Algoritmos e Invariantes

Algoritmos y Estructuras de Datos

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- La clase pasada vimos un ejemplo de especificación + algoritmos + demostración de la búsqueda lineal (`contiene()`).
- Supongamos ahora que la secuencia está ordenada.
- ¿Cómo cambiaría ahora la especificación?

  `proc contieneOrdenada(in s:` $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$`, in x:` $\mathbb{Z}$`):` Bool`)`$\{$

  `requiere` $\{\mathrm{ordenada}(s)\}$

  `asegura` $\{result = true \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \land_L s[i] = x)\ \}$

- ¿Podemos aprovechar que la secuencia está ordenada para crear un programa más eficiente ?
- Ejercicio: Escribir el predicado ordenada(s).

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- En vez de interrumpir el ciclo al encontrar el elemento, podemos interrumpirlo tan pronto como verificamos que $s[i] \geq x$.

```
bool contieneOrdenada(vector<int> &s, int x) {
  int i = 0;
  while( i < s.size() && s[i] < x ) {
    i=i+1;
  }
  return (i < s.size() && s[i] == x);
}
```

- ¿Es este código realmente más eficiente que el de búsqueda lineal?
- Una forma de analizar esto es comparando "cuánto tardan" en el peor caso (i.e. cuando el elemento no está en la secuencia)

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Analicemos cómo se ejecuta el código (contando operaciones) en el peor caso.

Función `contieneOrdenado`	T_{exec}	máx.# veces
`int i = 0;`	c'_1	1
`while( i < s.size() && s[i] < x ) {`	c'_2	$1 + \|s\|$
`  i=i+1;`	c'_3	$\|s\|$
`}`		
`return (i < s.size() && s[i] == x);`	c'_4	1

- Sea n la longitud de s, ¿cuál es el tiempo de ejecución en el peor caso?

$$T_{contieneOrdenado}(n) = 1 * c'_1 + (1 + n) * c'_2 + n * c'_3 + 1 * c'_4$$

- El tiempo de ejecución de peor caso de `contiene` y **este** `contieneOrdenado` dependen linealmente de n.

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

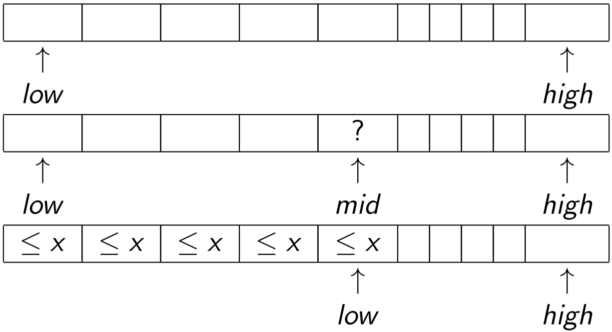
- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Vamos de nuevo: ¿Podemos aprovechar el ordenamiento de la secuencia para mejorar el tiempo de ejecución de peor caso?
- Pensemos en el juego de “Adivinar un número” o “Adivinar el personaje”
  - ¿Necesitamos iterar si $|s| = 0$? Trivialmente, $x \notin s$
  - ¿Necesitamos iterar si $|s| = 1$?Trivialmente, $s[0] == x \leftrightarrow x \in s$
  - ¿Necesitamos iterar si $x < s[0]$? Trivialmente, $x \notin s$
  - ¿Necesitamos iterar si $x \geq s[|s| - 1]$? Trivialmente, $s[|s| - 1] == x \leftrightarrow x \in s$

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

Asumamos por un momento que $|s| > 1 \wedge_L (s[0] \leq x < s[|s|-1])$



Búsqueda sobre secuencias ordenadas

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$		?			
				$\uparrow$		$\uparrow$			$\uparrow$
				low		*mid*			*high*

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$		$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$		$\uparrow$			
				low		*high*			

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	?	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$			
				low	*mid*	*high*			

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$	$\uparrow$				
				low	*high*				

Si $x \in s$, tiene que estar en la posición *low* de la secuencia.

