Notas del Curso de Estadística

Carlos E. Martínez Rodríguez

9 de enero de 2020

GOUACM.png

LOGOUACM.p

Estimación por intervalos
- Para la media
- Intervalos de confianza sobre la varianza
- Intervalos de confianza para proporciones

Intervalos de confianza para dos muestras
- Varianzas conocidas
- Varianzas desconocidas
  - $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$
  - $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Intervalos de confianza para Distribuciones pareadas

Preliminares

Introducción

Gráfico y Lectura de Datos

Estadística Descriptiva

Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis

Análisis de Regresión Lineal

Estadística Multivariada

Anexo 1: Simulación de Variables Aleatorias

LOGOUACM.png

LOGOUACM.p

Distribución Uniforme
Distribución Normal
Distribución Gamma
Distribución Beta
Distribución Exponencial
Distribución t-Student
Distribución χ^2
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Distribución Poisson
Miscelanea de instrucciones

Intervalos de confianza para μ

Recordemos que S^2 es un estimador insesgado de σ^2

Definición

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ, parámetro poblacional. Si $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$, decimos que $\hat{\theta}_1$ un estimador más eficaz de θ que $\hat{\theta}_2$.

Algunas observaciones que es preciso realizar

a) Para poblaciones normales, $\overline{X}$ y $\tilde{X}$ son estimadores insesgados de μ, pero con $\sigma^2_{\overline{X}} < \sigma^2_{\tilde{X}_2}$.

b) Para las estimaciones por intervalos de θ, un intervalo de la forma $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$, $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ dependen del valor de $\hat{\theta}$.

c) Para $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, si $n \to \infty$, entonces $\hat{\theta} \to \mu$.

LOGOUACM.png

LOGOUACM.png

Intervalos de confianza para μ

d) Para $\hat{\theta}$ se determinan $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ de modo tal que

$$P\left\{\hat{\theta}_L < \hat{\theta} < \hat{\theta}_U\right\} = 1 - \alpha, \tag{1}$$

con $\alpha \in (0, 1)$. Es decir, $\theta \in \left(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right)$ es un intervalo de confianza del $100\,(1-\alpha)\,\%$.

e) De acuerdo con el TLC se espera que la distribución muestral de $\overline{X}$ se distribuye aproximadamente normal con media $\mu_X = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confianza para μ

Para $Z_{\alpha/2}$ se tiene $P\left\{-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$, donde $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Entonces $P\left\{-Z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$ es equivalente a $P\left\{\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$

f) Si $\overline{X}$ es la media muestral de una muestra de tamaño n de una población con varianza conocida σ^2, el intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)\,\%$ para μ es $\mu \in \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

g) Para muestras pequeñas de poblaciones no normales, no se puede esperar que el grado de confianza sea preciso.

h) Para $n \geq 30$, con distribución de forma no muy sesgada, se pueden tener buenos resultados.

LOGOUACM.png

LOGOUACM.png

Intervalos de confianza para μ

Teorema

Si $\overline{X}$ es un estimador de μ, podemos tener $100\,(1-\alpha)$ % de confianza en que el error no excederá a $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, error entre $\overline{X}$ y μ.

Teorema

Si $\overline{X}$ es un estimador de μ, podemos tener $100\,(1-\alpha)$ % de confianza en que el error no excederá una cantidad e cuando el tamaño de la muestra es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2.$$

Nota

Para intervalos unilaterales

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_\alpha\right\} = 1-\alpha$$

Intervalos de confianza para μ

equivalentemente

$$P\left\{\mu < \overline{X} + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha.$$

Si $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n a partir de una población con varianza σ^2, los límites de confianza unilaterales del $100\,(1-\alpha)$ % de confianza para μ están dados por

- Límite unilateral superior: $\overline{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Límite unilateral inferior: $\overline{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalos de confianza para μ

- Para σ desconocida recordar que $T = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, donde s es la desviación estándar de la muestra. Entonces

$$P\left\{-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha, \text{equivalentemente}$$

$$P\left\{\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha.$$

- Un intervalo de confianza del $100\,(1-\alpha)$ % de confianza para μ, σ^2 desconocida y población normal es $\mu \in \left(\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, donde $t_{\alpha/2}$ es una t-student con $\nu = n-1$ grados de libertad.
- Los límites unilaterales para μ con σ desconocida son $\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ y $\overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confianza para μ

- Cuando la población no es normal, σ desconocida y $n \geq 30$, σ se puede reemplazar por s para obtener el intervalo de confianza para muestras grandes:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

