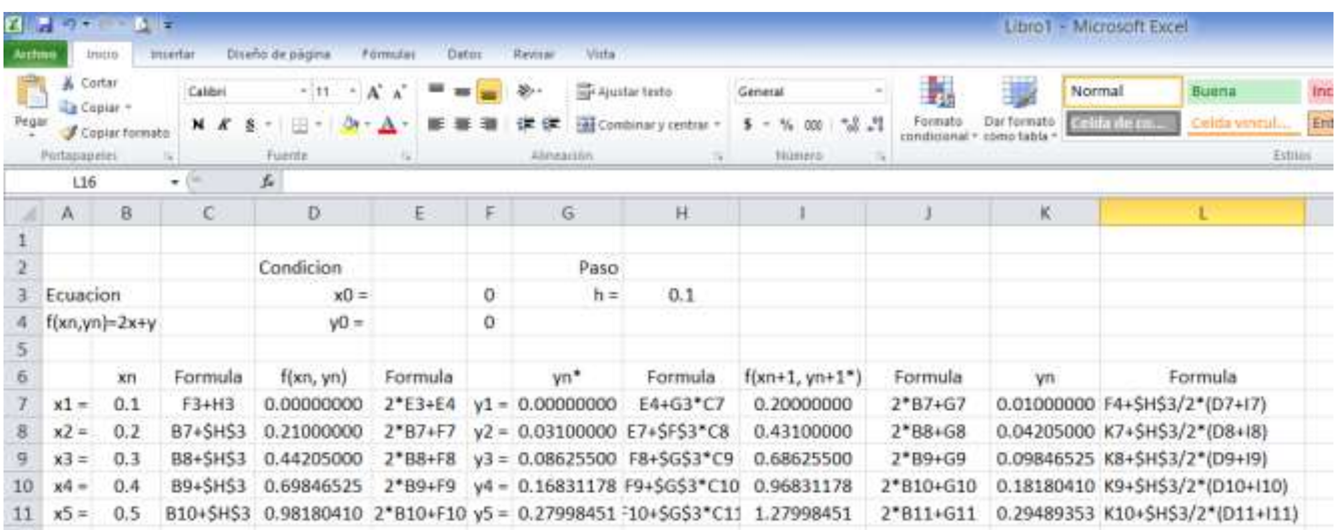
Nuevamente se calcula $f(x_2, y_2) = 2x_2 + y_2 = 2(0.2) + 0.04205 = 0.44205$, luego $y_3^* = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.04205 + .1(0.44205) = 0.086255$. A continuación se valúa $f(x_3, y_3^*) = 2x_3 + y_3^* = 2(0.3) + 0.086255 = 0.686255$ y se estima el promedio mediante $y_3 = y_2 + h\left[\frac{f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3^*)}{2}\right] = 0.04205 + .1\left[\frac{0.44205+0.686255}{2}\right] = 0.09846525$. Lo cual significa que $y(0.3) = y_3 = 0.09846525$

En la cuarta iteración se tiene $f(x_3, y_3) = 2x_3 + y_3 = 2(0.3) + 0.09846525 = 0.69846525$, luego $y_4^* = y_3 + hf(x_3, y_3) = 0.09846525 + .1(0.69846525) = 0.168311775$. A continuación se valúa $f(x_4, y_4^*) = 2x_4 + y_4^* = 2(0.4) + 0.168311775 = 0.968311775$ y se estima el promedio mediante $y_4 = y_3 + h\left[\frac{f(x_3,y_3)+f(x_4,y_4^*)}{2}\right] = 0.09846525 + .1\left[\frac{0.69846525+0.968311775}{2}\right] = 0.18180410125$. Lo cual significa que $y(0.4) = y_4 = 0.18180410125$

Finalmente se tiene $f(x_4, y_4) = 2x_4 + y_4 = 2(0.4) + 0.18180410125 = 0.98180410125$, luego $y_5^* = y_4 + hf(x_4, y_4) = 0.18180410125 + .1(0.98180410125) = 0.279984511375$. A continuación se valúa $f(x_5, y_5^*) = 2x_5 + y_5^* = 2(0.5) + 0.279984511375 = 1.279984511375$ y se estima el promedio mediante $y_5 = y_4 + h\left[\frac{f(x_4,y_4)+f(x_5,y_5^*)}{2}\right] = 0.18180410125 + .1\left[\frac{0.98180410125+1.279984511375}{2}\right] = 0.29489353188125$. Lo cual significa que $y(0.5) = y_5 = 0.29489353188125$

A continuación (ver Cuadro 15) se presentan los cálculos y las fórmulas para la realización de los cálculos en una hoja electrónica.

