

# Numeracion de diapositivas

Universidad Autónoma de la Ciudad de México - Casa Libertad

Carlos E. Martínez Rodríguez

Informes:carlos.martinez@uacm.edu.mx

Academia de Matemáticas

Modelación Matemática

Colegio de Ciencia y Tecnología

Semestre 2019-II

## 2. Pruebas de Hipótesis

### 2.1 Tipos de errores

### 2.2 Muestras grandes: una media poblacional

#### 2.2.1 Cálculo de valor $p$

#### 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

#### 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

#### 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

### 2.3 Muestras Pequeñas

#### 2.3.1 Una media poblacional

#### 2.3.2 Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

#### 2.3.3 Diferencia entre dos medias poblacionales: Diferencias Pareadas

#### 2.3.4 Inferencias con respecto a la Varianza Poblacional

#### 2.3.5 Comparación de la Varianza Poblacional

## Prueba de Hipótesis

- ▶ Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, a menudo involucran uno o más parámetros de la distribución.
- ▶ Las hipótesis son afirmaciones respecto a la población o distribución bajo estudio, no en torno a la muestra.
- ▶ La mayoría de las veces, la prueba de hipótesis consiste en determinar si la situación experimental ha cambiado
- ▶ el interés principal es decidir sobre la veracidad o falsedad de una hipótesis, a este procedimiento se le llama *prueba de hipótesis*.
- ▶ Si la información es consistente con la hipótesis, se concluye que esta es verdadera, de lo contrario que con base en la información, es falsa.

# Introducción

Una prueba de hipótesis está formada por cinco partes

- ▶ La hipótesis nula, denotada por  $H_0$ .
- ▶ La hipótesis alterativa, denorada por  $H_1$ .
- ▶ El estadístico de prueba y su valor  $p$ .
- ▶ La región de rechazo.
- ▶ La conclusión.

# Introducción

## Definición

*Las dos hipótesis en competencias son la **hipótesis alternativa**  $H_1$ , usualmente la que se desea apoyar, y la **hipótesis nula**  $H_0$ , opuesta a  $H_1$ .*

En general, es más fácil presentar evidencia de que  $H_1$  es cierta, que demostrar que  $H_0$  es falsa, es por eso que por lo regular se comienza suponiendo que  $H_0$  es cierta, luego se utilizan los datos de la muestra para decidir si existe evidencia a favor de  $H_1$ , más que a favor de  $H_0$ , así se tienen dos conclusiones:

- ▶ Rechazar  $H_0$  y concluir que  $H_1$  es verdadera.
- ▶ Aceptar, no rechazar,  $H_0$  como verdadera.

## Introducción

### Ejemplo

*Se desea demostrar que el salario promedio por hora en cierto lugar es distinto de 19usd, que es el promedio nacional. Entonces  $H_1 : \mu \neq 19$ , y  $H_0 : \mu = 19$ .*

A esta se le denomina **Prueba de hipótesis de dos colas**.

### Ejemplo

*Un determinado proceso produce un promedio de 5% de piezas defectuosas. Se está interesado en demostrar que un simple ajuste en una máquina reducirá  $p$ , la proporción de piezas defectuosas producidas en este proceso. Entonces se tiene  $H_0 : p < 0.3$  y  $H_1 : p = 0.03$ . Si se puede rechazar  $H_0$ , se concluye que el proceso ajustado produce menos del 5% de piezas defectuosas.*

# Introducción

La decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula está basada en la información contenida en una muestra proveniente de la población de interés. Esta información tiene estas formas

- ▶ **Estadístico de prueba:** un sólo número calculado a partir de la muestra.
- ▶  **$p$ -value:** probabilidad calculada a partir del estadístico de prueba.

# Introducción

## Definición

*El  $p$ -value es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tanto o más alejado del valor observado, si en realidad  $H_0$  es verdadera. Valores grandes del estadística de prueba y valores*

*pequeños de  $p$  significan que se ha observado un evento muy poco probable, si  $H_0$  en realidad es verdadera.*

Todo el conjunto de valores que puede tomar el estadístico de prueba se divide en dos regiones. Un conjunto, formado de valores que apoyan la hipótesis alternativa y llevan a rechazar  $H_0$ , se denomina **región de rechazo**. El otro, conformado por los valores que sustentan la hipótesis nula, se le denomina **región de aceptación**.



