Numeracion de diapositivas

Universidad Autónoma de la Ciudad de México - Casa Libertad

Carlos E. Martínez Rodríguez

Informes:carlos.martinez@uacm.edu.mx
Academia de Matemáticas
Modelación Matemática
Colegio de Ciencia y Tecnología

Semestre 2019-II

Prueba de Hipótesis

- Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, a menudo involucran uno o más parámetros de la distribución.
- Las hipótesis son afirmaciones respecto a la población o distribución bajo estudio, no en torno a la muestra.
- La mayoría de las veces, la prueba de hipótesis consiste en determinar si la situaci ón experimental ha cambiado
- el interés principal es decidir sobre la veracidad o falsedad de una hipótesis, a este procedimiento se le llama *prueba de hipótesis*.
- Si la información es consistente con la hipótesis, se concluye que esta es verdadera, de lo contrario que con base en la información, es falsa.

Introducción

Una prueba de hipótesis está formada por cinco partes

- La hipótesis nula, denotada por H_0.
- La hipótesis alterativa, denorada por H_1.
- El estadśitico de prueba y su valor p.
- La región de rechazo.
- La conclusión.

Introducción

Definición

*Las dos hipótesis en competencias son la **hipótesis alternativa** H_1, usualmente la que se desea apoyar, y la **hipótesis nula** H_0, opuesta a H_1.*

En general, es más fácil presentar evidencia de que H_1 es cierta, que demostrar que H_0 es falsa, es por eso que por lo regular se comienza suponiendo que H_0 es cierta, luego se utilizan los datos de la muestra para decidir si existe evidencia a favor de H_1, más que a favor de H_0, así se tienen dos conclusiones:

- Rechazar H_0 y concluir que H_1 es verdadera.
- Aceptar, no rechazar, H_0 como verdadera.

Introducción

Ejemplo

Se desea demostrar que el salario promedio por hora en cierto lugar es distinto de 19usd, que es el promedio nacional. Entonces $H_1 : \mu \neq 19$, *y* $H_0 : \mu = 19$.

A esta se le denomina **Prueba de hipótesis de dos colas**.

Ejemplo

Un determinado proceso produce un promedio de 5% de piezas defectuosas. Se está interesado en demostrar que un simple ajuste en una máquina reducirá p, la proporción de piezas defectuosas producidas en este proceso. Entonces se tiene $H_0 : p < 0.3$ *y* $H_1 : p = 0.03$. *Si se puede rechazar* H_0, *se concluye que el proceso ajustado produce menos del 5% de piezas defectuosas.*

Introducción

La decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula está basada en la información contenida en una muestra proveniente de la población de interés. Esta información tiene estas formas

- **Estadśitico de prueba:** un sólo número calculado a partir de la muestra.
- ***p*-value:** probabilidad calculada a partir del estadśtico de prueba.

Introducción

Definición

El p-value es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tanto o más alejado del valor obervado, si en realidad H_0 es verdadera.Valores grandes del estadśtica de prueba y valores

pequeños de p significan que se ha observado un evento muy poco probable, si H_0 en realidad es verdadera.

Todo el conjunto de valores que puede tomar el estadístico de prueba se divide en dos regiones. Un conjunto, formado de valores que apoyan la hipótesis alternativa y llevan a rechazar H_0, se denomina **región de rechazo**. El otro, conformado por los valores que sustentatn la hipótesis nula, se le denomina **región de aceptación**.

Introducción

Cuando la región de rechazo está en la cola izquierda de la distribución, la prueba se denomina **prueba lateral izquierda**. Una prueba con región de rechazo en la cola derecha se le llama **prueba lateral derecha**.

Si el estadśtico de prueba cae en la región de rechazo, entonces se rechaza H_0. Si el estadśtico de prueba cae en la región de aceptación, entonces la hipótesis nula se acepta o la prueba se juzga como no concluyente.

Dependiendo del nivel de confianza que se desea agregar a las conclusiones de la prueba, y el **nivel de significancia** α, el riesgo que está dispuesto a correr si se toma una decisión incorrecta.

Introducción

Definición

*Un **error de tipo I** para una prueba estadística es el error que se tiene al rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. El **nivel de significancia** para una prueba estadística de hipótesis es*

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left\{error\ tipo\ I\right\} = P\left\{rechazar\ equivocadamente\ H_0\right\}\\ &= P\left\{rechazar\ H_0\ cuando\ H_0\ es\ verdadera\right\}\end{aligned}$$

Este valor α representa el valor máximo de riesgo tolerable de rechazar incorrectamente H_0. Una vez establecido el nivel de significancia, la región de rechazo se define para poder determinar si se rechaza H_0 con un cierto nivel de confianza.