Cuadro 15. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas de la ecuación $y' - y = 2x$ y la aproximación a $y(0.50)$ mediante el Método de Euler Mejorado.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2				Condicion			Paso					
3	Ecuacion			x0 =		0	h =	0.1				
4	f(xn,yn)=2x+y			y0 =		0						
5												
6		xn	Formula	f(xn, yn)	Formula		yn*	Formula	f(xn+1, yn+1*)	Formula	yn	Formula
7	x1 =	0.1	F3+H3	0.00000000	2*E3+E4	y1 =	0.00000000	E4+G3*C7	0.20000000	2*B7+G7	0.01000000	F4+$H$3/2*(D7+I7)
8	x2 =	0.2	B7+$H$3	0.21000000	2*B7+F7	y2 =	0.03100000	E7+$F$3*C8	0.43100000	2*B8+G8	0.04205000	K7+$H$3/2*(D8+I8)
9	x3 =	0.3	B8+$H$3	0.44205000	2*B8+F8	y3 =	0.08625500	F8+$G$3*C9	0.68625500	2*B9+G9	0.09846525	K8+$H$3/2*(D9+I9)
10	x4 =	0.4	B9+$H$3	0.69846525	2*B9+F9	y4 =	0.16831178	F9+$G$3*C10	0.96831178	2*B10+G10	0.18180410	K9+$H$3/2*(D10+I10)
11	x5 =	0.5	B10+$H$3	0.98180410	2*B10+F10	y5 =	0.27998451	-10+$G$3*C11	1.27998451	2*B11+G11	0.29489353	K10+$H$3/2*(D11+I11)

La ecuación diferencial es lineal, su solución complementaria es $y_c = C_1 e^x$. Por el método de las conjeturas se tiene que la solución particular propuesta es $y_p = Ax + B$, para conocer los valores de A y B se calcula la primera deriva y se sustituye en la ecuación diferencial original, esto es, $y'_p = A$, luego $A - Ax - B = 2x$. Lo que significa que $-Ax = 2x$, por lo que $A = -2$. También $A - B = 0$, como $A = -2$ se tiene que $B = -2$, de tal suerte que la solución particular es $y_p = -2x - 2$, se sabe que la solución general es $y = y_c + y_p$ entonces queda que $y = C_1 e^x - 2x - 2$. Como se cuenta con la condición inicial $y(0) = 0$ al sustituir en la solución general resulta que $C_1 = 2$. Por lo tanto, la solución es $y = 2e^x - 2x - 2$. Al evaluar la ecuación en $x = 0.5$ resulta $y(0.50) = 2e^{0.5} - 2(0.5) - 2 = 0.297443$ que es el resultado exacto.

Al contrastar el resultado exacto con el calculado mediante el Método de Euler, se tiene que, el error relativo porcentual $ERP = \left|\frac{0.297443-0.221020}{0.297443}\right| 100 = 25.693212\%$

Al contrastar el resultado exacto con el calculado mediante el Método de Euler Mejorado, se tiene que, el error relativo porcentual $ERP = \left|\frac{0.297443-0.294893}{0.297443}\right| 100 = 0.857307\%$

6.2 Método de Runge Kutta de cuarto orden

Es probable que uno de los procedimientos más difundidos y a la vez más exactos para obtener soluciones aproximadas al problema de valor inicial $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ sea el método de Runge Kutta de cuarto orden. El modelo del Método de Runge Kutta de cuarto orden se exhibe a continuación.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ en donde } x_n = x_0 + nh$$

Los factores $k_1, k_2, k_3 \ y \ k_4$ se calculan mediante las fórmulas:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

