Table des matières

y#+TITLE : Manipuler les vecteurs du plan (solutions)

Première partie

Solutions des exercices

SOLUTIONS

Chapitre 1

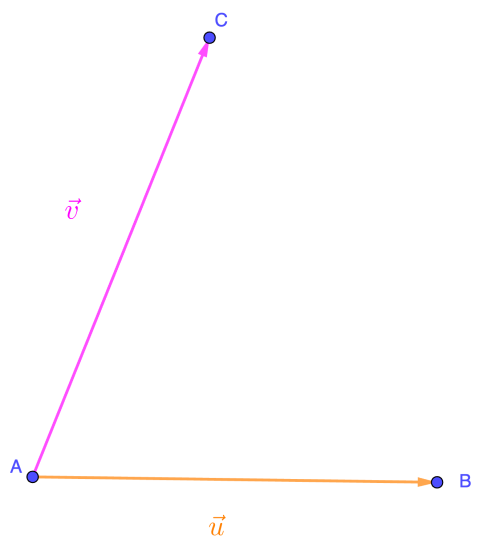
Contenu 1

1.1 Solution de l'exercice 1

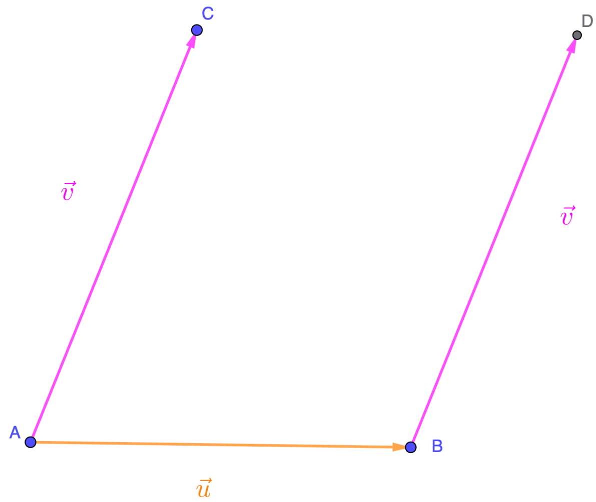
Soient les points A, B, C tels que :

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Voir la figure :



1. L'image du point B par la translation de vecteur
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$
est le point D tel que
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$
Voir figure :



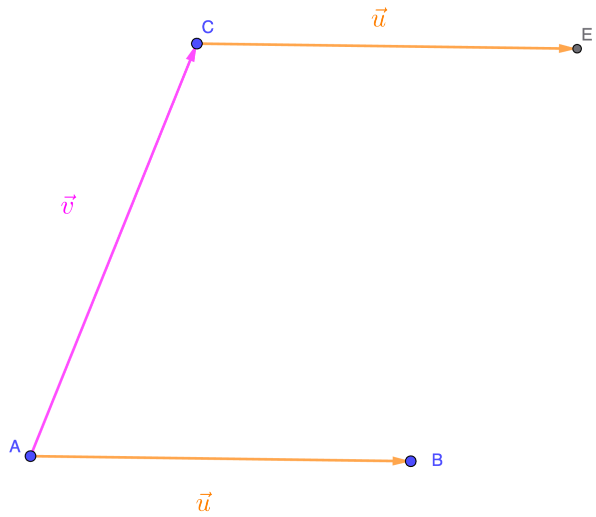
2. L'image du point C par la translation de vecteur

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

   est le point E tel que

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$$

   Voir figure :



3. On peut en déduire que D = E car :

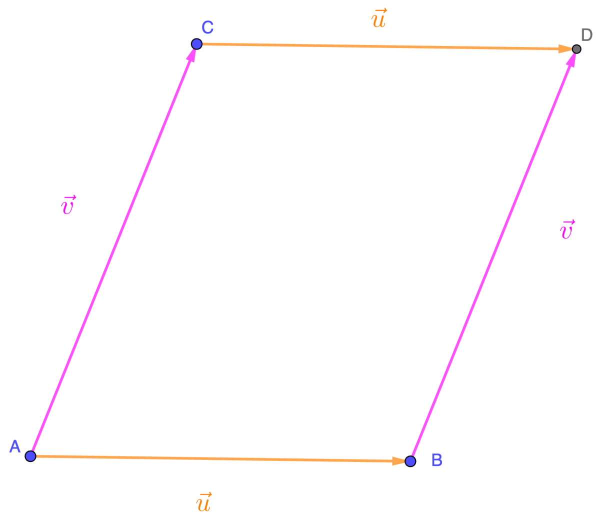
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{u} + \vec{v} \\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \vec{v} + \vec{u} \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} \\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u} \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

4. ABDC est un parallélogramme car (au choix) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CD} \\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

Une seule égalité suffit.

Voir figure :



1.2 Solution de l'exercice 2

1. Par construction, le point C est l'image de B par la translation de vecteur

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

donc

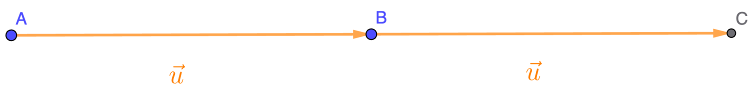
$$\overrightarrow{BC} = \vec{u}$$

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour

- direction : la droite (BC), qui est aussi la droite (AB).

- sens : de B vers C, qui est aussi de A vers B.
- norme : la longueur BC, qui est aussi la longueur AB

Voir figure :



2. Le point B représente le milieu du segment [AC].
3. On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} &= \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

1.3 Solution programme 1

```python
print("Un vecteur a 3 caractéristiques fondamentales : ")

entries = ["direction", "norme", "sens"]

definitions = [
    "la droite qui le porte.",
    "la distance entre origine et extrémité.",
    "de l'origine vers l'extrémité."
]


for i in range(len(entries)):
    e, d = entries[i], definitions[i]
    print(f"{i + 1}) {e.capitalize()} : {d}")

```

1.4 Solution du QCM d'auto-évaluation

Lorsqu'on parle du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'.

1. Quelle est la direction ?

   (a) Toute droite parallèle à l'axe des abscisses.

   (b) Uniquement la droite (MM').

   (c) Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées.

   (d) **Toute droite parallèle à la droite (MM'). (Bonne réponse)**

   (a) Quelle est le sens ?

      i. De O à M.

      ii. **De M à M'. (Bonne réponse)**

      iii. De M' à M.

      iv. De M à O.

   (b) Quelle est la norme ?

      i. La distance OM.

      ii. La distance OM'.

      iii. **La distance MM'. (Bonne réponse)**

      iv. **La distance M'M. (Bonne réponse)**

Chapitre 2

Contenu 2

2.1 Solution de l'exercice 3

1. Puisque D est l'image du point C par la translation de vecteur

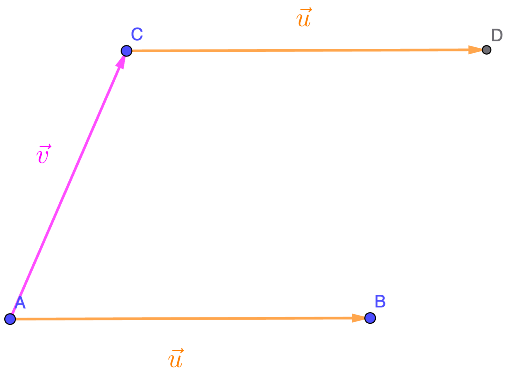
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

alors :

$$\overrightarrow{CD} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Donc ABDC est un parallélogramme.

Voir figure :



2. On sait que

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$$

donc

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \\
\vec{w} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \\
\vec{w} &= \vec{u} - \vec{u} \\
\vec{w} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

Ainsi on remarque que $\vec{w}$ est le vecteur nul.

3. Puisque E est l'image de D par la translation de vecteur

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

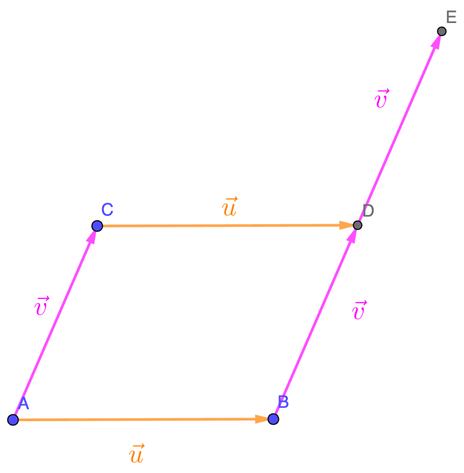
alors

$$\overrightarrow{DE} = \vec{v}$$

donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DE} \\
\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} &= \vec{v} - \vec{v} \\
\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

Voir figure :



2.2 Solution programme 2

```
msg = "Les vecteurs sont-ils égaux ?"
rep = "\n(O/N) "
msg += rep
```

```python
egal = input(msg)


if egal.upper() == "O":
    msg = "Les vecteurs sont-ils alignés ?"
    align = input(msg)

    if align.upper() == "N":
        print("C'est un parallélogramme.")
    else:
        print("C'est le même vecteur.")

else:
    print("Les vecteurs ne sont pas colinéaires.")

```

2.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si :

   (a) Ils ont la même direction.

   (b) Ils ont la même direction et le même sens.

   (c) Ils ont la même direction et la même norme.

   (d) **Ils ont la même direction, le même sens et la même norme. (Bonne réponse)**

2. On dit qu'un vecteur est nul si :

   (a) Sa direction est horizontale.

   (b) Sa direction est verticale.

   (c) Il va dans un sens puis dans l'autre.

   (d) **Sa norme vaut zéro. (Bonne réponse)**

Chapitre 3

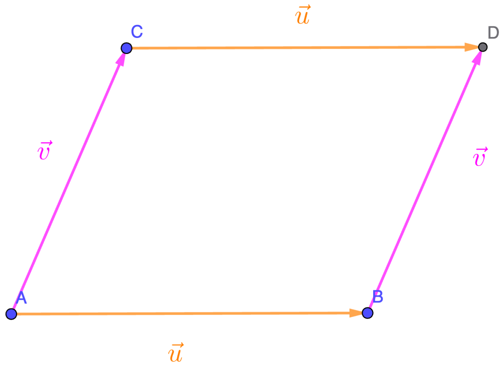
Contenu 3

3.1 Solution de l'exercice 4

1. D'après la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2. D'après la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$
Or par construction :
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
Donc
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$
Ainsi ABDC est un parallélogramme.

Voir figure :



3. Dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu donc O est le milieu de [AD] et [BC]. Cette information est inutile pour cette question mais elle le sera pour la question suivante.

   En utilisant Chasles ou la question précédente (avec la remarque sur le milieu), on peut trouver plusieurs somme permettant d'obtenir le vecteur $\overrightarrow{AO}$:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO}$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

4. Avant de calculer cette somme vectorielle il faut réarranger l'ordre des vecteurs et utiliser la remarque concernant les milieux. En effet, puisque O est le milieu du segment [AD] alors

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$$

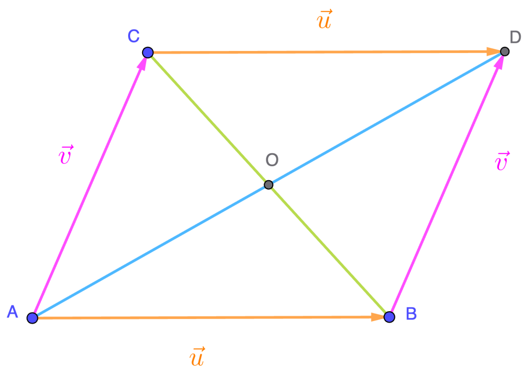
   de même puisque O est le milieu du segment [BC] alors

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$$

   Par conséquent :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$$

   Voir figure :



3.2 Solution programme 3

```
abc = """
C <-- B
^    /
|   /
|  /
| /
A
"""

somme = "Vecteur(A, B) + Vecteur(B, C)"
result = "Vecteur(A, C)"
chasles = somme + " = " + result

print(chasles)
print(abc)
```

3.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Ajouter deux vecteurs revient à :

   (a) **enchaîner deux translations successives (Bonne réponse)**
   (b) faire une rotation
   (c) faire une symétrie
   (d) faire une homothétie

2. La relation de Chasles :

   (a) augmente la norme d'un vecteur
   (b) **décompose un vecteur en sommes de vecteurs (Bonne réponse)**
   (c) consiste à passer un coup de fil à Michel
   (d) revient à faire une transformation géométrique sur un vecteur

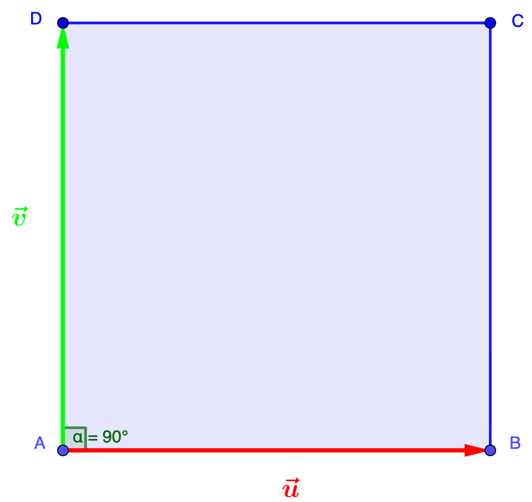
Chapitre 4

Contenu 4 CONTENU

4.1 Solution de l'exercice 5

1. Puisque ABCD est un carré alors les droites (AB) et (AD) sont orthogonales et les longueurs AB et AD sont égales. Par conséquent les vecteurs sont associés sont orthogonaux et de même norme. Ainsi
$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$
est bien une base orthonormée.

   Voir figure :



2. Pour déterminer les coordonnées des points dans cette base il faut exprimer les vecteurs partant de l'origine du repère comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base. Tout d'abord il faut remarquer que l'origine du repère est le point A car il s'agit de l'origine de chacun des vecteurs

de la base. On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{AA} = 0 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow A(0;0)$$
$$\overrightarrow{AB} = 1 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow B(1;0)$$
$$\overrightarrow{AC} = 1 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow C(1;1)$$
$$\overrightarrow{AD} = 0 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow D(0;1)$$

3. Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}$$

4.2 Solution de l'exercice 5 bis

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

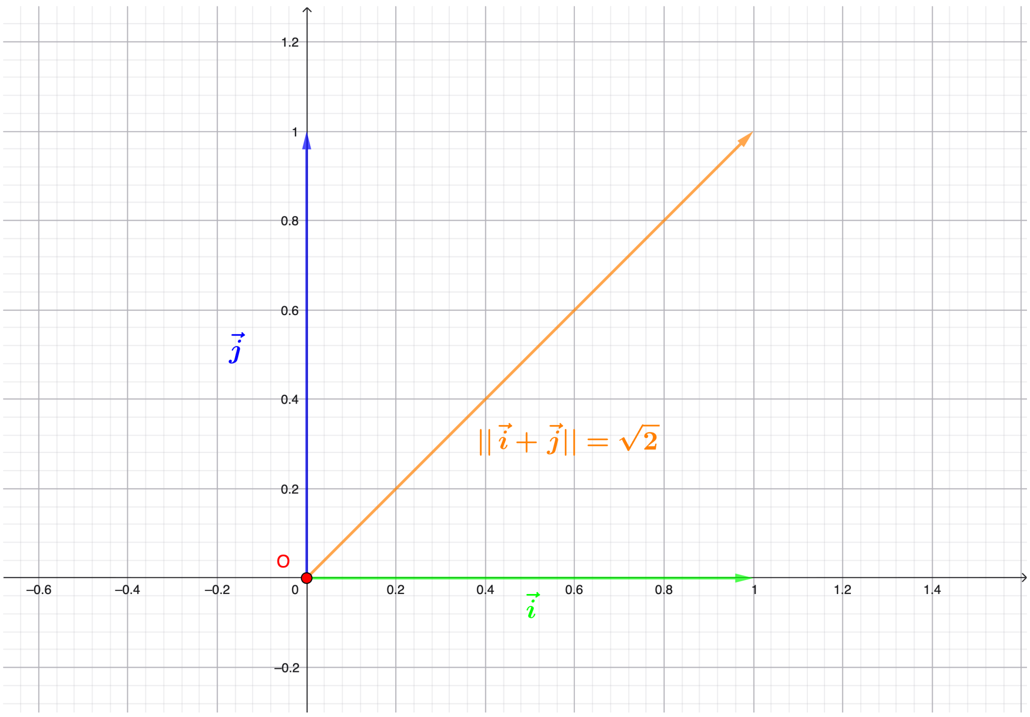
$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les normes des vecteurs suivants :

1.

$$n_1 = ||\vec{i} + \vec{j}||$$
$$n_1 = ||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}||$$
$$n_1 = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$\Rightarrow n_1 = \sqrt{2}$$

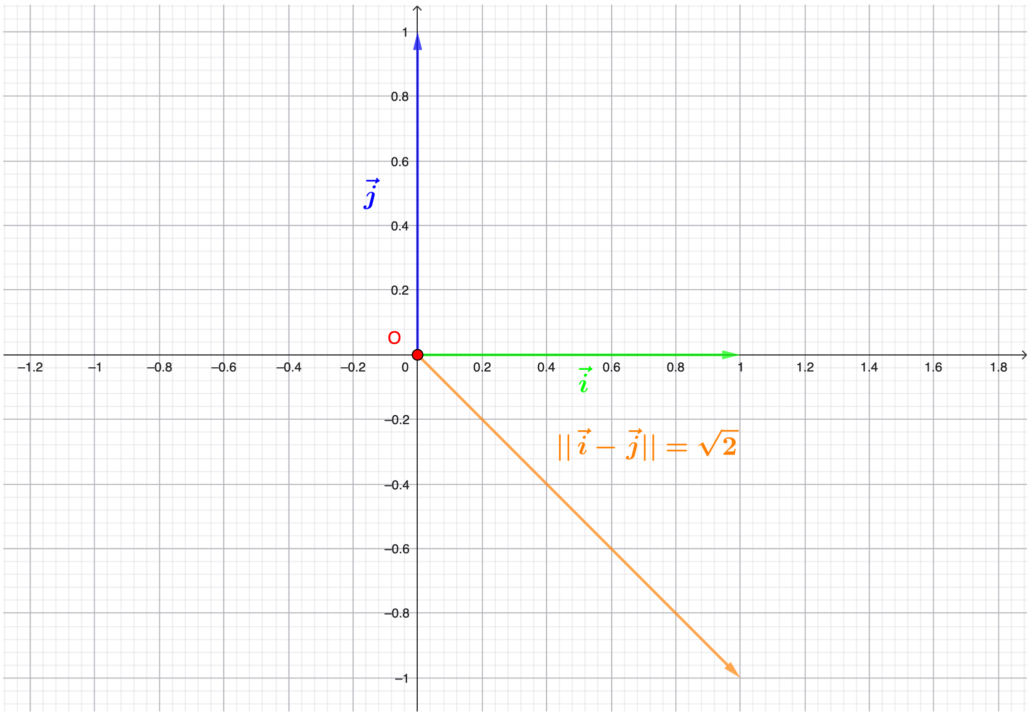
Voir figure :



2.

$$
\begin{aligned}
n_2 &= ||\vec{i} - \vec{j}|| \\
n_2 &= ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}|| \\
n_2 &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\
&\Rightarrow n_2 = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

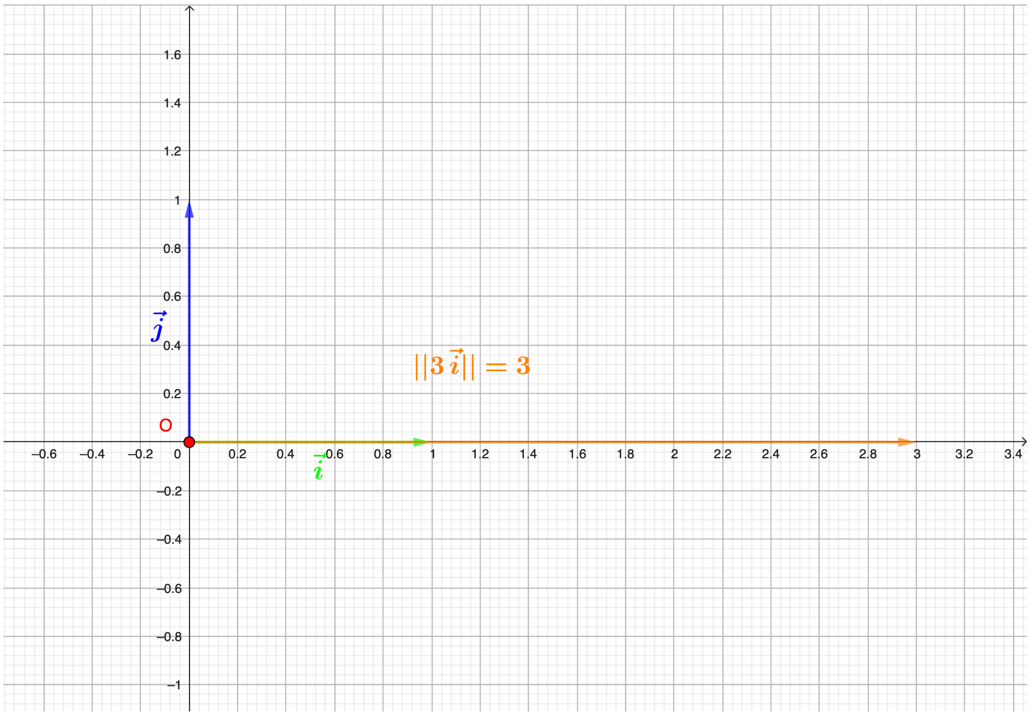
Voir figure :



3.

$$
\begin{aligned}
n_3 &= ||3\vec{i}|| \\
n_3 &= 3||\vec{i}|| \\
&\Rightarrow n_3 = 3
\end{aligned}
$$

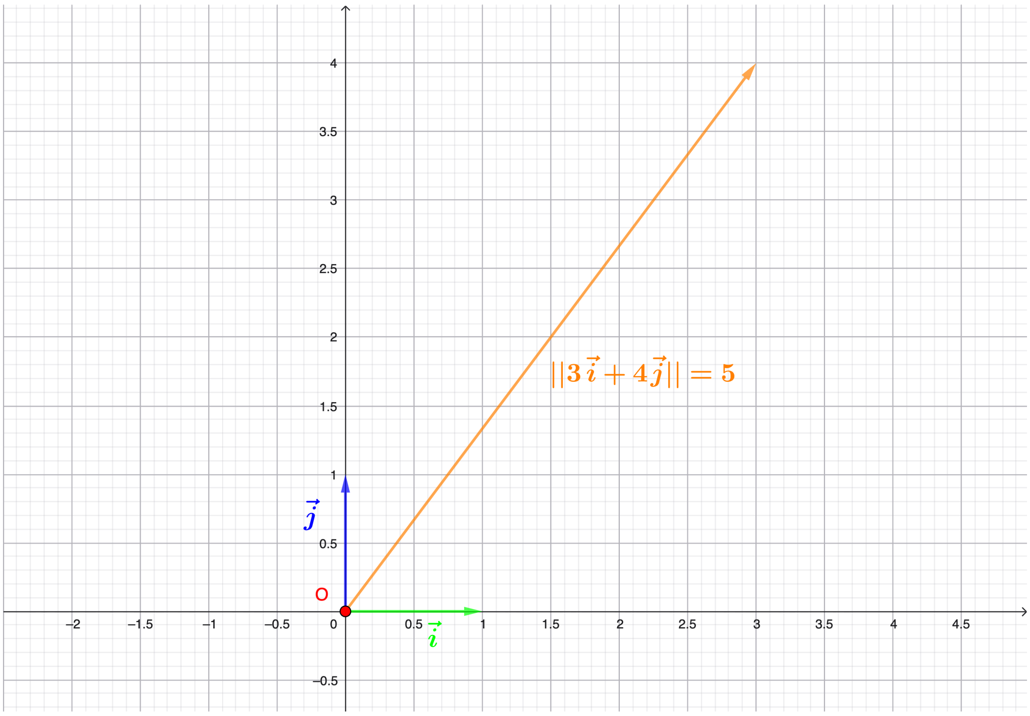
Voir figure :



4.

$$n_4 = ||3\vec{i} + 4\vec{j}||$$
$$n_4 = ||\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}||$$
$$n_4 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$\Rightarrow n_4 = 5$$

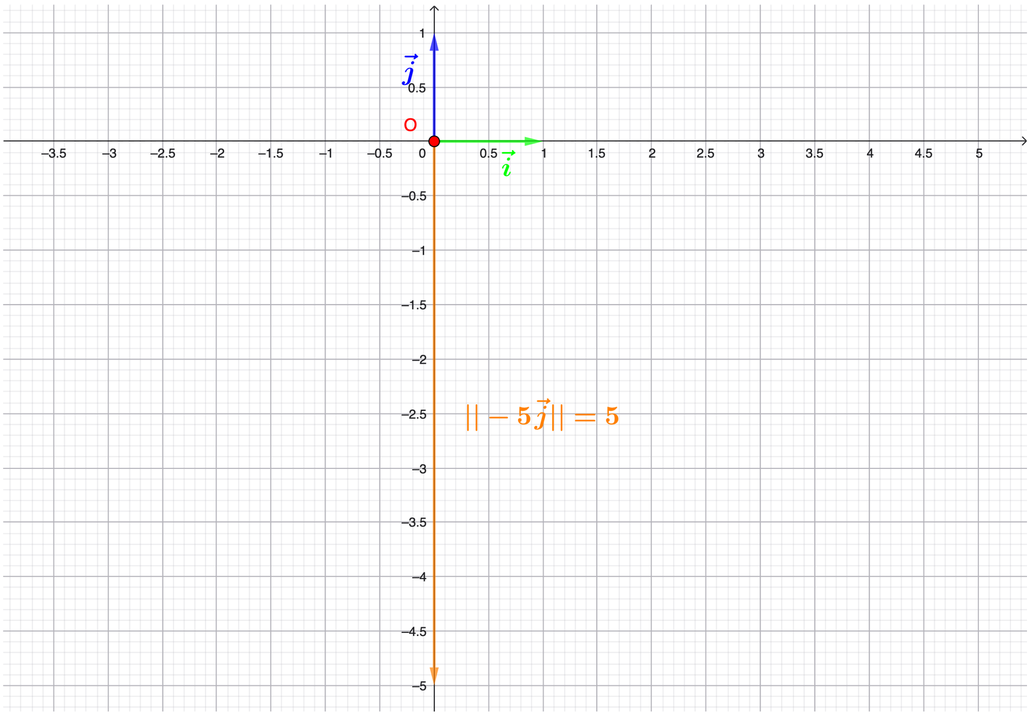
Voir figure :



5.

$$n_5 = ||-5\vec{j}||$$
$$n_5 = |-5|||\vec{j}||$$
$$\Rightarrow n_5 = 5$$

Voir figure :



4.3 Solution de l'exercice 5 ter

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons et comparons les normes ajoutées séparément

$$s = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

avec celles des vecteurs sommes

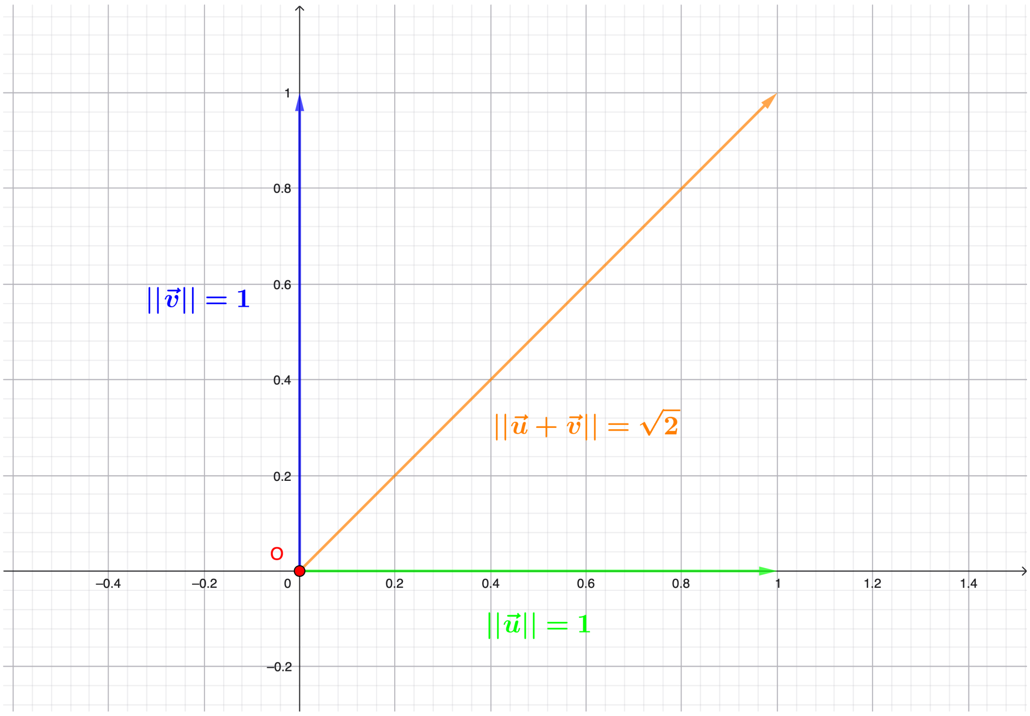
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$

1.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{j})$$

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$$
$$s = 1 + 1 = 2$$
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$
$$e = ||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}||$$
$$e = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow s = 2 > e = \sqrt{2}$$

Voir figure :

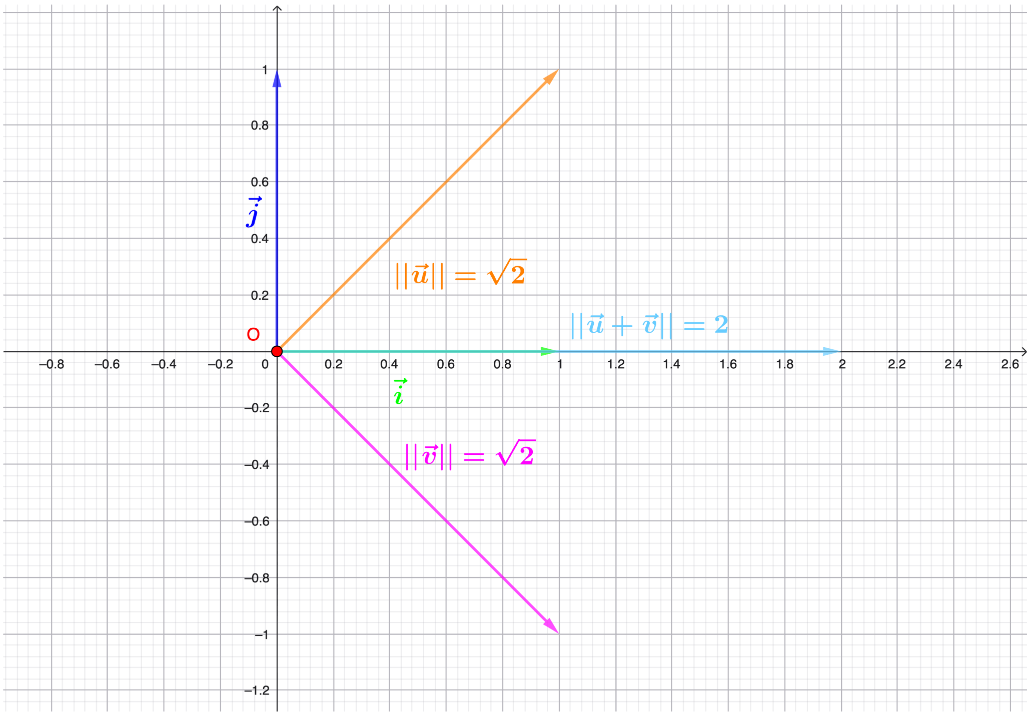


2.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$$

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = \sqrt{2}$$
$$s = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$
$$e = ||2\vec{i}|| = 2||\vec{i}||$$
$$e = 2$$
$$\Rightarrow s = 2\sqrt{2} > e = 2$$