- El estimador de $\overline{X}$ de μ, σ desconocida, la varianza de $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, el error estándar de $\overline{X}$ es $\sigma/\sqrt{n}$.
- Si σ es desconocida y la población es normal, $s \to \sigma$ y se incluye el error estándar $s/\sqrt{n}$, entonces

$$\overline{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

LOGOUACM.png

LOGOUACM.p

Intervalos de confianza para σ^2

Supongamos que X se distribuye normal (μ, σ^2), desconocidas. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de tamaño n , s^2 la varianza muestral.
Se sabe que $X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2_{n-1} grados de libertad. Su intervalo de confianza es

$$\begin{aligned}
&P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha \\
&P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha \\
&P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\} = 1-\alpha
\end{aligned} \tag{2}$$

es decir

OGOUACM.png LOGOUACM.p

Intervalos de confianza para σ^2

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] \tag{3}$$

los intervalos unilaterales son

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \infty\right] - \tag{4}$$

$$\sigma^2 \in \left[-\infty, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] \tag{5}$$

Intervalos de confianza para proporciones

Supongamos que se tienen una muestra de tamaño n de una población grande pero finita, y supongamos que X, $X \leq n$, pertenecen a la clase de interés, entonces

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{n}$$

es el estimador puntual de la proporción de la población que pertenece a dicha clase.
n y p son los parámetros de la distribución binomial, entonces $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ aproximadamente si p es distinto de 0 y 1; o si n es suficientemente grande. Entonces

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N\left(0, 1\right), \text{aproximadamente.}$$

LOGOUACM.png

Intervalos de confianza para proporciones

entonces

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left\{-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{\alpha/2}\right\} \\
&= P\left\{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right\}
\end{aligned}
$$

con $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ error estándar del estimador puntual p. Una solución para determinar el intervalo de confianza del parámetro p (desconocido) es

Intervalos de confianza para proporciones

$$1-\alpha = P\left\{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right\}$$

entonces los intervalos de confianza, tanto unilaterales como de dos colas son:

- $p \in \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
- $p \in \left(-\infty, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
- $p \in \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \infty\right)$

para minimizar el error estándar, se propone que el tamaño de la muestra sea $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p\left(1-p\right)$, donde $E = \mid p - \hat{p} \mid$.

Varianzas Conocidas

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes. X_1 con media desconocida μ_1 y varianza conocida σ_1^2; y X_2 con media desconocida μ_2 y varianza conocida σ_2^2. Se busca encontrar un intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)$ % de la diferencia entre medias μ_1 y μ_2.

Sean $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ muestra aleatoria de n_1 observaciones de X_1, y sean $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ muestra aleatoria de n_2 observaciones de X_2.

Sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$, medias muestrales, entonces el estadśitico

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N\,(0,1)\,, \tag{6}$$

si X_1 y X_2 son normales o aproximadamente normales si se aplican las condiciones del Teorema de Límite Central respectivamente.

Varianzas conocidas

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}\right\} \\
&= P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{\alpha/2}\right\} \\
&= P\left\{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq \right. \\
&\qquad \left. (\overline{X}_1-\overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\}
\end{aligned}$$

Varianzas conocidas

Entonces los intervalos de confianza unilaterales y de dos colas al $(1-\alpha)$ % de confianza son

- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[-\infty, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \infty\right]$

LOGOUACM.p

Varianzas conocidas

Nota

Si σ_1 y σ_2 son conocidas, o por lo menos se conoce una aproximación, y los tamaños de las muestras n_1 y n_2 son iguales, $n_1 = n_2 = n$, se puede determinar el tamaño de la muestra para que el error al estimar $\mu_1 - \mu_2$ usando $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ sea menor que E (valor del error deseado) al $(1-\alpha)$ % de confianza. El tamaño n de la muestra requerido para cada muestra es

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

LOGOUACM.png LOGOUACM.png

Varianzas desconocidas

- Si $n_1, n_2 \geq 30$ se pueden utilizar los intervalos de la distribución normal para varianza conocida
- Si n_1, n_2 son muestras pequeñas, supongase que las poblaciones para X_1 y X_2 son normales con varianzas desconocidas y con base en el intervalo de confianza para distribuciones t-student

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$

Supongamos que X_1 es una variable aleatoria con media μ_1 y varianza σ_1^2, X_2 es una variable aleatoria con media μ_2 y varianza σ_2^2. Todos los parámetros son desconocidos. Sin embargo supóngase que es razonable considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Nuevamente sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes. X_1 con media desconocida μ_1 y varianza muestral S_1^2; y X_2 con media desconocida μ_2 y varianza muestral S_2^2. Dado que S_1^2 y S_2^2 son estimadores de σ_1^2, se propone el estimador S de σ^2 como