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$\leq x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$	$> x$
				$\uparrow$ *low*	$\uparrow$ *high*				

- ¿Qué invariante de ciclo podemos escribir?

$$I \equiv 0 \leq low < high < |s| \wedge_L s[low] \leq x < s[high]$$

- ¿Qué función variante podemos definir?

$$fv = high - low - 1$$

Búsqueda sobre secuencias ordenados

```
boolean contieneOrdenada(int []s, int x) {
    // casos triviales
    if (s.length == 0 ) {
        return false;
    } else if (s.length == 1) {
        return s[0] == x;
    } else if (x<s[0]) {
        return false;
    } else if (x ≥ s[s.length-1]) {
        return s[s.length-1] == x;
    } else {
        // casos no triviales
  ◦ ...
 }
}
```

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

```
    } else {
        // casos no triviales
        int low = 0;
        int high = s.length - 1;
        while( low+1 < high ) {
            int mid = (low+high) / 2;
            if( s[mid] <= x ) {
                low = mid;
            } else {
                high = mid;
            }
        }
        return s[low] == x;
    }
}
```

A este algoritmo se lo denomina búsqueda binaria

Búsqueda binaria

- Veamos ahora que este algoritmo es correcto.

$$
\begin{array}{rcl}
P_C & \equiv & ordenada(s) \land (|s| > 1 \land_L s[0] \leq x \leq s[|s|-1]) \\
& & \land \ \ low = 0 \land high = |s| - 1 \\
Q_C & \equiv & (s[low] = x) \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \land_L s[i] = x) \\
B & \equiv & low + 1 < high \\
I & \equiv & 0 \leq low < high < |s| \\
& & \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i \leq low \implies s[i] \leq x) \\
& & \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(high \leq i < |s| \implies x < s[i]) \\
fv & = & high - low - 1
\end{array}
$$

Corrección de la búsqueda binaria

- ¿Es I un invariante para el ciclo?
  - El valor de *low* es siempre menor estricto que *high*
  - *low* arranca en 0 y sólo se aumenta
  - *high* arranca en $|s| - 1$ y siempre se disminuye
  - Siempre se respecta que $s[low] \leq x$ y que $x < s[high]$

- ¿A la salida del ciclo se cumple la postcondicion Q_C?
  - Al salir, se cumple que $low + 1 = high$
  - Sabemos que $s[high] > x$ y $s[low] <= x$
  - Como s está ordenada, si $x \in s$, entonces $s[low] = x$

Corrección de la búsqueda binaria

- ¿Es la función variante estrictamente decreciente?
  - Nunca ocurre que $low = high$
  - Por lo tanto, siempre ocurre que $low < mid < high$
  - De este modo, en cada iteración, o bien high es estrictamente menor, o bien low es estrictamente mayor.
  - Por lo tanto, la expresión $high - low - 1$ siempre es estrictamente menor.
- ¿Si la función variante alcanza la cota inferior la guarda se deja de cumplir?
  - Si $high - low - 1 \leq 0$, entonces $high \leq low + 1$.
  - Por lo tanto, no se cumple $(high > low + 1)$, que es la guarda del ciclo

Búsqueda binaria

- ¿Podemos interrumpir el ciclo si encontramos x antes de finalizar las iteraciones?
- Una posibilidad **no recomendada** (no lo hagan en casa!):
- ```
  ◦ ..
    while( low+1 < high) {
      int mid = (low+high) / 2;
      if( s[mid] < x ) {
        low = mid;
      } else if( s[mid] > x ) {
        high = low;
      } else {
        return true; // Argh!
      }
    }
    return s[low] == x;
  }
  ```
  ```

Búsqueda binaria

- Una posibilidad **aún peor** (ni lo intenten!):

- ```
  bool salir = false;
  while( low+1 < high && !salir ) {
    int mid = (low+high) / 2;
    if( s[mid] < x ) {
      low = mid;
    } else if( s[mid] > x ) {
      high = mid;
    } else {
      salir = true; // Puaj!
    }
  }

  return s[low] == x || s[(low+high)/2] == x;
}
```
```

Búsqueda binaria

- Si queremos salir del ciclo, el lugar para decirlo es ...
  la guarda!

- ```
    while( low+1 < high && s[low] != x ) {
      int mid = (low+high) / 2;
      if( s[mid] <= x ) {
        low = mid;
      } else {
        high = mid;
      }
    }
    return s[low] == x;
  }
  ```