Voir figure :



3.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{i} + b\vec{j}, c\vec{i} + d\vec{j})$$

$$\begin{aligned}
||\vec{u}|| &= \sqrt{a^2+b^2} \\
||\vec{v}|| &= \sqrt{c^2+d^2} \\
s &= ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
s^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
e &= ||\vec{u}+\vec{v}|| = ||(a+c)\vec{i}+(b+d)\vec{j}|| \\
e &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
e &= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)} \\
e^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd) \\
s^2-e^2 &= 2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - (ac+bd)\right) \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2 \\
(ac+bd)^2 &= (ac)^2+(bd)^2+2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad)^2+(bc)^2-2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad-bc)^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2-e^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2 \geqslant e^2 \\
&\Rightarrow s \geqslant e
\end{aligned}$$

4.4 Solution programme 4

```
base = """On dit que les vecteurs u et v forment une base s'ils ne sont
```

```
pas colinéaires.
Algérbiquement : il n'existe aucun réel k tel que u = kv.
Géométriquement : leurs directions sont des droites sécantes.
Rapidement : det(u, v) != 0.\n
"""

draw_base = """
   ^
  / v
 /
/       (u, v) forme une base
x---------------------------->
               u
"""

orthonormal = """Ortho vient du grec pour dire droit donc ici qui forme un
angle droit (directions orthogonales). Normal pour norme, ici de même
norme.\n
"""

draw_orthornormal_base = """
^
|    i et j sont orthogonaux
|    ||i|| = ||j|| ont même norme
|
^    (i, j) forme une base orthonormée
| j
------0->----------------------------------->
i
"""

relation = """Si (i, j) est une base orthonormale alors tout vecteur
u = a * i + b * j a pour coordonnées (a, b).\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) s'écrit :
v_1 = 2 * i + 0 * j.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) s'écrit :
v_2 = 0 * i + 3 * j.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (4, 4) s'écrit :
v_3 = 4 * i + 4 * j.\n
Si le vecteurs v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j
a pour coordonnées : (4, 3).\n
"""

v1 = """
^
|
|--> v_1 = 2 * i
|-> i
|
0->--------->
i
"""

v2 = """
  ^       ^
  |       |
  |    ^  |
  |    |  |
  ^    j  v_2 = 3 * j
j |
0----------------->
```

```
"""



v3 = """
^  v_3 = 4 * i + 4 * j
|
8      ^ (7, 8)
| v_3 /|
6    / | 4 * j
|   /  |
4--x---> (7, 4)
|  |4i |
2  |   |
|  |   |
0--3---7----->
"""

v4 = """
  ^      v_4 = 4 * i + 3 * j
  |
  ^    /^
  |   / |
  |  /  | v_2 = 3 * j
  ^ /   ^
j |/    |
  0->--->----------------->
   i
        2 * v_1 = 4 * i
"""

vectors = [v1, v2, v3, v4]

norme = """Un vecteur u = a * i + b * j de coordonnées (a, b) a pour norme
||u|| = sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2) ** 0.5\n
ou dit autrement ||u||^2 = a^2 + b^2\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) a pour norme :
||v_1|| = sqrt{2^2 + 0^2} = sqrt{2^2} = 2.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) a pour norme :
||v_2|| = sqrt{0^2 + 3^2} = sqrt{3^2} = 3.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (5, 5) a pour norme :
||v_3|| = sqrt{5^2 + 5^2} = sqrt{2 * 5^2} = 5 * sqrt{2}.\n
Si le vecteur v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j a pour norme :
||v_4|| = sqrt{4^2 + 3^2} = sqrt{16 + 9} = sqrt{25} = sqrt{5^2} = 5.\n
"""


menu = """
MENU
1) Définition d'une base orthornomée.
2) Relation vectorielle entre coordonnées et vecteurs de la base.
3) Formule de calcul de la norme.
0) Quitter.
"""

titles = [
    "1) Définition d'une base orthonormée",
    "2) Relation vectorielle coordonnées base",
    "3) Norme d'un vecteur"
]
```

```python

underlines = ["-" * len(t) for t in titles]

continuer = True

while continuer:
    choix = int(input(menu + "\nVotre choix : "))

    if choix == 1:
        print()
        title1 = titles[choix - 1]
        underline1 = underlines[choix - 1]
        print(title1)
        print(underline1)
        print()
        msg = "Une base orthonormée est une base "
        msg += "de vecteurs orthonormaux."
        print(msg)
        print("base :", base)
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
        print(draw_base)
        print("orthonormal :", orthonormal)
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
        print(draw_orthornormal_base)

    elif choix == 2:
        print()
        title2 = titles[choix - 1]
        underline2 = underlines[choix - 1]
        print(title2)
        print(underline2)
        print()
        print(relation)

        for i in range(len(vectors)):
            msg = f"Taper {i + 1} pour afficher "
            msg += f"le vecteur v_{i + 1} : "
            dessin = int(input(msg))
            if dessin == i + 1:
                print(vectors[i])

    elif choix == 3:
        print()
        title3 = titles[choix - 1]
        underline3 = underlines[choix - 1]
        print(title3)
        print(underline3)
        print()
        print(norme)


        def ask_coord(axe, c):
            msg = " du vecteur dont vous voulez "
            msg += "calculer la norme "
            msg = f"{axe} {msg} {c} = "
            return msg


        x = float(input(ask_coord("Abscisse", "x")))
        y = float(input(ask_coord("Ordonnée", "y")))
        n = (x ** 2 + y ** 2) ** 0.5
```

```
        print(f"Norme à 2 décimales près n = {n:.2f}")

    elif choix == 0:
        continuer = False

```

4.5 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Une base orthonormée du plan est :

   (a) une station de lancement de fusée

   (b) un couple de vecteurs ayant des directions distinctes

   (c) **un couple de vecteurs ayant des directions orthogonales et la même norme (Bonne réponse)**

   (d) un couple de vecteurs ayant la même direction et la même norme

2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$?

   (a) **Le couple de nombres $(a; b)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. (Bonne réponse)**

   (b) Les coordonnées du point M obtenu par la translation de vecteur $\vec{u}$ à partir du point O.

   (c) La somme de celles des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   (d) Les coefficients de toute combinaison linéaire des vecteurs de la base.

3. Considérons le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors l'expression de sa norme est :

   (a) $||\vec{u}|| = a + b$

   (b) $||\vec{u}|| = a^2 - b^2$

   (c) $||\vec{u}|| = a^2 + b^2$

   (d) $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **(Bonne réponse)**

Chapitre 5

Contenu 5

CONTENU

5.1 Solution de l'exercice 6

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont les mêmes que celles du point A d'où la relation :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sont les mêmes que celles du point B d'où la relation :

$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

3. Utilisons la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

4. On rassemble les résultats obtenus aux questions précédentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{AB} &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j})\\ \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}\end{aligned}$$

5. Ainsi on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$$

5.2 Solution du programme 5

```python
print("Coordonnées du vecteur AB")
print("x_{AB} = x_B - x_A")
print("y_{AB} = y_B - y_A")

x_A = float(input("x_A = "))
y_A = float(input("y_A = "))

x_B = float(input("x_B = "))
y_B = float(input("y_B = "))

```

```python
x_AB = x_B - x_A
y_AB = y_B - y_A

print(f"x_AB = {x_AB:.2f}")
print(f"y_AB = {y_AB:.2f}")

```

5.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant Chasles on peut écrire :

   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   (b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   (c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$
   (d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ **(Bonne réponse)**

2. En utilisant les coordonnées des points A et B on a :

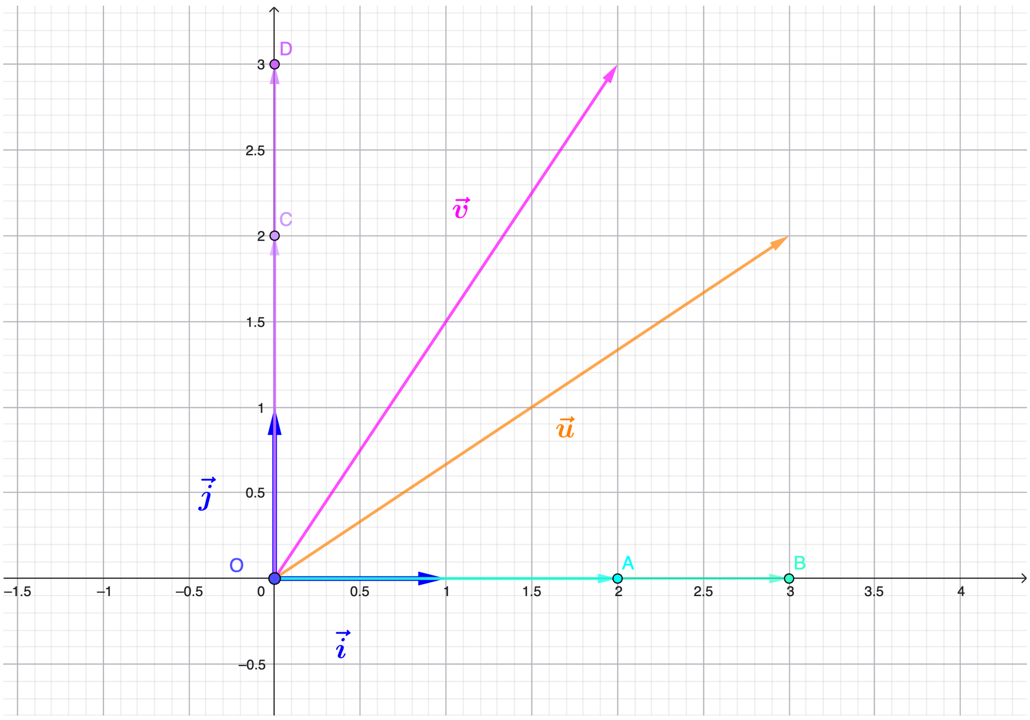
   (a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$
   (b) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$
   (c) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ **(Bonne réponse)**
   (d) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_A \times x_B \\ y_A \times y_B \end{pmatrix}$

Chapitre 6

Contenu 6 CONTENU

6.1 Solution de l'exercice 7

1. Voir figure :



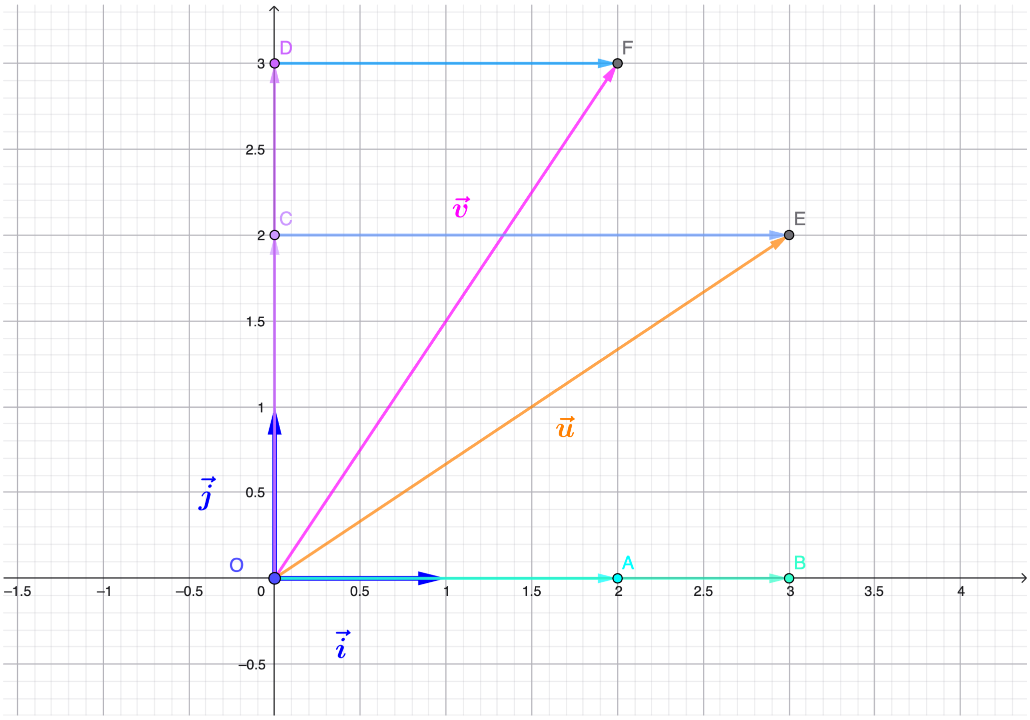
2. On peut voir sur la figure que les points A et B sont sur l'axe des abscisses donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Concrètement :

$$\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$$

3. De même on peut voir sur la figure que les points C et D sont sur l'axe des ordonnées donc les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires. Concrètement :

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$$

4. Voir figure :



5. D'une part on a :

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\overrightarrow{DF} = \vec{v} - 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{DF} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{DF} = 2\vec{i}$$

D'autre part on a :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE}$$
$$\overrightarrow{CE} = \vec{u} - 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{CE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{CE} = 3\vec{i}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DF}$$

6.2 Solution du programme 6

```
x_u = float(input("Abscisse du 1er vecteur = "))
y_u = float(input("Ordonnée du 1er vecteur = "))

x_v = float(input("Abscisse du 2e vecteur = "))
y_v = float(input("Ordonnée du 2e vecteur = "))

d = x_u * y_v - x_v * y_u

```

```python

if d == 0:
    print("Les vecteurs sont colinéaires.")
    k = x_v / x_u
    print(f"Vecteur 2 = {k} * Vecteur 1")
else:
    print("Les vecteurs ne sont pas colinéaires.")
    print("Ils forment donc une base.")

```

6.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à 1 alors :
   (a) Le vecteur change de direction.
   (b) **Le vecteur augmente sa norme. (Bonne réponse)**
   (c) Le vecteur change de sens.
   (d) Le vecteur reste identique.
2. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel inférieur à -1 alors :
   (a) Le vecteur change de direction.
   (b) **Le vecteur augmente sa norme. (Bonne réponse)**
   (c) **Le vecteur change de sens. (Bonne réponse)**
   (d) Le vecteur reste identique.
3. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à -1 et inférieur à 1 alors :
   (a) Le vecteur change de direction.
   (b) **Le vecteur diminue sa norme. (Bonne réponse)**
   (c) Le vecteur change de sens.
   (d) Le vecteur reste identique.
4. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel alors :
   (a) Le vecteur obtenu n'est pas colinéaire au vecteur initial.
   (b) **Le vecteur obtenu est colinéaire au vecteur initial. (Bonne réponse)**

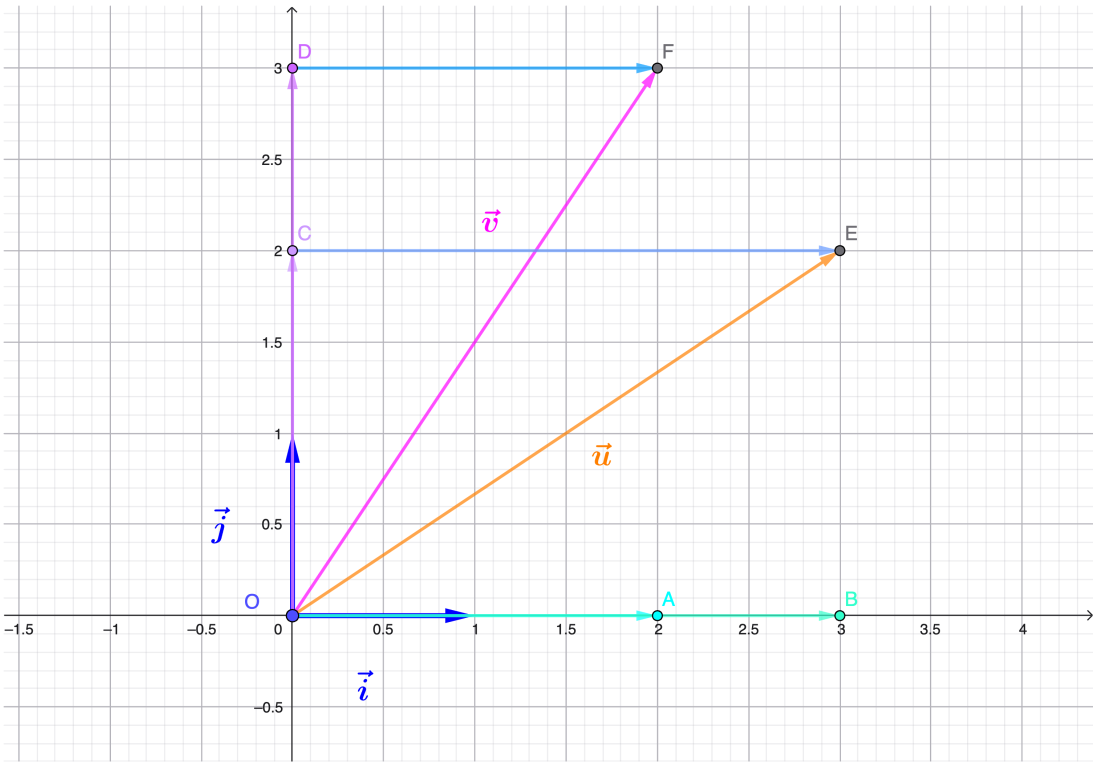
Chapitre 7

Contenu 7

7.1 Solution de l'exercice 8

On reprend la configuration finale de l'exercice 7.

Voir figure :



1. Calculs de déterminants :

$$d_1 = det(\vec{i}, \vec{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$
$$d_2 = det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$$
$$d_3 = det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 0 \times 3 = 0$$
$$d_4 = det(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times 3 - 2 \times 0 = 0$$
$$d_5 = det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4$$
$$d_6 = det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 0 \times 0 = 9$$

2. En utilisant le déterminant montrons que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires :

$$det(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CE}) = 2 \times 0 - 0 \times 3$$
$$det(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CE}) = 0$$

   Or $||\overrightarrow{DF}|| = 2$ et $||\overrightarrow{CE}|| = 3$.

   On en déduit que le quadrilatère DCEF est un trapèze.

3. Faisons de même pour $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et le quadrilatère ABEF.

$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = 0 \times 2 - 3 \times 0$$
$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = 0$$

   Or $||\overrightarrow{AF}|| = 3$ et $||\overrightarrow{BE}|| = 2$.

   On en déduit que le quadrilatère ABFE est un trapèze.

4. Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{JE}$:

$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{10}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(x_E - x_J)^2 + (y_E - y_J)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{10}$$

5. Comparons les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ}\\ \overrightarrow{IJ} &= \vec{j} - \vec{i}\\ \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}\\ \overrightarrow{EF} &= \vec{v} - \vec{u}\\ \overrightarrow{EF} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j})\\ \overrightarrow{EF} &= \vec{j} - \vec{i}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF}$$

Le quadrilatère IEFJ est donc un parallélogramme. Or d'après la question précédente ses diagonales [IF] et [JE] sont égales. Par conséquent IEFJ est un rectangle.

6. Puisque G l'intersection des segments [IF] et [JE] et que ce sont les diagonales d'un rectangle alors G est leur milieu. Déterminons ses coordonnées :

$$G\begin{pmatrix}\frac{x_I+x_F}{2}\\ \frac{y_I+y_F}{2}\end{pmatrix}$$
$$G\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Le point H est tel que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$ alors en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$$

Ainsi on obtient les coordonnées de H en doublant celles de G, H(3 ; 3). Étudions la nature du quadrilatère OBHD :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= 3\vec{i} + 3\vec{j}\\ \overrightarrow{OB} &= 3\vec{i}\\ \overrightarrow{OD} &= 3\vec{j}\\ \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

On vient de prouver que OBHD est un carré. Pourquoi ? Parce que $\overrightarrow{OH}$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux de même norme.

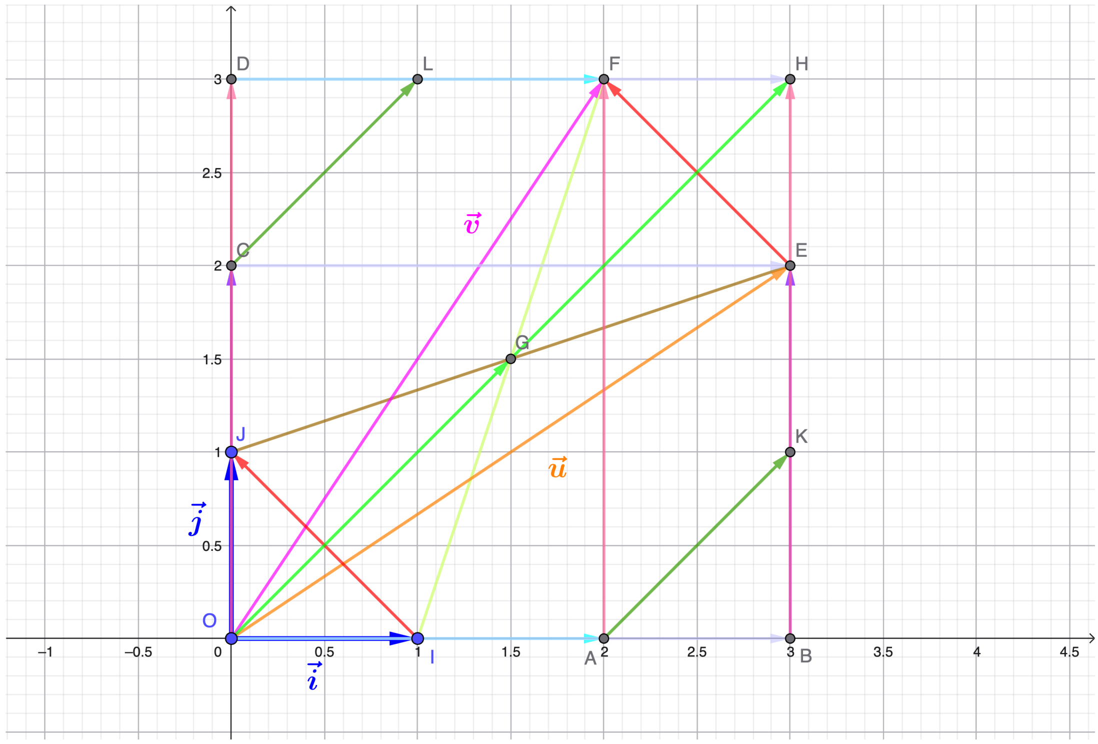
7. Le triangle OFE est isocèle en O car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme :

$$\begin{aligned}||\vec{u}|| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\\ ||\vec{v}|| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

8. D'après la question 6 on sait que OBHD est un carré et que G est le milieu de la diagonale OH. Par conséquent G est aussi le milieu de la diagonale BD. Ainsi l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$ est D.

9. Le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \vec{j}$ a pour coordonnées K(3 ; 1).

10. Le point L tel que $\overrightarrow{DL} = \vec{i}$ a pour coordonnées L(1 ; 3).



7.2 Solution du programme 7

```python
def abc_aligned():
    points = []

    for i in range(3):
        x = float(input(f"Abscisse du {i + 1}e point = "))
        y = float(input(f"Ordonnée du {i + 1}e point = "))
        points.append((x, y))

    x_p1p2 = points[1][0] - points[0][0]
    y_p1p2 = points[1][1] - points[0][1]
    x_p1p3 = points[2][0] - points[0][0]
    y_p1p3 = points[2][1] - points[0][1]

    det = x_p1p2 * y_p1p3 - x_p1p3 * y_p1p2

    if det == 0:
        return True
    else:
        return False


# Test
if abc_aligned():
    print("Les points sont alignés.")
else:
    print("Les points ne sont pas alignés.")
```

7.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Considérons les vecteurs
$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
   et
$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
   alors :

   (a)
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

   (b)
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - y_1y_2$$

   (c)
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 + y_1x_2$$

   (d)
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

   (Bonne réponse)

2. Considérons les mêmes vecteurs que précédemment.
   On dira que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si :

   (a) $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$
   (b) $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$ **(Bonne réponse)**
   (c) **il existe un réel** k **tel que** $x_1 = kx_2$ **et** $y_1 = ky_2$ **(Bonne réponse)**
   (d) $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ **(Bonne réponse)**

Deuxième partie

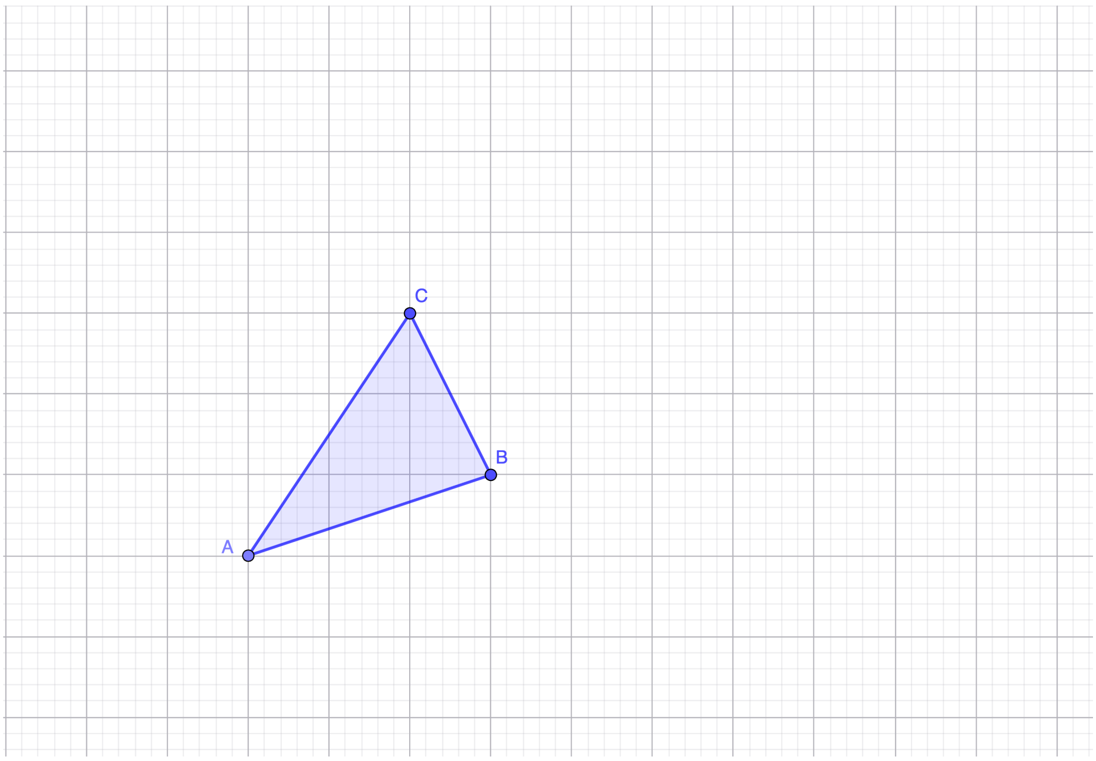
Capacités attendues CAPACITIES

Chapitre 8

Capacité C_{a_1} CAPACITY

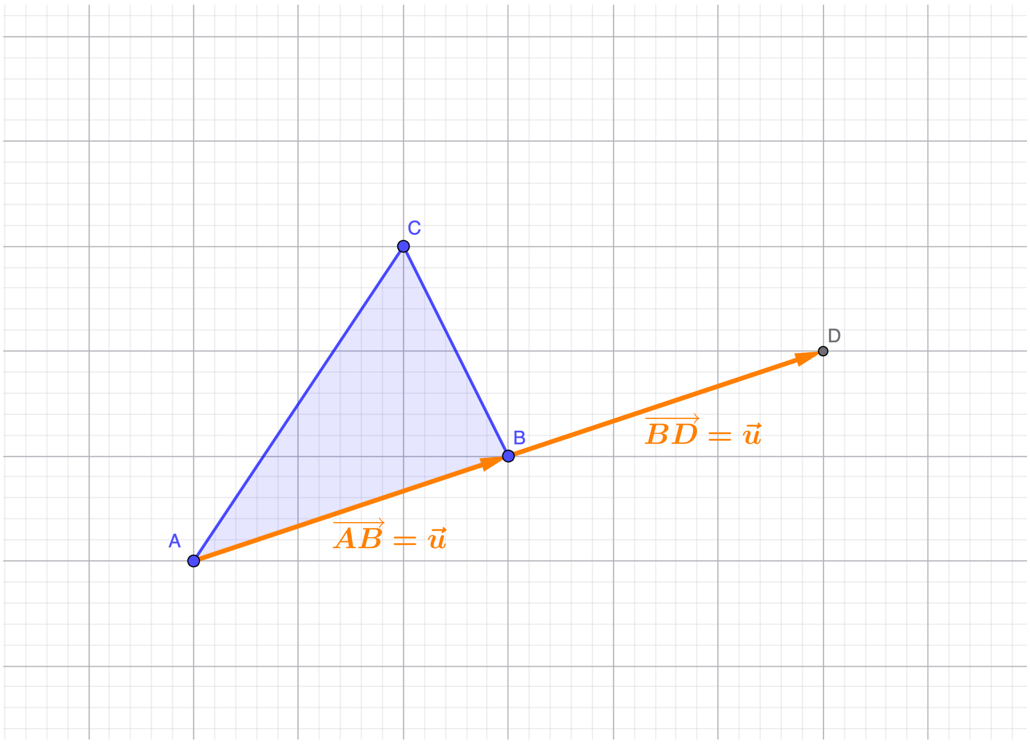
8.1 Solution de l'exercice 9

On considère le triangle ABC représenté sur la figure avec le quadrillage :



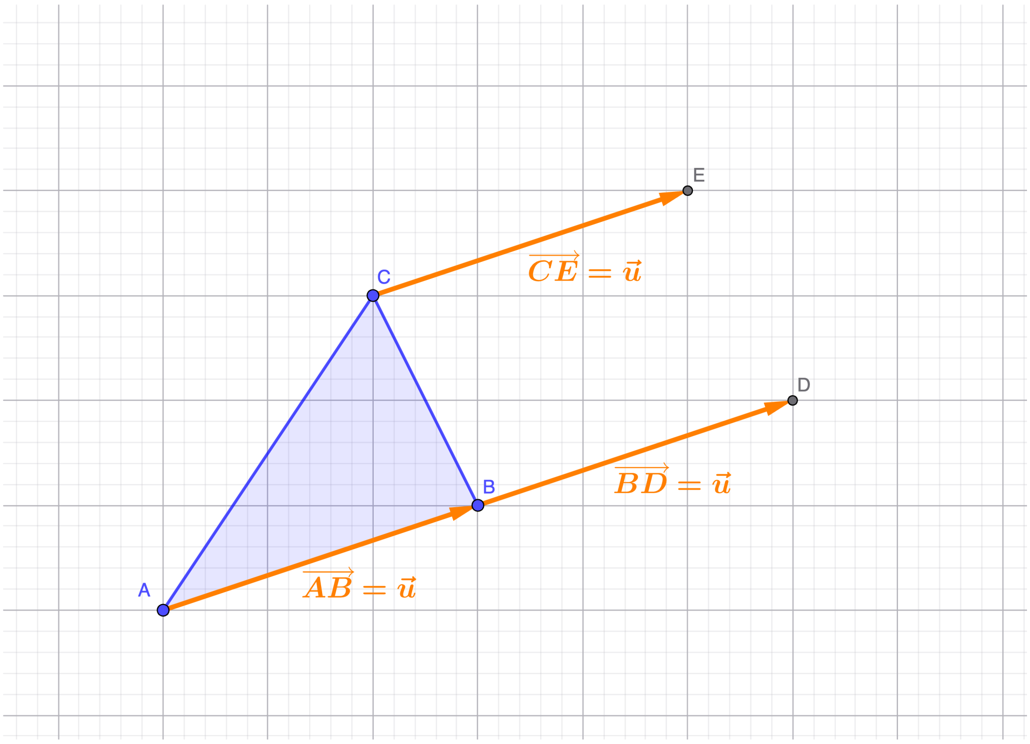
1. Pour construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ il faut d'abord comprendre que D est le symétrique de A par rapport à B. Ou, dit autrement, B est le milieu de [AD].