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

entonces, el estadístico para $\mu_1 - \mu_2$ es

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$

$$t_\nu = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde t_ν es una t de student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Por lo tanto

$$1 - \alpha = P\left\{-t_{\alpha/2,\nu} \leq t \leq t_{\alpha/2,\nu}\right\}$$

$$= P\left\{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\alpha/2,\nu}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \right.$$

$$\left. t \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\alpha/2,\nu}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\}$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$

luego, los intervalos de confianza del $(1-\alpha)$ % para $\mu_1 - |mu_2$ son

- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n}}\right.$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[-\infty, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \infty\right]$

Varianzas desconocidas

Si no se tiene certeza de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, se propone el estadístico

$$t^* = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{7}$$

que se distribuye t-student con ν grados de libertad, donde

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^2/n_1}{n_1+1} + \frac{S_2^2/n_2}{n_2+1}} - 2$$

Varianzas desconocidas

Entonces el intervalo de confianza de aproximadamente el $100\,(1-\alpha)\,\%$ para $\mu_1-\mu_2$ con $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ es

$$\mu_1-\mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}, \right.$$

$$\left. \left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

OGOUACM.png LOGOUACM.p

Distribuciones Pareadas

Supongamos que se toman dos muestras aleatorias independientes de las dos poblaciones de interés

```
> a <- -2;
> b <- 2;
> N <- 10000;
> t <- runif(N, min =a, max=b)
> hist(t,freq = FALSE,
+       col = "blue",
+       xlab = 'Graficando uniformes [-1,1]',
+       density = 30,
+       main = "DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO
> curve(dunif(x, min = a, max = b),
+        from = -5, to = 5,
+        n = N,
+        col = "darkblue",
+        lwd = 2,
+        add = TRUE,
+        yaxt = "n",
+        ylab = 'probability')
> #---------------------------------------------------
```

```
> # utilizando la libreria ggplot2
> #-------------------------------------------------------
> library(ggplot2)
> #-------------------------------------------------------
> xvals <- data.frame(x = c(a, b)) #Range for x-values
> ggplot(data.frame(x = xvals), aes(x = x)) +
+   xlim(c(a, b)) +
+   ylim(c(0, 1/4)) +
+   stat_function(fun = dunif,
+                 args = list(min = a, max = b),
+                 geom = "area",
+                 fill = "green",
+                 alpha = 0.35) +
+   labs(x = "\n u",
+        y = "f(u) \n",
+        title = "Uniform Distribution With a = -2 and
+   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5),
+         axis.title.x = element_text(face="bold",
```

```
+                                         colour="blue",
+                                         size = 12),
+          axis.title.y = element_text(face="bold",
+                                         colour="blue",
+                                         size = 12)) +
+   geom_vline(xintercept = a,
+              linetype = "dashed",
+              colour = "red") +
+   geom_vline(xintercept = b,
+              linetype = "dashed",
+              colour = "red")
> #------------------------------------------------------
> # ggplot Histogram
> # Uniform Distribution With a = -2 and b = 2
> #------------------------------------------------------
> unifs <- runif(n = 10000, min = a, max = b)
> ggplot(data = NULL, aes(x = unifs)) +
+   geom_histogram(binwidth = 0.25, boundary = 2) +
```

