Lógica

Algoritmos y estructuras de datos

Turno Mañana

Presentación

Diego Bendersky
(JTP)

Daniel Bustos
(Ay2)

Luis Bustamante
(Ay2)

Ramiro Sánchez Posadas
(Ay2)

Camilo Semeria
(Ay1)

Valentino Murga
(Ay2)

Damián Ortiz
(Ay2)

¿Cómo son las clases prácticas?

Vamos a alternar entre espacio de consultas y resolución de ejercicios

Antes de resolver cada ejercicio en el pizarrón van a tener tiempo de hacerlo ustedes

La idea es que podamos resolverlo entre todes

Las clases son más dinámicas si participamos todes

Aprobación de la Materia

- La materia cuenta con **dos parciales**
  - Cada parcial tiene su recuperatorio al final del cuatrimestre
- Cada examen se aprueba con **60** y un puntaje mínimo en cada ejercicio
- La materia es **promocionable**

Fechas Importantes

- **Primer parcial:** Viernes 03/10/2025
- **Segundo parcial:** Miércoles 19/11/2025
- **Primer recuperatorio:** Miércoles 26/11/2025
- **Segundo recuperatorio:** Viernes 5/12/2025

Importante

- El material de la materia está disponible en el **campus**
  - Cada apunte, guía o resuelto puede sufrir modificaciones que serán marcadas con otro color
  - Si encuentran errores **avísennos**
- La comunicación oficial se hará vía anuncios del campus que llegan por **mail**
- Las consultas se hacen **en clase** o en el **campus**

¿Qué vamos a ver hoy?

Parte 1. Repaso de lógica proposicional

- Evaluación
- Transformaciones
- Lógica trivaluada

Parte 2. Lógica de primer orden

- Cuantificadores
- Relación de fuerza en lógica de primer orden

¡A resolver ejercicios!

Evaluación de proposiciones

Ejercicio 1. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $\neg(y \vee c)$

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

h) $(\neg c \wedge \neg y)$

Tablas de verdad

Sirven para evaluar una proposición

p	q	p⋀q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p⋁q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬p
T	F
F	T

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Evaluación de proposiciones

$$\neg(c \lor y) \leftrightarrow (\neg c \land \neg y)$$

$$\neg(V \lor F) \leftrightarrow (\neg V \land \neg F)$$

$$\neg V \leftrightarrow (F \land V)$$

$$F \leftrightarrow F$$

$$\boxed{\text{V}}$$

Reglas de equivalencia

Ejercicio 3. Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \lor q) \land (p \lor r)$
- $\neg p \to (q \land r)$

b)
- $\neg(\neg p) \to (\neg(\neg p \land \neg q))$
- q

c)
- $((True \land p) \land (\neg p \lor False)) \to \neg(\neg p \lor q)$
- $p \land \neg q$

d)
- $(p \lor (\neg p \land q))$
- $\neg p \to q$

e)
- $p \to (q \land \neg(q \to r))$
- $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor (q \land \neg r))$

Reglas de equivalencia

Sirven para transformar predicados (en otros equivalentes)

1. Idempotencia
   $p \land p \equiv p$
2. Asociatividad
   $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$
3. Conmutatividad
   $(p \land q) \equiv (q \land p)$
4. Distributividad
   $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$
5. Reglas de De Morgan
   $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
6. Ley de implicación
   $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$

Reglas de equivalencia

Con transformaciones queremos ver que $(p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

1.	$(p \vee (\neg p \wedge q))$	
2.	$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$	Distributiva
3.	$True \wedge (p \vee q)$	Tautología
4.	$p \vee q$	Conjunción $True$
5.	$\neg p \rightarrow q$	Definición condicional

Lógica trivaluada

Ejercicio 6. Asumiendo que el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

¿Qué vemos ahora?

Parte 2. Lógica de primer orden

- Cuantificadores
- Relación de fuerza en lógica de primer orden

Cuantificadores lógicos

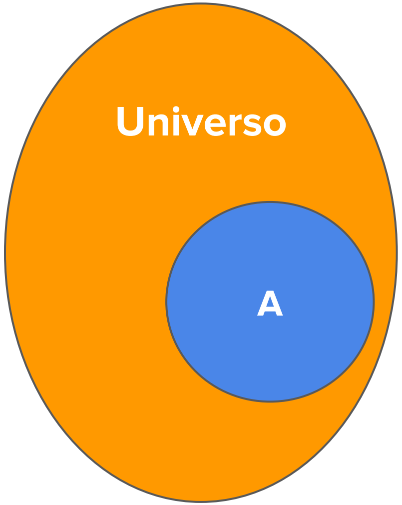
Ejercicio 8. ★ Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow \ x + y = z)$

b) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})((0 \leq x < n \land 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z))$

c) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \land P(j)$



Cuantificadores lógicos

Ejercicio 8. ★ Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq \boxed{x} < \boxed{n} \rightarrow \boxed{x} + \boxed{y} = \boxed{z})$

b) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})((0 \leq \boxed{x} < \boxed{n} \wedge 0 \leq \boxed{y} < \boxed{m}) \rightarrow \boxed{x} + \boxed{y} = z))$

c) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq \boxed{j} < 10 \rightarrow \boxed{j} < 0)$

d) $(\forall j : \mathbb{Z})(\boxed{j} \leq 0 \rightarrow P(\boxed{j})) \wedge P(\boxed{j})$

hay dos variables diferentes que se llaman j

ligada

libre

¿Cómo interpreto los cuantificadores?