   Voir figure :



2. Pour construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ il faut bien comprendre que l'on complète le triangle pour obtenir un parallélogramme.

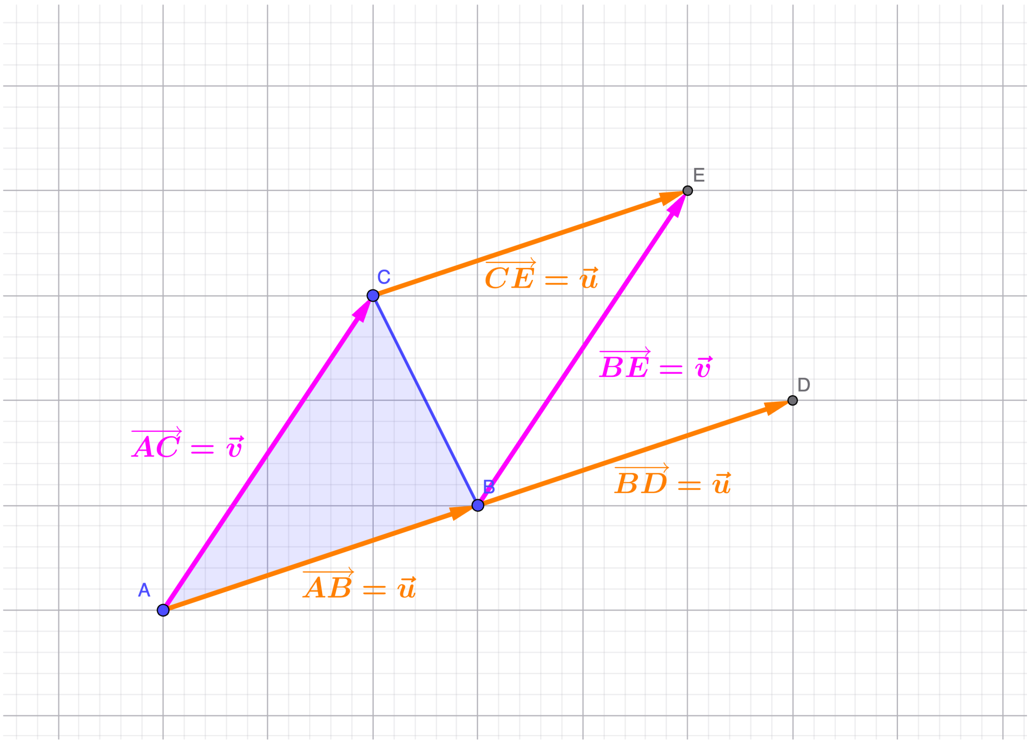
   Voir figure :



3. Utilisons la relation de Chasles pour décomposer le vecteur $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$$

Voir figure :



8.2 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Un vecteur est caractérisé par :
   (a) Sa longueur uniquement
   (b) Sa direction et son sens uniquement
   (c) **Sa direction, son sens et sa norme (Bonne réponse)**
   (d) Son origine et son extrémité

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :
   (a) **A = C et B = D (Bonne réponse)**
   (b) **ABDC est un parallélogramme (Bonne réponse)**
   (c) AB = CD (distances égales)
   (d) Les segments [AB] et [CD] sont parallèles

Chapitre 9

Capacité C_{a_3} **CAPACITY**

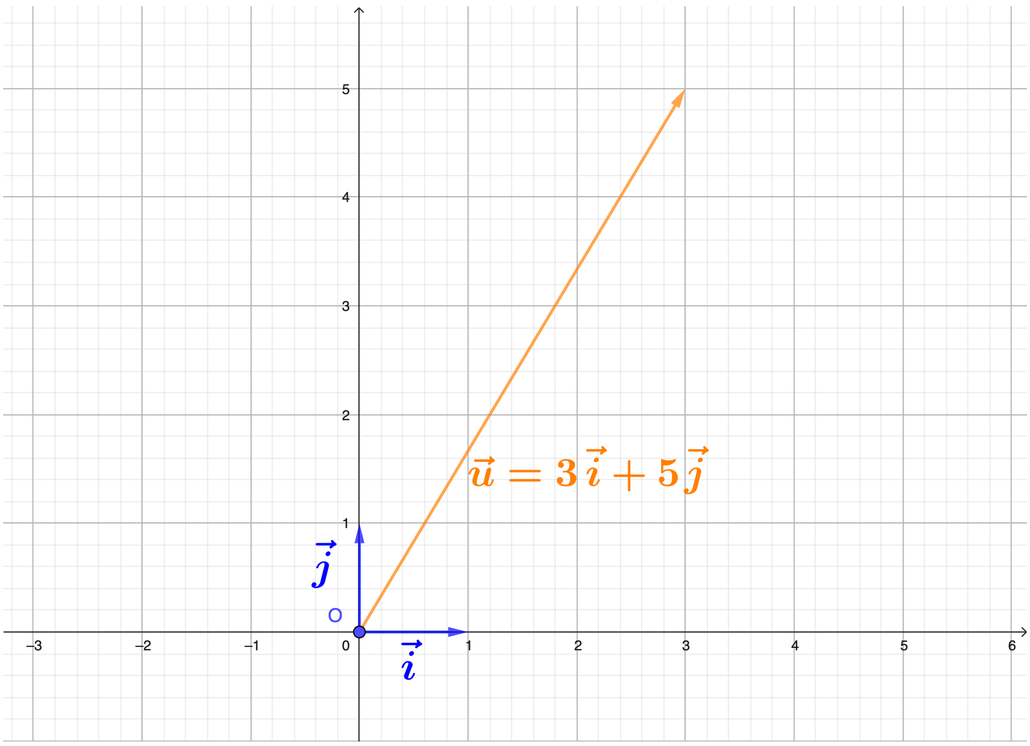
9.1 Solution de l'exercice 11

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

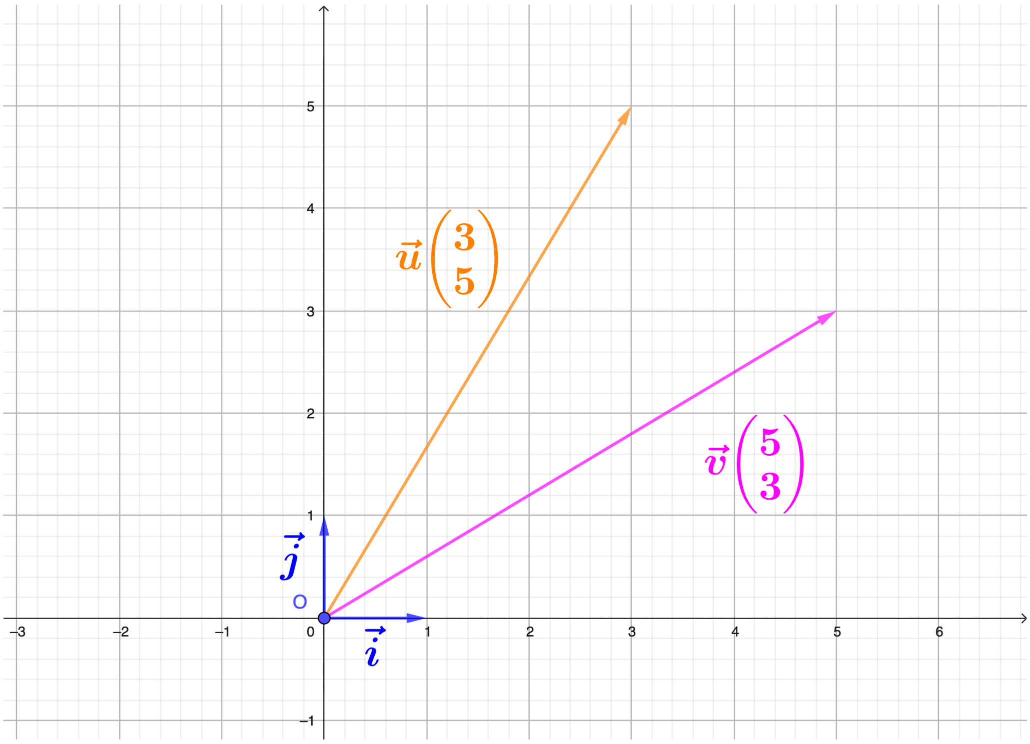
$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1. Représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

   Voir figure :



2. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sur la figure :



On peut voir sur la figure que :

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

Ainsi les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

9.2 Solution du QCM d'auto-évaluation

Considérons le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Alors :

1. Pour le représenter dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

   (a) on se place au point M de coordonnées (a ; b) et on trace le vecteur en se déplaçant de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical.

   (b) **partant de l'origine du repère on se déplace de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical. (Bonne réponse)**

2. Pour lire les cordonnées d'un vecteur $\vec{v}$:

   (a) on se place à son origine et on reporte les coordonnées du point

   (b) **on trace un représentant du vecteur en partant de l'origine du repère et on lit les coordonnées de son extrémité (Bonne réponse)**

Chapitre 10

Capacité C_{a_4} **CAPACITY**

10.1 Solution de l'exercice 12

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\vec{d} = \vec{i} - \vec{j} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\vec{p} = 3\vec{d} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = 2\vec{s} - 5\vec{d} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

10.2 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Soient
$$\vec{u}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$
et
$$\vec{u}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$
deux vecteurs alors
$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
a pour coordonnées :
   (a) $\vec{u}_3\begin{pmatrix}x_1x_2\\y_1y_2\end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u}_3\begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix}$
   (c) $\vec{u}_3\begin{pmatrix}x_1 + x_2\\y_1 + y_2\end{pmatrix}$ **(Bonne réponse)**

(d) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{y_1}{y_2} \end{pmatrix}$

2. Soient un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et un réel k alors $\vec{v} = ku$ vérifie :

   (a) $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$ **(Bonne réponse)**

   (d) $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{k}x \\ \frac{1}{k}y \end{pmatrix}$

Chapitre 11

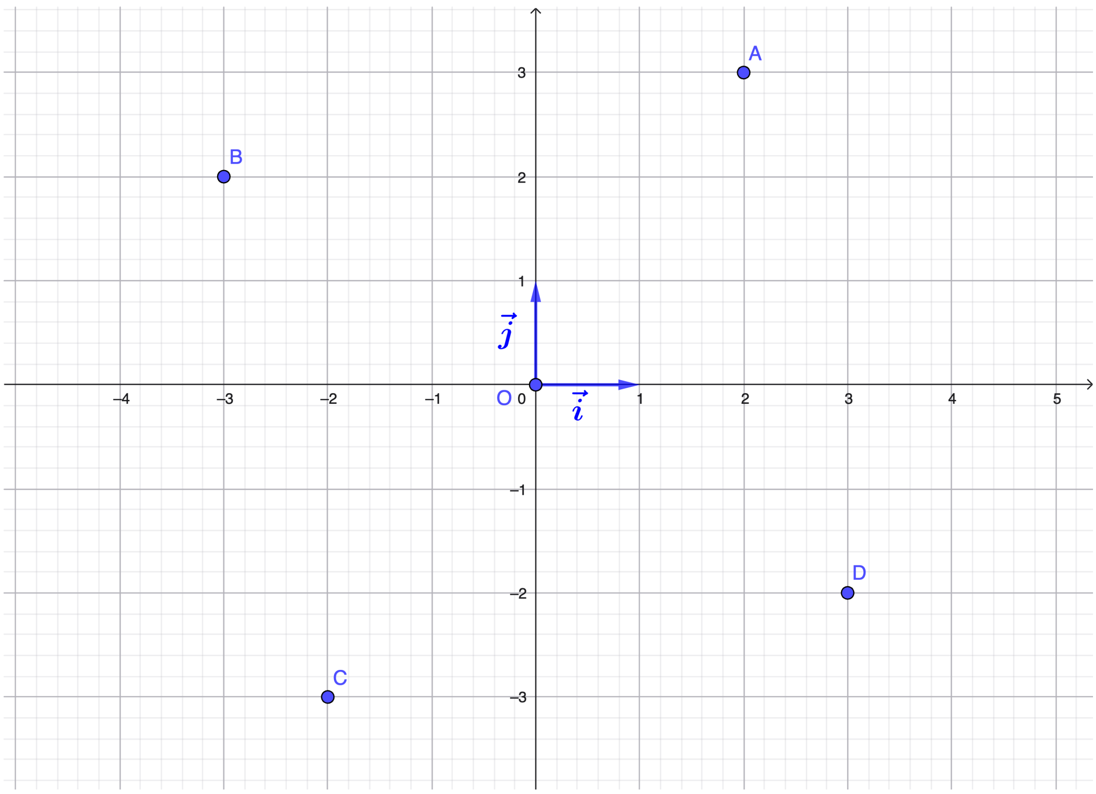
Capacité C_{a_5} **CAPACITY**

11.1 Solution de l'exercice 13

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

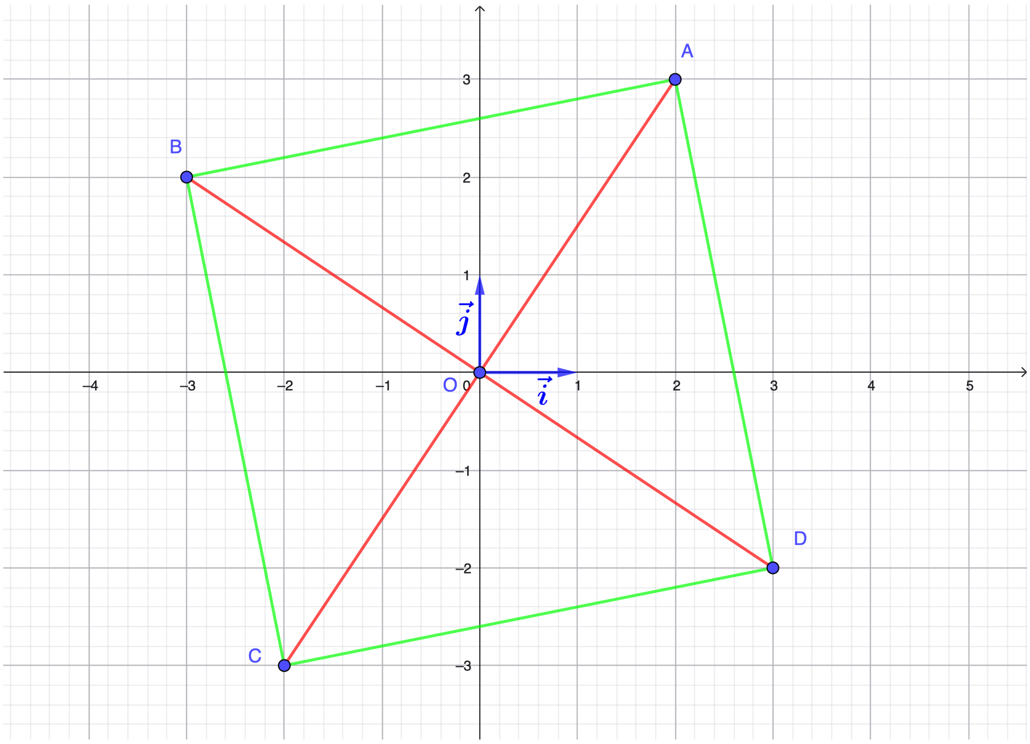
On considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) et D(3 ; -2) tels que sur la figure :



1. Calculs des distances AB, AC, AD, BC, BD, CD :

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52}$$
$$AD = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$BC = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{26}$$
$$BD = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52}$$
$$CD = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

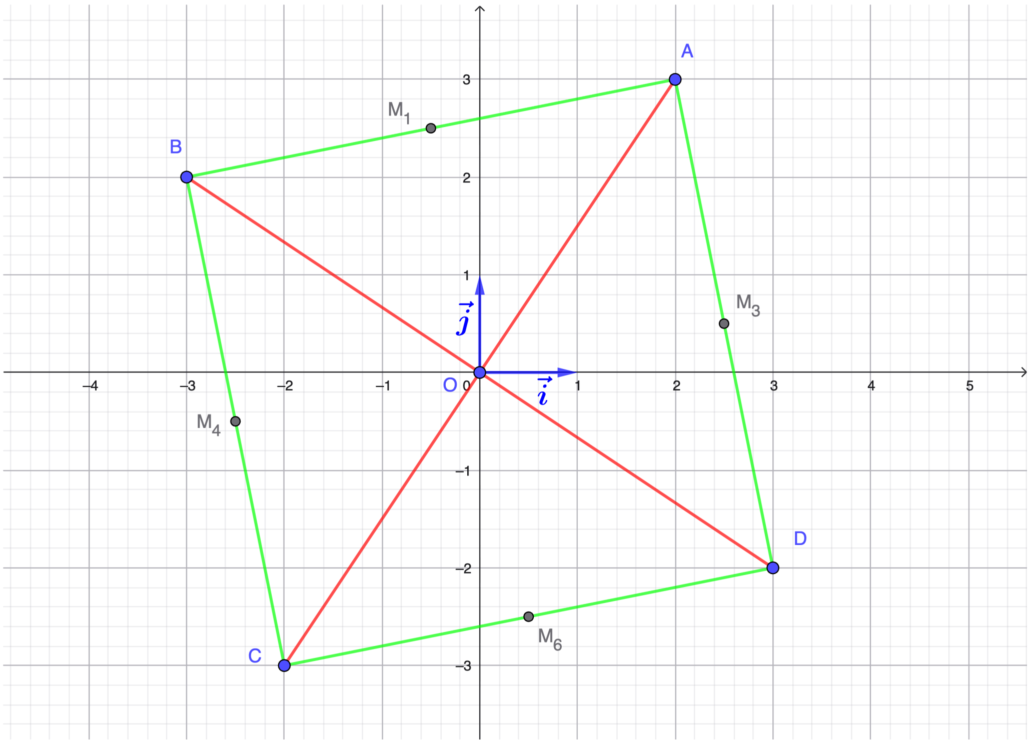
Voir figure :



2. Calculs des coordonnées des milieux des segments [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD] :

$$M_1 \begin{pmatrix} \frac{2+(-3)}{2} \\ \frac{3+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$M_2 \begin{pmatrix} \frac{2+(-2)}{2} \\ \frac{3+(-3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$$
$$M_3 \begin{pmatrix} \frac{2+3}{2} \\ \frac{3+(-2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$M_4 \begin{pmatrix} \frac{(-3)+(-2)}{2} \\ \frac{2+(-3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$M_5 \begin{pmatrix} \frac{(-3)+3}{2} \\ \frac{2+(-2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$$
$$M_6 \begin{pmatrix} \frac{(-2)+3}{2} \\ \frac{(-3)+(-2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Voir figure :



11.2 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. La distance entre $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ vaut :

   (a) $AB = x_A x_B + y_A y_B$
   (b) $AB = (x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2$
   (c) $AB = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$
   (d) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ **(Bonne réponse)**

2. Le milieu $M(x_M; y_M)$ du segment [AB] vérifie :

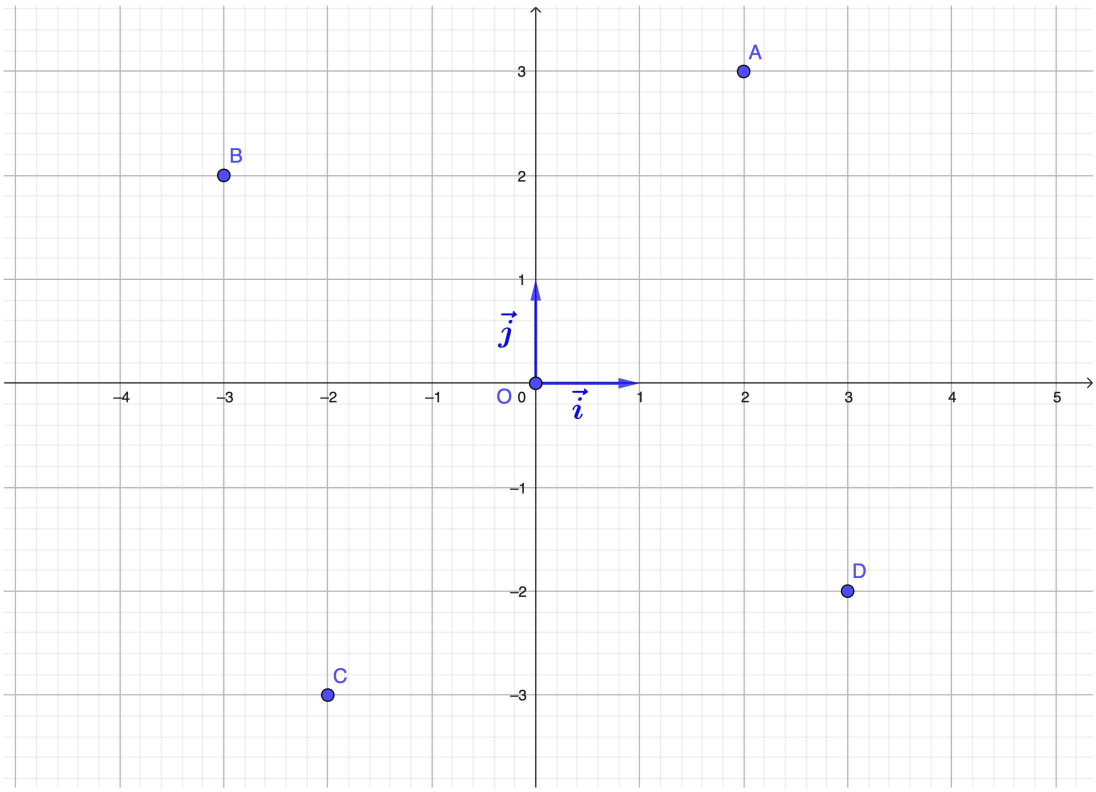
   (a) $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ **(Bonne réponse)**
   (b) $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A - x_B}{2}; \dfrac{y_A - y_B}{2}\right)$
   (c) $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A \times x_B}{2}; \dfrac{y_A \times y_B}{2}\right)$
   (d) $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A \div x_B}{2}; \dfrac{y_A \div y_B}{2}\right)$

Chapitre 12

Capacité C_{a_6} **CAPACITY**

12.1 Solution de l'exercice 14

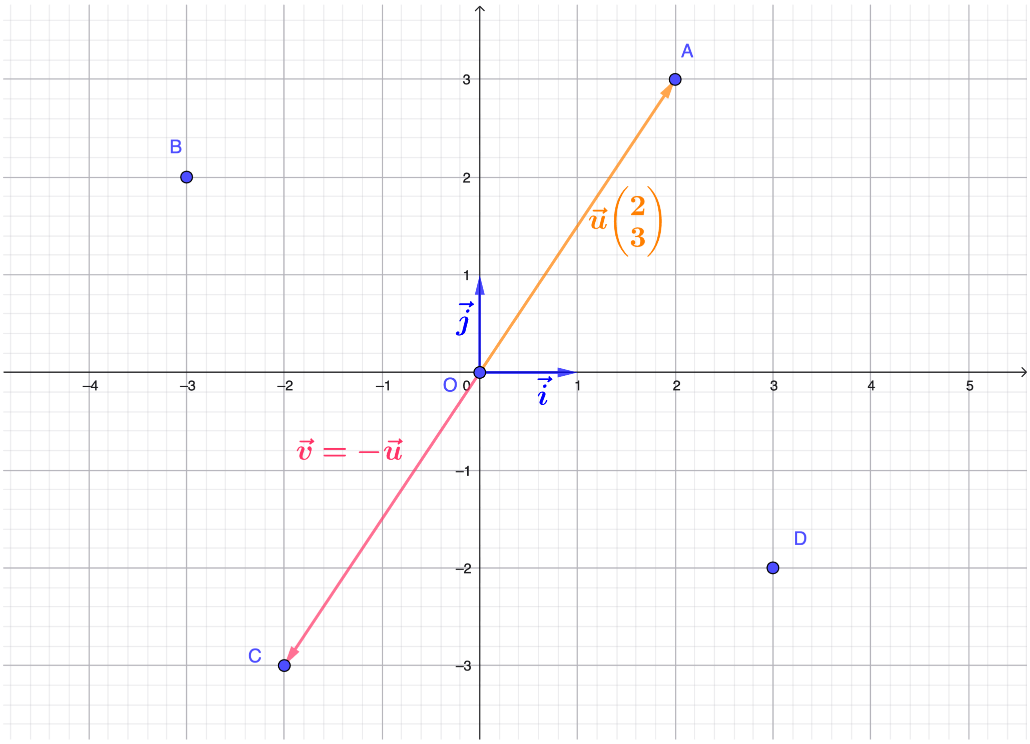
On reprend la configuration de l'exercice précédent.
Voir la figure :



1. Le point O étant l'origine du repère on peut facilement déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ et ainsi déterminer si les points A, O et C sont alignés :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$$

Voir figure :



2. D'après ce qui précède on a :

$$||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{OA}|| = ||\overrightarrow{OC}||$$
$$||\vec{u}|| = \sqrt{13}$$

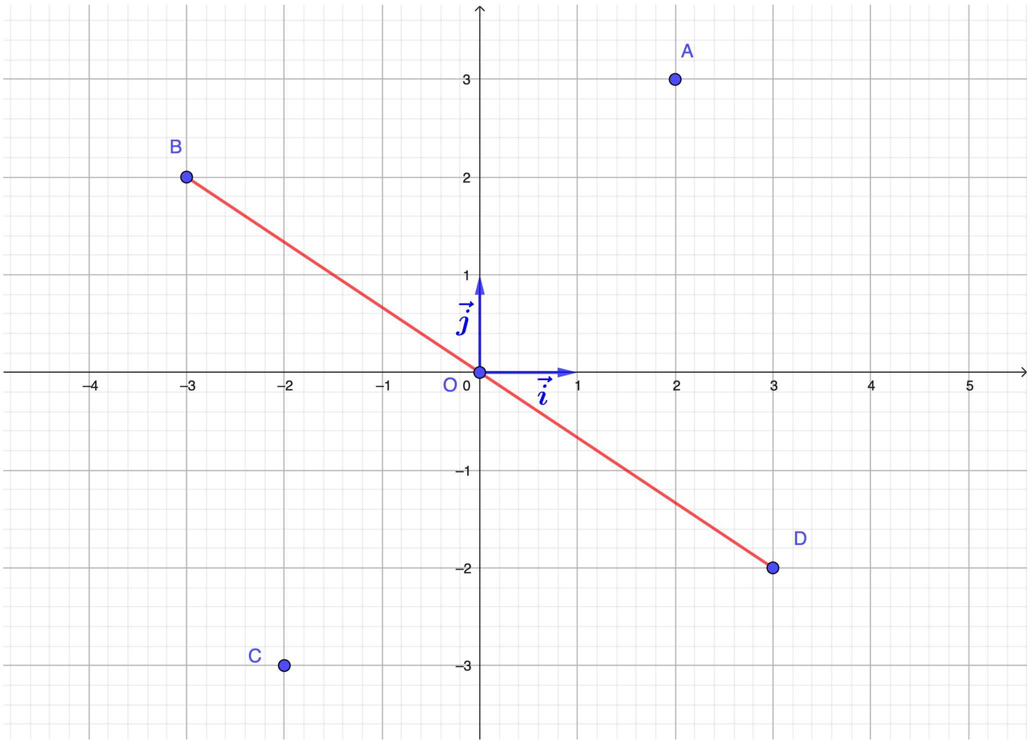
On en déduit que O est le milieu du segment [AC].

3. Calculons le déterminant $det(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$:

$$det(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-2) \times (-3) = 0$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Puisqu'ils ont la même origine on en déduit que les points B, O et D sont alignés.

Voir figure :

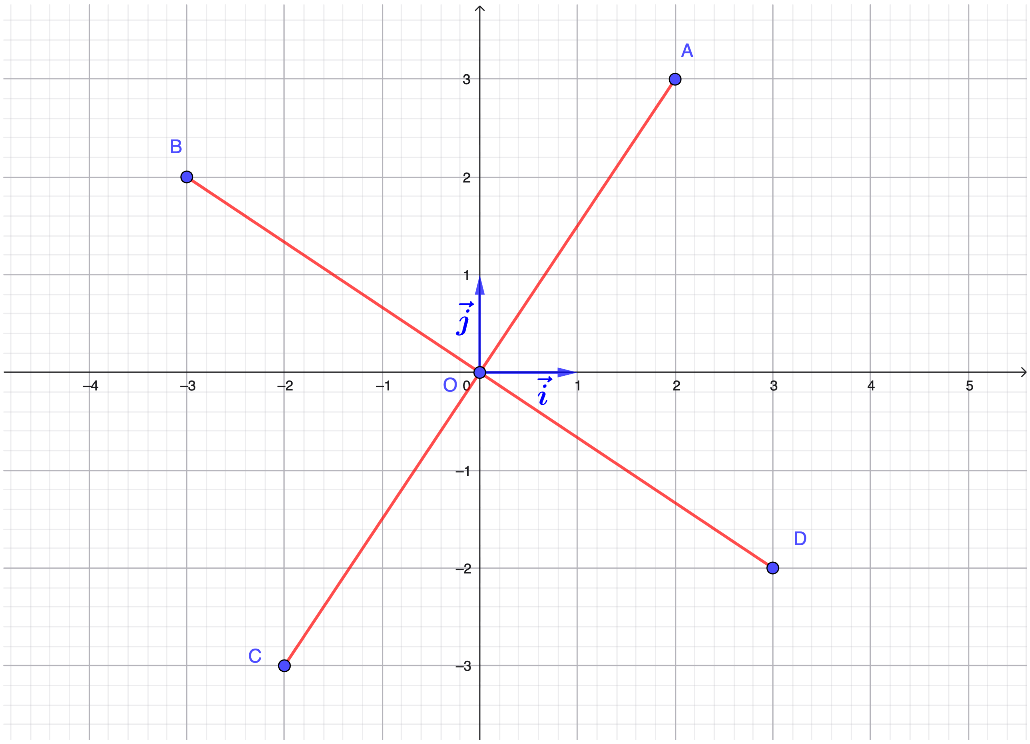


4. Comparons OB et OD :

$$OB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$OD = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$OB = OD$$

On en déduit que O est le milieu de [BD] et donc que ABCD est un rectangle car ses diagonales sont de même longueur $2\sqrt{13} = \sqrt{52}$.