LOGOUACM.png LOGOUACM.png

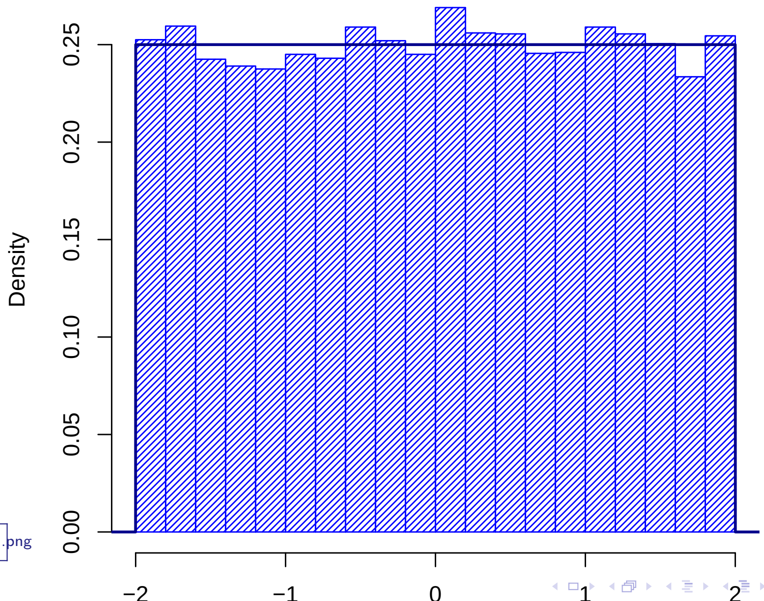
```
+   xlim(c(-3, 3)) +
+   ylim(c(-10, 800)) +
+   labs(x = "\n u",
+        y = "f(u) \n",
+        title = "Uniform Distribution With a = -2 and
+   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5),
+         axis.title.x = element_text(face="bold",
+                                     colour="brown",
+                                     size = 12),
+         axis.title.y = element_text(face="bold",
+                                     colour="brown",
+                                     size = 12))
> #------------------------------------------------------
> # Standard Uniform Distribution With a = 0 and b = 1
> #------------------------------------------------------
> a=0;
> b=1;
> std_unifs <- runif(n = N, min = a, max = b)
```

```
> #-----------------------------------------------------------
> # ggplot Histogram
> #-----------------------------------------------------------
> ggplot(data = NULL, aes(x = std_unifs)) +
+   geom_histogram(binwidth = 0.05, boundary = 1) +
+   xlim(c(-0.05, 1.05)) +
+   labs(x = "\n u", y = "f(u) \n",
+        title = "Uniform Distribution With a = 0 and
+   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5),
+         axis.title.x = element_text(face="bold",
+                                     colour="brown",
+                                     size = 12),
+         axis.title.y = element_text(face="bold",
+                                     colour="brown",
+                                     size = 12))
> #-----------------------------------------------------------
> # otra alternativa
> #-----------------------------------------------------------
```

```
> t <- runif(N)*10; head(t)
[1] 6.367630 3.430645 2.035684 2.469199 2.713120 5.6305
> tf<- floor(t);head(t)
[1] 6.367630 3.430645 2.035684 2.469199 2.713120 5.6305
> table(tf)
tf
   0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
 971 1032 1026  978  968  975 1026  998 1013 1013
> barplot(table(tf),
+         xlab="NUMEROS GENERADOS",
+         ylab="NUMERO DE OCURRENCIAS",
+         border="red",
+         main = "Ejemplo de generacion de Variables A
> #------------------------------------------------------
> # EJERCICIO 1) GENERAR UNA FUNCION QUE GRAFIQUE VARI
> # VARIANDO EL NUMERO DE V.A. GENERADAS
> # EJERCICIO 2) MEJORAR LOS GRAFICOS
> #------------------------------------------------------
```

LOGOUACM.png LOGOUACM.p

DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO [−1,1]



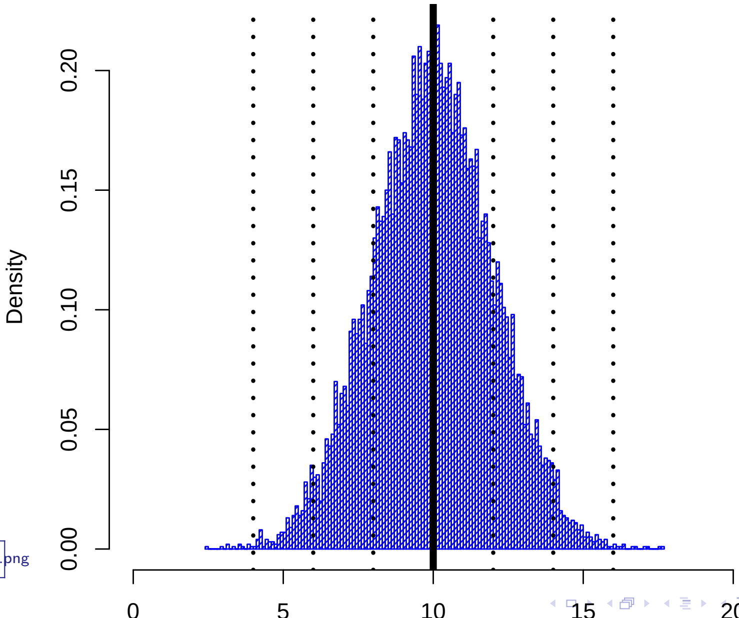
```
> #setwd("~/Nextcloud/TodoMundoFiles/Curso Estadistica
> # ----------------------------------------------------
> # PARA UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR
> # ----------------------------------------------------
> # Para determinar los valores de Z_{alpha/2}
> # Ejecutar los siguientes comandos
> # ----------------------------------------------------
> z <- qnorm(0.05);  print(z)
[1] -1.644854
> z <- qnorm(0.01);  print(z)
[1] -2.326348
> z <- qnorm(0.025); print(z)
[1] -1.959964
> z <- qnorm(0.1);   print(z)
[1] -1.281552
> z <- qnorm(0.001); print(z)
```

```
[1] -3.090232
> # ____________________________________________________
> # Para una distribucion Normal(mu,sigma2), los cuart
> # Q1 <- 0.25
> # Q2 <- 0.5
> # Q3 <- 0.75
> # la funcion a utilizar es: qnorm(p, mean= mu, sd =
> # ____________________________________________________
> mu      <- 2;
> sigma2 <- 4;
> q1      <- 0.25;Q1 <- qnorm(q1,mean=mu,sd = sigma2);p
[1] -0.697959
> q2      <- 0.5; Q2 <- qnorm(q2,mean=mu,sd = sigma2);p
[1] 2
> q3      <- 0.75;Q3 <- qnorm(q3,mean=mu,sd = sigma2);p
[1] 4.697959
> # ____________________________________________________
> # Comparemos los resultados anteriores con las salid
```

```
> # comandos p(norm)
> z <- pnorm(1.64);  print(z)
[1] 0.9494974
> z <- pnorm(2.32);  print(z)
[1] 0.9898296
> z <- pnorm(1.96);  print(z)
[1] 0.9750021
> z <- pnorm(1.28);  print(z)
[1] 0.8997274
> # ________________________________________________
> # ________________________________________________
> # Ahora proporcionemos una bonita grafica de una di
> # ________________________________________________
> N      <- 10000
> mu     <- 10
> sigma2 <- 2
> x      <- rnorm(N,mean=mu, sd=sigma2)
```

```
> hist(x,
+       breaks=150,
+       xlim=c(0,20),
+       freq=FALSE,
+       col = "blue",
+       xlab = 'N(mu,sigma2)',
+       density = 30,
+       main = "Graficando una VA Normal con mu = 10 y
> abline(v=mu, lwd=5)
> abline(v=c(4,6,8,12,14,16), lwd=3,lty=3)
> #
> #
> #
> # ----------------------------------------
```