## Introducción

Cuando la región de rechazo está en la cola izquierda de la distribución, la prueba se denomina **prueba lateral izquierda**. Una prueba con región de rechazo en la cola derecha se le llama **prueba lateral derecha**.

Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, entonces se rechaza  $H_0$ . Si el estadístico de prueba cae en la región de aceptación, entonces la hipótesis nula se acepta o la prueba se juzga como no concluyente.

Dependiendo del nivel de confianza que se desea agregar a las conclusiones de la prueba, y el **nivel de significancia**  $\alpha$ , el riesgo que está dispuesto a correr si se toma una decisión incorrecta.

# Introducción

## Definición

*Un **error de tipo I** para una prueba estadística es el error que se tiene al rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. El **nivel de significancia** para una prueba estadística de hipótesis es*

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{\text{error tipo I}\} = P\{\text{rechazar equivocadamente } H_0\} \\ &= P\{\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}\}\end{aligned}$$

Este valor  $\alpha$  representa el valor máximo de riesgo tolerable de rechazar incorrectamente  $H_0$ . Una vez establecido el nivel de significancia, la región de rechazo se define para poder determinar si se rechaza  $H_0$  con un cierto nivel de confianza.

## Cálculo del valor de $p$

### Definición

*El **valor de  $p$**  ( $p$ -value) o nivel de significancia observado de un estadístico de prueba es el valor más pequeño de  $\alpha$  para el cual  $H_0$  se puede rechazar. El riesgo de cometer un error tipo I, si  $H_0$  es rechazada con base en la información que proporciona la muestra.*

### Nota

*Valores pequeños de  $p$  indican que el valor observado del estadístico de prueba se encuentra alejado del valor hipotético de  $\mu$ , es decir se tiene evidencia de que  $H_0$  es falsa y por tanto debe de rechazarse.*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ Cálculo del valor de  $p$ 

## Nota

*Valores grandes de  $p$  indican que el estadístico de prueba observado no está alejado de la medi hipotética y no apoya el rechazo de  $H_0$ .*

## Definición

*Si el valor de  $p$  es menor o igual que el nivel de significancia  $\alpha$ , determinado previamente, entonces  $H_0$  es rechazada y se puede concluir que los resultados son estadísticamente significativos con un nivel de confianza del  $100(1 - \alpha)\%$ .*

Es usual utilizar la siguiente clasificación de resultados

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ Cálculo del valor de  $p$ 

$p$	$H_0$	Significativa
$p < 0.01$	Rechazar	Altamente
$0.01 \leq p < 0.05$	Rechazar	Estadísticamente
$0.05 \leq p < 0.1$	No rechazar	Tendencia estadística
$0.01 \leq p$	No rechazar	No son estadísticamente

## Nota

*Para determinar el valor de  $p$ , encontrar el área en la cola después del estadístico de prueba. Si la prueba es de una cola, este es el valor de  $p$ . Si es de dos colas, éste valor encontrado es la mitad del valor de  $p$ . Rechazar  $H_0$  cuando el valor de  $p < \alpha$ .*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ Cálculo del valor de  $p$ 

Hay dos tipos de errores al realizar una prueba de hipótesis

	$H_0$ es Verdadera	$H_0$ es Falsa
Rechazar $H_0$	Error tipo I	✓
Aceptar $H_0$	✓	Error tipo II

## Definición

La probabilidad de cometer el error tipo II se define por  $\beta$  donde

$$\begin{aligned}
 \beta &= P\{\text{error tipo II}\} = P\{\text{Aceptar equivocadamente } H_0\} \\
 &= P\{\text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\}
 \end{aligned}$$