Voir figure :

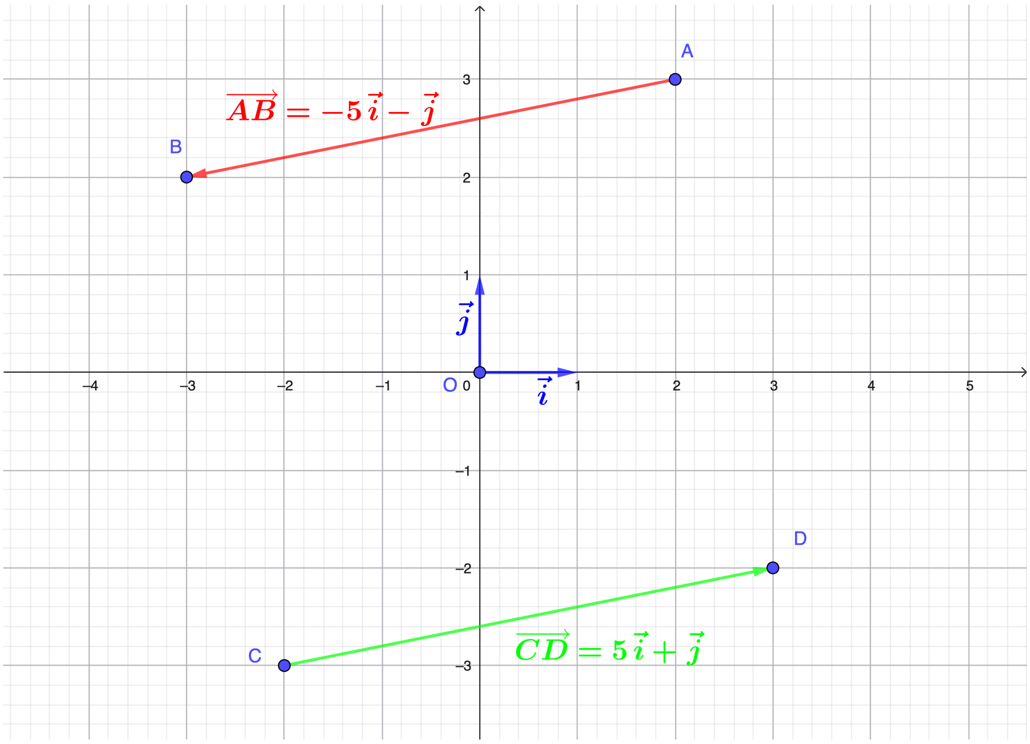


5. Puisque ABCD est un rectangle, c'est donc un parallélogramme donc on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

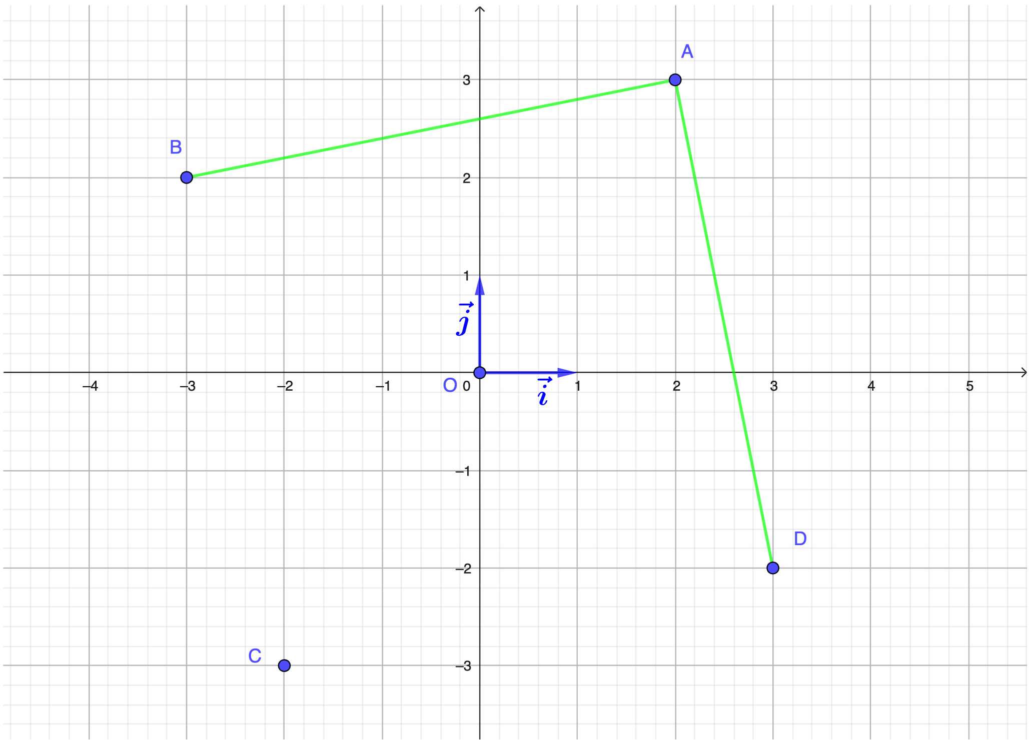
Voir figure :



6. Comparons AB et AD :

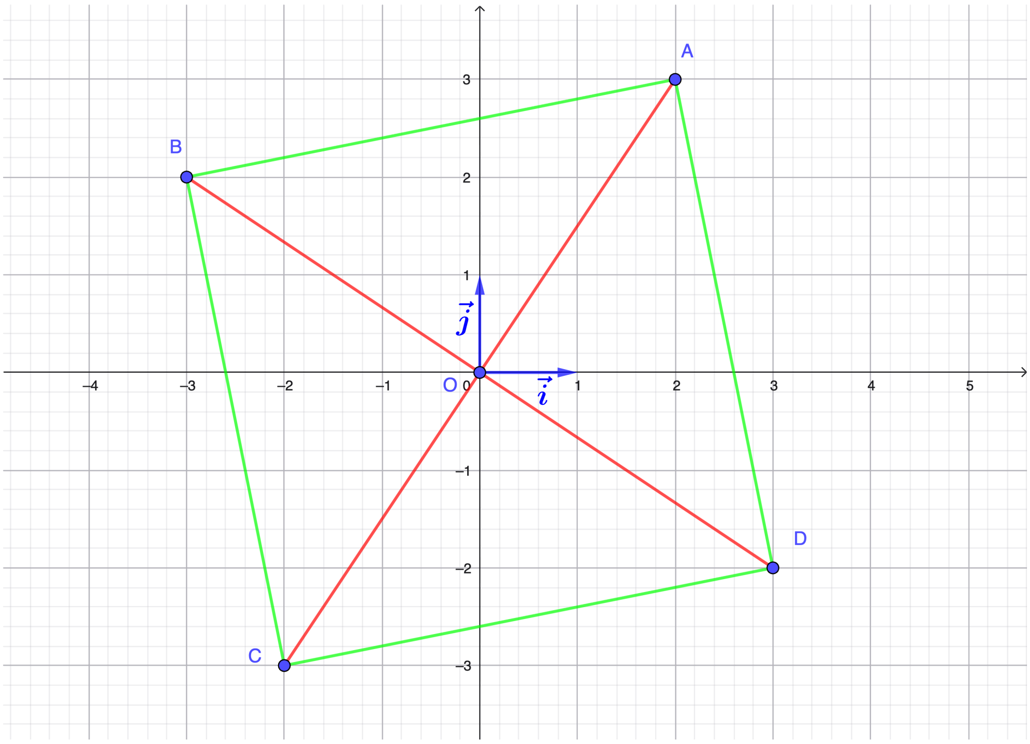
$$
\begin{aligned}
&AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26} \\
&AD = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26} \\
&AB = AD
\end{aligned}
$$

Voir figure :



7. Le quadrilatère ABCD est un carré car c'est un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Voir figure :



12.2 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Pour montrer que A, B et C sont alignés il faut :

   (a) que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

   (b) **qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (Bonne réponse)**

   (c) vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

   (d) **vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ (Bonne réponse)**

2. Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles il faut :

   (a) **montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (Bonne réponse)**

   (b) **vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ (Bonne réponse)**

   (c) montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

   (d) vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$

Chapitre 13

Capacité C_{a_7} **CAPACITY**

13.1 Solution de l'exercice 15

Pour chacune des situations suivantes, indiquons comment la résoudre selon la représentation vectorielle parmi :

- Analytique (coordonnées, calculs algébriques)
- Colinéarité (proportionnalité, déterminant)
- Géométrique (relation de Chasles, parallélogramme)

1. Démontrer que les points A, B, C sont alignés.
   - Analytique : à l'aide des coordonnées de chaque point on peut calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifier si les vecteurs sont colinéaires ou pas.
   - Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la décomposition de Chasles on peut calculer le déterminant ou établir une relation du type $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ si les vecteurs sont colinéaires.
   - Géométrique : la relation de Chasles nous permet d'établie si la relation $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ existe ou pas
2. Calculer la distance entre deux points A(2 ;3) et B(5 ;7)
   - Analytique : on applique la formule (qui découle de Pythagore)
   - Colinéarité : pour ce type de problème la colinéarité est inutile
   - Géométrique : pour ce type de problème ni Chasles ni les identités du parallélogramme ne peuvent servir
3. Montrer que ABCD est un parallélogramme
   - Analytique : à l'aide des coordonnées on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle
     $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
     ou pas.
   - Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la relation de Chasles on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle
     $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
     ou pas. On peut également calculer les deux déterminants importants
     $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \quad det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$$

- Géométrique : en utilisant Chasles on peut vérifier si on obtient la relation

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

4. Trouver les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

   - Analytique : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on résout les deux équations pour obtenir les coordonnées du points M(x ; y). Concrètement :

$$\begin{aligned} x - x_A &= 2(x_B - x_A) + 3(x_C - x_A) \\ y - y_A &= 2(y_B - y_A) + 3(y_C - y_A) \\ x &= -4x_A + 2x_B + 3x_C \\ y &= -4y_A + 2y_B + 3y_C \end{aligned}$$

   - Colinéarité : on ne peut pas obtenir les coordonnées du point M uniquement avec le déterminant.
   - Géométrique : on peut construire le point M grâce à la relation vectorielle puis en utilisant Chasles on peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

5. Vérifier si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles

   - Analytique : on peut comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
   - Colinéarité : on peut calculer le déterminant $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et voir s'il est nul ou pas
   - Géométrique : on peut vérifier si on obtient une identité du parallélogramme ou pas

13.2 Solution du programme

Écrire un programme Python qui résout le problème

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

C'est-à-dire un programme qui permet d'exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres a et b et des coordonnées des points déjà existants A, B, et C.

```python
def get_M(a, b, A, B, C):
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    + a : 1 float correspondant au coefficient du vecteur AB
    + b : 1 float correspondant au coefficient du vecteur AC
    + A : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point A
    + B : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point B
    + C : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point C
    et elle renvoie 1 tuple de float correspondant
    aux coordonnées du point M
    """
    x = (1 - a - b) * A[0] + a * B[0] + b * C[0]
    y = (1 - a - b) * A[1] + a * B[1] + b * C[1]
    return (x, y)


def vectAB(A, B):
```

```python
        """
        Cette fonction prend en entrées :
        + A : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point A
        + B : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point B
        et renvoie 1 tuple de float correspondant
        aux coordonnées du vecteur AB
        """
        x = B[0] - A[0]
        y = B[1] - A[1]
        return (x, y)


    # Tests
    a, b, A, B, C = 1, 1, (3, 2), (-3, 2), (3, -2)

    M = get_M(a, b, A, B, C)

    relation = f"On a la relation Vect(A, M) = "
    relation += f"{a}Vect(A, B) + {b}Vect(A, C)"

    print(relation)

    input("Pour voir les coordonnées du point M tapez 1\t")

    coordM = f"Voici les coordonnées du point M({M[0]}, {M[1]})"
    print(coordM)

    coordAB = vectAB(A, B)
    coordAC = vectAB(A, B = C)

    eqX = f"x - {A[0]} = {a} * {coordAB[0]} + {b} * {coordAC[0]}"
    input("Pour voir l'équation en x tapez 1\t")
    print(eqX)

    eqY = f"y - {A[1]} = {a} * {coordAB[1]} + {b} * {coordAC[1]}"
    input("Pour voir l'équation en y tapez 1\t")
    print(eqY)

    solve_x = f"x = {A[0] + a * coordAB[0] + b * coordAC[0]}"
    input("Pour voir la solution de l'équation en x tapez 1\t")
    print(solve_x)

    solve_y = f"y = {A[1] + a * coordAB[1] + b * coordAC[1]}"
    input("Pour voir la solution de l'équation en y tapez 1\t")
    print(solve_y)
```

13.3 Solution du QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Si ABC est un triangle et que D est un 4ème point qui vérifie l'égalité

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

alors on peut en déduire que :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ la relation de Chasles n'est pas une déduction, elle existe toujours

(b) ABCD est un parallélogramme

(c) ABDC est un parallélogramme
(Bonne réponse)

(d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ les deux égalités sont vraies
(Bonne réponse)

(e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ une seule des deux égalités est vraie

(f) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ aucune des égalités n'est vraie

(g) le point D est à l'intérieur du triangle ABC

(h) le point D est l'image du point A par la symétrie de centre le milieu du segment [BC]
(Bonne réponse)

(i) le point D est à l'extérieur du triangle ABC
(Bonne réponse)

(j) le point D est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu du segment [BC]
(Bonne réponse)

2. Si ABCD est un carré alors :

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base orthornomée

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base orthornomée
(Bonne réponse)

(c) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

(d) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

(e) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

(f) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

(g) $AC^2 = AB^2 + BC^2$
(Bonne réponse)

(h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
(Bonne réponse)

(j) Le centre O du carré vérifie

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

(Bonne réponse)

3. Si ABCD est un rectangle et O l'intersection des droites (AC) et (BD) alors :

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
(Bonne réponse)

(b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
(Bonne réponse)

(c) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$
(d) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$
(e) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$
(f) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
(g) $AC > AB + BC$
(h) $AC < AB + AD$
(Bonne réponse)
(i) $AC = BD$
(Bonne réponse)
(j) $AC \neq BD$

4. Soient A et B deux points distincts du plan. Si C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors :

(a) **B est le milieu du segment [AC] (Bonne réponse)**
(b) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
(c) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$
(d) les coordonnées de C vérifient :

$$x_C = 2x_B - x_A$$
$$y_C = 2y_B - y_A$$

(e) **les coordonnées de C vérifient :**

$$x\_C \& = 2x\_B + x\_A$$
$$y\_C \& = 2y\_B + y\_A$$

(Bonne réponse)
(f) **C est l'image de A par la symétrie de centre B. (Bonne réponse)**
(g) C est le milieu du segment [AB].
(h) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **(Bonne réponse)**
(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ **(Bonne réponse)**
(j) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ **(Bonne réponse)**

5. Si on a $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0$ alors :

(a) **ABCD ou ABDC est un trapèze. (Bonne réponse)**
(b) **Si AB = DC alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme. (Bonne réponse)**
(c) **Si AB = AD = DC alors ABCD est un losange. (Bonne réponse)**
(d) **Si AB = AC = CD alors ABDC est un losange. (Bonne réponse)**
(e) Si AB = DC et CA = BD alors ABDC est un rectangle.
(f) Si AB = DC et AD = BC alors ABDC est un rectangle.
(g) **Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un rectangle. (Bonne réponse)**

(h) Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un rectangle.
(i) Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un losange.
(j) **Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un losange. (Bonne réponse)**

6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

   (a) **Si $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{w}||$ alors les trois vecteurs sont colinéaires. (Bonne réponse)**
   (b) Il est impossible que les trois vecteurs soient colinéaires.
   (c) **Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors les trois vecteurs sont colinéaires. (Bonne réponse)**
   (d) **Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors $det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. (Bonne réponse)**
   (e) **Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. (Bonne réponse)**
   (f) $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| > ||\vec{w}||$
   (g) $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| < ||\vec{w}||$
   (h) Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{u} = \vec{0}$ soit $\vec{v} = \vec{0}$
   (i) Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{w} = \vec{u}$ soit $\vec{w} = \vec{v}$
   (j) Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors soit $\vec{u} = -\vec{v}$ soit $\vec{w} = \vec{0}$

7. Soit un vecteur $\vec{u}$ de norme $||\vec{u}|| = 5$.

   (a) Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.
   (b) Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.
   (c) Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.
   (d) Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.
   (e) **Si $x_{\vec{u}} = \pm 3$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 4$. (Bonne réponse)**
   (f) Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
   (g) Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
   (h) Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
   (i) Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
   (j) **Si $x_{\vec{u}} = \pm 4$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 3$. (Bonne réponse)**

8. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(3 ; 2), B(3 ; -2), C(-3 ; -2), D(3 ; -1), E(-3 ; -1), F(-1 ; -1), G(1 ; 1), H(1 ; 2), I(-1 ; 2).

   (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car

   $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car

   $$det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}) = 0$$

   (c) Les points A, B et C sont alignés.
   (d) **Les points D, E et F sont alignés. (Bonne réponse)**
   (e) **ABC est un triangle rectangle en B. (Bonne réponse)**

(f) ABD est un triangle rectangle en B.

(g) **GDF est un triangle rectangle en G. (Bonne réponse)**

(h) **GDF est un triangle isocèle en G. (Bonne réponse)**

(i) **BCHA est un trapèze. (Bonne réponse)**

(j) **Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires. (Bonne réponse)**

9. Dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) ; D(3 ; -2).

(a) Le triangle BOA est isocèle en A.

(b) Le triangle BOA est isocèle en B.

(c) **Le triangle BOA est isocèle en O. (Bonne réponse)**

(d) Le triangle BOA est rectangle en A.

(e) Le triangle BOA est rectangle en B.

(f) **Le triangle BOA est rectangle en O. (Bonne réponse)**

(g) **C est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. (Bonne réponse)**

(h) **D est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$. (Bonne réponse)**

(i) ABDC est un carré.

(j) **ABCD est un carré. (Bonne réponse)**

Troisième partie

Annexes

ANNEXES

Chapitre 14

Exercices complémentaires

14.1 Pour s'exercer davantage

1. Solution de l'exercice 16

   On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

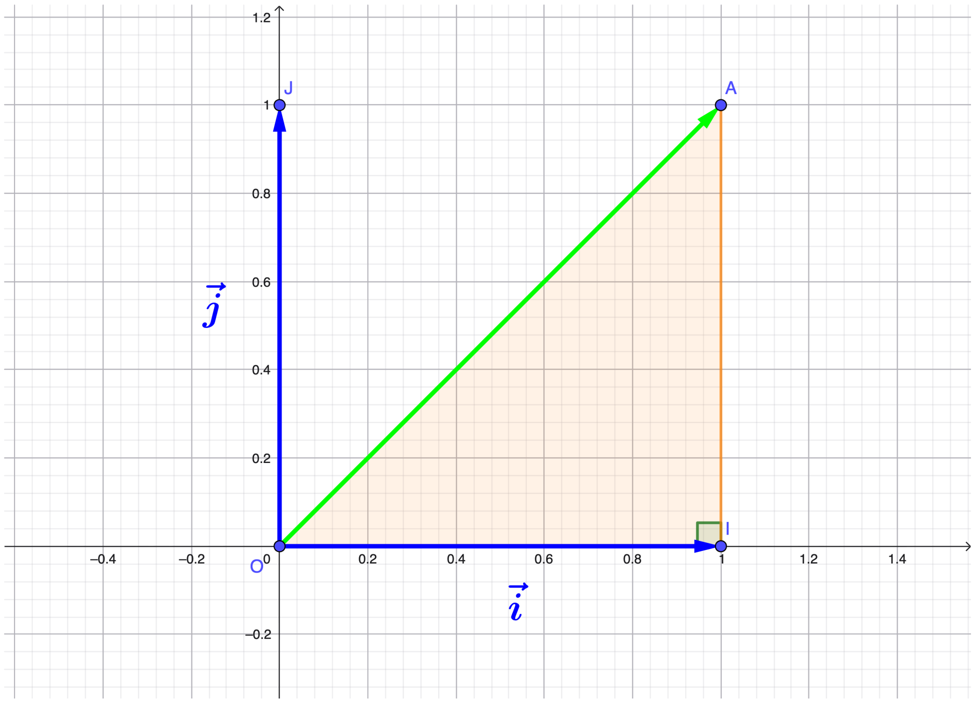
   (a) Placer les points O(0 ; 0), I(1 ; 0), J(0 ; 1) et A tel que

   $$\overrightarrow{OA}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

   On peut voir sur la figure que le triangle OIA est rectangle et isocèle en I.

   $$OI^2+IA^2=1^2+0^2+0^2+1^2=2$$
   $$OA^2=1^2+1^2=2$$

   Voir figure :



(b) Placer le point B tel que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}$$

Une égalité vectorielle plus simple pour placer le point B est

$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{j}$$

Pour la trouver on utilise Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}\\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB} &= \vec{j} - \vec{i} + \vec{i} + \vec{j}\\ \overrightarrow{OB} &= 2\vec{j}\end{aligned}$$

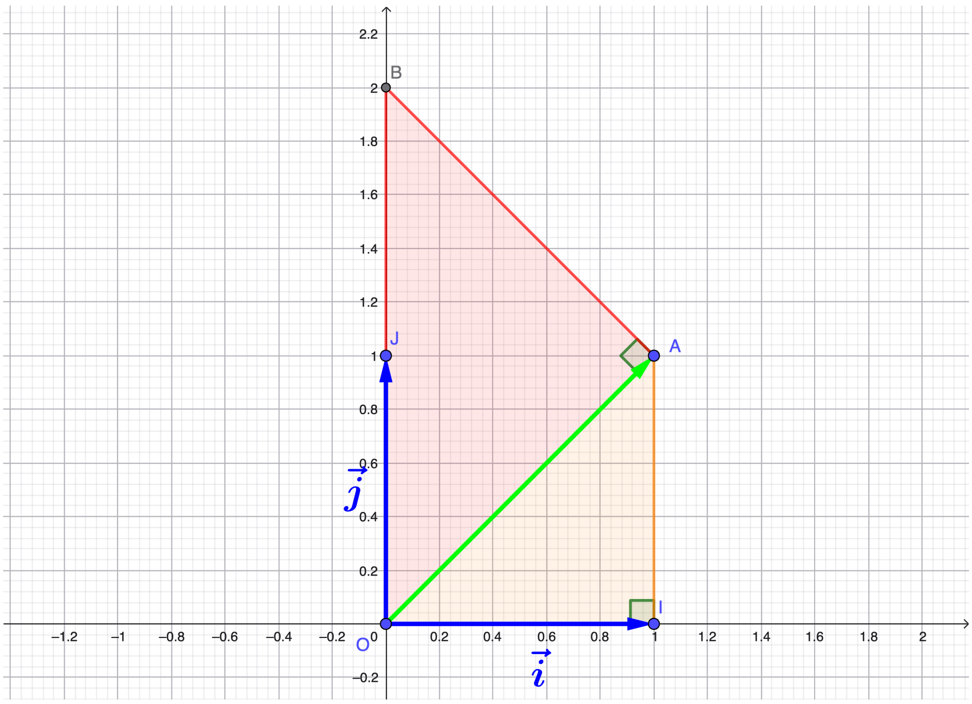
Par Pythagore :

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

En effet :

$$OB^2 = 0^2 + 2^2 = 4$$
$$OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 = 4$$

Le triangle OAB est isocèle et rectangle en A.
Voir figure :



(c) Placer le point C tel que

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{AB}$$

Une égalité vectorielle plus simple pour placer le point C est

$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i}$$

On la trouve en utilisant Chasles :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{BC} = 2(\vec{j} - \vec{i}) - 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i}$$

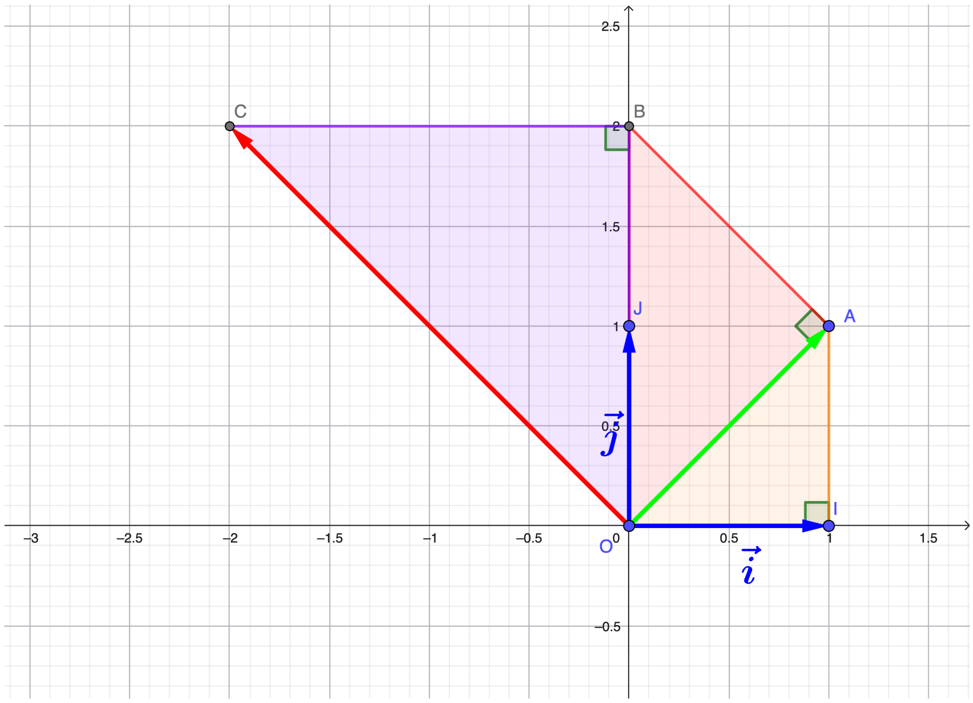
Par Pythagore :

$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

En effet :

$$OC^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$
$$OB^2 + BC^2 = 0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 = 8$$

Voir figure :



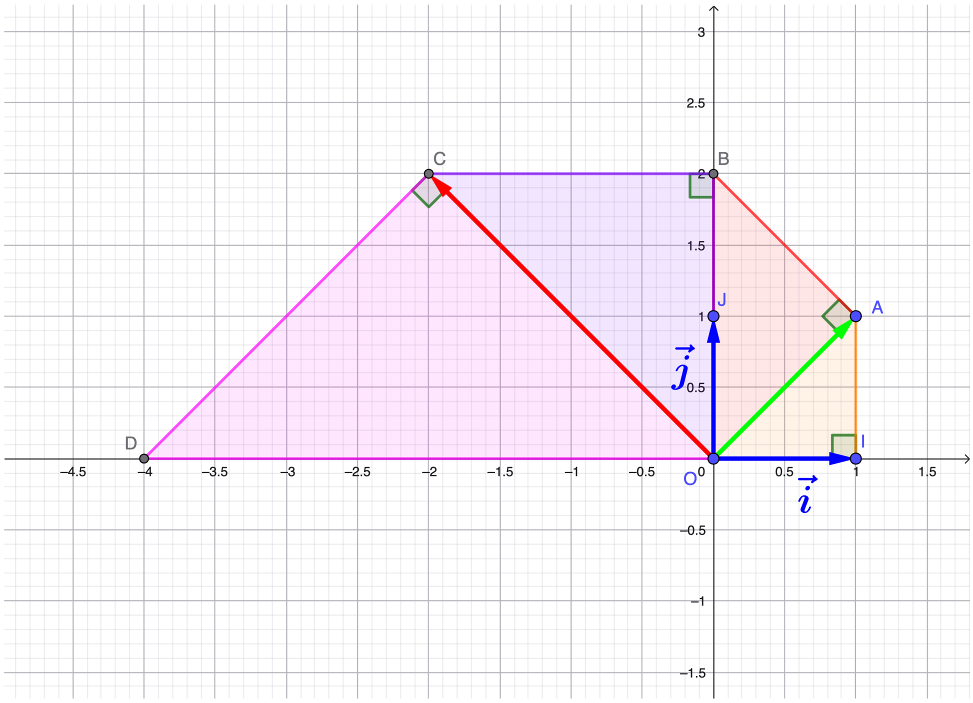
(d) Placer le point D tel que

$$\overrightarrow{OD} = -4\vec{i}$$

Le triangle COD est isocèle et rectangle en C :

$$OC^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}$$
$$\overrightarrow{CD} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{i}$$
$$\overrightarrow{CD} = -2(\vec{i} + \vec{i})$$
$$CD^2 = (-2)^2 + (-2)^2 = 8$$
$$OD^2 = (-4)^2 + 0^2 = 16$$

Voir figure :



