Ejercicio 12 (de la guía)

Considerar las siguientes dos especificaciones, junto con un algoritmo a que satisface la especificación de p2.

proc p1(in $x : \mathbb{R}$, in $n : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
    requiere { $x \neq 0$ }
    asegura { $x^n - 1 < res \leq x^n$ }
}
proc p2(in $x : \mathbb{R}$, in $n : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
    requiere { $n \leq 0 \to x \neq 0$ }
    asegura { $res = \lfloor x^n \rfloor$ }
}

Ejercicio 12 (de la guía)

- Dados valores de x y n que hacen verdadera la precondición de `p1`, demostrar que hacen también verdadera la precondición de `p2`.

Solución:
Dados $x : \mathbb{R}$ y $n : \mathbb{Z}$, sabiendo que vale $x \neq 0$, queremos ver que $n \leq 0 \rightarrow x \neq 0$.
Para probar una implicación, podemos dividir en casos.

- Caso $n \leq 0 \equiv False$

En este caso, $n \leq 0 \rightarrow x \neq 0$ es inmediatamente verdad porque se falsifica el antecedente

- Caso $n \leq 0 \equiv True$

Si vale $n \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} & n \leq 0 \rightarrow && x \neq 0 \\ \equiv & && x \neq 0 \end{aligned}$$

Que también se cumple por hipótesis.

Ejercicio 12 (de la guía)

- Dados estos valores de x y n, supongamos que se ejecuta a: llegamos a un valor de res que hace verdadera la postcondición de p2. ¿Será también verdadera la postcondición de p1 con este valor de res?

Ejercicio 12 (de la guía)

Solución:
Tenemos que dados $x : \mathbb{R}, n : \mathbb{Z}, res : \mathbb{Z}$, se cumple la postcondición de `p2`, es decir $res = \lfloor x^n \rfloor$. Queremos ver que se cumpla la postcondición de `p1`, es decir $x^n - 1 < res \leq x^n$. Nuevamente dividamos esto por casos.

- Caso $x^n \in \mathbb{Z}$

Cuando x^n es un valor entero,

$$res = \lfloor x^n \rfloor = x^n$$
$$res = x^n$$

Entonces, la desigualdad que queremos probar es:

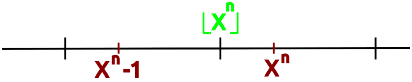
$$x^n - 1 < res \leq x^n$$
$$\iff x^n - 1 < x^n \leq x^n$$

Que es verdad trivialmente.

Ejercicio 12 (de la guía)

Solución:

- Caso $x^n \notin \mathbb{Z}$



Como vemos en la figura, cuando $x^n \notin \mathbb{Z}$, entonces $\lfloor x^n \rfloor$ va a estar entre x^n y $x^n - 1$.
Esto es porque $x^n \notin Z$ significa que $\exists \epsilon : \mathbb{R}, n_0 : \mathbb{Z}$ tal que $x^n = n_0 + \epsilon$, con $0 < \epsilon < 1$. Es decir n_0 es la parte entera de x^n, mientras que ϵ es la parte real, y $\lfloor x^n \rfloor = n_0$ por definición. Por otro lado,

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (n_0 - 1) + \epsilon \\ &= \lfloor x^n \rfloor - 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Además, como $\epsilon < 1$:

$$\begin{aligned} \lfloor x^n \rfloor - 1 + \epsilon &< \lfloor x^n \rfloor \\ x^n - 1 &< \lfloor x^n \rfloor \end{aligned}$$

Si reemplazamos $\lfloor x^n \rfloor$ por res, obtenemos que $x^n - 1 < res < x^n$, que basta para lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 12 (de la guía)

- ¿Podemos concluir que a satisface la especificación de $\mathtt{p1}$?

Solución:
Sí. Esto significa que si tenemos un programa a que satisface la especificación de $\mathtt{p2}$, podemos utilizar a también para satisfacer la especificación de $\mathtt{p2}$.

Como el programa a garantiza $post(\mathtt{p2})$ si se cumple $pre(\mathtt{p2})$, y sabemos que $pre(\mathtt{p1}) \implies pre(\mathtt{p2})$, entonces si se cumple $pre(\mathtt{p1})$ el programa a sigue garantizando que se cumpla $post(\mathtt{p2})$.