## Potencia de la prueba

### Nota

*Cuando  $H_0$  es falsa y  $H_1$  es verdadera, no siempre es posible especificar un valor exacto de  $\mu$ , sino más bien un rango de posibles valores. En lugar de arriesgarse a tomar una decisión incorrecta, es mejor concluir que no hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ , es decir en lugar de aceptar  $H_0$ , no rechazar  $H_0$ .*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Potencia de la prueba

La bondad de una prueba estadística se mide por el tamaño de  $\alpha$  y  $\beta$ , ambas deben de ser pequeñas. Una manera muy efectiva de medir la potencia de la prueba es calculando el complemento del error tipo II:

$$\begin{aligned}
 1 - \beta &= P\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\} \\
 &= P\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_1 \text{ es verdadera}\}
 \end{aligned}$$

## Definición

*La potencia de la prueba,  $1 - \beta$ , mide la capacidad de que la prueba funciona como se necesita.*



## Ejemplo ilustrativo

### Ejemplo

*La producción diaria de una planta química local ha promediado 880 toneladas en los últimos años. A la gerente de control de calidad le gustaría saber si este promedio ha cambiado en meses recientes. Ella selecciona al azar 50 días de la base de datos computarizada y calcula el promedio y la desviación estándar de las  $n = 50$  producciones como  $\bar{x} = 871$  toneladas y  $s = 21$  toneladas, respectivamente. Pruebe la hipótesis apropiada usando  $\alpha = 0.05$ .*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*La hipótesis nula apropiada es:*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*La hipótesis nula apropiada es:*

$$H_0 : \mu = 880$$

*y la hipótesis alternativa  $H_1$  es*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*La hipótesis nula apropiada es:*

$$H_0 : \mu = 880$$

*y la hipótesis alternativa  $H_1$  es*

$$H_1 : \mu \neq 880$$

*el estimador puntual para  $\mu$  es  $\bar{x}$ , entonces el estadístico de prueba es*

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*La hipótesis nula apropiada es:*

$$H_0 : \mu = 880$$

*y la hipótesis alternativa  $H_1$  es*

$$H_1 : \mu \neq 880$$

*el estimador puntual para  $\mu$  es  $\bar{x}$ , entonces el estadístico de prueba es*

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$871 - 880$$

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$*



2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

## Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado. La probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando esta es verdadera es de*

## Ejemplo ilustrativo

### Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado. La*

*probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando esta es verdadera es de 0.05. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es  $z = -3.03$ , la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando  $H_0$  es  $|z| > 3.03$ ,*

## Ejemplo ilustrativo

### Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado. La*

*probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando esta es verdadera es de 0.05. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es  $z = -3.03$ , la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando  $H_0$  es  $|z| > 3.03$ , entonces  $p = 2(0.012) = 0.0024$ , que a su vez es menor que el nivel de significancia  $\alpha$  asignado inicialmente, y además los resultados son*

## Ejemplo ilustrativo

### Solución

*Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de  $z_{\alpha/2}$ , es decir,  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ , como  $z > z_{\alpha/2}$ ,  $z$  cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado. La*

*probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando esta es verdadera es de 0.05. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es  $z = -3.03$ , la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando  $H_0$  es  $|z| > 3.03$ , entonces  $p = 2(0.012) = 0.0024$ , que a su vez es menor que el nivel de significancia  $\alpha$  asignado inicialmente, y además los resultados son **altamente significativos**.*

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

Finalmente determinemos la potencia de la prueba cuando  $\mu$  en realidad es igual a 870 toneladas.

Recordar que la región de aceptación está entre  $-1.96$  y  $1.96$ , para  $\mu = 880$ , equivalentemente

$$874.18 < \bar{x} < 885.82$$

$\beta$  es la probabilidad de aceptar  $H_0$  cuando  $\mu = 870$ , calculemos los valores de  $z$  correspondientes a 874.18 y 885.82

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

Finalmente determinemos la potencia de la prueba cuando  $\mu$  en realidad es igual a 870 toneladas.