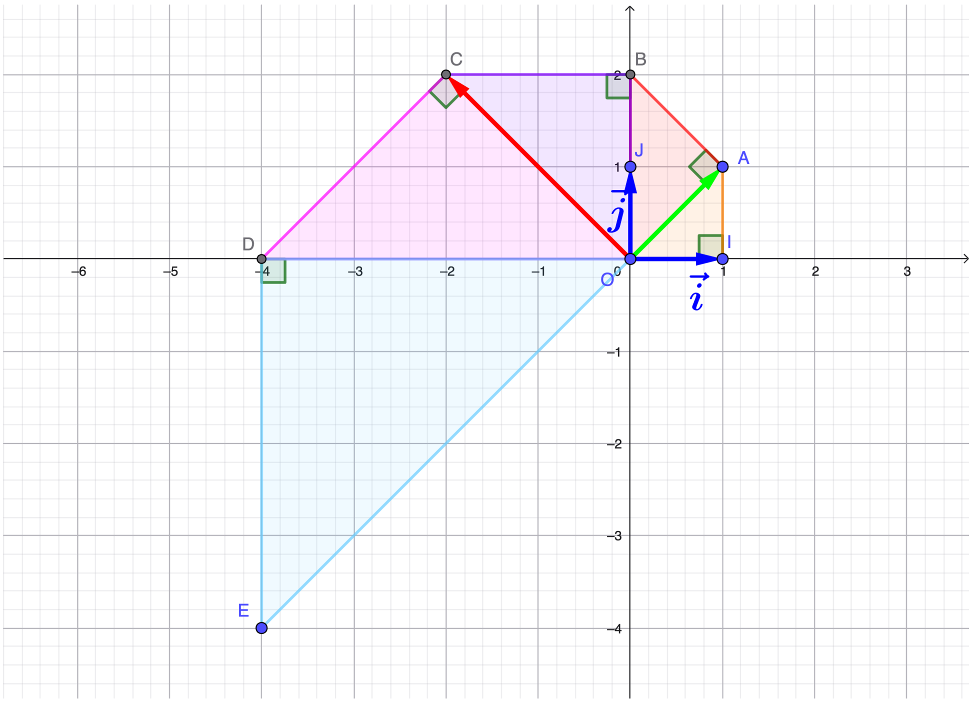
(e) Placer le point E tel que

$$\overrightarrow{DE} = -4\vec{j}$$

Le triangle ODE est isocèle est rectangle en D. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} \\
\overrightarrow{OE} &= -4\vec{i} - 4\vec{j} \\
\overrightarrow{OE} &= -4\overrightarrow{OA} \\
DE^2 &= 0^2 + (-4)^2 = 16 \\
OD^2 &= (-4)^2 + 0^2 = 16 \\
OE^2 &= (-4)^2 + (-4)^2 = 32
\end{aligned}$$

Voir figure :



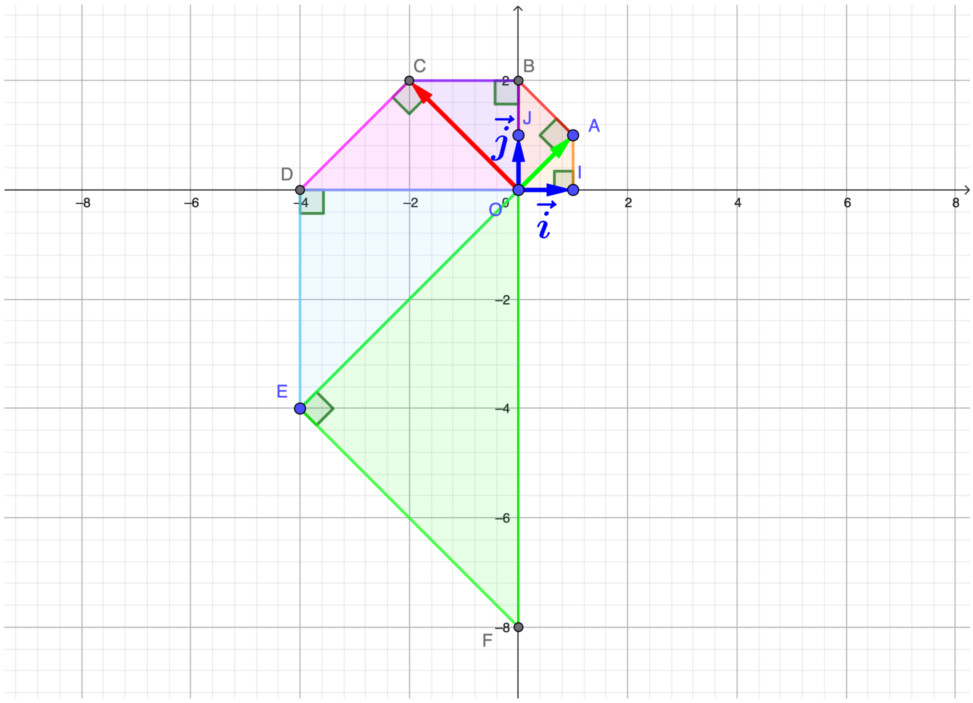
(f) Placer le point F tel que

$$\overrightarrow{OF} = -4\overrightarrow{OB}$$

Le triangle EOF est isocèle est rectangle en E.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} \\
\overrightarrow{EF} &= 4(\vec{i} + \vec{j}) - 4(2\vec{j}) \\
\overrightarrow{EF} &= 4(\vec{i} - \vec{j}) \\
EF^2 &= 4^2 + (-4)^2 = 32 \\
OE^2 &= (-4)^2 + (-4)^2 = 32 \\
OF^2 &= (-4)^2 \times 2^2 = 64
\end{aligned}$$

Voir figure :



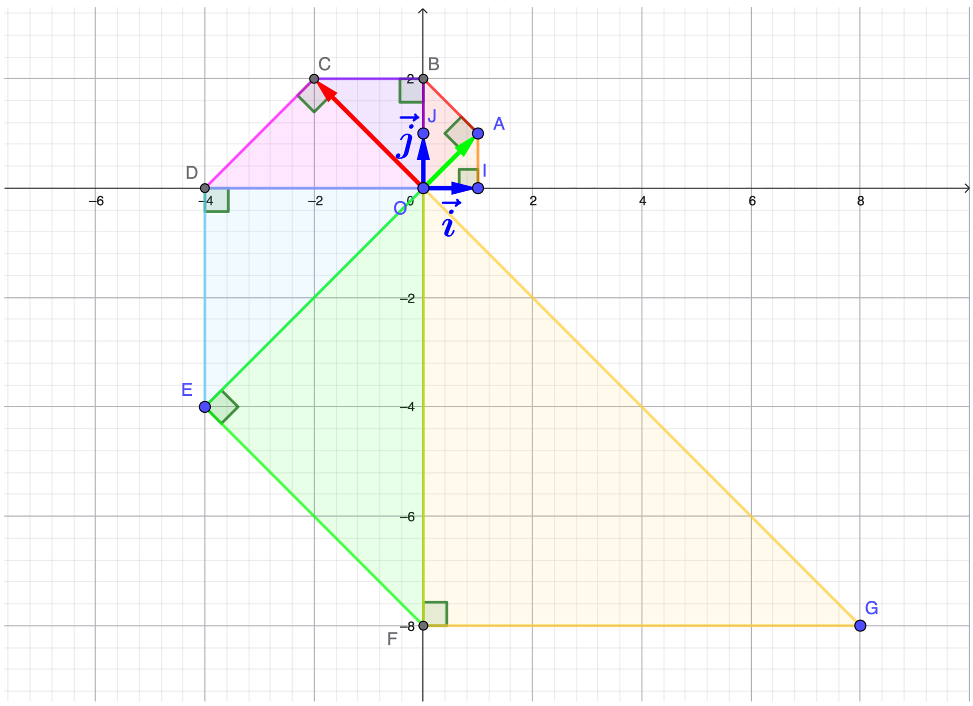
(g) Placer le point G tel que

$$\overrightarrow{FG} = 8\vec{i}$$

Le triangle FOG est isocèle et rectangle en F.

$$\begin{aligned} OF^2 &= 64 \\ FG^2 &= 8^2 + 0^2 = 64 \\ OG^2 &= 64 + 64 = 128 \end{aligned}$$

Voir figure :



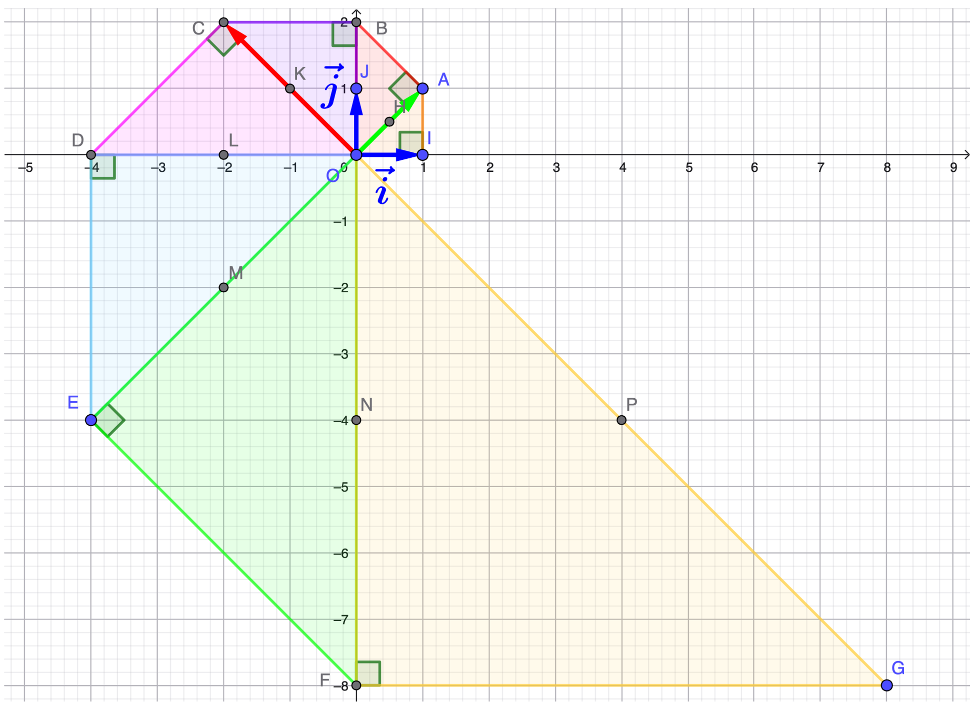
(h) Calcul des coordonnées des points H, K, L, M, N, P milieux respectifs des segments [OA], [OC], [OD], [OE], [OF], [OG] :

$$H\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

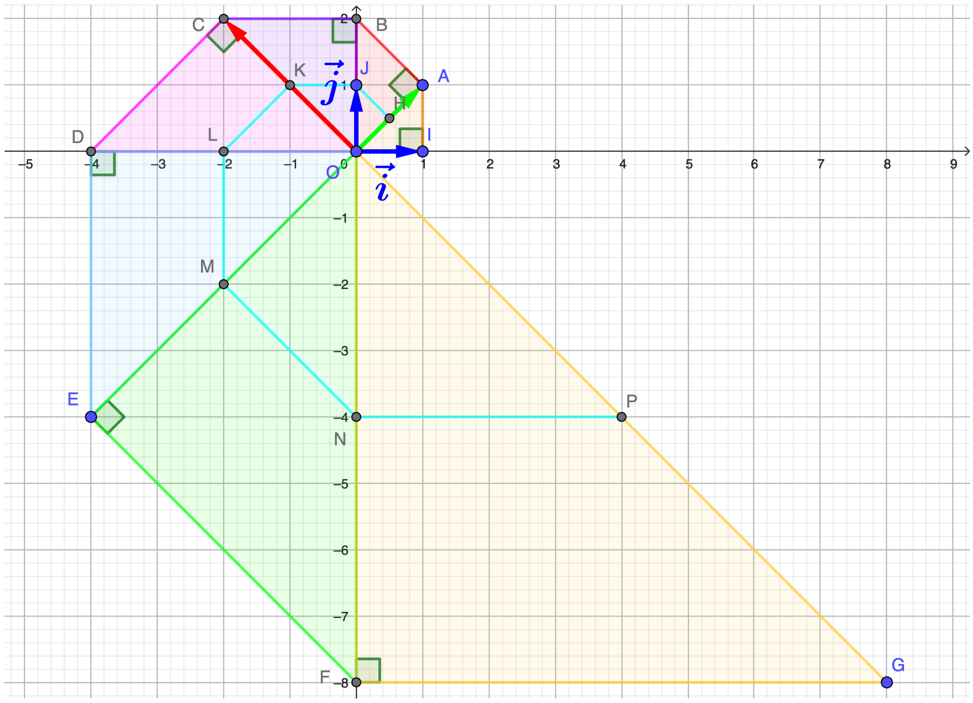
$$L\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}0\\ -4\end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix}4\\ -4\end{pmatrix}$$

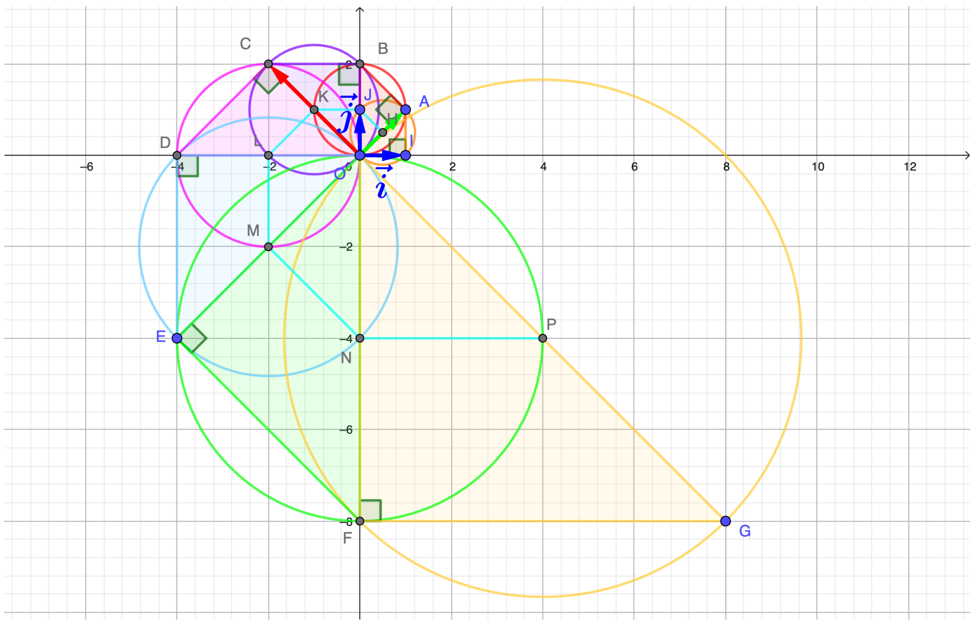
Voir figure :



(i) Voir figure :



(j) On remarque que les cercles sont circonscrits aux triangles respectifs.
Voir figure :



2. Solution de l'exercice 17

On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour la suite de l'exercice on considère les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$ ainsi que le vecteur

$$\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{i}$$

(a) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

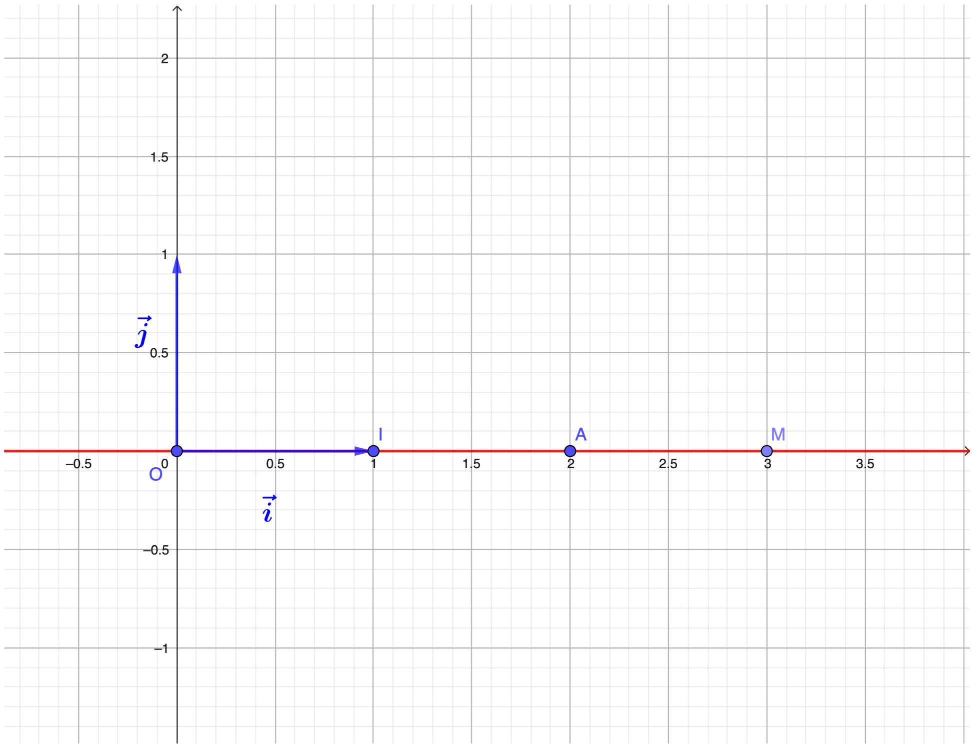
$$det(\vec{i},\overrightarrow{OM}) = 0$$

est l'axe des abscisses. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff y = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des abscisses.

Voir figure :



(b) L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

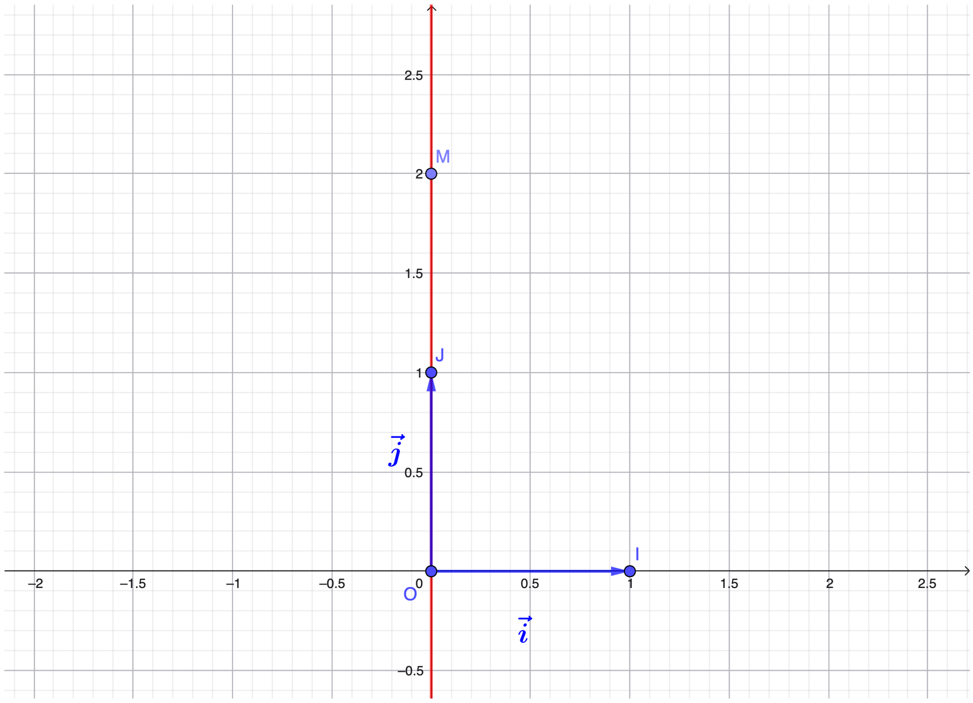
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0$$

est l'axe des ordonnées. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff x = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \overrightarrow{OM} = y\vec{j}$$

Avec $y \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des ordonnées.

Voir figure :



(c) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0$$

est la droite d'équation cartésienne

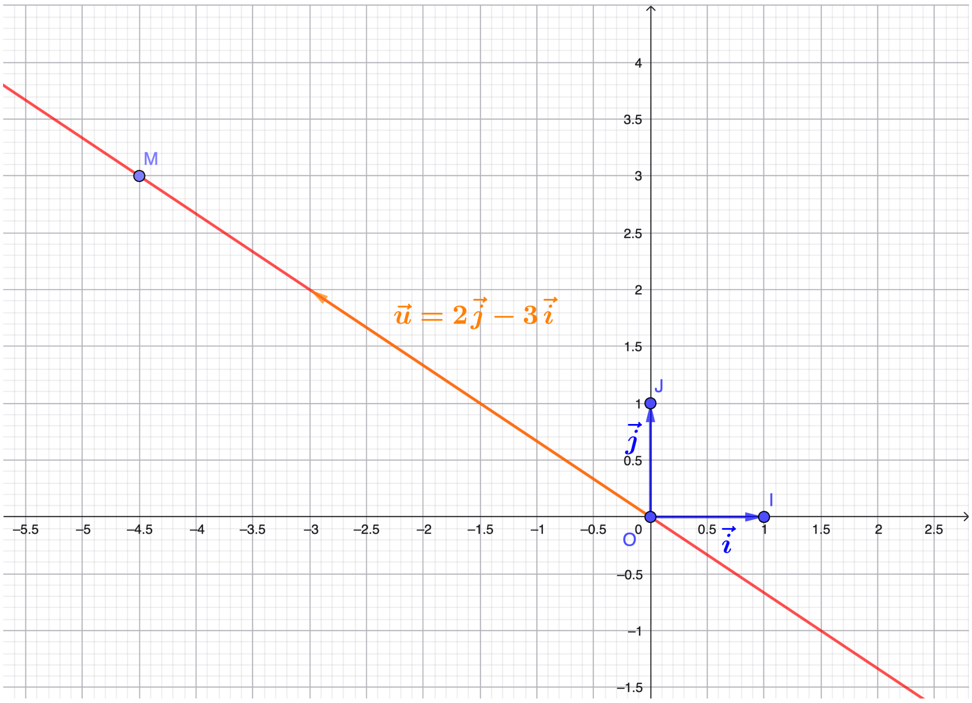
$$2x + 3y = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & -3 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0 \iff 2x + 3y = 0$$

Si $2x + 3y = 0$ alors on peut écrire $y = -\frac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction linéaire.

Voir figure :



(d) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

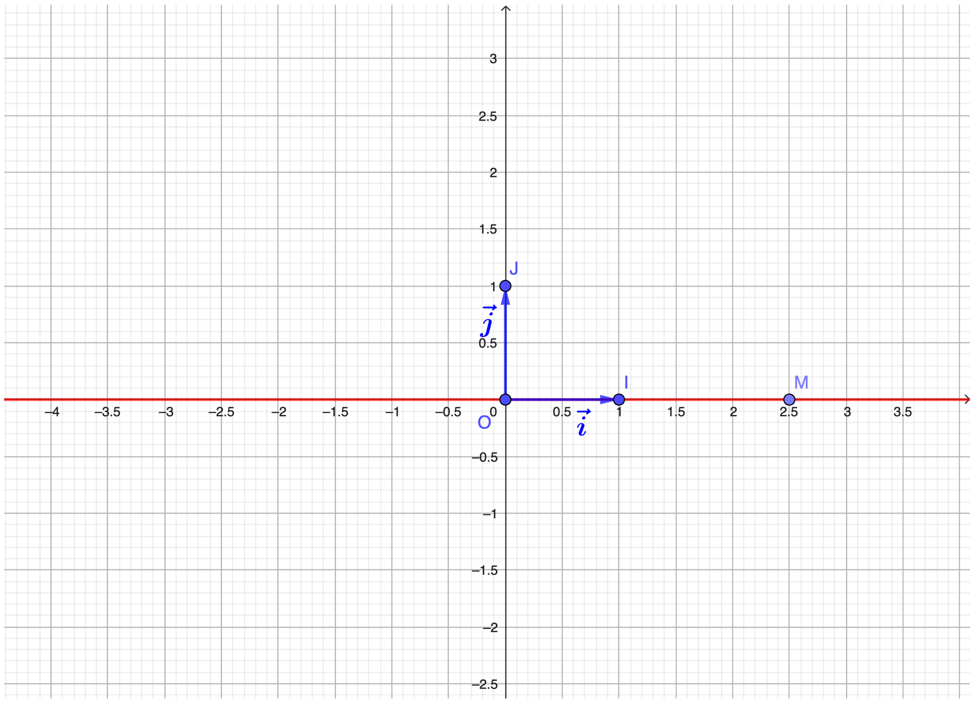
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0$$

est l'axe des abscisses. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & y-0 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 \iff y = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 \iff \overrightarrow{IM} = (x-1)\vec{i}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des abscisses.

Voir figure :



(e) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

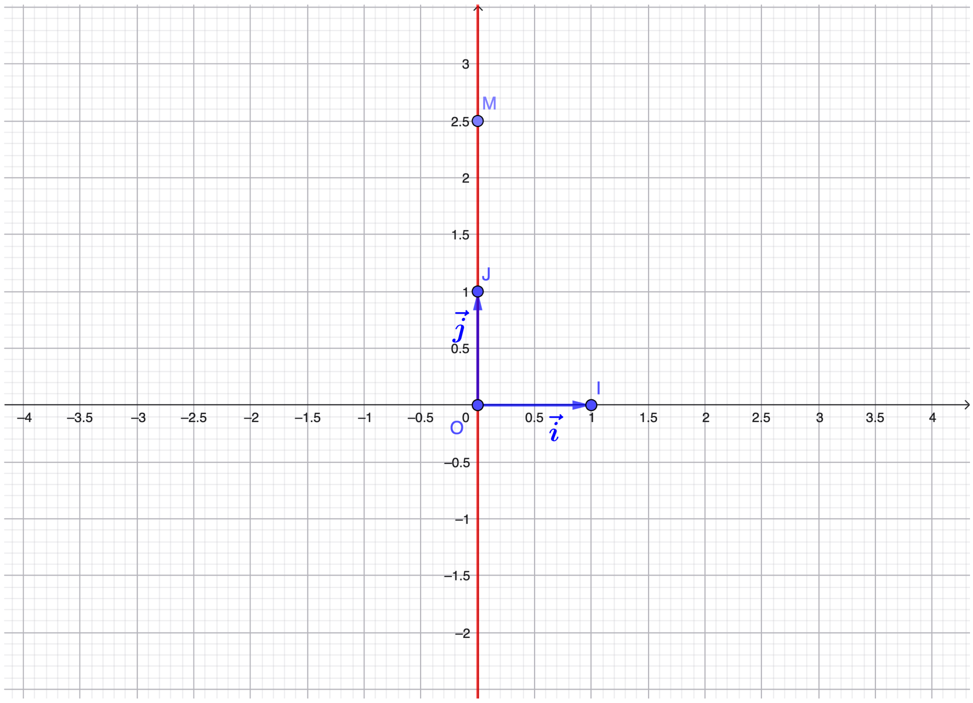
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0$$

est l'axe des ordonnées. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & y-1 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff x = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff \overrightarrow{OM} = (y-1)\vec{j}$$

Avec $y \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des ordonnées.

Voir figure :



(f) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0$$

est la droite horizontale d'équation

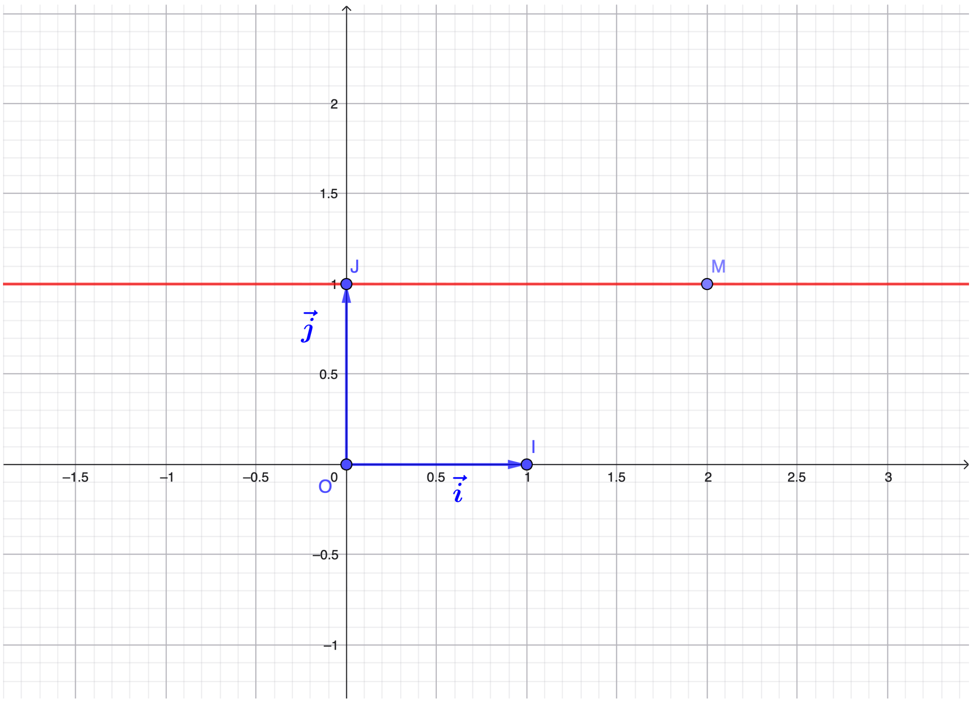
$$y = 1$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned} det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y-1 \end{vmatrix} = 0 \\ det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff y = 1 \\ det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff \overrightarrow{JM} = x\vec{i} \end{aligned}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par J.

Voir figure :



(g) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\vec{j}, \overrightarrow{IM}) = 0$$

est la droite verticale d'équation

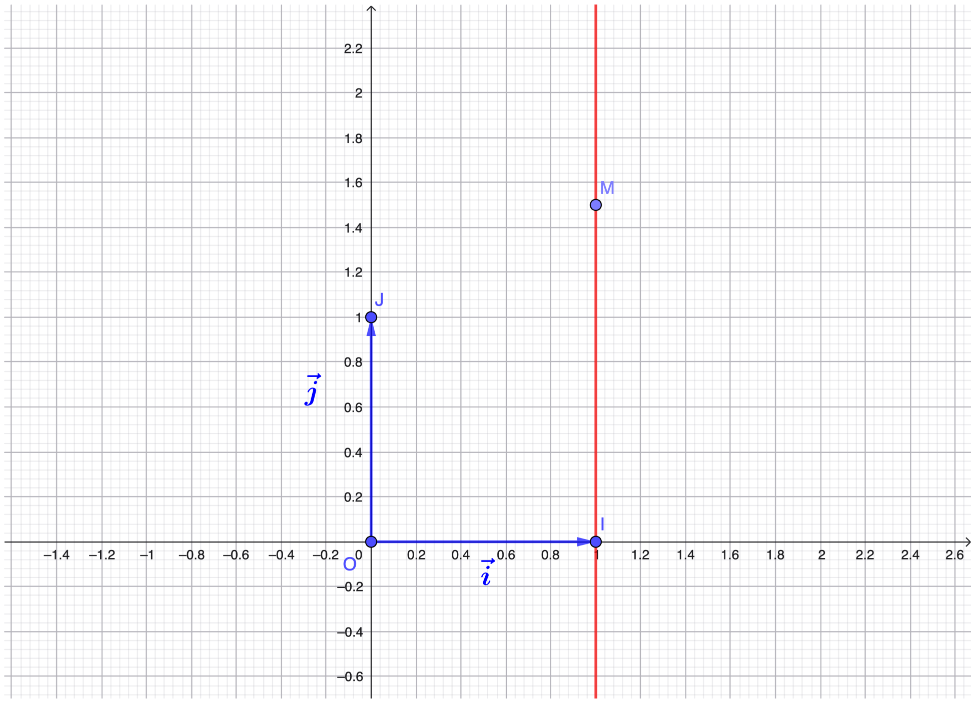
$$x = 1$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
det(\vec{j}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 \\
det(\vec{j}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff x = 1 \\
det(\vec{j}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff \overrightarrow{IM} = y\vec{j}
\end{aligned}$$

Avec $y \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par I.