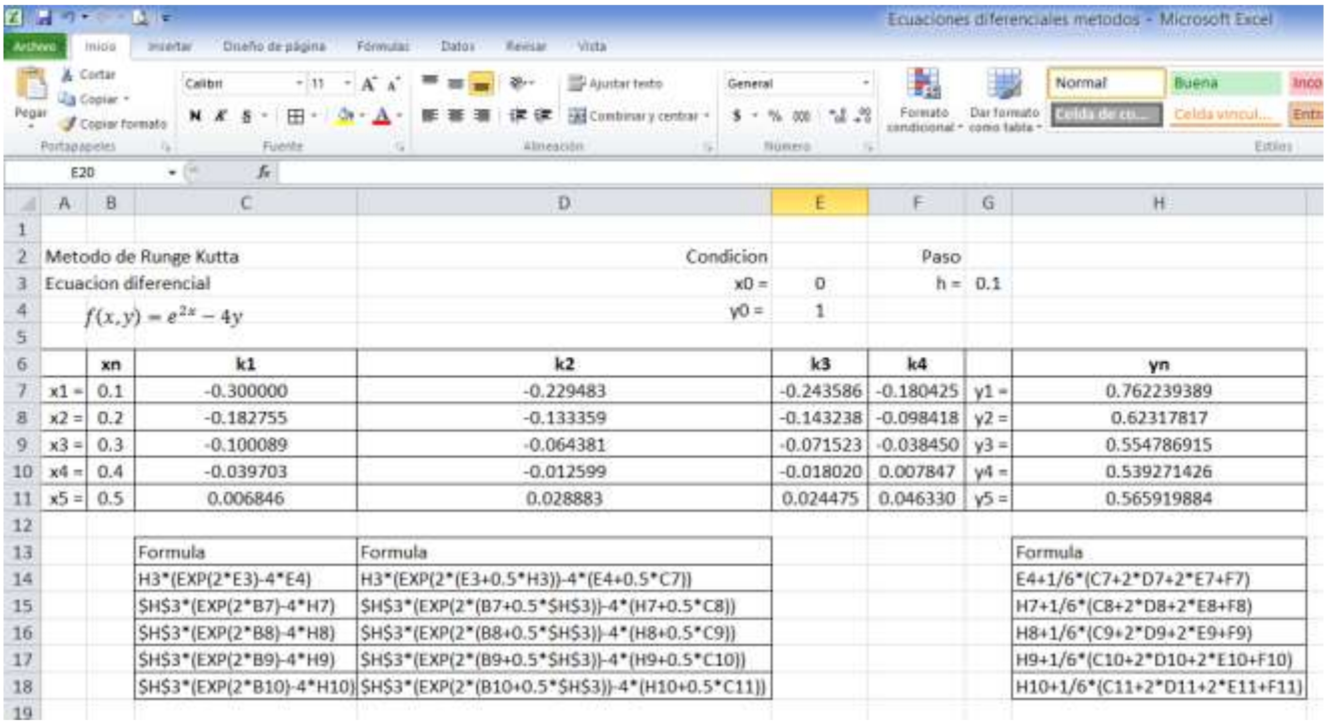
Ejemplo de aplicación del Método de Runge Kutta de cuarto orden

Utilizar el método de Runge Kutta de cuarto orden a fin de obtener una aproximación a $y(0.5)$ con $h = 0.1$ para el problema de valor inicial $y' + 4y = e^{2x}$ sujeta a la condición $y(0) = 1$. Calcular la solución exacta mediante las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas y estimar el error relativo porcentual.

La ecuación diferencial es lineal, su solución complementaria es $y_c = C_1 e^{-4x}$. Por el método de las conjeturas se tiene que la solución particular propuesta es $y_p = Ae^{2x}$, para conocer el valor de A se calcula la primera deriva y se sustituye en la ecuación diferencial original, esto es, $y'_p = 2Ae^{2x}$, luego $2Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = e^{2x}$. Lo que significa que $6A = 1$, por lo que $A = \frac{1}{6}$, de tal suerte que la solución particular es $y_p = \frac{1}{6}e^{2x}$, se sabe que la solución general es $y = y_c + y_p$ entonces queda que $y = C_1 e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{2x}$. Como se cuenta con la condición inicial $y(0) = 1$ al sustituir en la solución general resulta que $C_1 = \frac{5}{6}$. Por lo tanto, la solución es $y = \frac{5}{6}e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{2x}$. Al evaluar la ecuación en $x = 0.5$ resulta $y(0.50) = \frac{5}{6}e^{-4(0.5)} + \frac{1}{6}e^{2(0.5)} = 0.565826$ que es el resultado exacto.

Para llevar a cabo los cálculos se utilizó una hoja electrónica de Excel (ver Cuadro 16), la estrategia seguida es similar a las descritas con los métodos de Euler y Euler Mejorado, aparecen las fórmulas de algunos de los cálculos requeridos (factores k_1, k_2, k_3 y k_4 y aproximación) en el método de Runge Kutta. El resultado aproximado mediante este método es $y(0.5) = 0.565919$.
En consecuencia el error relativo porcentual es $ERP = \left|\frac{0.565826-0.565919}{0.565826}\right| 100 = 0.016436\%$

Cuadro 16. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas del Método de Runge Kutta



