Chapitre 3 : Les nombres décimaux.

I - Les fractions décimales.

Définition : si a et b sont des nombres entiers ($b \neq 0$), on dit que $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction**.

Le nombre a s'appelle le **numérateur** et le nombre b s'apelle le **dénominateur**.

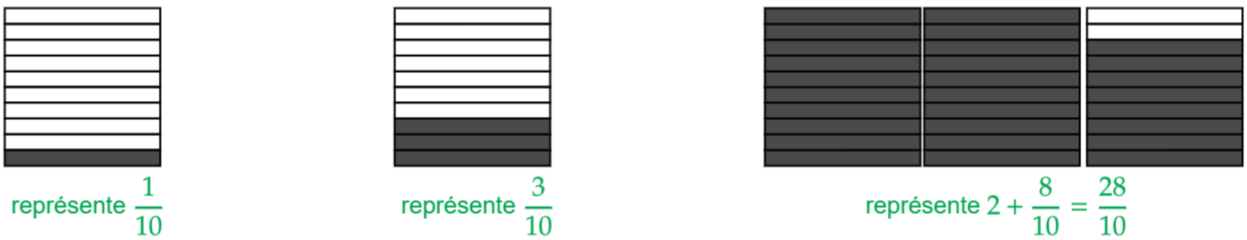
Définition : une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 1,10,100,1000...

Exemples : $\dfrac{183}{10}$, $\dfrac{15}{100}$ et $\dfrac{1}{1\,000}$ sont des fractions décimales et $\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{43}{3}$ ne sont pas des fractions décimales.

Propriétés : lorsqu'on partage une unité en 10 parties égales, on obtient des dixièmes.

Un **dixième** se note : $\dfrac{1}{10}$. Dans l'unité il y a 10 dixièmes. Donc $1 = \dfrac{10}{10}$.

Exemples :



Propriétés : lorsqu'on partage une unité en 100 parties égales, on obtient des centièmes.

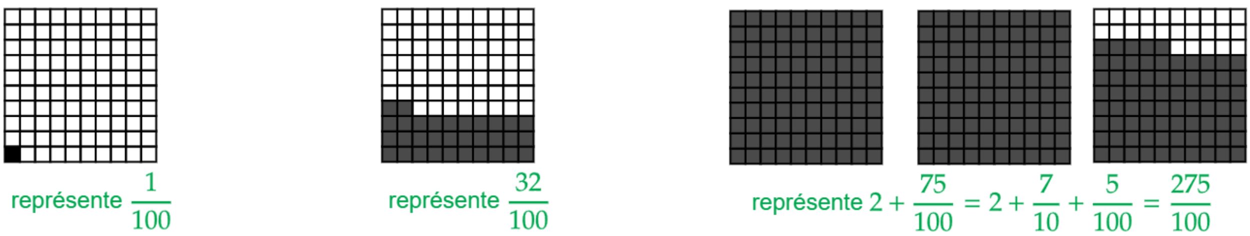
Un **centième** se note : $\dfrac{1}{100}$. Dans l'unité il y a 100 centièmes. Donc $1 = \dfrac{100}{100}$.

Exemples : $\dfrac{12951}{1000} = 12 + \dfrac{951}{1000} = 12 + \dfrac{9}{10} + \dfrac{5}{100} + \dfrac{1}{1000}$.

Propriétés : lorsqu'on partage une unité en 1 000 parties égales, on obtient des millièmes.

Un **millième** se note : $\dfrac{1}{1\,000}$. Dans l'unité il y a 100 millièmes. Donc $1 = \dfrac{1\,000}{1\,000}$.

Exemples :



Propriétés : - Toute fraction décimale peut s'écrire comme la somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.

- Une fraction décimale peut se décomposer en unités, dixièmes, centièmes, millièmes...

Exemples : $\dfrac{231}{100} = 2 + \dfrac{31}{100} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{100}$ et $\dfrac{51\,507}{1000} = 51 + \dfrac{507}{1000} = 51 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{7}{1000}$.

Remarque : une fraction décimale possède plusieurs décompositions.

Propriétés : tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemples : $9 = \dfrac{9}{1} = \dfrac{90}{10}$ et $56 = \dfrac{56}{1} = \dfrac{560}{10} = \dfrac{5\,600}{100}$.

II - Les nombres décimaux.

1. Définitions.

Définition : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemple : $25,381 = \dfrac{25\,381}{1000}$. $25,381$ peut s'écrire comme une fraction décimale, c'est donc un nombre décimal.

Propriété : Un nombre décimal admet aussi une écriture à virgule appelée écriture décimale.

Exemple : $\dfrac{823}{100} = 8 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{100}$ est un nombre décimal dont une écriture décimale est 8,23.

Remarque : Un nombre entier est un nombre décimal.

Exemple : $5 = \dfrac{50}{10}$. 5 peut s'écrire comme une fraction décimale, c'est donc un nombre décimal.

Propriété : Un **nombre décimal** est égal à la somme de sa **partie entière** (un nombre entier) et de sa **partie décimale** (un nombre inférieur à 1).

Exemple :

$$12,89 = \underbrace{12}_{\text{partie entière}} + \underbrace{0,89}_{\text{partie décimale}}. \qquad 23\,567,014 = \underbrace{23\,567}_{\text{partie entière}} + \underbrace{0,014}_{\text{partie décimale}}.$$

Remarques : • Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

• On peut ajouter ou supprimer des zéros à droite de la partie décimale ou à gauche de la partie entière d'un nombre sans changer sa valeur.

Exemples : • 8=08=008. • 5,3=5,30=5,300. • 21,7=021,7=0021,7. • 12,72=012,72=12,720.