Voir figure :



(h) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}) = 0$$

est la droite d'équation

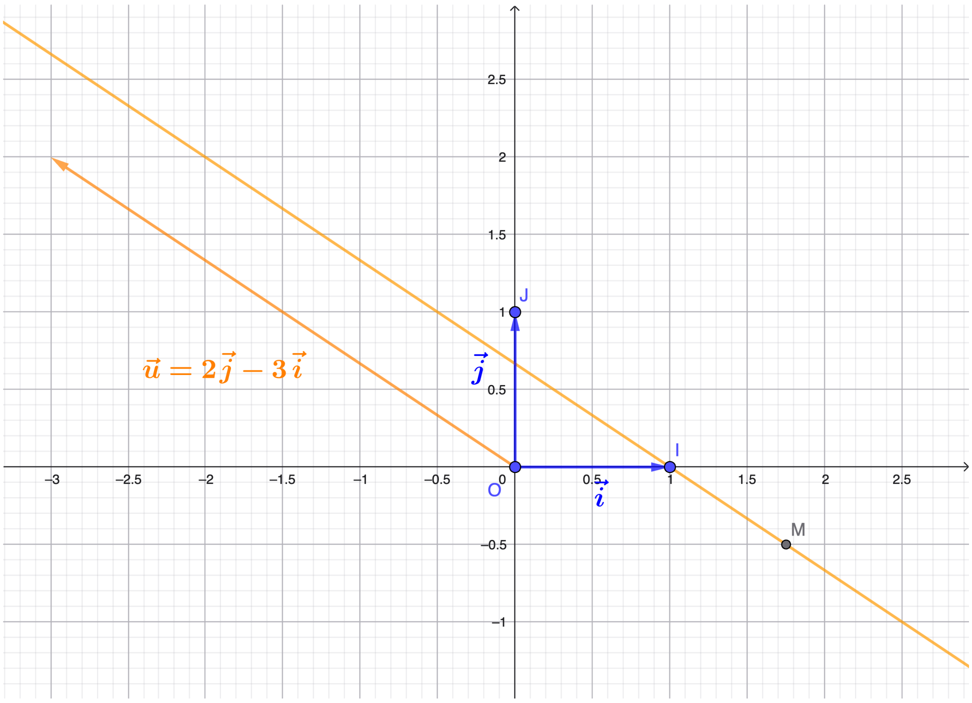
$$2x + 3y - 2 = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned} det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}) = 0 &\iff 2x + 3y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Si $2x + 3y - 2 = 0$ alors on peut écrire $y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Voir figure :



(i) L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

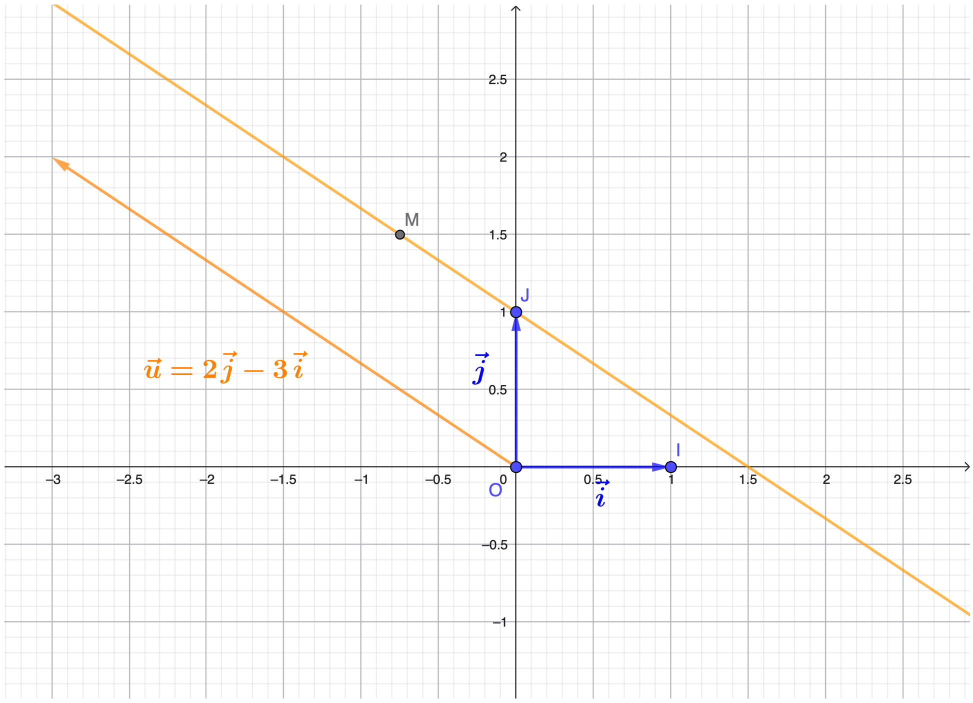
$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & -3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0 \iff 2x + 3y - 3 = 0$$

Si $2x + 3y - 3 = 0$ alors on peut écrire $y = 1 - \dfrac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Voir figure :



(j) Soient un point $P(x_P; y_P)$ et un vecteur $\vec{v} = a\vec{j} - b\vec{i}$. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0$$

est la droite d'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

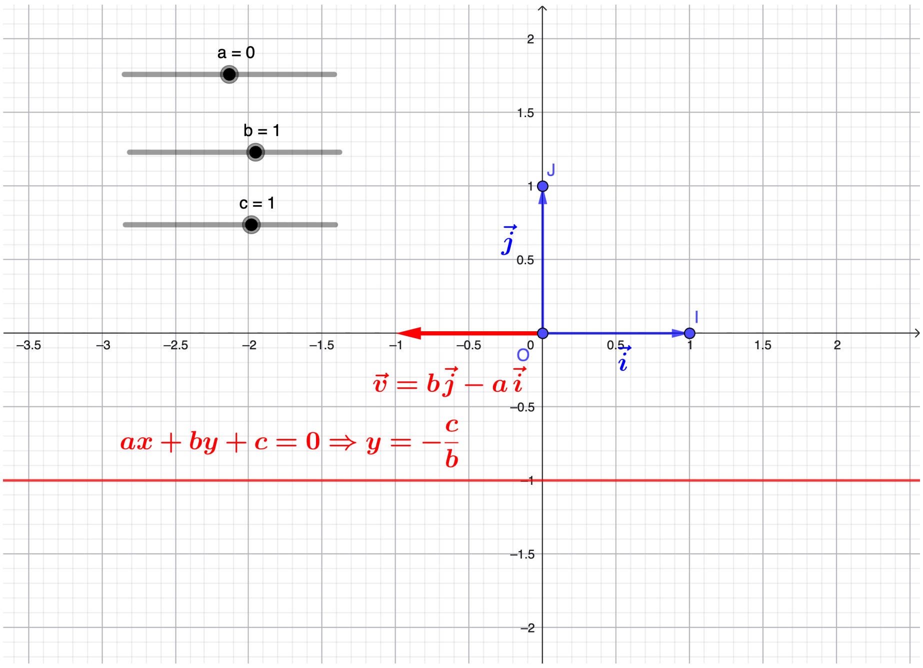
Démontrons cela en détails :

$$\begin{aligned}
det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -b & (x - x_P) \\ a & (y - y_P) \end{vmatrix} = 0 \\
det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 &\iff a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0 \\
det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 &\iff ax + by - (ax_P + by_P) = 0 \\
det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 &\iff ax + by + c = 0
\end{aligned}$$

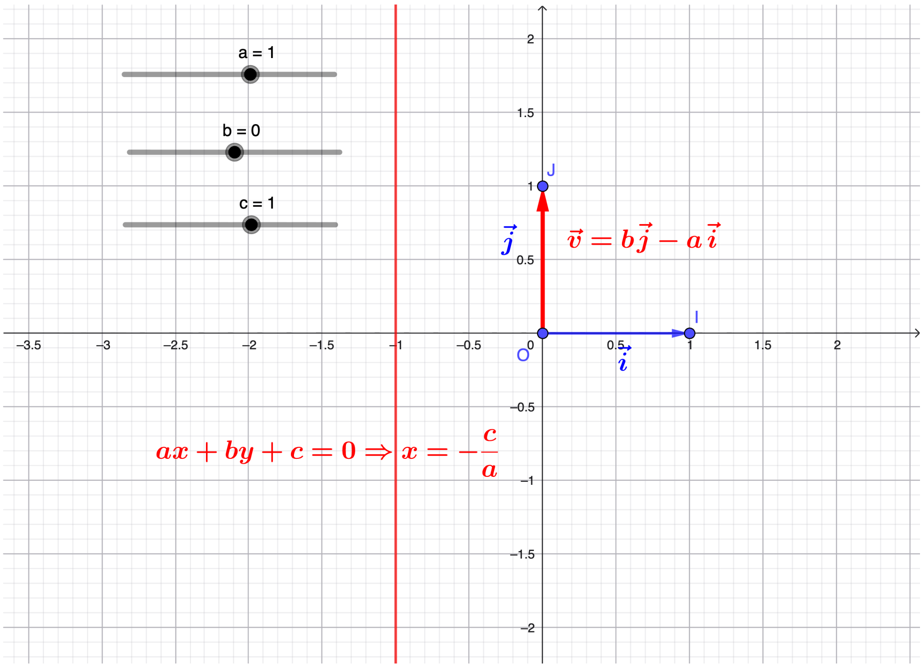
Il suffit de ce rappeler que

$$c = -(ax_P + by_P)$$

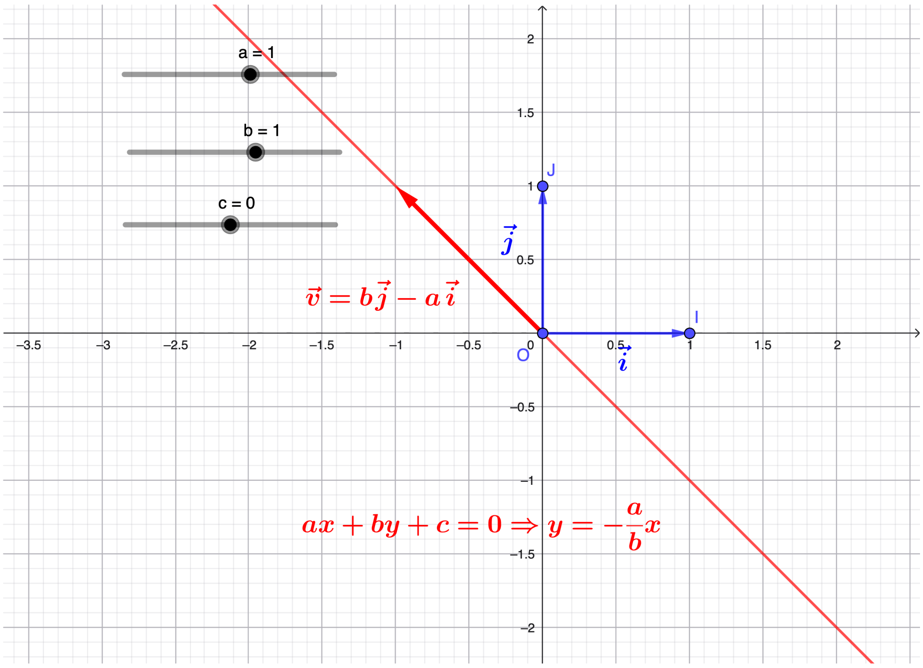
- Si $a = 0$ on obtient $y = -\dfrac{c}{b}$ c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des abscisses. Voir figure :



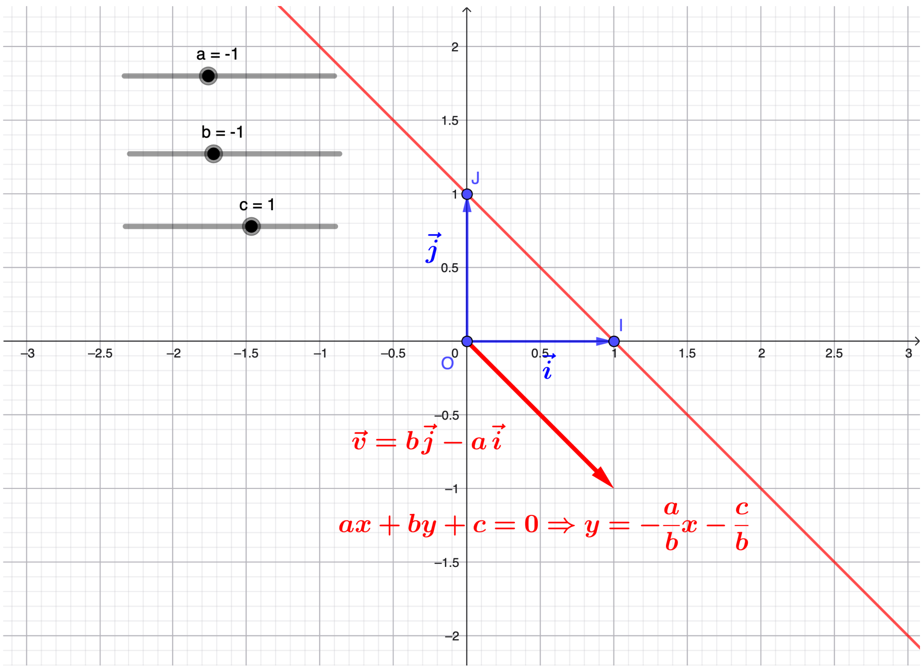
- Si $b = 0$ on obtient $x = -\dfrac{c}{a}$ c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
  Voir figure :



- Si $c = 0$ on obtient $y = -\dfrac{a}{b}x$ c'est-à-dire une fonction linéaire donc une droite oblique passant par l'origine.
  Voir figure :



- Si $abc \neq 0$ on obtient $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ c'est-à-dire une fonction affine donc une droite oblique ne passant pas par l'origine.
  Voir figure :



Dans tous les cas le vecteur $\vec{v} = a\vec{j} - b\vec{i}$ dirige la droite obtenue.

3. Solution de l'exercice 18

   Puisque nous avons A et B deux points distincts dans le plan et que la condition est MA = MB alors la seule chose que l'on peut faire c'est de calculer les distances. Or les distances sont des nombres positifs donc on peut utiliser leurs carrés ce qui nous évitera de manipuler des radicaux (racines carrées).

$$
\begin{aligned}
MA &= MB \\
MA^2 &= MB^2 \\
MA^2 - MB^2 &= 0 \\
(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - (x - x_B)^2 - (y - y_B)^2 &= 0 \\
2x(x_B - x_A) + (x_A)^2 - (x_B)^2 + 2y(y_B - y_A) + (y_A)^2 - (y_B)^2 &= 0 \\
2x_{\overrightarrow{AB}}x + 2y_{\overrightarrow{AB}}y - (x_B + x_A)x_{\overrightarrow{AB}} - (y_B + y_A)y_{\overrightarrow{AB}} &= 0 \\
x_{\overrightarrow{AB}}x + y_{\overrightarrow{AB}}y - \left(\frac{x_B + x_A}{2}x_{\overrightarrow{AB}} + \frac{y_B + y_A}{2}y_{\overrightarrow{AB}}\right) &= 0 \\
ax + by + c &= 0
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'une droite passant par le milieu du segment [AB] de coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

et dirigée par le vecteur

$$\vec{v} = b\vec{j} - a\vec{i}$$

Avec

$$
\begin{aligned}
a &= (x_B - x_A) = x_{\overrightarrow{AB}} \\
b &= (y_B - y_A) = y_{\overrightarrow{AB}} \\
c &= \frac{(x_A)^2 - (x_B)^2 + (y_A)^2 - (y_B)^2}{2} \\
c &= -\left(\frac{x_B + x_A}{2}x_{\overrightarrow{AB}} + \frac{y_B + y_A}{2}y_{\overrightarrow{AB}}\right)
\end{aligned}
$$

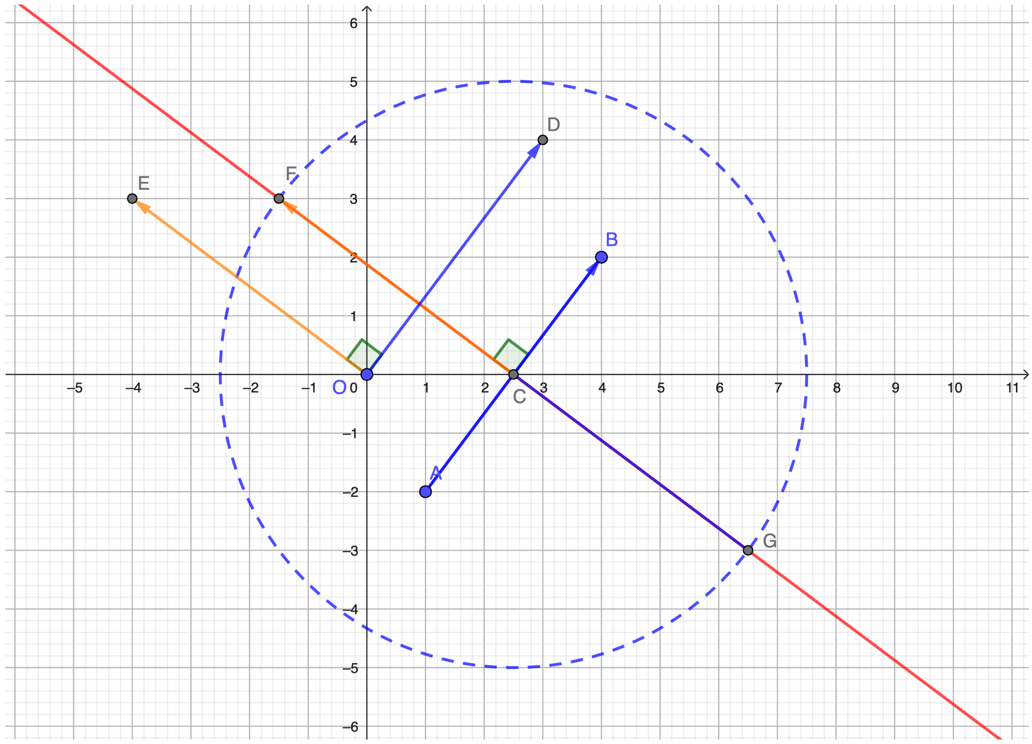
Si on considère les points D et E tels que :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{OE} &= \vec{v} \\
DE^2 &= ((y_B - y_A) - (x_B - x_A))^2 + (-(x_B - x_A) - (y_B - y_A))^2 \\
DE^2 &= ((x_B - x_A) - (y_B - y_A))^2 + ((x_B - x_A) + (y_B - y_A))^2 \\
DE^2 &= 2\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2\right) \\
DE^2 &= 2||\vec{v}||^2 \\
||\vec{v}|| &= AB = OD
\end{aligned}
$$

Ainsi le triangle ODE est rectangle en O donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points vérifiants MA = MB est donc une droite passant perpendiculairement par le milieu du segment [AB], c'est donc la médiatrice du segment [AB].

Voir figure :



4. Solution de l'exercice 19

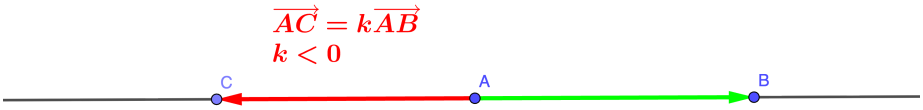
(a) Pour que les trois points A, B et C soient alignés il faut obtenir l'une des égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$$

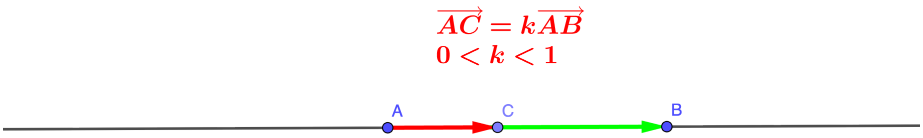
Avec $k \in \mathbb{R}$ un nombre réel non nul (qui n'est pas le même dans les deux égalités). Une seule des deux égalités suffit. Il est important que l'origine du vecteur soit l'un des deux points connus (A ou B) et l'extrémité le nouveau point C. De cette manière on a deux vecteurs colinéaires avec la même origine donc les points sont alignés.

(b) Il existe 3 configurations différentes pour que les points A, B et C soient alignés. Sans perte de généralité on va supposer que le point A est plus à gauche que le point B.

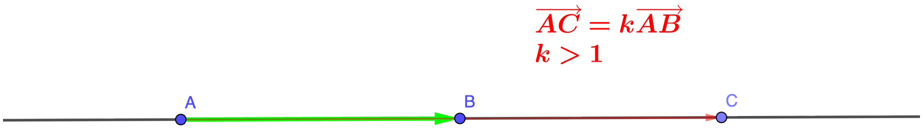
i. Le point C est situé avant le point A ce qui correspond à $k < 0$ dans la première égalité. Voir figure :



ii. Le point C est situé entre le point A et le point B ce qui correspond à $0 < k < 1$ dans la première égalité.
Voir figure :



iii. Le point C est situé après le point B ce qui correspond à $k > 1$ dans la première égalité.
Voir figure :



(c) Désormais on ajoute un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par conséquent les points ont les coordonnées respectives :

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$$

On peut donc calculer le déterminant.

$$det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_B - x_A \\ y_C - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (y_C - y_A)(x_B - x_A)$$

Si le déterminant est nul alors les points A, B et C sont alignés et sinon ils forment un triangle.

(d) Écrivons un programme Python :

```python
x_1 = float(input("Abscisse du point 1, x_1 = "))
y_1 = float(input("Ordonnée du point 1, y_1 = "))
x_2 = float(input("Abscisse du point 2, x_2 = "))
y_2 = float(input("Ordonnée du point 2, y_2 = "))
x_3 = float(input("Abscisse du point 3, x_3 = "))
y_3 = float(input("Ordonnée du point 3, y_3 = "))
x12 = x_2 - x_1
y12 = y_2 - y_1
x13 = x_3 - x_1
y13 = y_3 - y_1
det = x12 * y13 - y12 * x13
if det == 0:
    print("Les points sont alignés")
    if x13 / x12 < 0:
        print("Le 3ème point est à gauche du 1er.")
    elif x13 / x12 > 1:
        print("Le 3ème point est à droite du 2nd.")
    else:
        print("Le 3ème point est entre les 2 premiers.")
else:
    print("Les 3 points forment un triangle.")
```

5. Solution de l'exercice 20

   On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

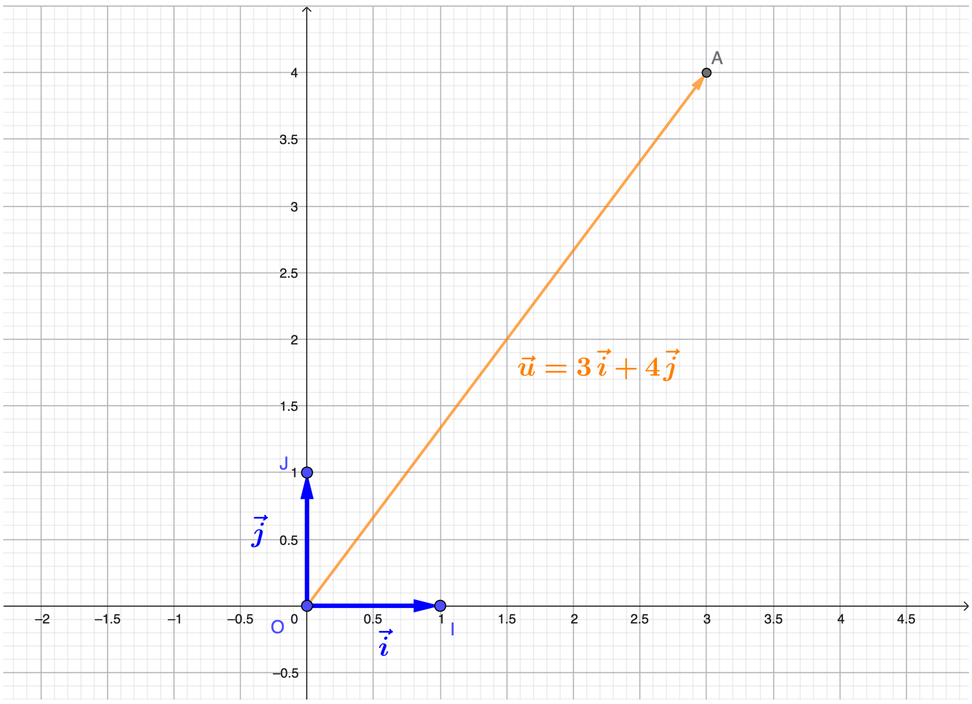
   (a) Construction du vecteur

   $$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

   et placement du point A tel que

   $$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$$

   Voir figure :



   (b) Plaçons le point H tel que

   $$\overrightarrow{OH} = 3\vec{i}$$

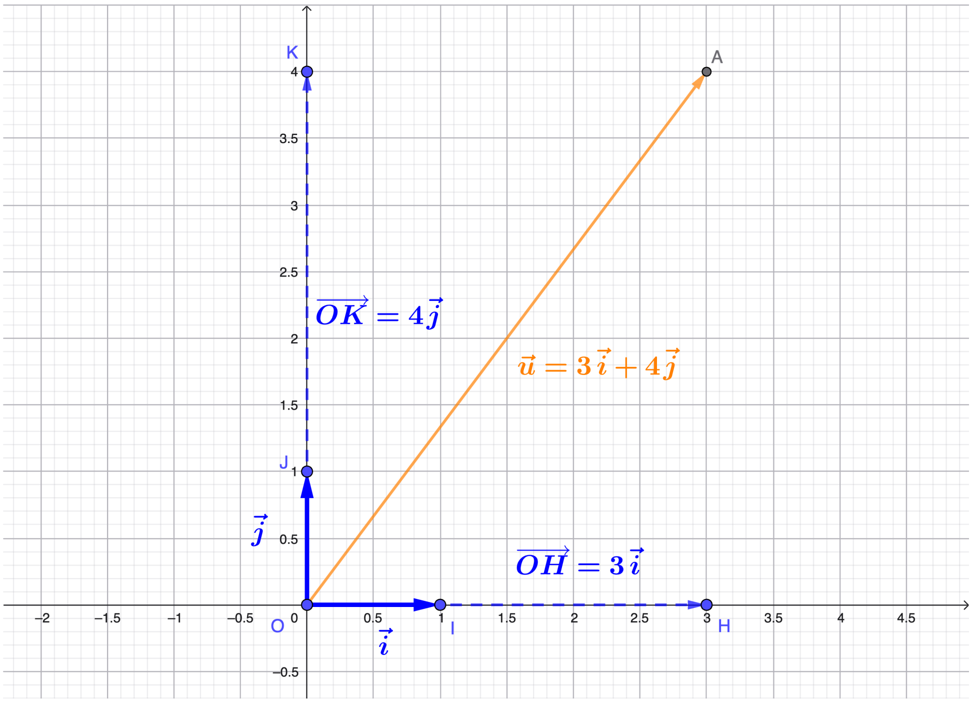
   et le point K tel que

   $$\overrightarrow{OK} = 4\vec{j}$$

   On en déduit une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$:

   $$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

   Voir figure :



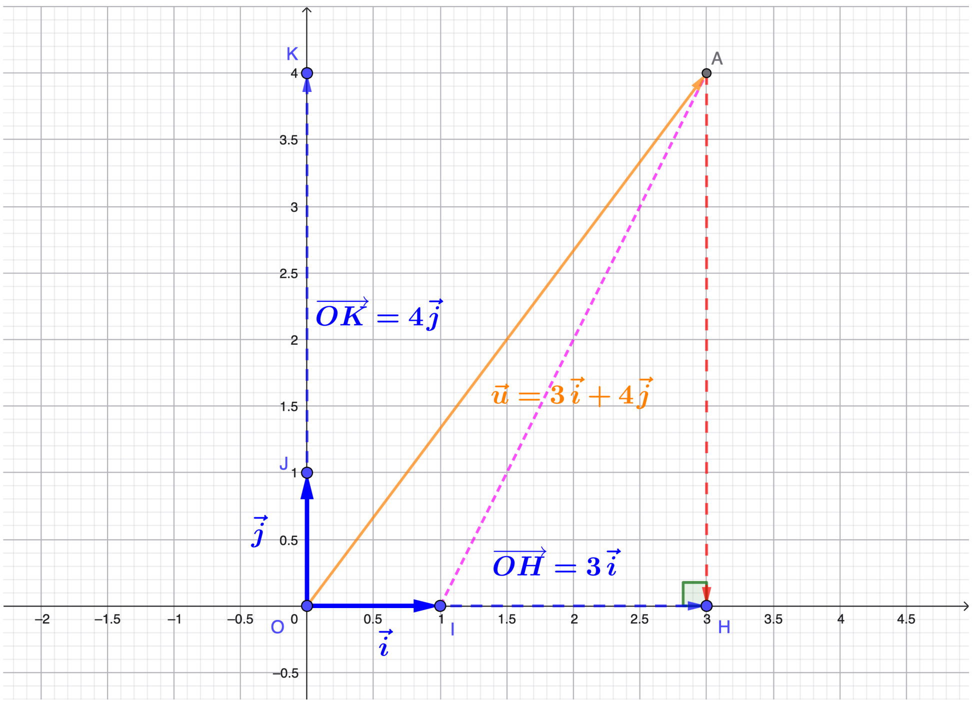
(c) Le triangle AHO est rectangle en H car

$$OA^2 = 3^2 + 4^2$$
$$OH^2 + HA^2 = 3^2 + 4^2$$

Le triangle AHI est rectangle en H car

$$IA^2 = (3-1)^2 + (4-0)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$
$$IH^2 + HA^2 = (3-1)^2 + 4^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

Voir figure :



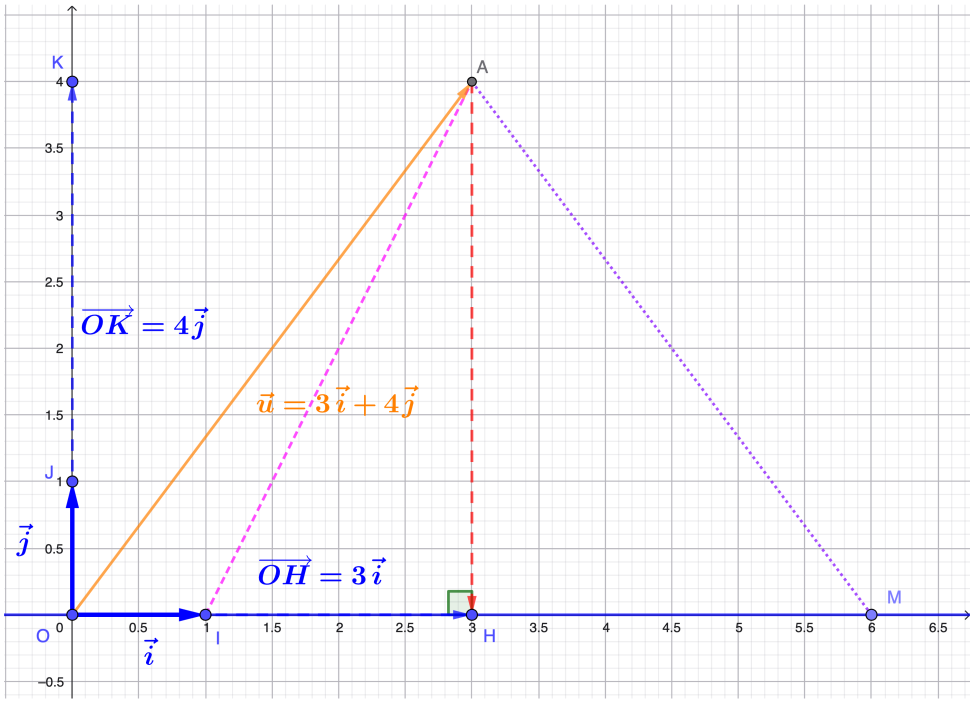
(d) Soit M un point quelconque sur l'axe des abscisses. Comparons AM et AH :

- soit $M = H$ et dans ce cas $AM = AH$
- soit $M \neq H$ et dans ce cas AMH est rectangle en H donc AM est l'hypoténuse ce qui veut dire AM > AH :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x-3)^2 + 4^2 \\ AH^2 + HM^2 &= 4^2 + (x-3)^2 \\ AM^2 &= AH^2 + HM^2 \end{aligned}$$

Il est impossible de trouver un point M tel que AM < AH.