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Metodo de Runge Kutta			Condicion		Paso		
3	Ecuacion diferencial			x0 =	0	h =	0.1	
4		$f(x,y) = e^{2x} - 4y$		y0 =	1			
5								
6		xn	k1	k2	k3	k4		yn
7	x1 =	0.1	-0.300000	-0.229483	-0.243586	-0.180425	y1 =	0.762239389
8	x2 =	0.2	-0.182755	-0.133359	-0.143238	-0.098418	y2 =	0.62317817
9	x3 =	0.3	-0.100089	-0.064381	-0.071523	-0.038450	y3 =	0.554786915
10	x4 =	0.4	-0.039703	-0.012599	-0.018020	0.007847	y4 =	0.539271426
11	x5 =	0.5	0.006846	0.028883	0.024475	0.046330	y5 =	0.565919884
12								
13			Formula	Formula				Formula
14			H3*(EXP(2*E3)-4*E4)	H3*(EXP(2*(E3+0.5*H3))-4*(E4+0.5*C7))				E4+1/6*(C7+2*D7+2*E7+F7)
15			$H$3*(EXP(2*B7)-4*H7)	$H$3*(EXP(2*(B7+0.5*$H$3))-4*(H7+0.5*C8))				H7+1/6*(C8+2*D8+2*E8+F8)
16			$H$3*(EXP(2*B8)-4*H8)	$H$3*(EXP(2*(B8+0.5*$H$3))-4*(H8+0.5*C9))				H8+1/6*(C9+2*D9+2*E9+F9)
17			$H$3*(EXP(2*B9)-4*H9)	$H$3*(EXP(2*(B9+0.5*$H$3))-4*(H9+0.5*C10))				H9+1/6*(C10+2*D10+2*E10+F10)
18			$H$3*(EXP(2*B10)-4*H10)	$H$3*(EXP(2*(B10+0.5*$H$3))-4*(H10+0.5*C11))				H10+1/6*(C11+2*D11+2*E11+F11)
19								

Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea.

La ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = C_1 e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Método del operador anulador para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas.

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes y f es una función diferenciable tal que $L(f(x)) = 0$ se dice que L es un anulador de la función, por ejemplo una función constante como $y = k$ es anulada por D porque $Dk = 0$. La función $y = x$ es anulada por el operador diferencial D^2 porque la primera y segunda derivada de x son 1 y 0 respectivamente, en forma similar $D^3 x^2 = 0$.

El operador diferencial D^n anula cada una de las siguientes funciones:

$$1, \; x, \; x^2, \; \ldots, \; x^{n-1}$$

El operador diferencial $(D-\alpha)^n$ anula cada una de las siguientes funciones:

$$e^{\alpha x}, \; xe^{\alpha x}, \; x^2 e^{\alpha x}, \; \ldots, \; x^{n-1} e^{\alpha x}$$

Para resolver una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de la forma $\frac{dy}{dx} + ay = g(x)$, primero se obtiene y_c a partir de la ecuación diferencial homogénea, es decir la solución fundamental; después por el método del operador anulador se obtiene y_p, la solución particular, finalmente $y = y_c + y_p$.

Resolución de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

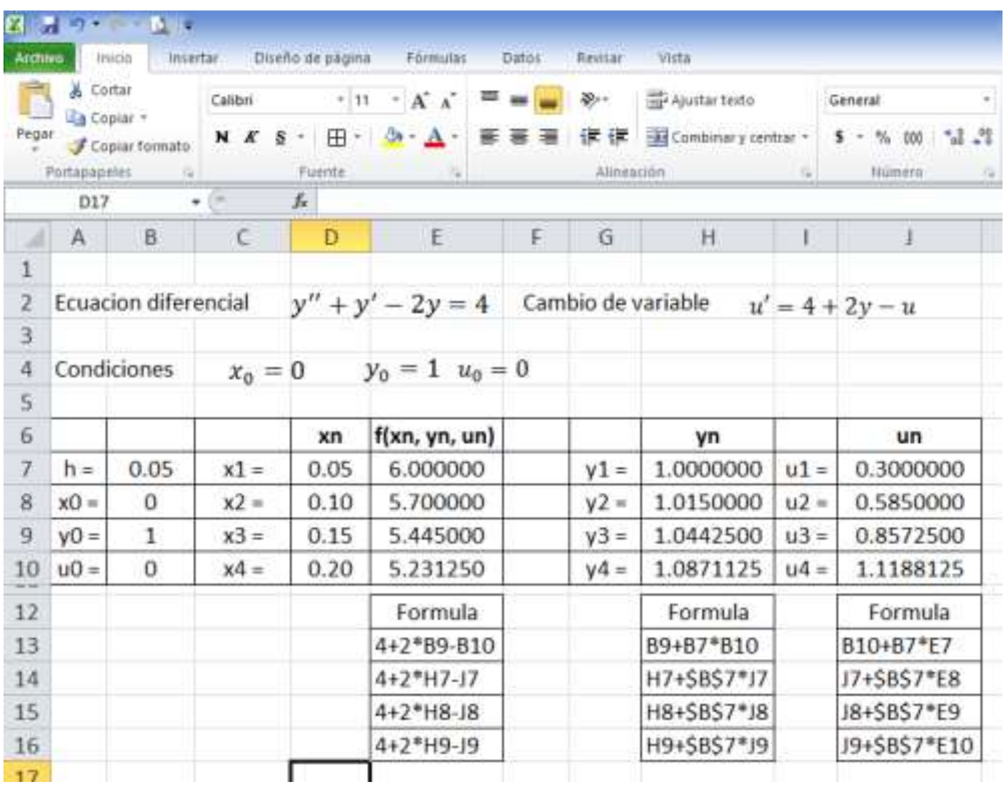
Para resolver ecuaciones de segundo orden de la forma: $y'' = f(x, y, y')$ sujeta a las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, se puede utilizar el cambio de variable, de manera que $y' = u$ y $u' = f(x, y, u)$ en donde $x_{n+1} = x_n + h$. Las condiciones iniciales: $y(x_0) = y_0$ $u(x_0) = y_1$, para finalmente calcular de forma iterativa (mediante el Método de Euler) hasta obtener la estimación requerida mediante $y_{n+1} = y_n + hu_n$ y $u_{n+1} = u_n + hf(x_n, y_n, u_n)$