Por otro lado sabemos, que $post(\mathtt{p2}) \implies post(\mathtt{p1})$, por lo que si se cumple $pre(\mathtt{p1})$ entonces el programa a garantiza $post(\mathtt{p1})$ también.

Esto quiere decir que el programa a satisface la especificación de $\mathtt{p1}$.

Ejercicio 19b (adivinen)

Se desea especificar el problema `ordenarYBuscarMayor` que dada una secuencia s de enteros (que puede tener repetidos) ordena dicha secuencia en orden creciente de valor absoluto y devuelve el valor del máximo elemento.

`proc ordenarYBuscarMayor`(inout s : seq$\langle\mathbb{Z}\rangle$) : $\mathbb{Z}$ {
`requiere` $\{\ |s| > 0 \land s = s_0\ \}$
`asegura` $\{\ esElMaximo(res, s_0) \land ordenadaValorAbsoluto(s) \land esPermutacion(s, s_0)\ \}$
}

Ejercicio 19b (adivinen)

pred esElMaximo$(p : \mathbb{Z}, s : \mathsf{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle)$ {
$pertenece(p, s) \land (\forall q : \mathbb{Z})\ (pertenece((q, s)) \to q \leq p)$
}

pred ordenadaValorAbsoluto$(s : \mathsf{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle)$ {
$(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 < i \leq |s| - 1 \to_L |s[i]| < |s[i] + 1|)$
}

pred esPermutacion$(s : \mathsf{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle, r : \mathsf{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle)$ {
$|s| = |r| \land (\forall p : \mathbb{Z})\ (\#Apariciones(p, s) = \#Apariciones(p, r))$
}

Ejercicio 19e (adivinen)

Se desea especificar el problema `procesarPrefijos` que dada una secuencia s de palabras y una palabra p, remueve todas las palabras de s que no tengan como prefijo a p y además retorna la longitud de la palabra más larga que tiene de prefijo a p.

$\texttt{proc procesarPrefijos}(\mathsf{inout}\ s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle, \mathsf{in}\ p : \mathsf{char}) : \mathbb{Z}\ \{$

$\quad\texttt{requiere}\ \{\ \mathit{esPrefijoDeAlguna}(p, s) \land s = s_0\ \}$

$\quad\texttt{asegura}\ \{\ \mathit{contenido}(s, s_0) \land \mathit{esPrefijoDeTodos}(s, p) \land$

$\quad\mathit{todosLosDePrefijo}(s, s_0, p) \land \mathit{esLongitudDelMasLargo}(s, \mathit{res})\ \}$

$\}$

Ejercicio 19e (adivinen)

$\texttt{pred esPrefijoDeAlguna}(p : \mathsf{char}, s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle)\ \ \{$
$\quad (\exists r : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)\ (pertenece(r, s) \wedge esPrefijo(p, r))$
$\}$

$\texttt{pred contenido}(s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle, s_0 : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle)\ \ \{$
$\quad (\forall p : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)\ (pertenece(p, s) \rightarrow pertenece(p, s_0))$
$\}$

$\texttt{pred esPrefijoDeTodos}(p : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle, s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle)\ \ \{$
$\quad (\forall q : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)\ (pertenece(q, s) \rightarrow esPrefijo(p, q))$
$\}$

Ejercicio 19e (adivinen)

pred todosLosDePrefijo$(s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle, s_0 :$
$\mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle, p : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)$ {
$(\forall q : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)\ (esPrefijo(p, q) \rightarrow$
$\#Apariciones(q, s_0) = \#Apariciones(q, s))$
}

pred esLongitudDelMasLargo$(s : \mathsf{seq}\langle\mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle\rangle, n : \mathbb{Z})$ {
$(\exists p : \mathsf{seq}\langle\mathsf{char}\rangle)\ (pertenece(p, s) \wedge |p| = n) \wedge$
$(\forall q : \mathbb{Z})\ (pertenece((q, s)) \rightarrow |q| \leq n)$
}