Cálculo del valor de p

Definición

*El **valor de** p (p-**value**) o nivel de significancia observado de un estadístico de prueba es el valor más pequeño de α para el cual H_0 se puede rechazar. El riesgo de cometer un error tipo I, si H_0 es rechazada con base en la información que proporciona la muestra.*

Nota

Valores pequeños de p indican que el valor observado del estadśtico de prueba se encuentra alejado del valor hipotético de μ, es decir se tiene evidencia de que H_0 es falsa y por tanto debe de rechazarse.

Cálculo del valor de p

Nota

Valores grandes de p indican que el estadístico de prueba observado no está alejado de la medi hipotética y no apoya el rechazo de H_0.

Definición

Si el valor de p es menor o igual que el nivel de significancia α, determinado previamente, entonces H_0 es rechazada y se puede concluir que los resultados son estadísticamente significativos con un nivel de confianza del $100\,(1-\alpha)\,\%$.

Es usual utilizar la siguiente clasificación de resultados

Cálculo del valor de p

p	H_0	Significativa
$p < 0.01$	Rechazar	Altamente
$0.01 \leq p < 0.05$	Rechazar	Estadísticamente
$0.05 \leq p < 0.1$	No rechazar	Tendencia estadística
$0.01 \leq p$	No rechazar	No son estadísticamente

Nota

Para determinar el valor de p, encontrar el área en la cola después del estadístico de prueba. Si la prueba es de una cola, este es el valor de p. Si es de dos colas, éste valor encontrado es la mitad del valor de p. Rechazar H_0 cuando el valor de $p < \alpha$.

Cálculo del valor de p

Hay dos tipos de errores al realizar una prueba de hipótesis

	H_0 es Verdadera	H_0 es Falsa
Rechazar H_0	Error tipo I	$\surd$
Aceptar H_0	$\surd$	Error tipo II

Definición

La probabilidad de cometer el error tipo II se define por β donde

$$\begin{aligned}\beta &= P\left\{error\ tipo\ II\right\} = P\left\{Aceptar\ equivocadamente\ H_0\right\}\\ &= P\left\{Aceptar\ H_0\ cuando\ H_0\ es\ falsa\right\}\end{aligned}$$

Potencia de la prueba

Nota

Cuando H_0 es falsa y H_1 es verdadera, no siempre es posible especificar un valor exacto de μ, sino más bien un rango de posibles valores.En lugar de arriesgarse a tomar una decisión incorrecta, es

mejor conlcuir que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0, es decir en lugar de aceptar H_0, no rechazar H_0.

Potencia de la prueba

La bondad de una prueba estadística se mide por el tamaño de α y β, ambas deben de ser pequeñas. Una manera muy efectiva de medir la potencia de la prueba es calculando el complemento del error tipo II:

$$\begin{aligned} 1-\beta &= P\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\} \\ &= P\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_1 \text{ es verdadera}\} \end{aligned}$$

Definición

La ***potencia de la prueba****,* $1-\beta$*, mide la capacidad de que la prueba funciona como se necesita.*

Ejemplo ilustrativo

Ejemplo

La producción diariade una planta química local ha promediado 880 toneladas en los últimos años. A la gerente de control de calidad le gustaría saber si este promedio ha cambiado en meses recientes. Ella selecciona al azar 50 días de la base de datos computarizada y calcula el promedio y la desviación estándar de las $n = 50$ *producciones como* $\overline{x} = 871$ *toneladas y* $s = 21$ *toneladas, respectivamente. Pruebe la hipótesis apropiada usando* $\alpha = 0.05$.

Ejemplo ilustrativo

Solución

La hipótesis nula apropiada es:

Ejemplo ilustrativo

Solución

La hipótesis nula apropiada es:

$$H_0 \quad : \quad \mu = 880$$

$$y\ la\ hipótesis\ alternativa\ H_1\ es$$

Ejemplo ilustrativo

Solución

La hipótesis nula apropiada es:

$$H_0 \quad : \quad \mu = 880$$

y la hipótesis alternativa H_1 es

$$H_1 \quad : \quad \mu \neq 880$$

el estimador puntual para μ es $\overline{x}$, entonces el estadístico de prueba es

$$z \quad = \quad \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Ejemplo ilustrativo

Solución

La hipótesis nula apropiada es:

$$H_0 \quad : \quad \mu = 880$$

$$y \text{ la hipótesis alternativa } H_1 \text{ es}$$

$$H_1 \quad : \quad \mu \neq 880$$

el estimador puntual para μ es $\overline{x}$, entonces el estadístico de prueba es