Ejemplo de resolución de una ecuación diferencial de segundo orden.

Estimar $y(0.2)$ para la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = 4$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Calcular el resultado exacto y el error relativo porcentual. Utilizar $h = 0.05$.

Como se observó en la descripción del método, es necesario llevar a cabo un cambio de variable, hacer $y' = u$, en consecuencia se escribe la ecuación como $u' = 4 + 2y - u$. Con los datos iniciales y el paso $h = 0.05$ se desarrollan los cálculos como se exhiben (ver Cuadro 17) a continuación.

Cuadro 17. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas para resolver la ecuación diferencial de segundo orden.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Ecuacion diferencial			$y'' + y' - 2y = 4$		Cambio de variable		$u' = 4 + 2y - u$		
3										
4	Condiciones		$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$u_0 = 0$					
5										
6				xn	f(xn, yn, un)			yn		un
7	h =	0.05	x1 =	0.05	6.000000		y1 =	1.0000000	u1 =	0.3000000
8	x0 =	0	x2 =	0.10	5.700000		y2 =	1.0150000	u2 =	0.5850000
9	y0 =	1	x3 =	0.15	5.445000		y3 =	1.0442500	u3 =	0.8572500
10	u0 =	0	x4 =	0.20	5.231250		y4 =	1.0871125	u4 =	1.1188125
12					Formula			Formula		Formula
13					4+2*B9-B10			B9+B7*B10		B10+B7*E7
14					4+2*H7-J7			H7+$B$7*J7		J7+$B$7*E8
15					4+2*H8-J8			H8+$B$7*J8		J8+$B$7*E9
16					4+2*H9-J9			H9+$B$7*J9		J9+$B$7*E10
17										

La solución por el método numérico que se obtiene es $y(0.2) = 1.0871125$

La solución complementaria $y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, mientras que la solución particular se propone $y_p = A$, luego $y'_p = 0$ y $y''_p = 0$, al sustituir en la ecuación diferencial se tiene $0 + 0 - 2A = 4$, por lo tanto, $A = -2$, entonces la solución particular es $y_p = -2$, como la solución de la ecuación es $y = y_c + y_p$ entonces se escribe que $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2$. Para calcular las constantes se aplican las condiciones iniciales, esto es, $1 = C_1 + C_2 - 2$, o bien $C_1 + C_2 = 3$. Para aplicar la segunda condición se requiere obtener la primer derivada, esto es, $y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$, al sustituir se obtiene $0 = -2C_1 + C_2$, es decir, $2C_1 = C_2$. De la primera ecuación se tiene que $C_1 + 2C_1 = 3$, por lo que $C_1 = 1$, finalmente $C_2 = 2$. La solución de la ecuación diferencial es $y = e^{-2x} + 2e^x - 2$. Al evaluar la función para $x = 0.2$ se tiene:

$$y(0.2) = e^{-2(0.2)} + 2e^{(0.2)} - 2 = 1.11312556.$$

Por lo que el error relativo porcentual es $ERP = \left|\frac{1.11312556-1.0871125}{1.11312556}\right|100 = 2.336939\%$. Si se desea mejorar la aproximación y reducir el error relativo porcentual se puede utilizar un paso menor, por ejemplo, $h = 0.02$ (ver Cuadro 18).