Voir figure :



(e) D'après ce qui précède le point M de l'axe des abscisses tel que la distance AM soit minimale est le point H. Ainsi cette distance entre A et l'axe des abscisses est :

$$d(A;(OI)) = \min_{M \in (OI)} (AM) = AH$$

On en déduit sa valeur qui est $AH = 4$.

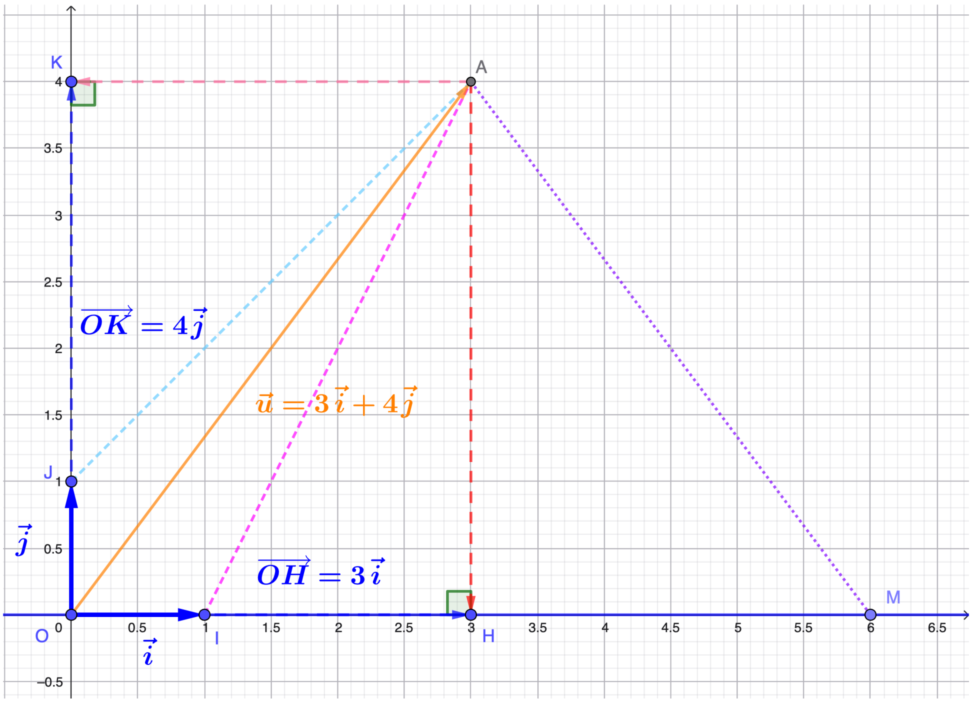
(f) Le triangle AKO est rectangle en K car :

$$\begin{aligned} OA^2 &= 3^2 + 4^2 \\ OK^2 + KA^2 &= 4^2 + 3^2 \end{aligned}$$

Le triangle AKJ est rectangle en K car :

$$\begin{aligned} AJ^2 &= 3^2 + (y-4)^2 \\ JK^2 + KA^2 &= (y-4)^2 + 3^2 \end{aligned}$$

Voir figure :



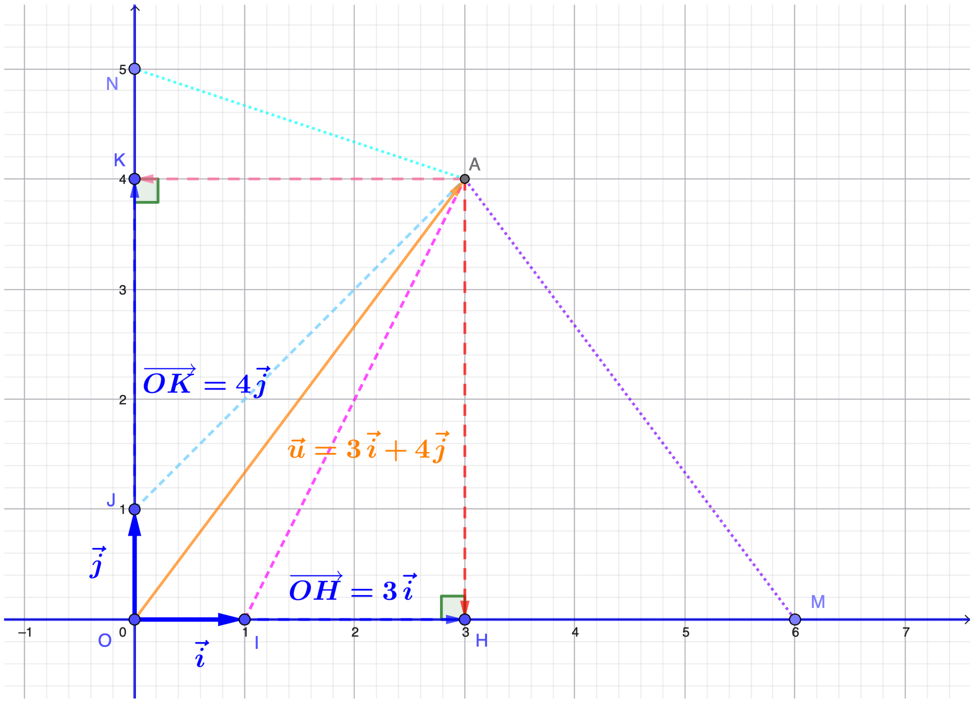
(g) Soit N un point quelconque sur l'axe des ordonnées. Comparons AN et AK :

- soit $N = K$ et dans ce cas $AN = AK$
- soit $N \neq K$ et dans ce cas ANK est rectangle en K donc AN est l'hypoténuse ce qui veut dire AN > AK :

$$\begin{aligned} AN^2 &= 3^2 + (y-4)^2 \\ AK^2 + KN^2 &= 3^2 + (y-4)^2 \\ AN^2 &= AK^2 + KN^2 \end{aligned}$$

Il est impossible de trouver un point N tel que AN < AK.

Voir figure :



(h) D'après ce qui précède le point N de l'axe des ordonnées tel que la distance AN soit minimale est le point K. Ainsi cette distance entre A et l'axe des ordonnées est :

$$d(A;(OJ)) = \min_{N \in (OJ)} (AN) = AK$$

On en déduit sa valeur qui est $AK = 3$.

6. Solution de l'exercice 21

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(a) Calcul des coordonnées du point L milieu du segment [OK] :

$$x_L = \frac{x_O + x_K}{2} = \frac{1}{2}$$
$$y_L = \frac{y_O + y_K}{2} = \frac{1}{2}$$

Pour en déduire la nature des triangles LOI et JOL il faut calculer les longueurs des côtés :

$$OL^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$LI^2 = \left(1 - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$OI^2 = 1^2 = 1$$
$$OI^2 = OL^2 + LI^2$$
$$JL^2 = \left(\frac{2}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$JO^2 = 1^2 = 1$$
$$JO^2 = OL^2 + JL^2$$

Les deux triangles sont isocèles et rectangles, LOI en I et JOL en J.

(b) Comparons IK et IL :

$$IK^2 = (1-1)^2 + (1-0)^2 = 1$$
$$IL^2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi IK > IL.
On en déduit la distance entre le point I et la droite (OK) à savoir

$$d(I,(OK)) = IL = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : c'est parce que dans la question précédente on a établi que LOI était rectangle en I qu'on peut conclure.

(c) Comparons JK et JL :

$$JK^2 = (1-0)^2 + (1-1)^2 = 1$$
$$JL^2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi JK > JL.
On en déduit la distance entre le point J et la droite (OK) à savoir

$$d(J,(OK)) = JL = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : c'est parce que dans la question précédente on a établi que JOL était rectangle en J qu'on peut conclure.

(d) Par construction les points A et B sont tels que :

$$\overrightarrow{IA} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{JB} = \vec{u}$$

Donc IABJ est un parallélogramme.
Maintenant comparons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$:

$$x_A = x_I + x_{\vec{u}} = 1 + 1 = 2$$
$$y_A = y_I + y_{\vec{u}} = 0 + 1 = 1$$
$$x_B = x_J + x_{\vec{u}} = 0 + 1 = 1$$
$$y_B = y_J + y_{\vec{u}} = 1 + 1 = 2$$
$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 1 - 2 = -1$$
$$y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 2 - 1 = 1$$
$$x_{\overrightarrow{IJ}} = x_J - x_I = 0 - 1 = -1$$
$$y_{\overrightarrow{IJ}} = y_J - y_I = 1 - 0 = 1$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ et de plus

$$IA = AB$$

Donc IABJ est un losange.

Maintenant comparons AJ et IB :

$$AJ^2 = (0-2)^2 + (1-1)^2 = 4$$
$$IB^2 = (1-1)^2 + (2-0)^2 = 4$$

Ainsi AJ = IB donc IABJ est un losange.
Finalement IABJ est un carré.

(e) Puisque IABJ est un carré la distance entre le point A et la droite (IJ) est tout simplement

$$IA = \sqrt{2}$$

7. Solution de l'exercice 22

Soit ABC un triangle. Le point G vérifie :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

(a) Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

(b) Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{BG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

(c) Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{CG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

(d) Déterminons les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA] :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$
$$x_J = \frac{x_B + x_C}{2} \qquad y_J = \frac{y_B + y_C}{2}$$
$$x_K = \frac{x_C + x_A}{2} \qquad y_K = \frac{y_C + y_A}{2}$$

(e) Appliquons la relation de Chasles dans l'identité du milieu et exprimons le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

(f) Faisons de même avec le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$$

(g) Faisons de même avec le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{CG}$:

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$$

(h) En utilisant les éléments précédents on peut établir le calcul des coordonnées du point G en fonction de celles des points A, B, C :

$$\begin{aligned} x_G - x_A &= \frac{1}{3}(x_B - x_A + x_C - x_A) \\ x_G &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G &= \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{aligned}$$

(i) En utilisant les éléments précédents on peut établir le calcul des coordonnées du point G en fonction de celles des points I, J, K :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \\ \frac{2}{3}(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CI}) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CI} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GI} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GI} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK} \\ \overrightarrow{IG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}) \\ x_G - x_I &= \frac{1}{3}(x_J - x_I + x_K - x_I) \\ x_G &= \frac{1}{3}(x_I + x_J + x_K) \\ y_G &= \frac{1}{3}(y_I + y_J + y_K) \end{aligned}$$

(j) Appliquons les résultats précédents dans un cas concret avec les points $A(-4;4)$, $B(5;4)$, $C(-1;-2)$. Calculons les coordonnées des milieux I, J, K :

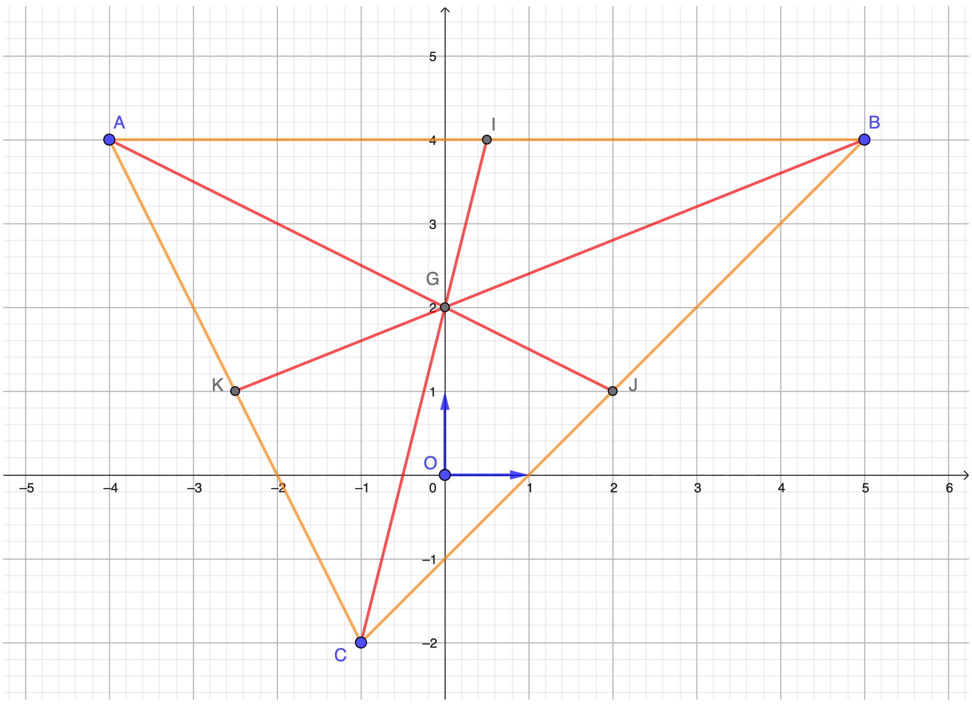
$$x_I = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2} \qquad y_I = \frac{4+4}{2} = 4$$
$$x_J = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \qquad y_J = \frac{4+(-2)}{2} = 2$$
$$x_K = \frac{-1+(-4)}{2} = -\frac{5}{2} \qquad y_K = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

Calculons les coordonnées du point G :

$$x_G = \frac{1}{3}(-4+5-1) = 0$$
$$y_G = \frac{1}{3}(4+4-2) = 2$$

On remarque que G est le centre de gravité du triangle.

Voir figure :



8. Solution de l'exercice 23

On considère la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} + \vec{u}$$

où $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(a) Approche analytique :

$$x' = 2x + 3$$
$$y' = 2y - 1$$

(b) Cas particulier : on cherche le(s) point(s) tel(s) que $M = M'$ c'est-à-dire les solutions de l'équation :

$$x = 2x + 3 \Rightarrow x = -3$$
$$y = 2y - 1 \Rightarrow y = 1$$

Il y a exactement un point invariant par cette transformation : $A(-3; 1)$

(c) Interprétation géométrique : cette transformation est la composée d'une translation et d'une homothétie de rapport 2. Concrètement elle multiplie par 2 la distance à l'origine du repère puis effectue un décalage de 3 unités vers la droite et 1 unité vers le bas.

(d) La transformation réciproque est celle qui fait une translation de vecteur $\vec{v} = -\vec{u}$ puis multiplie la distance à l'origine par $\frac{1}{2}$. Concrètement :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \vec{v}$$

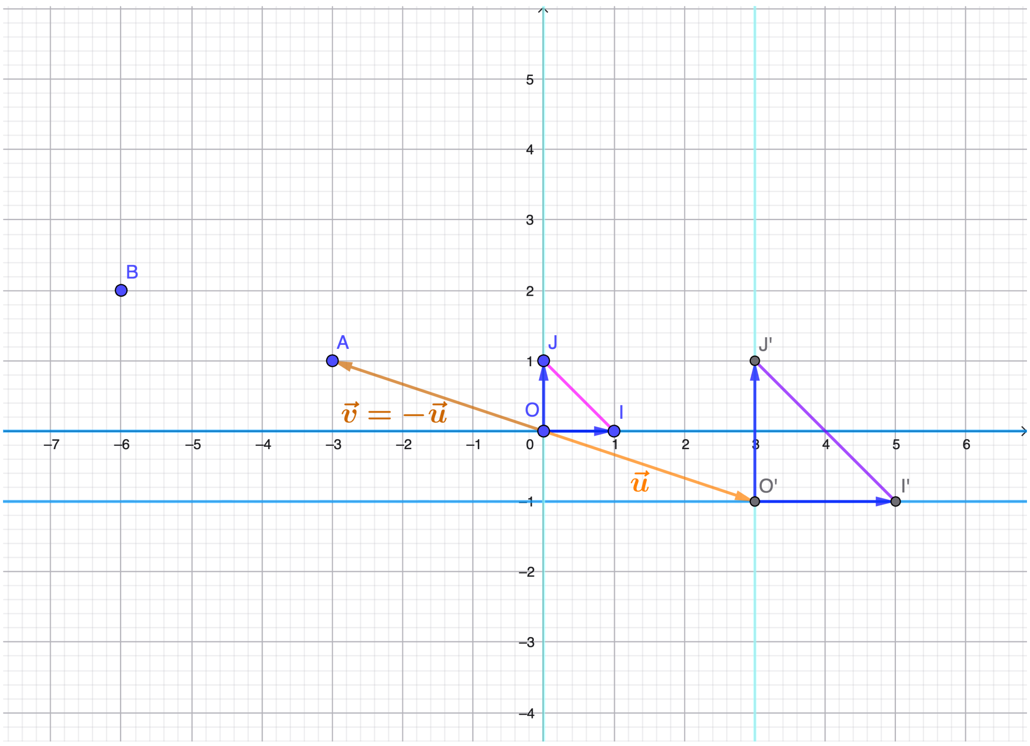
De façon analytique :

$$x' = \frac{1}{2}x - 3$$
$$y' = \frac{1}{2}y + 1$$

Son point invariant est la solution de l'équation :

$$x = \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow x = -6$$
$$y = \frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow y = 2$$
$$B(-6; 2)$$

Voir figure :



9. Solution de l'exercice 24

   On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$:

   (a) Le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O. En effet :

   $$IJ^2 = (0-1)^2 + (1-0)^2 = 2OI^2 + OJ^2 \qquad = 1^2 + 1^2 = 2$$

   (b) Le point A est le milieu du segment [IJ] donc il vérifie :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AJ} &\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{IA}\\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} &\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IA}\\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ} &\Rightarrow 2\overrightarrow{IA} = \vec{j} - \vec{i}\\ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} &\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}) + \vec{i}\\ \overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})\end{aligned}$$

   (c) Puisque B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ alors :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} &\Rightarrow OB = 2OA\\ \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) &\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}\\ OB = ||\vec{i} + \vec{j}|| &\Rightarrow OB = \sqrt{2}\end{aligned}$$

   (d) Le quadrilatère OIBJ est un carré car $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ ce qui signifie que OIBJ est un parallélogramme avec un angle droit et deux côtés adjacents de même longueur (cf question 1 OIJ isocèle et rectangle en O).

   (e) Le triangle OCB est isocèle et rectangle en B. En effet :

   $$\begin{aligned}OC^2 &= 2^2 = 4\\ OB^2 + BC^2 &= 2 + (2-1)^2 + (0-1)^2 = 4\end{aligned}$$

   (f) Par construction $\overrightarrow{JK} = \vec{i} + \vec{j} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{IL}$ donc IJKL est un parallélogramme. De plus on a :

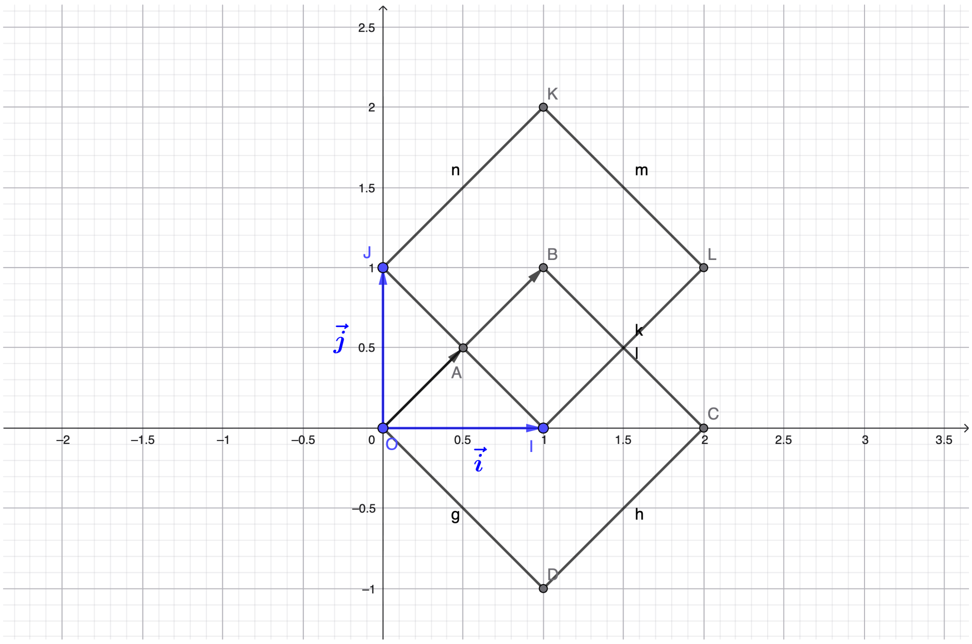
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BK}\\ JK^2 &= OB^2 = IL^2 = 2\\ \overrightarrow{JB} &= \vec{i} = \overrightarrow{BL}\\ \overrightarrow{IB} &= \vec{j} = \overrightarrow{BK}\\ IK^2 &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

   Donc IJKL est un carré.

(g) Le quadrilatère OBCD est un carré car :

$$BD^2 = 2^2 = 4$$
$$OB^2 + OD^2 = 4$$
$$\overrightarrow{OD} = \vec{i} - \vec{j} = \overrightarrow{BC}$$

Voir figure :



10. Solution de l'exercice 26

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Posons

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$$

pour la suite de l'exercice.

(a) Le point A a pour coordonnées $(2; 0)$. Le point B a pour coordonnées $(2; 1)$. Le point C a pour coordonnées $(1; 1)$.
On peut facilement vérifier que le quadrilatère IABC est un carré :

$$IB^2 = (x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 = (2-1)^2 + (1-0)^2 = 2$$
$$IA^2 + AB^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$IA^2 + AB^2 = (2-1)^2 + (0-0)^2 + (2-2)^2 + (1-0)^2 = 2$$
$$x_B - x_C = x_A - x_I = (2-1) = 1$$
$$y_B - y_C = y_A - y_I = (1-1) = 0 = (0-0)$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IA} = \vec{i}$$

(b) Afin de déterminer les coordonnées du point D commençons par la relation fournie :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ID} &= \frac{IB}{2}(\vec{i}+\vec{j}) \\
x_D - x_I &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+0) \Rightarrow x_D = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\
y_D - y_I &= \frac{\sqrt{2}}{2}(0+1) \Rightarrow y_D = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

on en déduit ses coordonnées

$$D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) Le point E a pour coordonnées $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(d) Le point F a pour coordonnées $(1;1+\sqrt{2})$.

(e) Le point G a pour coordonnées $(0;1+\sqrt{2})$.

(f) Le point H a pour coordonnées $-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(g) Le point L a pour coordonnées $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(h) On peut vérifier qu'on a bien obtenu un octogone régulier de côté 1 :

$$\begin{aligned}
OI &= ||\vec{i}|| = 1 = FG \\
ID &= \frac{||\vec{u}||}{2} \times ||\vec{u}|| = \frac{||\vec{u}||^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 = HG \\
DE &= ||\vec{j}|| = 1 = HL \\
EF &= \frac{||\vec{u}||}{2} \times ||\vec{j}-\vec{i}|| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 = OL
\end{aligned}$$

(i) On peut vérifier que OICJ est bien un carré :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (x_C)^2 + (y_C)^2 = 2 \\
OI^2 + IC^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \\
\overrightarrow{JC} &= \vec{i} = \overrightarrow{OI}
\end{aligned}$$

(j) On peut vérifier qu'on obtient bien les carrés OMNP et OBQR :

$$\begin{aligned}
ON^2 &= 2^2 = 4 = OM^2 + MN^2 \\
\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}
\end{aligned}$$

Voir figure :

includes/sol26.png

Remarque : avec un peu d'imagination les deux carrés OMNP et OBQR représenteraient des moteurs, le carré OICJ l'entrée et le polygone OIDEFGHL le vaisseau.

Chapitre 15

Démonstrations

15.1 Démonstrations

1. Solution de l'exercice 32

   Commençons par montrer que si deux vecteurs sont colinéaires alors leur déterminant est nul. Rappelons que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Calculons le déterminant :

   $$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} kx_{\vec{v}} & x_{\vec{v}} \\ ky_{\vec{v}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} \\ det(\vec{u},\vec{v}) &= kx_{\vec{v}}y_{\vec{v}} - ky_{\vec{v}}x_{\vec{v}} \\ det(\vec{u},\vec{v}) &= k(x_{\vec{v}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{v}}x_{\vec{v}}) \\ det(\vec{u},\vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

   Réciproquement, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que leur déterminant soit nul :

   $$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0 \\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0 \\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} \\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow \frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = k \\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} \\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\Rightarrow \vec{u} = k\vec{v} \end{aligned}$$

   Attention, dans le calcul on est passé de

   $$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}$$

   à

   $$\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = k$$

   mais il faudrait traiter le cas où

   $$x_{\vec{v}}y_{\vec{v}} = 0$$

   En effet, si $x_{\vec{v}} = 0$ soit $\vec{v} = \vec{0}$ soit $x_{\vec{u}} = 0$ et donc l'égalité avec k est vérifié sans passer par le quotient. Idem pour $y_{\vec{v}} = 0$.

2. Exercice 32bis

   Démontrons que pour tous points A, B, C (relation de Chasles) : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

   Il suffit d'écrire les coordonnées :

$$\begin{aligned} x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A &\iff x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{BC}} = x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_B - y_A + y_C - y_B = y_C - y_A &\iff y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{BC}} = y_{\overrightarrow{AC}} \end{aligned}$$

3. Exercice 32ter

   Démontrons que si I est le milieu de [AB], alors : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

   Si I est le milieu de [AB] alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AI} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Chapitre 16

Exercices divers

16.1 Alphabet

1. Solution de l'exercice 33

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) Plaçons le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ c'est-à-dire $A(2;3)$.

   (b) Construisons l'image A' du point A par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ c'est-à-dire $A'(4;0)$.

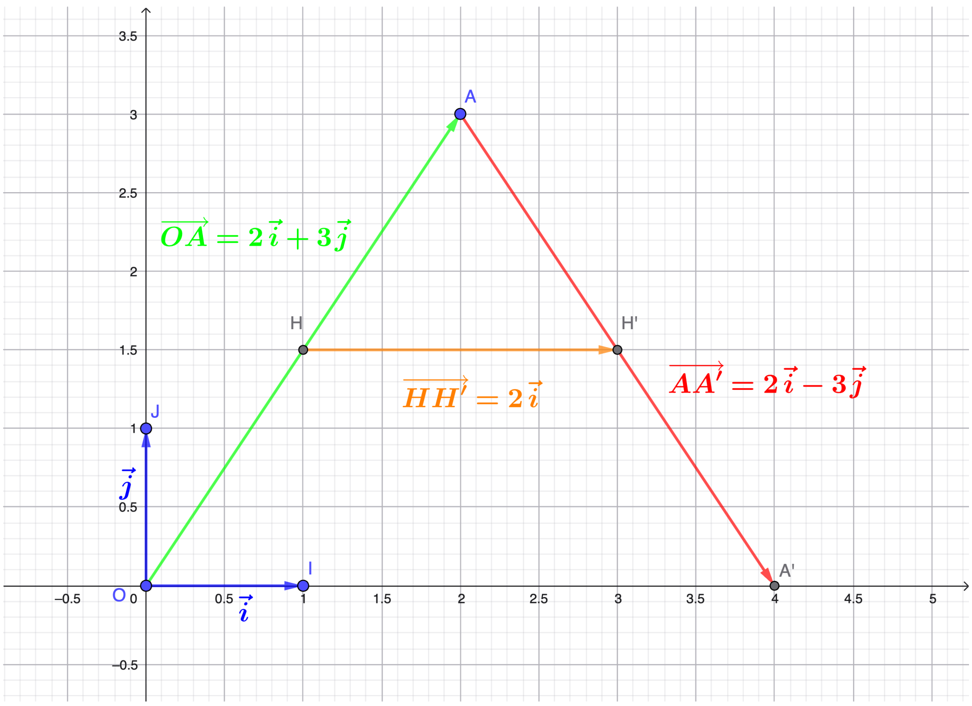
   (c) Déterminons les coordonnées de milieux des segments [OA] et [AA'] qu'on nommera H et H' respectivement c'est-à-dire $H(1;1,5)$ et $H'(3;1,5)$.

   (d) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ en fonction des vecteurs de la base c'est-à-dire

   $$\overrightarrow{HH'} = 2\vec{i}$$

   (e) On pense à la lettre A.