Remarque : Un nombre entier est un nombre décimal dont la partie décimale est nulle.

Exemple : Le nombre entier 28 peut s'écrire avec une virgule 28,0. C'est donc aussi un nombre décimal et sa partie décimale est égale à zéro.

Propriété : Un nombre décimal admet une infinité de fractions décimales et d'écritures décimales.

2. Rang des chiffres d'un nombre décimal.

Un chiffre représente des valeurs différentes selon la position qu'il occupe dans un nombre.

Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités					
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	dixièmes	centièmes	millièmes

Tableau de numération.

Exemple :

Dans le nombre 2 318, 704 9 :
2 est le chiffre des unités de mille.
3 est le chiffre des centaines et 23 est le nombre des centaines.
1 est le chiffre des dizaines et 231 est le nombre des dizaines.
8 est le chiffre des unités et 2 318 est le nombre des unités.
7 est le chiffre des dixièmes et 23 187 est le nombre de dixièmes.
0 est le chiffre des centièmes et 231 870 est le nombre de centièmes.
4 est le chiffre des millièmes et 2 318 704 est le nombre de millièmes.
9 est le chiffre des dix-millièmes et 23 187 049 est le nombre de dix-millièmes.

3. Différentes écritures d'un nombre décimal.

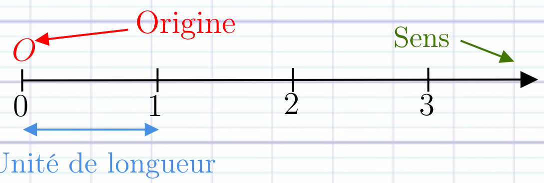
Un nombre décimal peut s'écrire sous différentes formes.

Exemple : différentes écritures du nombre décimal 703,85.

- Fraction décimal : $\dfrac{70\,385}{100}$.
- Ecriture décimale : 703,85.
- Somme de la partie entière et de la partie décimale : $703 + \dfrac{85}{100} = 703 + 0,85$.
- En lettres : sept-cent-trois-unités et quatre-vingt-cinq-centièmes.
- Décompositions : $700 + 3 + \dfrac{8}{10} + \dfrac{5}{100} = (7 \times 100) + (3 \times 1) + (8 \times 0,1) + (5 \times 0,01)$.

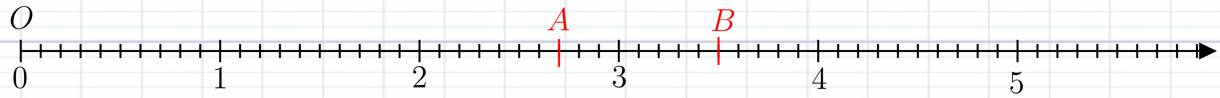
III - Repérage des nombres décimaux sur une demi-droite graduée.

Définition (rappel) : une **demi-droite graduée** est une demi-droite sur laquelle on a choisi une unité de longueur que l'on reporte régulièrement à partir de l'origine.



Propriété (rappel) : sur une demi-droite graduée, chaque point est repéré par un nombre appelé l'**abscisse** de ce point. À chaque nombre correspond un point unique.

Exemple :



Le point A a pour abscisse $2,7$. On note $A(2,7)$. Le nombre $3,5$ est l'abscisse du point B. On note $B(3,5)$.

IV - Comparer des nombres décimaux.

Définition (rappel) : comparer deux nombres c'est trouver le plus grand des deux, ou le plus petit des deux ou savoir s'ils sont égaux.

Méthode : pour comparer deux nombres décimaux écrits sous forme décimale :

- On compare leur partie entière.
- Si les parties entières sont égales, alors on compare le chiffre des dixièmes.
- Si les chiffres des dixièmes sont égaux, alors on compare le chiffre des centièmes.
- On continue ainsi jusqu'à ce que les deux nombres aient des chiffres différents.

Exemple : • Comparer les nombres 12,56 et 27,01 :

- On compare les parties entières : 12 $<$ 27 donc 12,56 $<$ 27,01.

• Comparer les nombres 32,573 et 32,58 :

- Les parties entières de ces deux nombres sont égales.
- On compare donc leur chiffre des dixièmes : ce sont les mêmes.
- On compare alors le chiffre des centièmes : $7 < 8$ donc $32,573 < 32,58$.

V - Encadrer et intercaler un nombre décimal.

Définition : Encadrer un nombre, c'est trouver un nombre plus petit et un nombre plus grand que ce nombre.

Exemple : • Encadrement de $3,187$ à l'unité : $3 < 3,187 < 4$.

• Encadrement de $3,187$ au dixième : $3,1 < 3,187 < 3,2$.

Définition : Intercaler un nombre, entre deux autres, c'est trouver un nombre compris entre ces deux nombres.

Exemple : $3,4 < 3,6 < 3,9$. On dit que $3,6$ est intercalé entre $3,4$ et $3,9$. Entre $3,4$ et $3,9$ on peut aussi placer les nombres : $3,5$ ou $3,65$ ou $3,705$...

Définition : Une valeur approchée d'un nombre est un nombre proche de la valeur exacte de ce nombre.

Exemple : $2,4 < 2,437 < 2,5$.

On dit que $2,4$ et $2,5$ sont des valeurs approchées au dixième de $2,437$. Or, $2,437$ est plus proche de $2,4$ que de $2,5$. D'où, on dit que $2,4$ est l'arrondi au dixième de $2,437$.

Exemple : $2,43 < 2,437 < 2,44$.

On dit que $2,43$ et $2,44$ sont des valeurs approchées au centième de $2,437$. Or, $2,437$ est plus proche de $2,44$ que de $2,43$. D'où, on dit que $2,44$ est l'arrondi au centième de $2,437$.