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{871 - 880}{21/\sqrt{50}} = -3.03$$

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir,

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z cae en la zona de rechazo, por lo tanto

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$*, es decir,* $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$*, como* $z > z_{\alpha/2}$*,* z *cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.La*

probabilidad de rechazar H_0 *cuando esta es verdadera es de*

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado. La

probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es verdadera es de 0.05. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es $z = -3.03$, la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando H_0 es $|z| > 3.03$,

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$*, es decir,* $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$*, como* $z > z_{\alpha/2}$*,* z *cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.La*

probabilidad de rechazar H_0 *cuando esta es verdadera es de* 0.05*. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es* $z = -3.03$*, la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando* H_0 *es* $|z| > 3.03$*,*
entonces $p = 2(0.012) = 0.0024$*, que a su vez es menor que el nivel de significancia* α *asignado inicialmente, y además los resultados son*

Ejemplo ilustrativo

Solución

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.La

probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es verdadera es de 0.05. Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es $z = -3.03$, la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando H_0 es $|z| > 3.03$,
*entonces $p = 2(0.012) = 0.0024$, que a su vez es menor que el nivel de significancia α asignado inicialmente, y además los resultados son **altamente significativos**.*

Ejemplo ilustrativo

Finalmente determinemos la potencia de la prueba cuando μ en realidad es igual a 870 toneladas.
Recordar que la región de aceptación está entre -1.96 y 1.96, para $\mu = 880$, equivalentemente

$$874.18 < \overline{x} < 885.82$$

β es la probabilidad de aceptar H_0 cuando $\mu = 870$, calculemos los valores de z correspondientes a 874.18 y 885.82

Ejemplo ilustrativo

Finalmente determinemos la potencia de la prueba cuando μ en realidad es igual a 870 toneladas.
Recordar que la región de aceptación está entre -1.96 y 1.96, para $\mu = 880$, equivalentemente

$$874.18 < \overline{x} < 885.82$$

β es la probabilidad de aceptar H_0 cuando $\mu = 870$, calculemos los valores de z correspondientes a 874.18 y 885.82 Entonces

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{874.18 - 870}{21/\sqrt{50}} = 1.41 \\ z_1 &= \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{885.82 - 870}{21/\sqrt{50}} = 5.33 \end{aligned}$$

Ejemplo ilustrativo

por lo tanto

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\text{aceptar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\}\\ &= P\{874.18 < \mu < 885.82 \text{ cuando } \mu = 870\}\\ &= P\{1.41 < z < 5.33\} = P\{1.41 < z\}\\ &= 1 - 0.9207 = 0.0793\end{aligned}$$

entonces, la potencia de la prueba es

$$1 - \beta = 1 - 0.0793 = 0.9207$$

que es la probabilidad de rechazar correctamente H_0 cuando H_0 es falsa.

Ejemplo ilustrativo

Determinar la potencia de la prueba para distintos valores de H_1 y graficarlos, *curva de potencia*

H_1	$(1-\beta)$
865	
870	
872	
875	
877	
880	
883	
885	
888	
890	
895	

List de Ejercicios

1. Encontrar las regiones de rechazo para el estadístico z, para una prueba de
   a) dos colas para $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
   b) una cola superior para $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
   c) una cola inferior para $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$
2. Suponga que el valor del estadístico de prueba es
   a) $z = -2.41$, sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
   b) $z = 2.16$, sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
   c) $z = 1.15$, sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
   d) $z = -2.78$, sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.
   e) $z = -1.81$, sacar las conclusiones correspondientes para los incisos anteriores.

List de Ejercicios

3. Encuentre el valor de p para las pruebas de hipótesis correspondientes a los valores de z del ejercicio anterior.
4. Para las pruebas dadas en el ejercicio 2, utilice el valor de p, determinado en el ejercicio 3, para determinar la significancia de los resultados.

Lista de Ejercicios

5. Una muestra aleatoria de $n = 45$ observaciones de una población con media $\overline{x} = 2.4$, y desviación estándar $s = 0.29$. Suponga que el objetivo es demostrar que la media poblacional μ excede 2.3.
   a) Defina la hipótesis nula y alternativa para la prueba.
   b) Determine la región de rechazo para un nivel de significancia de: $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$.
   c) Determine el error estándar de la media muestral.
   d) Calcule el valor de p para los estadísticos de prueba definidos en los incisos anteriores.
   e) Utilice el valor de p pra sacar una conclusión al nivel de significancia α.
   f) Determine el valor de β cuando $\mu = 2.5$
   g) Graficar la curva de potencia para la prueba.