Cuadro 18. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas para resolver la ecuación diferencial de segundo orden con $h = 0.02$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Ecuacion diferencial			$y'' + y' - 2y = 4$		Cambio de variable			$u' = 4 + 2y - u$	
3										
4	Condiciones		$x_0 = 0$		$y_0 = 1$		$u_0 = 0$			
5										
6				xn	f(xn, yn, un)			yn		un
7	h =	0.02	x1 =	0.02	6.000000		y1 =	1.0000000	u1 =	0.1200000
8	x0 =	0	x2 =	0.04	5.880000		y2 =	1.0024000	u2 =	0.2376000
9	y0 =	1	x3 =	0.06	5.767200		y3 =	1.0071520	u3 =	0.3529440
10	u0 =	0	x4 =	0.08	5.661360		y4 =	1.0142109	u4 =	0.4661712
11			x5 =	0.10	5.562251		y5 =	1.0235343	u5 =	0.5774162
12			x6 =	0.12	5.469652		y6 =	1.0350826	u6 =	0.6868093
13			x7 =	0.14	5.383356		y7 =	1.0488188	u7 =	0.7944764
14			x8 =	0.16	5.303161		y8 =	1.0647083	u8 =	0.9005396
15			x9 =	0.18	5.228877		y9 =	1.0827191	u9 =	1.0051171
16			x10 =	0.20	5.160321		y10 =	1.1028215	u10 =	1.1083236

La solución por el método numérico que se obtiene es $y(0.2) = 1.1028215$. Por lo que el error relativo porcentual es $ERP = \left|\frac{1.11312556-1.1028215}{1.11312556}\right|100 = 0.925687\%$.

Resolución de Ecuaciones Diferenciales de Tercer Orden

Para resolver ecuaciones de tercer orden de la forma $y''' = f(x, y, y', y'')$ sujeta a las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$ se utiliza doble cambio de variable, de manera que: $y' = u$, $u' = v$ y $v' = f(x, y, u, v)$.

Las condiciones iniciales son $y(x_0) = y_0$, $u(x_0) = y_1$ y $v(x_0) = y_2$. Para finalmente calcular (mediante el Método de Euler) de forma iterativa hasta obtener la estimación requerida.

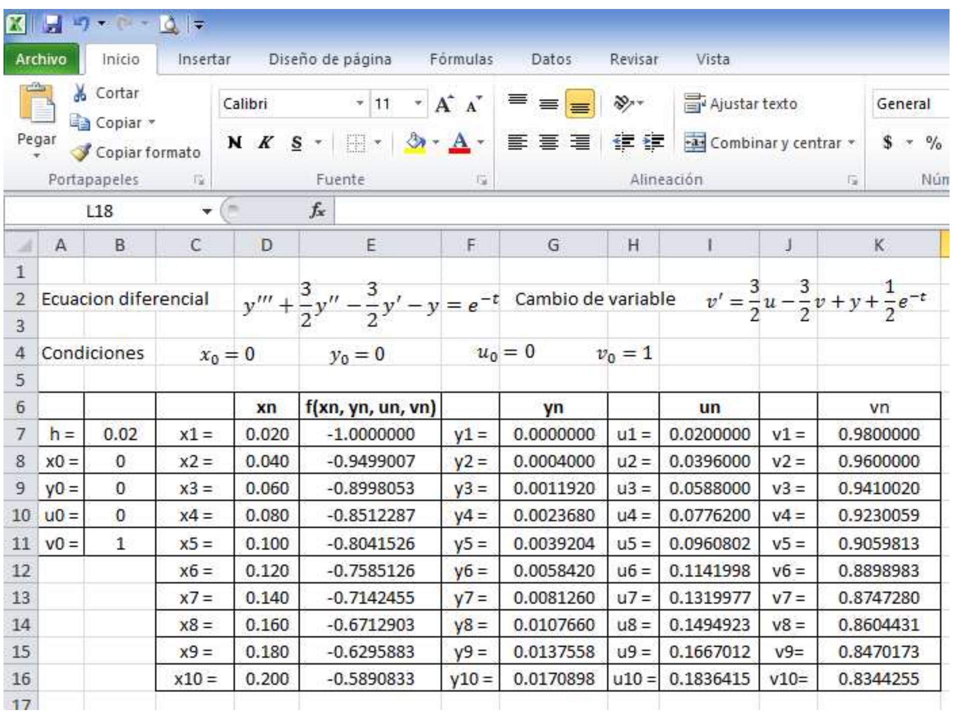
$$y_{n+1} = y_n + hu_n$$
$$u_{n+1} = u_n + hv_n$$
$$v_{n+1} = v_n + hf(x_n, y_n, u_n, v_n)$$

Ejemplo de resolución de una ecuación diferencial de tercer orden

Dada la ecuación diferencial $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 1$. Estimar el valor de $y(0.2)$ utilizando un paso $h = 0.05$. Calcular el resultado exacto y el error relativo porcentual.