- Usamos fuertemente la condición $s[low] \leq x < s[high]$ del invariante.
  ```

Búsqueda binaria

- ¿Cuántas iteraciones realiza el ciclo (en peor caso)?

Número de iteración	$high - low$
0	$\lvert s\rvert - 1$
1	$\cong (\lvert s\rvert - 1)/2$
2	$\cong (\lvert s\rvert - 1)/4$
3	$\cong (\lvert s\rvert - 1)/8$
$\vdots$	$\vdots$
t	$\cong (\lvert s\rvert - 1)/2^t$

- Sea t la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a $high - low = 1$.

$$1 = (|s| - 1)/2^t \quad \text{entonces} \quad 2^t = |s| - 1 \quad \text{entonces} \quad t = \log_2(|s| - 1).$$

Luego, el tiempo de ejecución de peor caso de la búsqueda binaria es = proporcional a $\log_2 |s|$ y no proporcional a $|s|$.

Búsqueda binaria

- ¿Es mejor un algoritmo que ejecuta una cantidad logarítmica de iteraciones?

$\|s\|$	Búsqueda Lineal	Búsqueda Binaria
10	10	4
10^2	100	7
10^6	$1,000,000$	21
$2{,}3 \times 10^7$	$23,000,000$	25
7×10^9	$7,000,000,000$	33 (!)

- Sí! Búsqueda binaria es más eficiente que búsqueda lineal
- Pero, requiere que la secuencia esté ya ordenada.

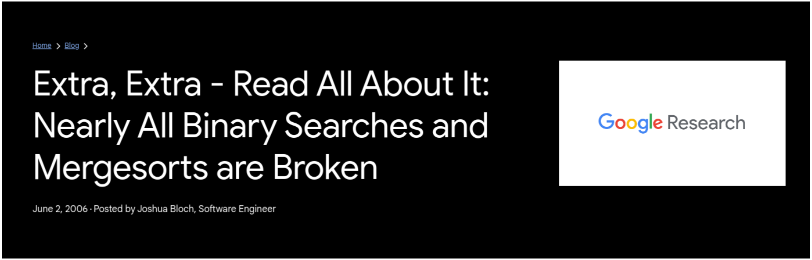
Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Bonus Track: Nearly all binary searches are broken!



`http://goo.gl/Ww0Cx6`

Nearly all binary searches are broken!

- En 2006 comenzaron a reportarse accesos fuera de rango a vectores dentro de la función `binarySearch` implementada en las bibliotecas estándar de Java.
- En la implementación en Java, los enteros tienen precisión finita, con rango $[-2^{31}, 2^{31} - 1]$.
- Si `low` y `high` son valores muy grandes, al calcular `k` se produce overflow.
- La falla estuvo *dormida* muchos años y se manifestó sólo cuando el tamaño de los vectores creció a la par de la capacidad de memoria de las computadoras.
- Bugfix: Computar `mid` evitando el overflow:

