II. Détail de séquences en classe pour l’introduction des relatifs en 5$^{\text{ème}}$

Nous avons décidé d’introduire les nombres relatifs à partir d’égalités à compléter du type

$$9 + \ldots = 7$$

Même s’il opte pour la question de départ en termes d’équations, le professeur peut commencer par proposer aux élèves des calculs du genre 1243 + 35 – 34. Il ne tirera pas alors de bilan en termes d’opérateur, par exemple ici l’opérateur (+1), mais dira que l’on ajoute le nombre 1 à 1243. Ce sera l’occasion de rappeler l’égalité déjà vue et qui sera immédiatement utile ensuite. Après résolution des équations du genre 9 + … = 7, le professeur posera des calculs comme 1243 + 34 – 35, et le bilan cette fois sera que l’on ajoute le nombre (-1) à 1243.

1) Introduction des nombres négatifs

a) Etape1 : Compléter les pointillés

$$12 + \ldots. = 27$$
$$38 + \ldots. = 83$$
$$438 + \ldots = 705$$
$$58 + \ldots = 58$$
$$9 + \ldots = 7$$

D’abord les élèves complètent en calculant mentalement, puis quand les nombres deviennent grands, ils posent la soustraction.

Pour 9 + … = 7

La plupart des élèves disent dans un premier temps que c’est impossible, mais parfois un ou deux proposent de remplacer les pointillés par l’objet –2, trouvé par intuition.

Le professeur relance alors le travail en exigeant que cette égalité soit complétée. Il explique que jusque là effectivement c’était impossible, mais ce jour un grand pas va être franchi.

Des élèves demandent alors s’ils peuvent compléter par autre chose qu’un nombre seul, le professeur leur répond par l’affirmative et ils proposent alors de remplacer les pointillés par 7 – 9 ou par 2 – 4, ou 0 – 2.
Ce qui donne : 9 + (7 – 9) = 7 ou 9 + (2 – 4) = 7.

On a établi dans une situation précédente, à un autre moment de l’année, et en se limitant aux calculs dans les décimaux positifs que : $(a+b)-c = a+(b-c)$

Le professeur explique qu'on peut supposer que cette propriété se généralise pour le calcul qui occupe la classe. Ce calcul devient ainsi possible car : $9 + (7 – 9) = (9 + 7) – 9 = 7$

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions. Le bilan conduit à écrire que :

$$7 – 9 = 2 – 4 = 1 –3 = \dots = 0 – 2 = –2$$

Le professeur explique alors que les écritures 7 – 9; 2 – 4; 0 - 2 sont différentes écritures d'un nouveau nombre désormais noté –2.

Noter que :

- nous affranchissons les élèves, dès le départ, des parenthèses autour de -2 sauf quand il est situé après un signe d'addition ;
- le nombre négatif est introduit comme différence de deux positifs, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme nombre rationnel et quotient de deux entiers, que les élèves ont rencontré en 6ème . [5]

Nous retrouvons de façon sous-jacente la construction des nombres relatifs comme classe d'équivalence de couples d'entiers : les couples (7,9) ; (2,4) ; (1,3) ; (0,2) sont équivalents et leur classe est notée –2.

Nous récupérons ainsi la cohérence mathématique de la construction des nombres relatifs et rationnels comme ensemble quotient, un peu difficile à enseigner au collège comme cela fut fait dans les années 70.

b) Exercice : Ecrire plusieurs égalités à trous ayant –2 comme solution

Les élèves écrivent par exemple:

3 + ... = 1	ou	1 – 3 = ...
5 + (-2) = 3	ou	3 – 5 = -2
2 + (-2) = 0	ou	0 – 2 = -2

<u>BILAN :</u> On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième, le résultat est un nombre négatif, il s'écrit avec un signe –

$$\mathbf{–2 = 0 – 2 = 1 – 3 = 7 – 9 = \dots}$$

On a alors 9 + (–2) = 7

c) Etape 2 : Opposés

Le professeur propose alors en exercice une liste d'additions de deux termes où il change la place du nombre manquant, le calcul se faisant grâce à la commutativité de l'addition que l'on

[5] Pour les fractions comme quotient de deux entiers, introduites comme solution d'équation, voir notre brochure *Entrées dans l'algèbre, 6ème et 5ème*, IREM d'Aquitaine. Notons que la situation d'introduction des fractions par l'épaisseur des feuilles de papier (travail de l'Ecole Michelet -Equipe G .Brousseau) utilisait les classes d'équivalence, mais en partant d'un contexte « concret ».

prolonge.

En fin de liste , le professeur propose de compléter : …. + 7 = 0 où le nombre manquant est 0 – 7 = -7
Ce travail permet ainsi de définir l'opposé d'un nombre relatif.

<u>BILAN :</u> Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.
7 + (–7) = 0 Les deux nombres (–7) et 7 sont opposés.

d) Exercices

i) Effectuer les soustractions suivantes

Effectuer les soustractions suivantes (certains résultats sont positifs d'autres négatifs). Le professeur jugera s'il peut introduire la difficulté des décimaux.

35 – 17	4,8 – 7,2
23 – 48	0,25 – 1,2
34 – 26	0,75 – 0,38
48 – 72	………..

ii) Effectuer les additions des nombres relatifs suivants

Effectuer les additions des nombres relatifs suivants (les résultats des additions sont tous positifs)
7 + (-4)   12 + (-5)   54 + (-29)   -35 +68   -17 + 21

2) Addition de nombres relatifs, généralisation

Les élèves ont déjà rencontré des opérations du type 9 + (-2) = 7 et 7 – 9 = –2, dans des exercices. Mais ils n'ont jamais rencontré encore d'additions dont le résultat est un nombre négatif.

a) Le professeur leur pose donc la question suivante

« Pouvez vous imaginer des additions dont le résultat soit un nombre négatif [6]? »

Les élèves proposent par exemple -5 + 3 et donnent comme résultats possibles -8 , -2

Il faut départager les élèves de la classe qui ne sont pas d'accord sur les différents résultats.

On peut justifier le résultat – 2 en faisant intervenir la notion d'opposé

$$-5 + 3 = -5 + (5 - 2) = (-5 + 5) - 2 = 0 - 2 = -2$$

On peut procéder de même avec des propositions comme (-4) + (-7)

$$(-4) + (-7) = (-4) + (4 - 11) = -11$$

[6] Variante : Le professeur peut demander directement de calculer par exemple –5 + 3 et dans ce cas les réponses des élèves sont –8, ou –2 ou 2