Al dividir por 2 la ecuación queda $y''' + \frac{3}{2}y'' - \frac{3}{2}y' - y = \frac{1}{2}e^{-t}$. Los cambios de variables resultan $y' = u$ y $u' = v$. Al sustituir obtenemos la ecuación $v' = \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}v + y + \frac{1}{2}e^{-t}$ y las condiciones de cálculo son $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ y $h = 0.05$. Los cálculos se llevan a cabo en hoja de Excel (ver Cuadro 19).

Cuadro 19. Hoja electrónica con los cálculos y fórmulas para resolver la ecuación diferencial de tercer orden con $h = 0.02$



Ecuacion diferencial $y''' + \frac{3}{2}y'' - \frac{3}{2}y' - y = e^{-t}$ Cambio de variable $v' = \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}v + y + \frac{1}{2}e^{-t}$

Condiciones $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ $u_0 = 0$ $v_0 = 1$

			xn	f(xn, yn, un, vn)		yn		un		vn
h =	0.02	x1 =	0.020	-1.0000000	y1 =	0.0000000	u1 =	0.0200000	v1 =	0.9800000
x0 =	0	x2 =	0.040	-0.9499007	y2 =	0.0004000	u2 =	0.0396000	v2 =	0.9600000
y0 =	0	x3 =	0.060	-0.8998053	y3 =	0.0011920	u3 =	0.0588000	v3 =	0.9410020
u0 =	0	x4 =	0.080	-0.8512287	y4 =	0.0023680	u4 =	0.0776200	v4 =	0.9230059
v0 =	1	x5 =	0.100	-0.8041526	y5 =	0.0039204	u5 =	0.0960802	v5 =	0.9059813
		x6 =	0.120	-0.7585126	y6 =	0.0058420	u6 =	0.1141998	v6 =	0.8898983
		x7 =	0.140	-0.7142455	y7 =	0.0081260	u7 =	0.1319977	v7 =	0.8747280
		x8 =	0.160	-0.6712903	y8 =	0.0107660	u8 =	0.1494923	v8 =	0.8604431
		x9 =	0.180	-0.6295883	y9 =	0.0137558	u9 =	0.1667012	v9=	0.8470173
		x10 =	0.200	-0.5890833	y10 =	0.0170898	u10 =	0.1836415	v10=	0.8344255

En consecuencia la estimación que se obtiene es $y(0.2) = 0.0170898$

El resultado exacto se obtiene mediante la resolución analítica de la ecuación por algún método, como por ejemplo, mediante Transformada de Laplace, a continuación se muestra el procedimiento correspondiente. La ecuación diferencial y las condiciones son $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

Transformando se tiene $2s^3 y(s) - 2 + 3s^2 y(s) - 3sy(s) - 2y(s) = \frac{1}{s+1}$

Factorizando queda: $y(s)\left(2s^3 + 3s^2 - 3s - 2\right) = \frac{1}{s+1} + 2$

Si se despeja $y(s)$ se obtiene $y(s) = \frac{2s+3}{\left(2s^3 + 3s^2 - 3s - 2\right)(s+1)}$

Al desarrollar por fracciones parciales se tiene:

$y(s) = -\frac{16}{9(2s+1)} + \frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{5}{13(s-1)}$, a su vez $y(s) = -\frac{8}{9\left(s+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{5}{18(s-1)}$

Al transformar inversamente queda la solución: $y(t) = -\frac{8}{9}e^{-1/2t} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{t}$, con la cual al evaluar para $t = 0.2$ resulta $y(0.2) = 0.018824$. Finalmente el error relativo porcentual es $ERP = \left|\frac{0.018824 - 0.0170898}{0.018824}\right| 100 = 9.2127\%$

Actividades extraclase para el estudiante

Apartado A (Ecuaciones diferenciales de primer orden)

1. Dada la ecuación diferencial $y' = 2y + x^2 + 5$ sujeta a la condición $y(0) = 1$. Determinar $y(0.5)$ mediante el método de Euler. Utilizar $h = 0.05$. También calcular el error relativo porcentual a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial.

2. Dada la ecuación diferencial $y' - 3y = e^{2t}$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 2$. Determinar $y(0.4)$ mediante el método de Euler Mejorado. Utilizar $h = 0.02$. También calcular el error relativo porcentual a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial.