```
int mid = low + (high-low)/2;
```

Conclusiones

- La búsqueda binaria implementada en Java estaba formalmente demostrada ...
- ... pero la demostración suponía enteros de precisión infinita (en la mayoría de los lenguajes imperativos son de precisión finita).
  - En AED no nos preocupan los problemas de aritmética de precisión finita (+Info: Orga1/Sistemas Digitales).
  - Es importante validar que las hipótesis sobre las que se realizó la demostración valgan en la implementación (aritmética finita, existencia de acceso concurrente, multi-threading, etc.)

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Apareo (fusión, merge) de secuencias ordenadas

- **Problema:** Dadas dos secuencias ordenadas, fusionarlas en una única secuencia ordenada.
- El problema es importante per se y como subproblema de otros problemas importantes.
- Especificación:

$$\texttt{proc } \mathit{merge}(\texttt{in } a, b : \mathit{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle) : \mathit{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle\ \{$$
$$\texttt{requiere } \{\mathit{ordenada}(a)\ \land\ \mathit{ordenada}(b)\}$$
$$\texttt{asegura } \{\mathit{ordenada}(\mathit{result})\ \land\ \mathit{mismos}(\mathit{result}, a++b)\}$$
$$\}$$

pred $\mathit{mismos}(s, t : \mathit{seq}\langle\mathbb{Z}\rangle)\{$
$(\forall x : \mathbb{Z})(\#\mathit{apariciones}(s, x) = \#\mathit{apariciones}(t, x))$
$\}$

- ¿Cómo lo podemos implementar?
  - Podemos copiar los elementos de a y b a la secuencia c, y después ordenar c.
  - Pero no sabemos ordenar ¿Se podrá fusionar ambas secuencias en una única pasada?

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Apareo de secuencias ordenadas

Ejemplo:

- $a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c} \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \\ \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{i} \end{array}$
- $b = \begin{array}{|c|c|c|c|c} \hline 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \\ \multicolumn{1}{c}{j} & \multicolumn{1}{c}{j} & \multicolumn{1}{c}{j} & \multicolumn{1}{c}{j} & \multicolumn{1}{c}{j} \end{array}$
- $c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \hline ?1 & ?2 & ?3 & ?4 & ?5 & ?6 & ?7 & ?8 & ?9 & \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \\ \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{k} \end{array}$

Búsqueda sobre secuencias ordenadas

- Especificación
- Programa 1
- Programa 2: Búsqueda binaria
- Puede fallar

Apareo/Merge

- Especificación
- Pensemos el algoritmo
- Pensemos el invariante

Apareo de secuencias

- ¿Qué invariante de ciclo tiene esta implementación?

$$
\begin{array}{rcl}
I & \equiv & ordenada(a) \land ordenada(b) \land |c| = |a| + |b| \\
& \land & ((0 \leq i \leq |a| \ \land \ 0 \leq j \leq |b| \ \land \ k = i + j) \\
& \land_L & (mismos(subseq(a, 0, i) + +subseq(b, 0, j), subseq(c, 0, k)) \\
& \land & ordenada(subseq(c, 0, k)))) \\
& \land & i < |a| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < j \rightarrow_L b[t] \leq a[i]) \\
& \land & j < |b| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < i \rightarrow_L a[t] \leq b[j])
\end{array}
$$

- ¿Qué función variante debería tener esta implementación?

$$fv = |a| + |b| - k$$

Apareo de secuencias

```
int[] merge(int[] a, int b[]) {
        int[] c = new int[a.length+b.length];
        int i = 0; // Para recorrer a
        int j = 0; // Para recorrer b
        int k = 0; // Para recorrer c

        while( k < c.length ) {
                if( /*Si tengo que avanzar i */ ) {
                        c[k++] = a[i++];
                } else if(/* Si tengo que avanzar j */)  {
                        c[k++] = b[j++];
                }
        }
        return c;
}
```

- ¿Cuándo tengo que avanzar i? Cuando j está fuera de rango ó cuando i y j están en rango y $a[i] < b[j]$
- ¿Cuándo tengo que avanzar j? Cuando no tengo que avanzar i

Apareo de secuencias

```
int[] merge(int[] a, int b[]) {
        int[] c = new int[a.length+b.length];
        int i = 0; // Para recorrer a
        int j = 0; // Para recorrer b
        int k = 0; // Para recorrer c

        while( k < c.length ) {
                if( j>=b.length || ( i<a.length() && a[i] < b[j] ) ) {
                        c[k++] = a[i++];

                } else  {
                        c[k++] = b[j++];

                }
        }
        return c;
}
```

Apareo de secuencias

- Al terminar el ciclo, ¿ya está la secuencia c con los valores finales?
- ¿Cuál es el tiempo de ejecución de peor caso de `merge`?
- Sea $n = |c| = |a| + |b|$
- El `while` se ejecuta $n + 1$ veces.
- Por lo tanto, $T_{merge}(n) \in O(n)$

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Linear Search, Binary Search)
- Cormen et al. - Introduction to Algorithms
  - Chapter 2.2 -Analyzing algorithms
  - Chapter 3 - Growth of Functions