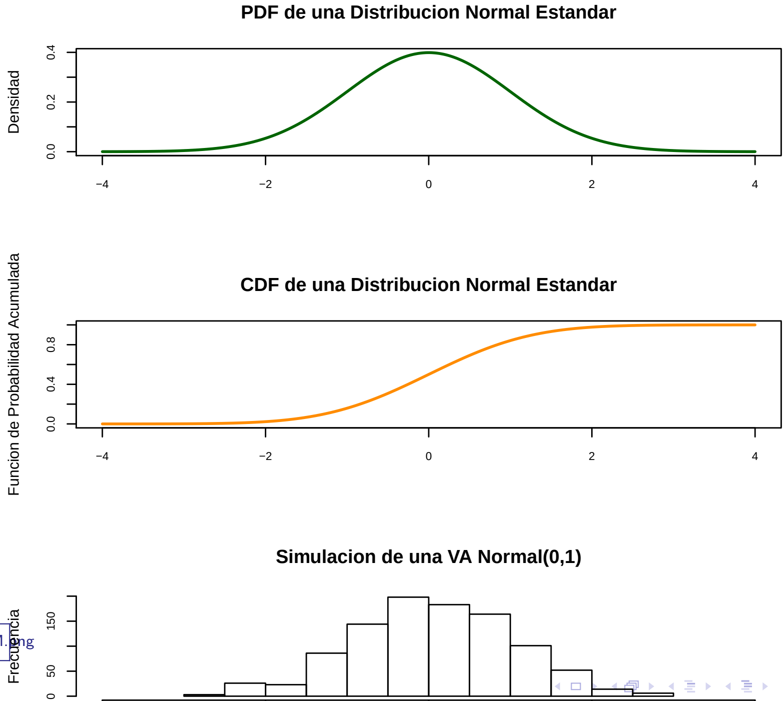
Graficando una VA Normal con mu = 10 y Var=2



```
> set.seed(3000)
> xseq            <- seq(-4,4,.01)
> densities       <- dnorm(xseq, 0,1)
> cumulative      <- pnorm(xseq, 0, 1)
> randomdeviates <- rnorm(1000,0,1)
> par(mfrow=c(3,1))
> #par(mfrow=c(1,3), mar=c(3,4,4,2))
> plot(xseq,
+      densities,
+      col="darkgreen",
+      xlab="",
+      ylab="Densidad",
+      type="l",
+      lwd=2,
+      cex=2,
+      main="PDF de una Distribucion Normal Estandar",
+      cex.axis=.8)
> plot(xseq,
```

LOGOUACM.png LOGOUACM.p

```
+       cumulative,
+       col="darkorange",
+       xlab="",
+       ylab="Funcion de Probabilidad Acumulada",
+       type="l",
+       lwd=2,
+       cex=2,
+       main="CDF de una Distribucion Normal Estandar",
+       cex.axis=.8)
> x<- rnorm(1000,0,1)
> hist(x,
+       main="Simulacion de una VA Normal(0,1)",
+       ylab= 'Frecuencia',
+       xlab='Histograma de una VA Normal(0,1)',
+       cex.axis=.8,
+       xlim=c(-4,4))
```