3. Dada la ecuación diferencial $y' + y = e^{-2t} + 1$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$. Determinar: $y(1.5)$ mediante el método de Runge Kutta utilice $h = 0.1$

4. En una refinería de petróleo, un depósito de almacenamiento contiene 2000 gal de gasolina en la cual se disuelven inicialmente 100 lb de un aditivo. En previsión del invierno, se bombea al depósito gasolina con 2 lb de aditivo por galón, a razón de 40 gal/min. La solución bien mezclada se extrae por bombeo a razón de 45 gal/min. Calcular la cantidad de aditivo que hay en el depósito al medio minuto de haber empezado el proceso. Utilizar el método de Runge Kutta con incremento $h = 0.05$

5. Un tanque contiene 500 galones de agua pura y le entra salmuera con 3 libras de sal por galón a un flujo de 5 galones por minuto. El tanque está bien mezclado y sale de él el mismo flujo de solución. Calcular la cantidad de sal en $t = 0.5$ minutos mediante el método de Euler Mejorado, considerar un paso $h = 0.05$ y calcular el error relativo porcentual a partir de la solución analítica del problema.

Apartado B (Ecuaciones diferenciales de segundo orden)

6. Dada la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = t$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Estimar $y(0.5)$ mediante el Método de Euler. Utilizar un incremento $h = 0.02$ y calcular el error relativo porcentual a partir de la solución analítica.

7. Cuando una masa de un slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 pie, y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza externa al sistema, igual a $f(t) = 8sen4t$. Considerar que el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea. Calcular mediante el método de Euler la posición en $t = 1$ minuto. Utilizar un incremento $h = 0.02$

8. Con el método de Euler aproximar $y(0.5)$. Donde $y(t)$ es la solución del problema de valores iniciales $y' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -2$ y $y'(0) = 0$. Usar un incremento $h = 0.1$. Determinar la solución exacta y comparar el valor exacto de $y(0.5)$ con el obtenido en la aproximación a través del error relativo porcentual.

Apartado C (Ecuaciones diferenciales de tercer orden)

9. Dada la ecuación diferencial $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5$ sujeta a las condiciones $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$ y $y''(0) = -1$. Calcular $y(0.2)$ utilizando un incremento $h = 0.02$

10. Dada la ecuación diferencial $y''' - 2y'' + y' = sent$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ y $y''(0) = 1$. Calcular $y(0.2)$ utilizando un incremento $h = 0.01$ y comparar el resultado con el obtenido de forma analítica a través del error relativo porcentual.

Autoevaluación 1 de la unidad 6

1. Dada la ecuación diferencial $y' = 4y + t$ sujeta a la condición $y(0) = 1$.

Determinar:
A) $y(0.5)$ mediante el Método de Runge Kutta. Utilizar $h = 0.1$
B) $y(0.5)$ mediante el Método Analítico
C) El error relativo porcentual

2. Dada la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = -2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 2$. Calcular $y(0.5)$ mediante el Método de Euler. Utilizar $h = 0.1$

Bibliografía

- Métodos Numéricos para Ingenieros. (Con aplicaciones en computadoras personales). Steven C. Chapra. Raymond P. Canale. Edit. McGraw-Hill.
- Análisis Numérico. Richard Burden. Duglas Fair. Edit. Grupo Edit. Iberoamericana.
- Métodos numéricos. Schutz Oliviera Luthe. Edit. Limusa
- Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado. 7ª. Edición (2005). Autor: Dennis G. Zill, Ed. Thomson.
- Matemáticas Avanzadas para Ingeniería I: Ecuaciones Diferenciales, 3ra. Edición (2008) Autor: Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. Editorial Mc. Graw Hill.
- Ecuaciones Diferenciales.1ra. Edición (2002) Autor: Borreli- Coleman Ed. Oxford
- Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Autor: Murray R. Spiegel, Ed. Prentice Hall
- Ecuaciones Diferenciales un Enfoque de Modelado. 1ra. Edición (2006) Autor: Glenn Ledder. Editorial Mc. Graw Hill.
- Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. 3ra. Edición (2001) Autor: Nagle R. Kent. Editorial Pearson.
- Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Autor: George F. Simmons, Ed. Mc Graw Hill.
- Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones. Edición Autor: Edwards/Penney, Ed. Prentice Hall.
- René Landero Hernández, Mónica T. González Ramírez. Estadística con SPSS y metodología de la investigación. Editorial Trillas.
- R. E Walpole y R. H. Myers. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Editorial Interamericana.
- Mario F. Triola. Estadística. Editorial Pearson.
- William W. Hines y Douglas C. Montgomery. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración. Editorial CECSA.
- William Mendenhall, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver. Introducción a Probabilidad y Estadística. Editorial Cengage.
- Levin, Rubin, Balderas, Del Valle, Gómez. Estadística para Administración y Economía. Editorial Pearson.