Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1.1. Repaso de lógica proposicional

Ejercicio 1. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $\neg(y \vee c)$

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

h) $(\neg c \wedge \neg y)$

Ejercicio 2. Considere la siguiente oración: "Si es mi cumpleaños o hay torta, entonces hay torta".

- Escribir usando lógica proposicional y realizar la tabla de verdad
- Asumiendo que la oración es verdadera y hay una torta, ¿qué se puede concluir?
- Asumiendo que la oración es verdadera y no hay una torta, ¿qué se puede concluir?
- Suponiendo que la oración es mentira (es falsa), ¿se puede concluir algo?

Ejercicio 3. Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

b)
- $\neg(\neg p) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

c)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$
- $p \wedge \neg q$

d)
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $\neg p \rightarrow q$

e)
- $p \rightarrow (q \wedge \neg(q \rightarrow r))$
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

Ejercicio 4. Determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

d) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

e) $\big((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\big)$

f) $\big((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))\big)$

Ejercicio 5. Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) $True$, $False$

b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

c) p, $(p \wedge q)$

d) p, $(p \vee q)$

e) p, q

f) p, $(p \rightarrow q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

1.2. Lógica trivaluada

Ejercicio 6. Asumiendo que el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

Ejercicio 7. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Sólo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

1.3. Lógica de primer Orden

Ejercicio 8. Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow \ x + y = z)$

b) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \wedge 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z))$

c) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j))$

Ejercicio 9. Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < 10 \wedge P(i))$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*
$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < 10 \rightarrow P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*
$(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*
$\neg(\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x)) \wedge \neg(\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x))$

Ejercicio 10. Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- *"Existe un único número natural menor a 10 que cumple P"*
- *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*
- *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*
- *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
- *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

Ejercicio 11. Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- *"Si un entero cumple P, entonces existe un entero distinto tal que juntos cumplen Q"*
- *"Existe un par de enteros tal que cumplen Q y ninguno de ambos cumple P"*
- *"Si un par de enteros cumplen Q, entonces al menos uno de ellos cumple P"*
- *"Si un entero cumple P, no existe ningún entero tal que juntos cumplan Q"*

Ejercicio 12. Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

a) $P(3)$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 5) \rightarrow P(n)))$

b) $P(3)$
$(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 5 \wedge P(n))$

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n)))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n)))$

d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n)))$

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n))))$