Recordar que la región de aceptación está entre  $-1.96$  y  $1.96$ , para  $\mu = 880$ , equivalentemente

$$874.18 < \bar{x} < 885.82$$

$\beta$  es la probabilidad de aceptar  $H_0$  cuando  $\mu = 870$ , calculemos los valores de  $z$  correspondientes a 874.18 y 885.82 Entonces

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{874.18 - 870}{21/\sqrt{50}} = 1.41$$

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{885.82 - 870}{21/\sqrt{50}} = 5.33$$



2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \beta &= P\{\text{aceptar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\} \\
 &= P\{874.18 < \mu < 885.82 \text{ cuando } \mu = 870\} \\
 &= P\{1.41 < z < 5.33\} = P\{1.41 < z\} \\
 &= 1 - 0.9207 = 0.0793
 \end{aligned}$$

entonces, la potencia de la prueba es

$$1 - \beta = 1 - 0.0793 = 0.9207$$

que es la probabilidad de rechazar correctamente  $H_0$  cuando  $H_0$  es falsa.

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Ejemplo ilustrativo

Determinar la potencia de la prueba para distintos valores de  $H_1$  y graficarlos, *curva de potencia*

$H_1$	$(1 - \beta)$
865	
870	
872	
875	
877	
880	
883	
885	
888	
890	

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## List de Ejercicios

1. Encontrar las regiones de rechazo para el estadístico  $z$ , para una prueba de
  - a) dos colas para  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
  - b) una cola superior para  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
  - c) una cola inferior para  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
2. Suponga que el valor del estadístico de prueba es
  - a)  $z = -2.41$ , sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
  - b)  $z = 2.16$ , sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
  - c)  $z = 1.15$ , sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
  - d)  $z = -2.78$ , sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
  - e)  $z = -1.81$ , sacar las conclusiones correspondientes para los

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## List de Ejercicios

3. Encuentre el valor de  $p$  para las pruebas de hipótesis correspondientes a los valores de  $z$  del ejercicio anterior.
4. Para las pruebas dadas en el ejercicio 2, utilice el valor de  $p$ , determinado en el ejercicio 3, para determinar la significancia de los resultados.

2.2.1 Cálculo de valor  $p$ 

## Lista de Ejercicios

5. Una muestra aleatoria de  $n = 45$  observaciones de una población con media  $\bar{x} = 2.4$ , y desviación estándar  $s = 0.29$ . Suponga que el objetivo es demostrar que la media poblacional  $\mu$  excede 2.3.
- Defina la hipótesis nula y alternativa para la prueba.
  - Determine la región de rechazo para un nivel de significancia de:  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ .
  - Determine el error estándar de la media muestral.
  - Calcule el valor de  $p$  para los estadísticos de prueba definidos en los incisos anteriores.
  - Utilice el valor de  $p$  para sacar una conclusión al nivel de significancia  $\alpha$ .
  - Determine el valor de  $\beta$  cuando  $\mu = 2.5$
  - Graficar la curva de potencia para la prueba.

## 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

## Diferencia entre dos medias poblacionales

El estadístico que resume la información muestral respecto a la diferencia en medias poblacionales ( $\mu_1 - \mu_2$ ) es la diferencia de las medias muestrales ( $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ), por tanto al probar la diferencia entre las medias muestrales se verifica que la diferencia real entre las medias poblacionales difiere de un valor especificado,  $(\mu_1 - \mu_2) = D_0$ , se puede usar el error estándar de  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ , es decir

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

cuyo estimador está dado por

$$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

## 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

## Diferencia entre dos medias poblacionales

El procedimiento para muestras grandes es:

1) **Hipótesis Nula**  $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$ ,

## 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

## Diferencia entre dos medias poblacionales

El procedimiento para muestras grandes es:

- 1) **Hipótesis Nula**  $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$ ,

donde  $D_0$  es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir  $D_0 = 0$ .