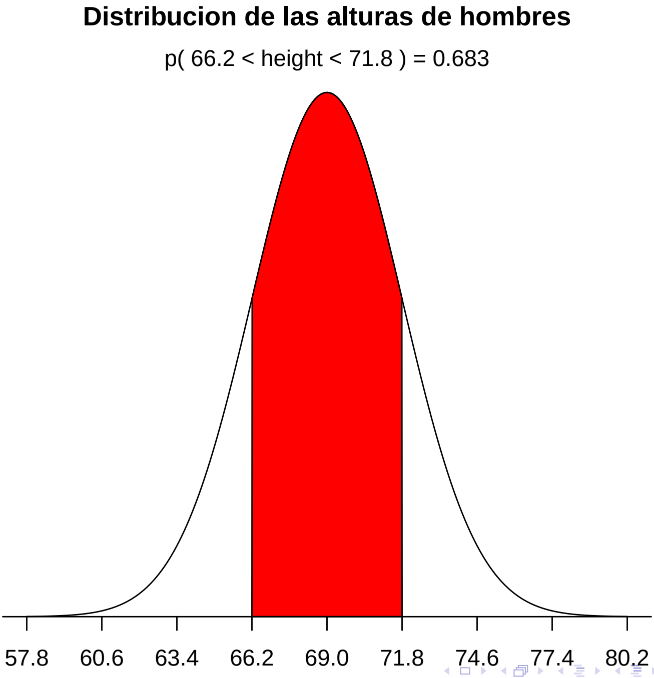

PDF de una Distribucion Normal Estandar
Densidad
0.0
0.2
0.4
−4
−2
0
2
4
CDF de una Distribucion Normal Estandar
Funcion de Probabilidad Acumulada
0.0
0.4
0.8
−4
−2
0
2
4
Simulacion de una VA Normal(0,1)
Frecuencia
0
50
150

Ahora veamos un ejemplo más práctico

```
> mu          <- 69;
> sigma2      <- 2.8;
> DE_rellenar <- 1;
> LI <- mu-sigma2*DE_rellenar
> LS <- mu+sigma2*DE_rellenar
> #Se generan valores equiespaciados entre -4 y 4 desv
> #alrededor de la media
> x <- seq(-4, 4, length = 1000) * sigma2 + mu
> y <- dnorm(x, mu, sigma2)
> plot(x, y,
+      type="n",
+      xlab = "Longitud (inches)",
+      ylab = "",
+      main = "Distribucion de las alturas de hombres
+      axes = FALSE)
> lines(x, y)
> bounds_filter <- x >= LI & x <= LS
```

LOGOUACM.png LOGOUACM.p

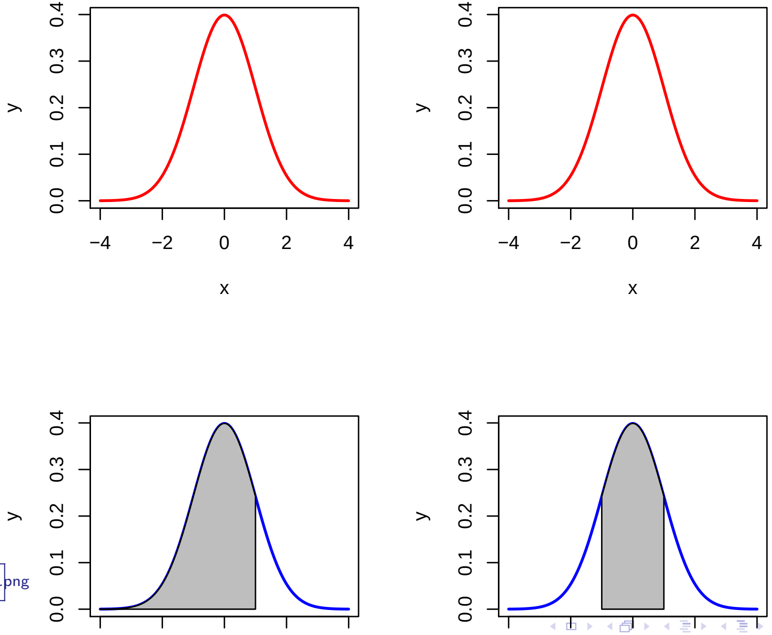
```
> x_within_bounds <- x[bounds_filter]
> y_within_bounds <- y[bounds_filter]
> x_polygon <- c(LI, x_within_bounds, LS)
> y_polygon <- c(0, y_within_bounds, 0)
> polygon(x_polygon, y_polygon, col = "red")
> probability_within_bounds <- pnorm(LS, mu, sigma2) -
> text <- paste("p(", LI, "< height <", LS, ") =", sig
> mtext(text)
> sd_axis_bounds = 5
> axis_bounds <- seq(-sd_axis_bounds * sigma2 + mu, sd
> axis(side = 1, at = axis_bounds, pos = 0)
```


Distribucion de las alturas de hombres
p(66.2 < height < 71.8) = 0.683
57.8
60.6
63.4
66.2
69.0
71.8
74.6
77.4
80.2