EXISTENCIAL

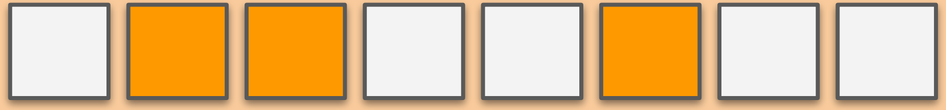
$(\exists n: \mathbb{Z})(Q(n)) \equiv \ldots \lor Q(-2) \lor Q(-1) \lor Q(0) \lor Q(1) \lor Q(2) \lor \ldots$

UNIVERSAL

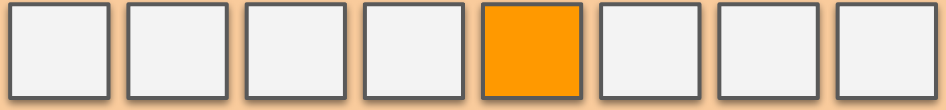
$(\forall m: \mathbb{Z})(P(m)) \equiv \ldots \land P(-2) \land P(-1) \land P(0) \land P(1) \land P(2) \land \ldots$

¿Cómo interpreto los cuantificadores?

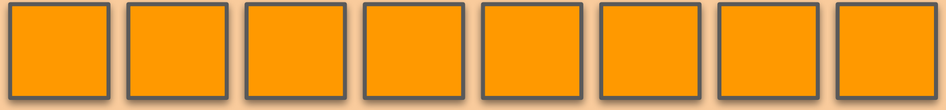
EXISTENCIAL



o...



UNIVERSAL



Cuantificadores lógicos

Ejercicio 9. ★ Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*

$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*

$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*

$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*

$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$

Cuantificadores lógicos

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*

$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

para i=15, $((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$ es falso. Luego toda la expresión es falsa. Solución:

$$(\forall i : \mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \rightarrow_L P(i))$$

En esta nueva expresión, para cualquier i fuera del rango se cumple que $((0 \leq i < 10) \rightarrow_L P(i))$ es verdadero, y para los i dentro del rango ese término es verdadero solamente si P(i) es verdadero, que es lo que queríamos expresar.

Cuantificadores lógicos

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*

$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*

$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \land Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*

$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \land P(x))) \land \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \land Q(x)))$

Solución

b) $(\exists i : \mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \land_L P(i)))$

c) $(\forall x : \mathbb{Z})\ ((0 \leq x < 10) \rightarrow_L (P(x) \rightarrow Q(x))))$

d) $\neg(\exists x : \mathbb{Z})\ (0 \leq x < 10 \land_L (P(x) \land Q(x))))$

¿Qué implica la relación de fuerza?

Dadas dos proposiciones A y B, decimos que A es más fuerte que B si:

- A ➔ B es tautología

p	q	p → q
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

¿Qué implica la relación de fuerza?

¿Puede ocurrir que dos proposiciones sean igualmente fuertes?

Sí, cuando ambas implicaciones son tautologías. Eso querría decir que las proposiciones son equivalentes

¿Puede no haber relación de fuerza entre dos proposiciones?

También. Por ejemplo $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

Relación de fuerza en LPO

Ejercicio 12. Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

a) $P(3)$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 5) \rightarrow P(n))$

b) $P(3)$

$(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 5 \wedge P(n))$

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$

$k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n)))$

¿Qué sigue?

- Con la clase de hoy pueden resolver **toda** la guía 1
- La clase que viene vemos **especificación de problemas**
- En las siguientes clases vamos a seguir usando cosas de lógica y especificación. Recomendamos que se ocupen de lograr entenderlo para no quedar *rezagados*

Relación de fuerza en LPO

a) $P(3)$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 5) \rightarrow P(n))$

$P(3)$ P(n) se cumple para n=3

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 5) \rightarrow P(n))$ P(n) se cumple para todos los n entre 0 y 4

es verdad que si P(n) se cumple para n=3 entonces se cumple para todos los n entre 0 y 4? **NO**

es verdad que si P(n) se cumple para todos los n entre 0 y 4 entonces se cumple para 3? **SI**

luego $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 5) \rightarrow P(n))$ es más fuerte que $P(3)$

Relación de fuerza en LPO

b) $P(3)$

$(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 5 \wedge P(n))$

$P(3)$	P(n) se cumple para n=3
$(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 5 \wedge P(n))$	P(n) se cumple para algún n entre 0 y 4

es verdad que si P(n) se cumple para n=3 entonces se cumple para algún n entre 0 y 4? **SI**

es verdad que si P(n) se cumple para algún n entre 0 y 4 entonces se cumple para 3? **NO**

luego $P(3)$ es más fuerte que $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 5 \wedge P(n))$

Relación de fuerza en LPO

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$ Q(n) se cumple para los n entre 0 y 9 que cumplen P(n)

$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$ Q(n) se cumple para todos los n entre 0 y 9

es verdad que si Q(n) se cumple para los n entre 0 y 9 que cumplen P(n), entonces se cumple para todos los n entre 0 y 9? **NO**

es verdad que si Q(n) se cumple para los n entre 0 y 9, entonces se cumple para todos los n entre 0 y 9 que además cumplen P(n)? **SI**

luego $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$ es más fuerte que $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$

NO SE ATRASEN

¡Terminamos!

¡Hagan consultas!