- 2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$	$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	



## 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

## Diferencia entre dos medias poblacionales

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$z > z_0$ $z < -z_\alpha$ cuando $H_1: (\mu_1 - \mu_2) < D_0$ cuando $p < \alpha$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$

## Diferencia entre dos medias poblacionales:Ejemplo

### Ejemplo

*Para determinar si ser propietario de un automóvil afecta el rendimiento académico de un estudiante, se tomaron dos muestras aleatorias de 100 estudiantes varones. El promedio de calificaciones para los  $n_1 = 100$  no propietarios de un auto tuvieron un promedio y varianza de  $\bar{x}_1 = 2.7$  y  $s_1^2 = 0.36$ , respectivamente, mientras que para la segunda muestra con  $n_2 = 100$  propietarios de un auto, se tiene  $\bar{x}_2 = 2.54$  y  $s_2^2 = 0.4$ . Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en la media en el rendimiento académico entre propietarios y no propietarios de un automóvil?*

*Hacer pruebas para  $\alpha = 0.01, 0.05$  y  $\alpha = 0.1$ .*

## 2.2.2 Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

None

## Solución

- ▶ *Solución utilizando la técnica de regiones de rechazo: realizando las operaciones  $z = 1.84$ , determinar si excede los valores de  $z_{\alpha/2}$ .*
- ▶ *Solución utilizando el p-value: Calcular el valor de  $p$ , la probabilidad de que  $z$  sea mayor que  $z = 1.84$  o menor que  $z = -1.84$ , se tiene que  $p = 0.0658$ . Concluir.*

## Pruebas de hipótesis e Intervalos de Confianza

- ▶ Si el intervalo de confianza que se construye contiene el valor del parámetro especificado por  $H_0$ , entonces ese valor es uno de los posibles valores del parámetro y  $H_0$  no debe ser rechazada.
- ▶ Si el valor hipotético se encuentra fuera de los límites de confianza, la hipótesis nula es rechazada al nivel de significancia  $\alpha$ .

## Lista de Ejercicios

1. Del libro Mendenhall resolver los ejercicios 9.18, 9.19 y 9.20(Mendenhall).
2. Del libro Mendenhall resolver los ejercicios: 9.23, 9.26 y 9.28.

## 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

## Una proporción Binomial

Para una muestra aleatoria de  $n$  intentos idénticos, de una población binomial, la proporción muestral  $\hat{p}$  tiene una distribución aproximadamente normal cuando  $n$  es grande, con media  $p$  y error estándar

$$SE = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

La prueba de hipótesis de la forma

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p > p_0, \text{ o } p < p_0 \text{ o } p \neq p_0$$

El estadístico de prueba se construye con el mejor estimador de la proporción verdadera,  $\hat{p}$ , con el estadístico de prueba  $z$ , que se distribuye normal estándar.

## 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

## Una proporción Binomial

El procedimiento es

- 1) Hipótesis nula:  $H_0 : p = p_0$
- 2) Hipótesis alternativa

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : p > p_0$	$p \neq p_0$
$H_1 : p < p_0$	

- 3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \hat{p} = \frac{x}{n}$$

donde  $x$  es el número de éxitos en  $n$  intentos binomiales.

## 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

## Una proporción Binomial

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola

Prueba de dos colas

$$z > z_0$$

$$z < -z_\alpha \text{ cuando } H_1 : p < p_0 \quad z > z_{\alpha/2} \text{ o } z < -z_{\alpha/2} \\ \text{cuando } p < \alpha$$





## 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

## Una proporción Binomial

## Ejemplo

*A cualquier edad, alrededor del 20% de los adultos de cierto país realiza actividades de acondicionamiento físico al menos dos veces por semana. En una encuesta local de  $n = 100$  adultos de más de 40 años, un total de 15 personas indicaron que realizaron actividad física al menos dos veces por semana. Estos datos indican que el porcentaje de participación para adultos de más de 40 años de edad es considerablemente menor a la cifra del 20%? Calcule el valor de  $p$  y úselo para sacar las conclusiones apropiadas.*