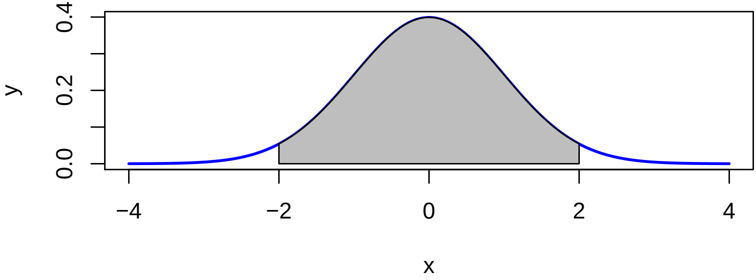
Otras instrucciones que realizan algo semejante a lo hasta ahora mostrado son las siguientes:

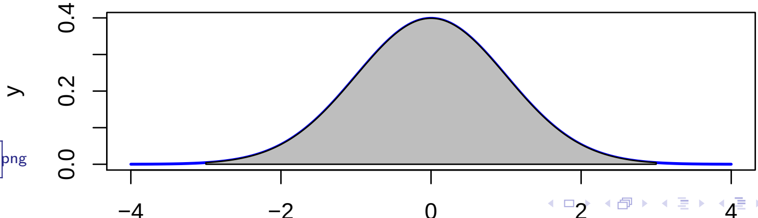
```
> # Parametros iniciales
> par(mfrow=c(2,2))
> a       <- -4;
> b       <- 4;
> N       <- 200;
> DE      <- 1;
> mu      <- 0;
> sigma2 <- 1;
> # Comencemos a graficar
> x=seq(a,b,length=N)
> y=1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)
> # Primer Grafica
> plot(x,y,type="l",lwd=2,col="red")
> # Segunda Grafica
> x=seq(a,b,length=N)
> y=dnorm(x,mean=mu,sd=sigma2)
```

```
> plot(x,y,type="l",lwd=2,col="red")
> # Tercer Grafica
> x=seq(a,b,length=N)
> y=dnorm(x)
> plot(x,y,type="l", lwd=2, col="blue")
> x=seq(a,DE,length=N)
> y=dnorm(x)
> polygon(c(a,x,DE),c(0,y,0),col="gray")
> #Cuarta grafica
> x=seq(a,b,length=N)
> y=dnorm(x)
> plot(x,y,type="l", lwd=2, col="blue")
> x=seq(-DE,DE,length=100)
> y=dnorm(x)
> polygon(c(-DE,x,DE),c(0,y,0),col="gray")
```

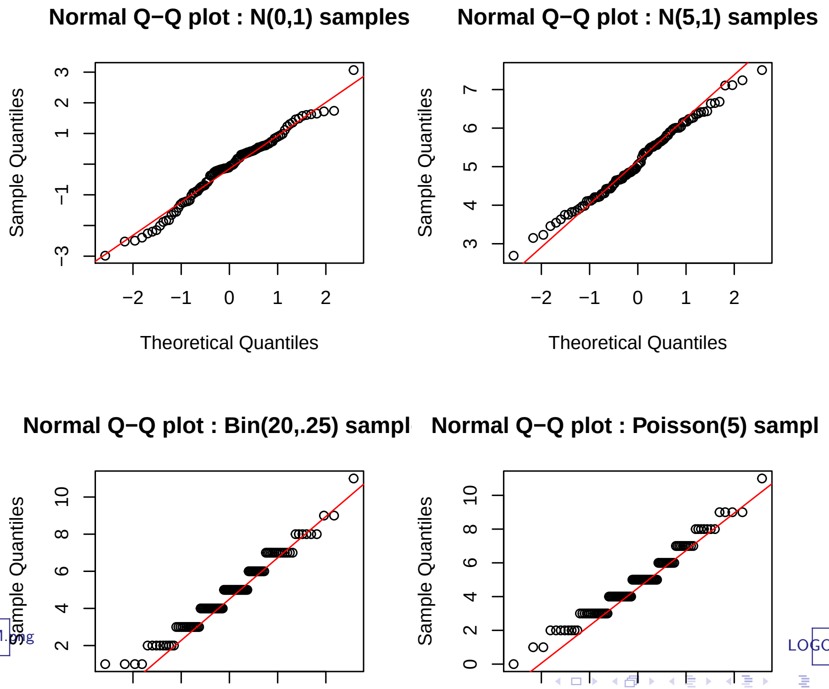

y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x
y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x
y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

```
> # Primera grafica
> par(mfrow=c(2,1))
> x=seq(a,b,length=N)
> y=dnorm(x)
> plot(x,y,type="l", lwd=2, col="blue")
> x=seq(-2*DE,2*DE,length=N)
> y=dnorm(x)
> polygon(c(-2*DE,x,2*DE),c(0,y,0),col="gray")
> # Segunda grafica
> x=seq(a,b,length=N)
> y=dnorm(x)
> plot(x,y,type="l",lwd=2,col="blue")
> x=seq(-3*DE,3*DE,length=N)
> y=dnorm(x)
> polygon(c(-3*DE,x,3*DE),c(0,y,0),col="gray")
```