Diferencia entre dos medias poblacionales

El estadístico que resume la información muestral respecto a la diferencia en medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$ es la diferencia de las medias muestrales $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$, por tanto al probar la difencia entre las medias muestrales se verifica que la diferencia real entre las medias poblacionales difiere de un valor especificado, $(\mu_1 - \mu_2) = D_0$, se puede usar el error estándar de $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$, es decir

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

cuyo estimador está dado por

$$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Diferencia entre dos medias poblacionales

El procedimiento para muestras grandes es:

1) **Hipótesis Nula** $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$,

Diferencia entre dos medias poblacionales

El procedimiento para muestras grandes es:

1) **Hipótesis Nula** $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$,

   donde D_0 es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir $D_0 = 0$.

2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$	$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	

Diferencia entre dos medias poblacionales

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$z > z_0$ $z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$ cuando $p < \alpha$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$

Diferencia entre dos medias poblacionales:Ejemplo

Ejemplo

Para determinar si ser propietario de un automóvil afecta el rendimiento académico de un estudiante, se tomaron dos muestras aleatorias de 100 estudiantes varones. El promedio de calificaciones para los $n_1 = 100$ *no propietarios de un auto tuvieron un promedio y varianza de* $\overline{x}_1 = 2.7$ *y* $s_1^2 = 0.36$, *respectivamente, mientras que para para la segunda muestra con* $n_2 = 100$ *propietarios de un auto, se tiene* $\overline{x}_2 = 2.54$ *y* $s_2^2 = 0.4$. *Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en la media en el rendimiento académico entre propietarios y no propietarios de un automóvil? Hacer pruebas para* $\alpha = 0.01, 0.05$ *y* $\alpha = 0.1$.

None

Solución

- *Solución utilizando la técnica de regiones de rechazo:realizando las operaciones* $z = 1.84$, *determinar si excede los valores de* $z_{\alpha/2}$.
- *Solución utilizando el p-value:Calcular el valor de p, la probabilidad de que* z *sea mayor que* $z = 1.84$ *o menor que* $z = -1.84$, *se tiene que* $p = 0.0658$. *Concluir.*

Pruebas de hipótesis e Intervalos de Confianza

- Si el intervalo de confianza que se construye contiene el valor del parámetro especificado por H_0, entonces ese valor es uno de los posibles valores del parámetro y H_0 no debe ser rechazada.
- Si el valor hipotético se encuentra fuera de los límites de confianza, la hipótesis nula es rechazada al nivel de significancia α.

Lista de Ejercicios

1. Del libro Mendenhall resolver los ejercicios 9.18, 9.19 y 9.20(Mendenhall).
2. Del libro Mendenhall resolver los ejercicios: 9.23, 9.26 y 9.28.

Una proporción Binomial

Para una muestra aleatoria de n intentos idénticos, de una población binomial, la proporción muesrtal $\hat{p}$ tiene una distribución aproximadamente normal cuando n es grande, con media p y error estándar

$$SE = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

La prueba de hipótesis de la forma

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = p_0 \\ H_1 &: \quad p > p_0, \text{ o } p < p_0 \text{ o } p \neq p_0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se construye con el mejor estimador de la proporción verdadera, $\hat{p}$, con el estadístico de prueba z, que se distribuye normal estándar.

Una proporción Binomial

El procedimiento es

1) Hipótesis nula: $H_0 : p = p_0$
2) Hipótesis alternativa

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : p > p_0$	$p \neq p_0$
$H_1 : p < p_0$	

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \hat{p} = \frac{x}{n}$$

donde x es el número de éxitos en n intentos binomiales.

Una proporción Binomial

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$z > z_0$	
$z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : p < p_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Una proporción Binomial

Ejemplo

A cualquier edad, alrededor del 20% de los adultos de cierto país realiza actividades de acondicionamiento físico al menos dos veces por semana. En una encuesta local de $n = 100$ adultos de más de 40 a nos, un total de 15 personas indicaron que realizaron actividad física al menos dos veces por semana. Estos datos indican que el porcentaje de participación para adultos de más de 40 a nos de edad es considerablemente menor a la cifra del 20%? Calcule el valor de p y úselo para sacar las conclusiones apropiadas.

Una proporción Binomial

1. Resolver los ejercicios: 9.30, 9.32, 9.33, 9.35 y 9.39.

Diferencia entre dos proporciones binomiales

Diferencia entre dos proporciones binomiales

Diferencia entre dos proporciones binomiales

Diferencia entre dos proporciones binomiales

None

None

None

None

None