## 2.2.3 Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

# Una proporción Binomial

1. Resolver los ejercicios: 9.30, 9.32, 9.33, 9.35 y 9.39.

## 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

# Dos proporciones binomiales

## Nota

*Cuando se tienen dos muestras aleatorias independientes de dos poblaciones binomiales, el objetivo del experimento puede ser la diferencia  $(p_1 - p_2)$  en las proporciones de individuos u objetos que poseen una característica específica en las dos poblaciones. En este caso se pueden utilizar los estimadores de las dos proporciones  $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$  con error estándar dado por*

$$SE = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

*considerando el estadístico z con un nivel de significancia  $(1 - \alpha) 100\%$*

## 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

## Dos proporciones binomiales

### Nota

*La hipótesis nula a probarse es de la forma*

$H_0$ :  $p_1 = p_2$  o equivalentemente  $(p_1 - p_2) = 0$ , contra una hipótesis alternativa  $H_1$  de una o dos colas.

### Nota

*Para estimar el error estándar del estadístico  $z$ , se debe de utilizar el hecho de que suponiendo que  $H_0$  es verdadera, las dos proporciones son iguales a algún valor común,  $p$ . Para obtener el mejor estimador de  $p$  es*

$$p = \frac{\text{número total de éxitos}}{\text{Número total de pruebas}} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

## 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

Prueba de Hipótesis para  $(p_1 - p_2)$ 1) Hipótesis Nula:  $H_0 : (p_1 - p_2) = 0$ 2) Hipótesis Alternativa:  $H_1 :$ 

Prueba de una Cola

Prueba de dos colas

$$H_1 : (p_1 - p_2) > 0$$

$$H_1 : (p_1 - p_2) \neq 0$$

$$H_1 : (p_1 - p_2) < 0$$

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$$

donde  $\hat{p}_1 = x_1/n_1$  y  $\hat{p}_2 = x_2/n_2$ , dado que el valor común para  $p_1$  y  $p_2$  es  $p$ , entonces  $\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$  y por tanto el estadístico de prueba es

## 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

Prueba de Hipótesis para  $(p_1 - p_2)$ 

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola

Prueba de dos colas

$$z > z_{\alpha}$$

$$z < -z_{\alpha} \text{ cuando } H_1: p < p_0 \quad z > z_{\alpha/2} \text{ o } z < -z_{\alpha/2} \text{ cuando } p < \alpha$$

## 2.2.4 Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

## Dos proporciones binomiales: ejercicio

## Ejemplo

*Los registros de un hospital, indican que 52 hombres de una muestra de 1000 contra 23 mujeres de una muestra de 1000 fueron ingresados por enfermedad del corazón. Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar un porcentaje más alto de enfermedades del corazón entre hombres ingresados al hospital?, utilizar distintos niveles de confianza de  $\alpha$ .*

1. Resolver los ejercicios 9.42
2. Resolver los ejercicios: 9.45, 9.48, 9.50

## 2.3.1 Una media poblacional

## Una media poblacional

1) Hipótesis Nula:  $H_0 : \mu = \mu_0$ 2) Hipótesis Alternativa:  $H_1 :$ 

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
--------------------	---------------------

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
--------------------	---------------------

$$t > t_{\alpha}$$

$$t < -t_{\alpha} \text{ cuando } H_1 : \mu < \mu_0 \quad t > t_{\alpha/2} \text{ o } t < -t_{\alpha/2}$$



## 2.3.1 Una media poblacional

## Ejercicio

## Ejemplo

*Las etiquetas en latas de un gal'on de pintura por lo general indican el tiempo de secado y el área puede cubrir una capa. Casi todas las marcas de pintura indican que, en una capa, un galón cubrirá entre 250 y 500 pies cuadrados, dependiendo de la textura de la superficie a pintarse, un fabricante, sin embargo afirma que un galón de su pintura cubrirá 400 pies cuadrados de área superficial. Para probar su afirmación, una muestra aleatoria de 10 latas de un galón de pintura blanca se empleó para pintar 10 áreas idénticas usando la misma clase de equipo. Las áreas reales en pies cuadrados cubiertas por estos 10 galones de pintura se dan a continuación:*