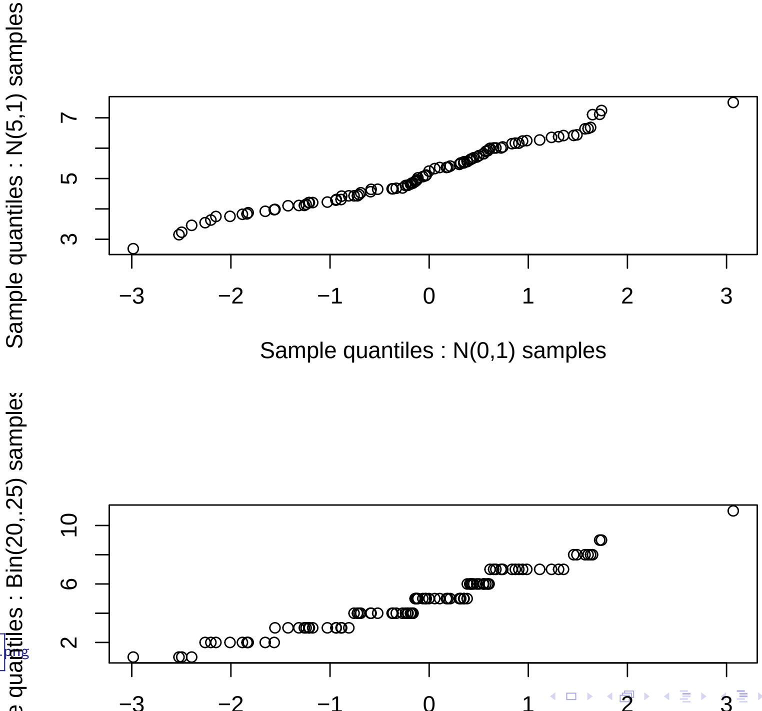

y
0.0
0.2
0.4
−4
−2
0
2
4
x


y
0.0
0.2
0.4
−4
−2
0
2
4

```
> stdnormsamp <-rnorm(100,mean=0,sd=1)
> normsamp <- rnorm(100,mean=5,sd=1)
> binomsamp <-rbinom(100,size=20,prob=.25)
> poissamp <- rpois(100,5)
> par(mfrow=c(2,2))
> qqnorm(stdnormsamp,main="Normal Q-Q plot : N(0,1) sa
> qqline(stdnormsamp,col=2)
> qqnorm(normsamp,main="Normal Q-Q plot : N(5,1) sampl
> qqline(normsamp,col=2)
> qqnorm(binomsamp,main="Normal Q-Q plot : Bin(20,.25)
> qqline(binomsamp,col=2)
> qqnorm(poissamp,main="Normal Q-Q plot : Poisson(5) s
> qqline(poissamp,col=2)
```


Normal Q−Q plot : N(0,1) samples
Normal Q−Q plot : N(5,1) samples
Normal Q−Q plot : Bin(20,.25) sampl
Normal Q−Q plot : Poisson(5) sampl
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

```
> par(mfrow=c(2,1))
> qqplot(stdnormsamp,
+         normsamp,
+         xlab = "Sample quantiles : N(0,1) samples",
+         ylab = "Sample quantiles : N(5,1) samples")
> qqplot(stdnormsamp,
+         binomsamp,
+         xlab = "Sample quantiles : N(0,1) samples",
+         ylab = "Sample quantiles : Bin(20,.25) sample
```



Sample quantiles : N(5,1) samples
3
5
7
−3
−2
−1
0
1
2
3
Sample quantiles : N(0,1) samples
quantiles : Bin(20,.25) samples
2
6
10
−3
−2
−1
0
1
2
3

- Normal Distribution Functions, *R-bloggers*, https://www.r-bloggers.com/normal-distribution-functions/
- Plotting a Normal Distribution with R, *Matt Mazur Home Page*, https://mattmazur.com/2014/10/25/plotting-a-normal-distribution-with-r/
- Normal Distribution, *R Tutorial: An Introduction to Statistics*, http://www.r-tutor.com/elementary-statistics/probability-distributions/normal-distribution
- The Standard Normal Distribution in R, *Department of Mathematics, College of the Redwoods*,http://msenux2.redwoods.edu/MathDept/R/StandardNor
- Mihael Minn Home Page, *The Normal Distribution in R*, http://michaelminn.net/tutorials/r-normal-rank-order/