310	311	412	368	447
-----	-----	-----	-----	-----

## 2.3.1 Una media poblacional

## Ejercicio

## Ejemplo

*Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el promedio de la cobertura difiere de 400 pies cuadrados? encuentre el valor de  $p$  para la prueba y úselo para evaluar la significancia de los resultados.*

1. Resolver los ejercicios: 10.2, 10.3, 10.5, 10.7, 10.9, 10.13 y 10.16

## 2.3.2 Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

## Diferencia entre dos medias: M.A.I.

## Nota

*Cuando los tamaños de muestra son pequeños, no se puede asegurar que las medias muestrales sean normales, pero si las poblaciones originales son normales, entonces la distribución muestral de la diferencia de las medias muestrales,  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ , será normal con media  $(\mu_1 - \mu_2)$  y error estándar*

$$ES = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

## 2.3.2 Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

## Diferencia entre dos medias: M.A.I.

1) Hipótesis Nula  $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$ ,

## 2.3.2 Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

## Diferencia entre dos medias: M.A.I.

1) Hipótesis Nula  $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$ ,

donde  $D_0$  es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir  $D_0 = 0$ .

## 2) Hipótesis Alternativa

---

**Prueba de una Cola**

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$$

---

**Prueba de dos colas**

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

## 3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

## 2.3.2 Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

## Diferencia entre dos medias: M.A.I.

donde

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando**Prueba de una Cola****Prueba de dos colas**

$$z > z_0$$

$$z < -z_\alpha \text{ cuando } H_1: (\mu_1 - \mu_2) < D_0 \quad z > z_{\alpha/2} \text{ o } z < -z_{\alpha/2} \\ \text{cuando } p < \alpha$$

Los valores críticos de  $t$ ,  $t_{-\alpha}$  y  $t_{\alpha/2}$  están basados en  $(n_1 + n_2 - 2)$  grados de libertad.

## 2.3.3 Diferencia entre dos medias poblacionales: Diferencias Pareadas

## Diferencias pareadas

- 1) Hipótesis Nula:  $H_0 : \mu_d = 0$
- 2) Hipótesis Alternativa:  $H_1 : \mu_d$

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : \mu_d > 0$	$H_1 : \mu_d \neq 0$
$H_1 : \mu_d < 0$	

- 3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

donde  $n$  es el número de diferencias pareadas,  $\bar{d}$  es la media de las diferencias muestrales, y  $s_d$  es la desviación estándar de las diferencias muestrales.

## 2.3.3 Diferencia entre dos medias poblacionales: Diferencias Pareadas

## Diferencias pareadas

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$t > t_\alpha$	
$t < -t_\alpha$ cuando $H_1 : \mu < \mu_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Los valores críticos de  $t$ ,  $t_{-\alpha}$  y  $t_{\alpha/2}$  están basados en  $(n_1 + n_2 - 2)$  grados de libertad.



## 2.3.4 Inferencias con respecto a la Varianza Poblacional

## Varianza poblacional

1) Hipótesis Nula:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ 2) Hipótesis Alternativa:  $H_1$ 

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	

3) Estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

## Varianza Poblacional

4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha)}$ cuando $H_1 : \chi^2 < \chi^2_0$ cuando $p < \alpha$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$ o $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha/2)}$

Los valores críticos de  $\chi^2$ , están basados en  $(n_1 + 1)$  grados de libertad.

## 2.3.5 Comparación de dos varianzas poblacionales

## Igualdad de dos varianzas

1) Hipótesis Nula  $H_0 : (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = D_0$ ,

## 2.3.5 Comparación de dos varianzas poblacionales

## Igualdad de dos varianzas

- 1) **Hipótesis Nula**  $H_0 : (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = D_0$ ,

donde  $D_0$  es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir  $D_0 = 0$ .

- 2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) > D_0$	$H_1 : (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \neq D_0$
$H_1 : (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) < D_0$	

## 2.3.5 Comparación de dos varianzas poblacionales

## Diferencia entre dos medias poblacionales

3) Estadístico de prueba:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

donde  $s_1^2$  es la varianza muestral más grande.4) Región de rechazo: rechazar  $H_0$  cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$F > F_\alpha$	$F > F_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	