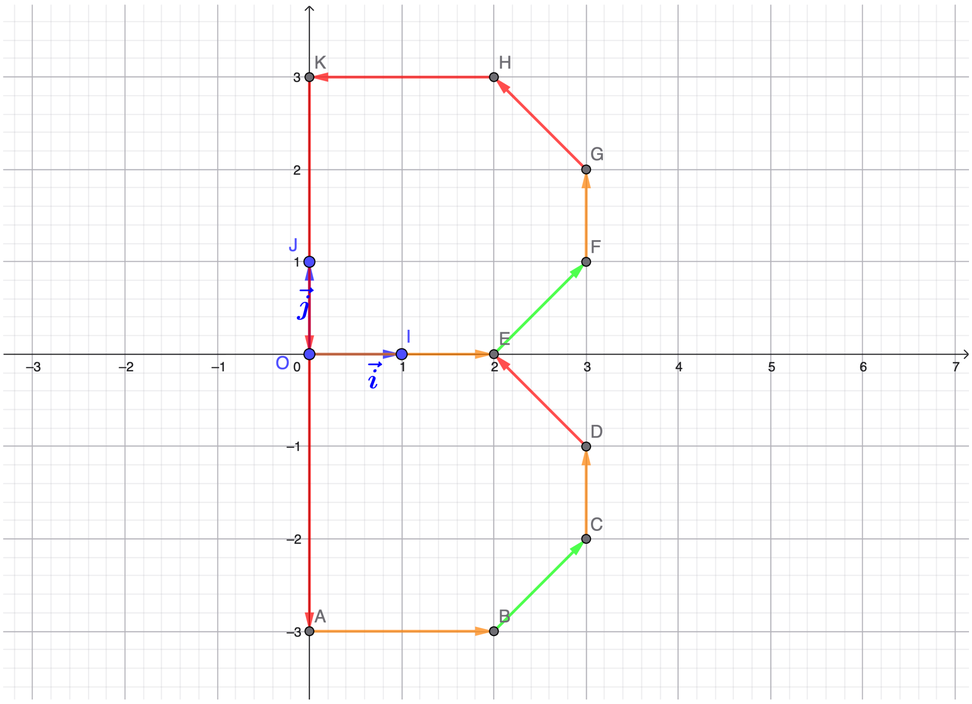
   Voir figure :



2. Solution de l'exercice 34

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

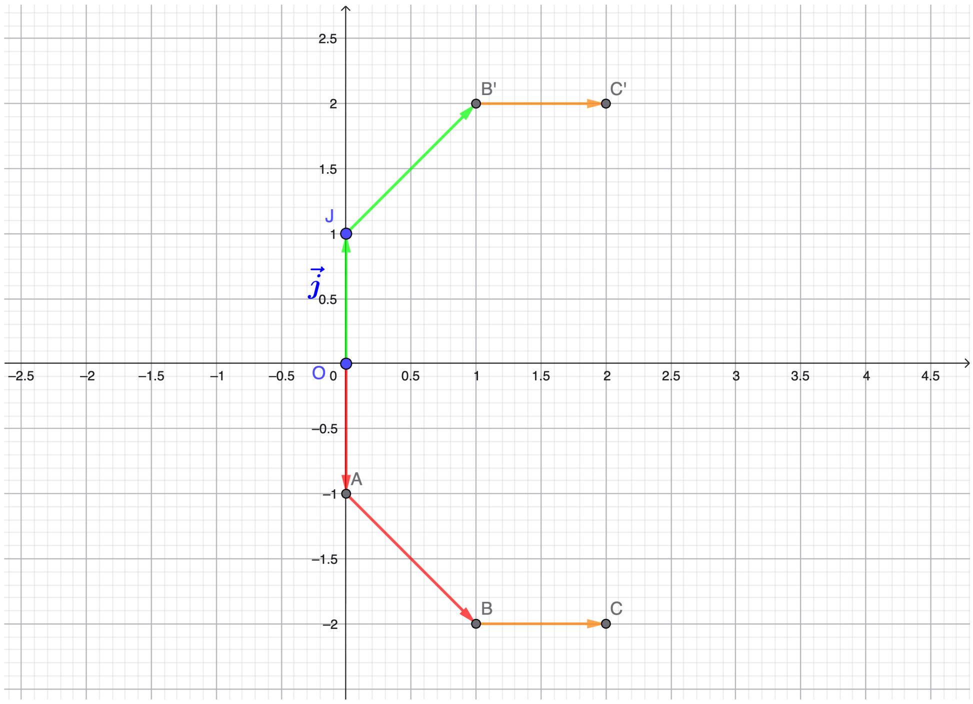
   (a) A a pour coordonnées du point $(0;-3)$.
   (b) B a pour coordonnées du point $(2;-3)$.
   (c) C a pour coordonnées du point $(3;-2)$.
   (d) D a pour coordonnées du point $(3;-1)$.
   (e) E a pour coordonnées du point $(2;0)$.
   (f) F a pour coordonnées du point $(3;1)$.
   (g) G a pour coordonnées du point $(3;2)$.
   (h) H a pour coordonnées du point $(2;3)$.
   (i) K a pour coordonnées du point $(0;3)$.
   (j) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre B.
   Voir figure :



3. Solution de l'exercice 35

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(0;-1)$.
   (b) B a pour coordonnées du point $(1;-2)$.
   (c) C a pour coordonnées du point $(2;-2)$.
   (d) B' a pour coordonnées du point $(1;2)$.
   (e) C' a pour coordonnées du point $(2;2)$.
   (f) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre C.
   Voir figure :



4. Solution de l'exercice 36

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(0; -3)$.

   (b) B a pour coordonnées du point $(2; -3)$.

   (c) C a pour coordonnées du point $(3; -2)$.

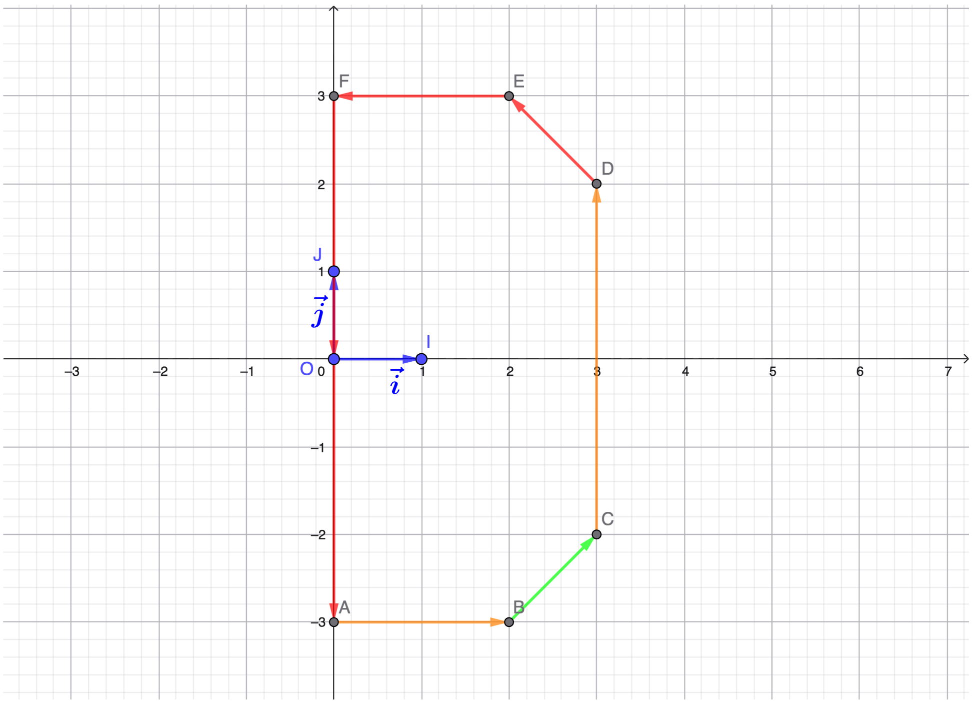
   (d) D a pour coordonnées du point $(3; 2)$.

   (e) E a pour coordonnées du point $(2; 3)$.

   (f) F a pour coordonnées du point $(0; 3)$.

   (g) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre D.

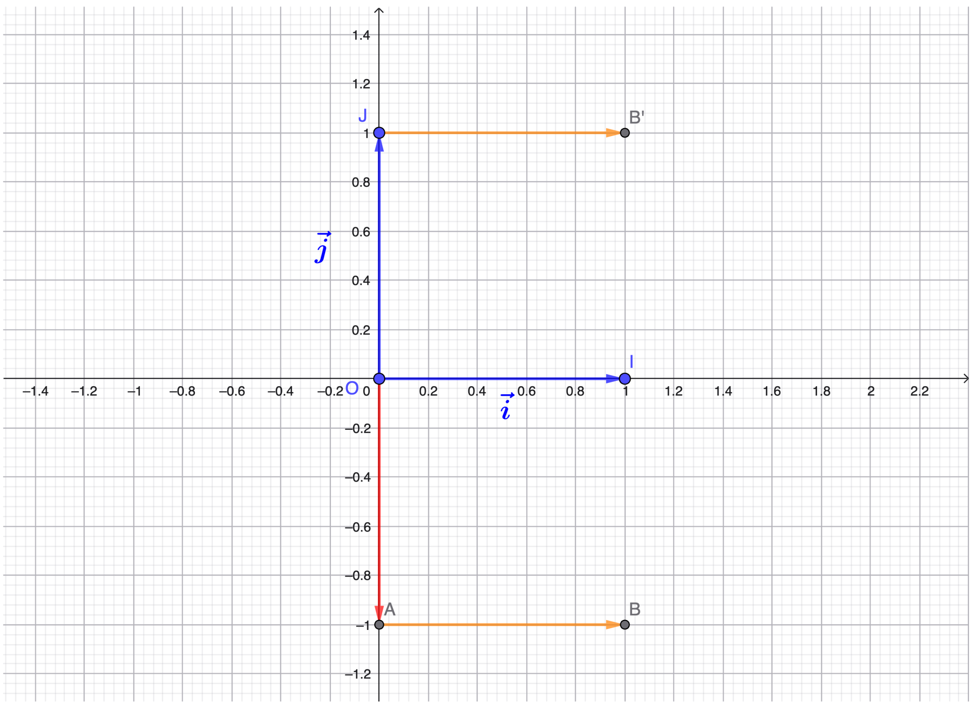
   Voir figure :



5. Solution de l'exercice 37

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(0; -1)$.
   (b) B a pour coordonnées du point $(1; -1)$.
   (c) B' a pour coordonnées du point $(1; 1)$.
   (d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre E.
   Voir figure :



6. Solution de l'exercice 38

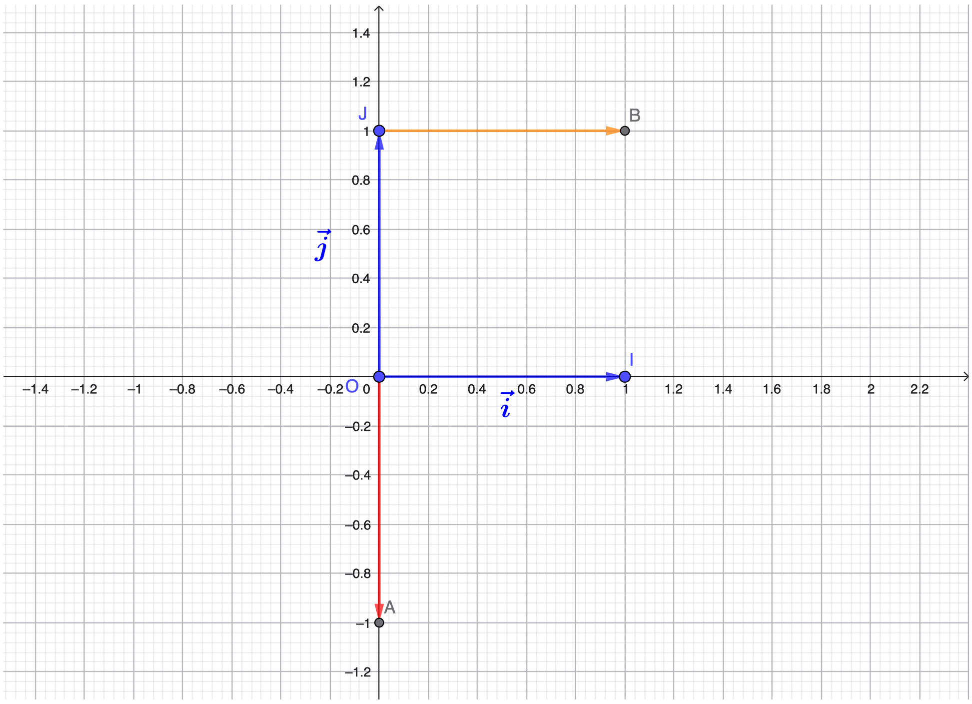
   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(0; -1)$.

   (b) B a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

   (c) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre F.

   Voir figure :



7. Solution de l'exercice 39

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

   (b) B a pour coordonnées du point $(0,5; 1)$.

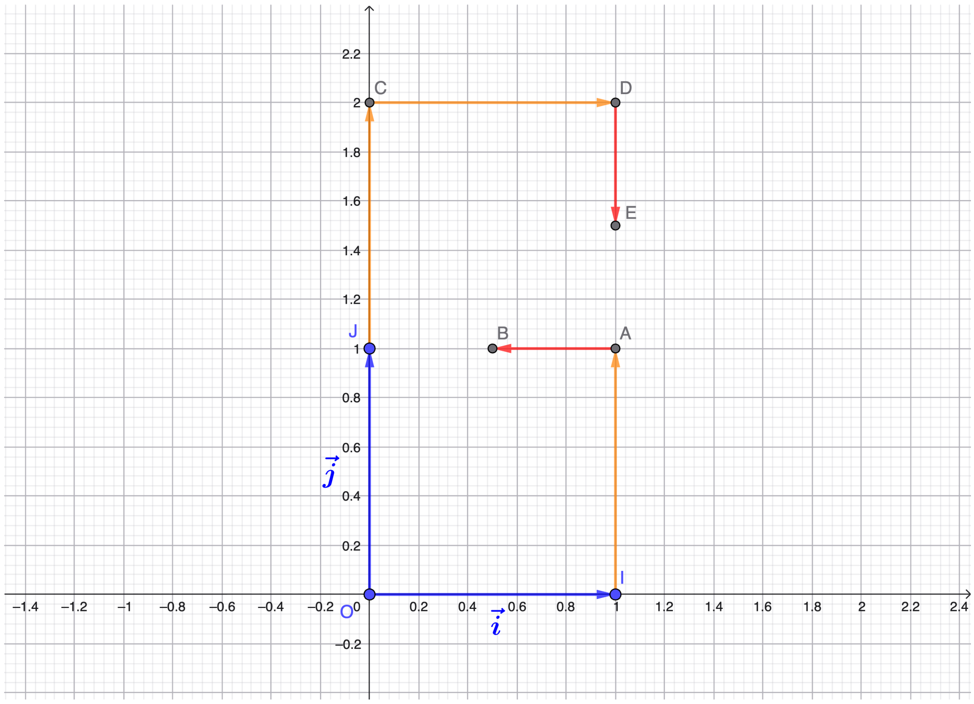
   (c) C a pour coordonnées du point $(0; 2)$.

   (d) D a pour coordonnées du point $(1; 2)$.

   (e) E a pour coordonnées du point $(1; 1,5)$.

   (f) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre G.

   Voir figure :



8. Solution de l'exercice 40

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(0;-1)$.

   (b) B a pour coordonnées du point $(1;-1)$.

   (c) C a pour coordonnées du point $(1;1)$.

   (d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre H.
   Voir figure :

9. Solution de l'exercice 41

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(-1; 0)$.

   (b) B a pour coordonnées du point $(0; 2)$.

   (c) C a pour coordonnées du point $(-1; 2)$.

   (d) D a pour coordonnées du point $(1; 2)$.

   (e) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre I.

   Voir figure :

10. Solution de l'exercice 42

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

   (a) A a pour coordonnées du point $(-1; 0)$.

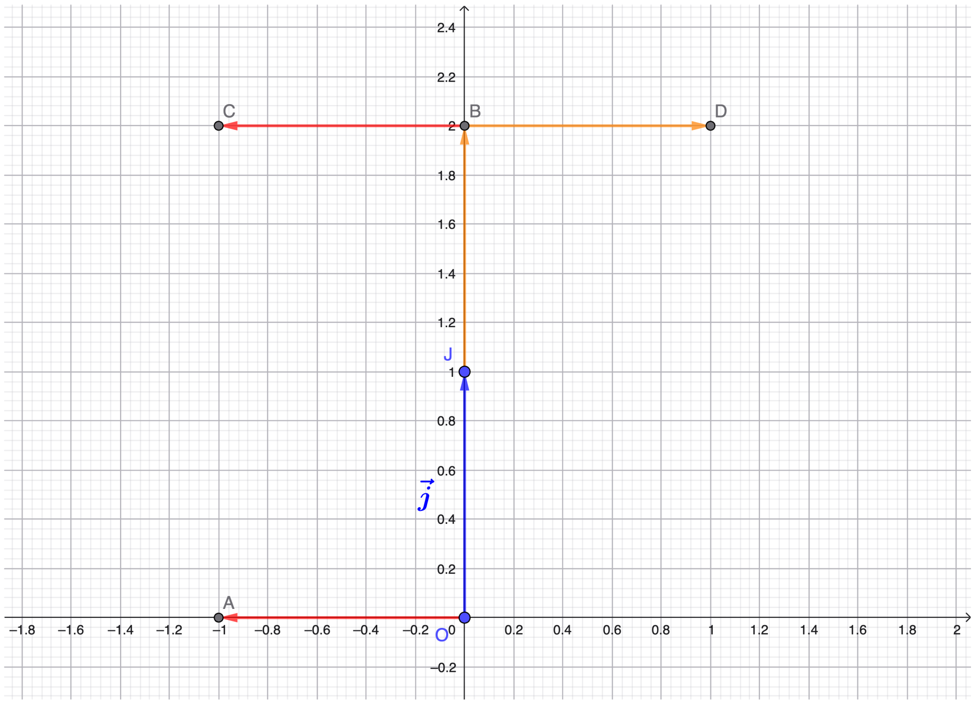
   (b) B a pour coordonnées du point $(0; 2)$.

   (c) C a pour coordonnées du point $(-1; 2)$.

   (d) D a pour coordonnées du point $(1; 2)$.

   (e) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre J.

   Voir figure :



11. Solution de l'exercice 43

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

    (a) A a pour coordonnées du point $(0; 2)$.
    (b) B a pour coordonnées du point $(1; 2)$.
    (c) C a pour coordonnées du point $(1; 0)$
    (d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre K.
        Voir figure :

12. Solution de l'exercice 44

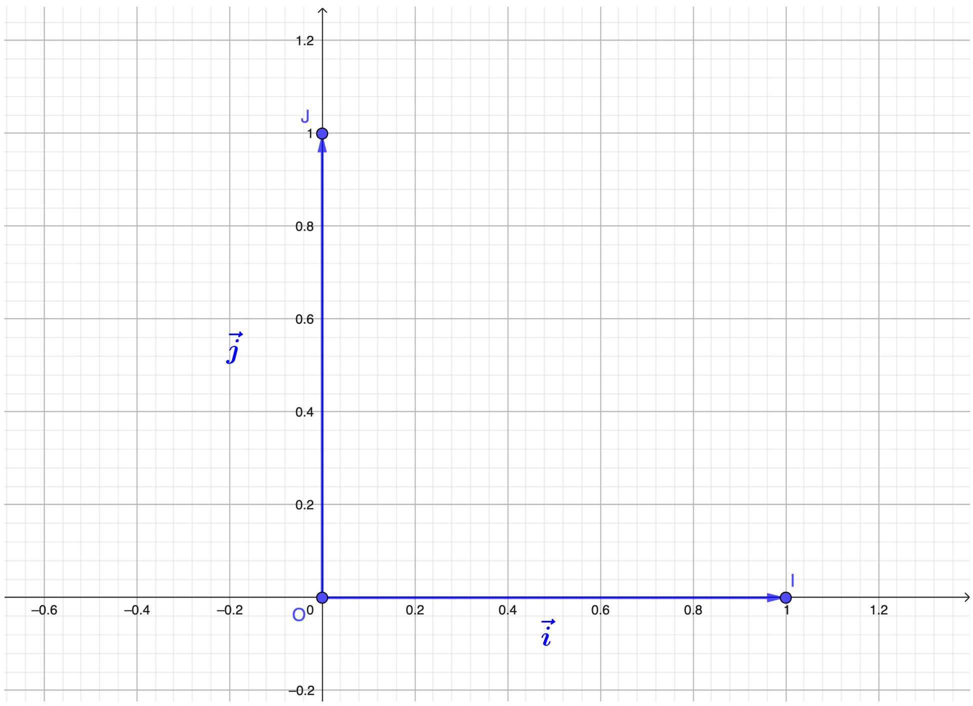
    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

    (a) I a pour coordonnées du point $(1; 0)$.

    (b) J a pour coordonnées du point $(0; 1)$.

    (c) On peut vérifier que $\overrightarrow{OI}$ puis $\overrightarrow{OJ}$ donne bien la lettre L.

    Voir figure :



13. Solution de l'exercice 45

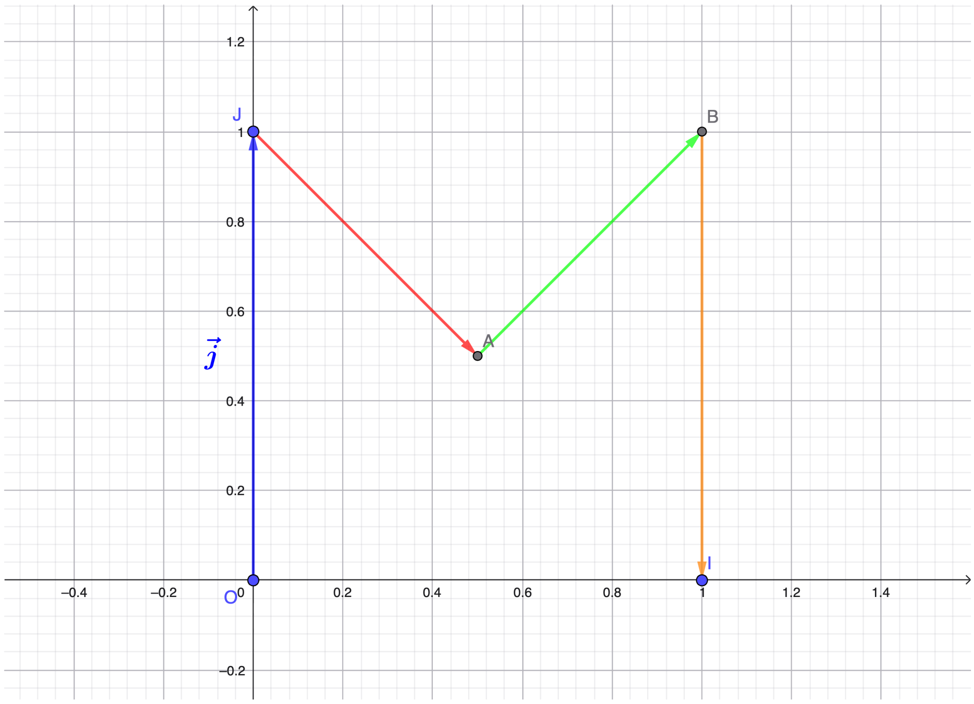
    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

    (a) A a pour coordonnées du point $(0,5; 0,5)$.

    (b) B a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

    (c) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre M.

    Voir figure :

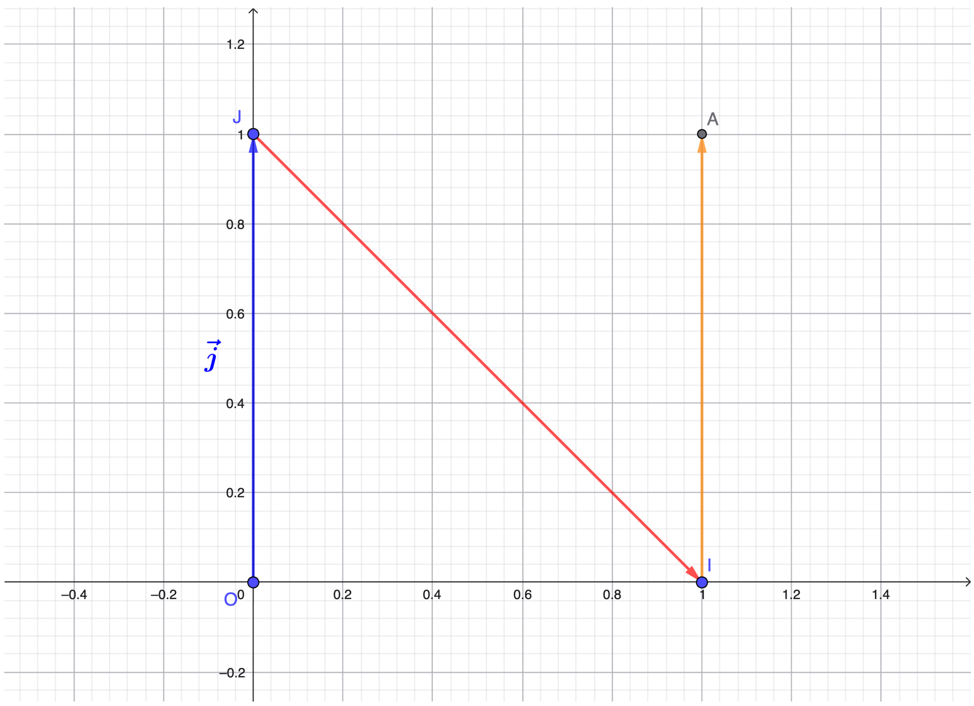


14. Solution de l'exercice 46

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

    (b) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre N.
    Voir figure :



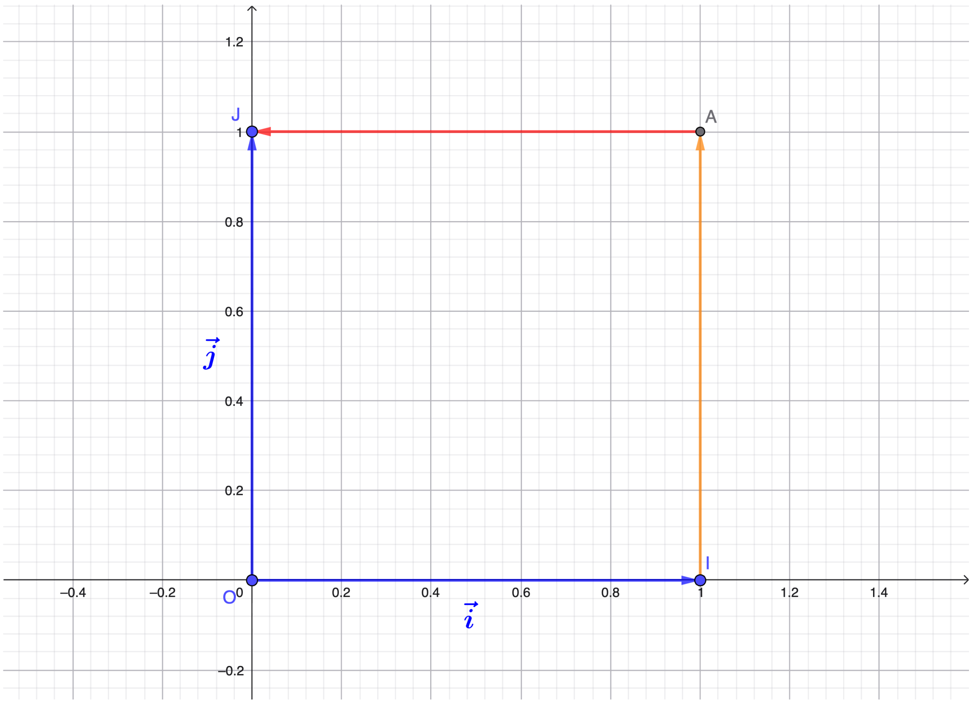
15. Solution de l'exercice 47

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

(b) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre O.

Voir figure :



16. Solution de l'exercice 48

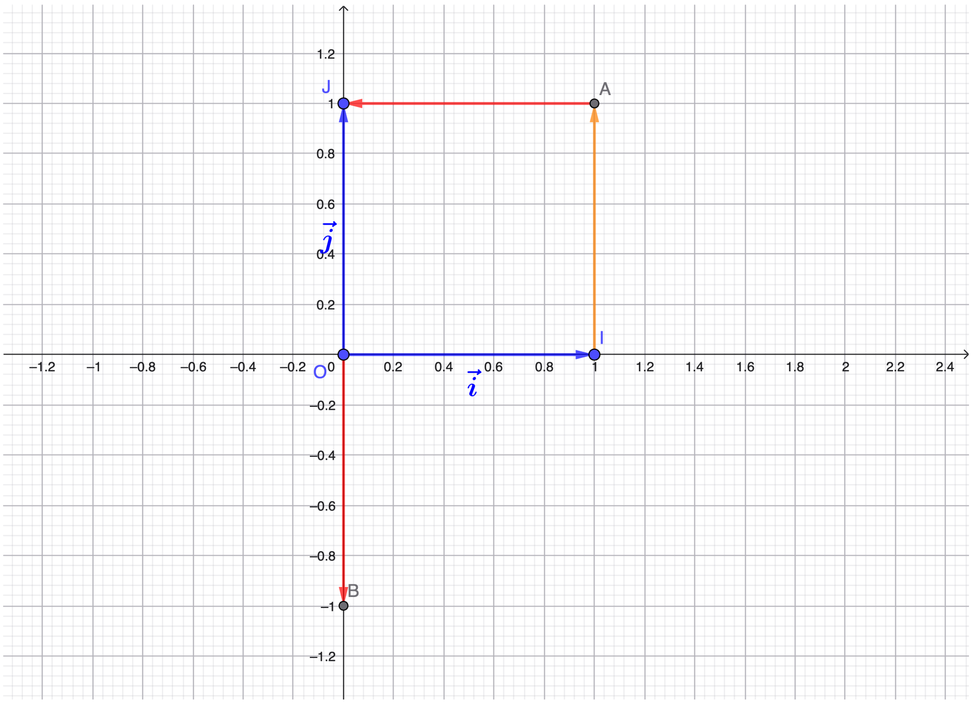
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

(b) B a pour coordonnées du point $(0; -1)$.

(c) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre P.

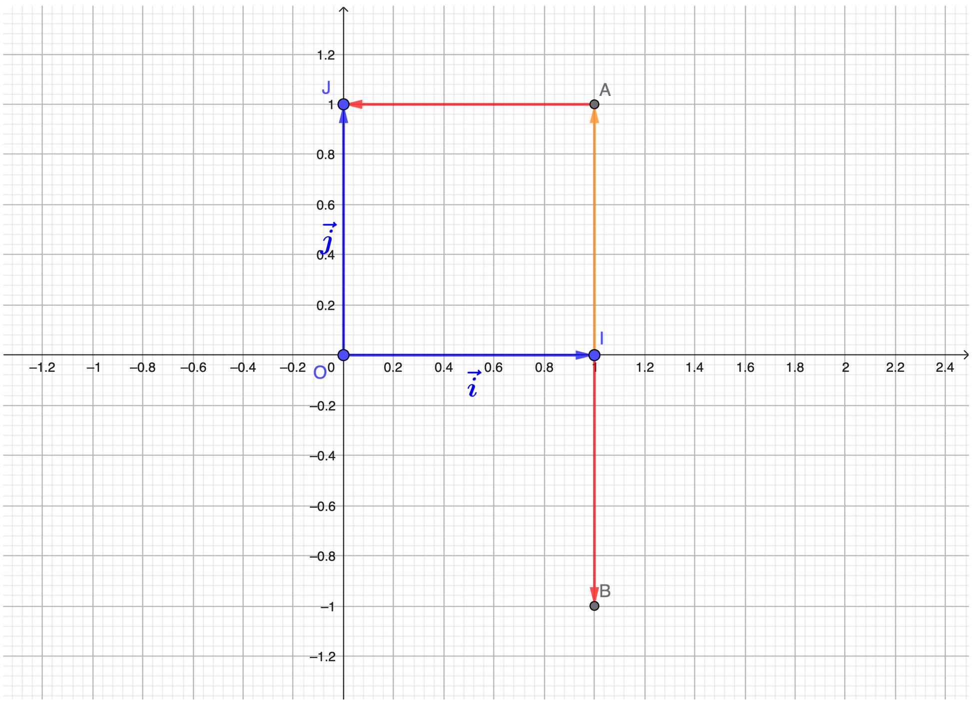
Voir figure :



17. Solution de l'exercice 49

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.
    (b) B a pour coordonnées du point $(1; -1)$.
    (c) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre Q.
    Voir figure :



18. Solution de l'exercice 50

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

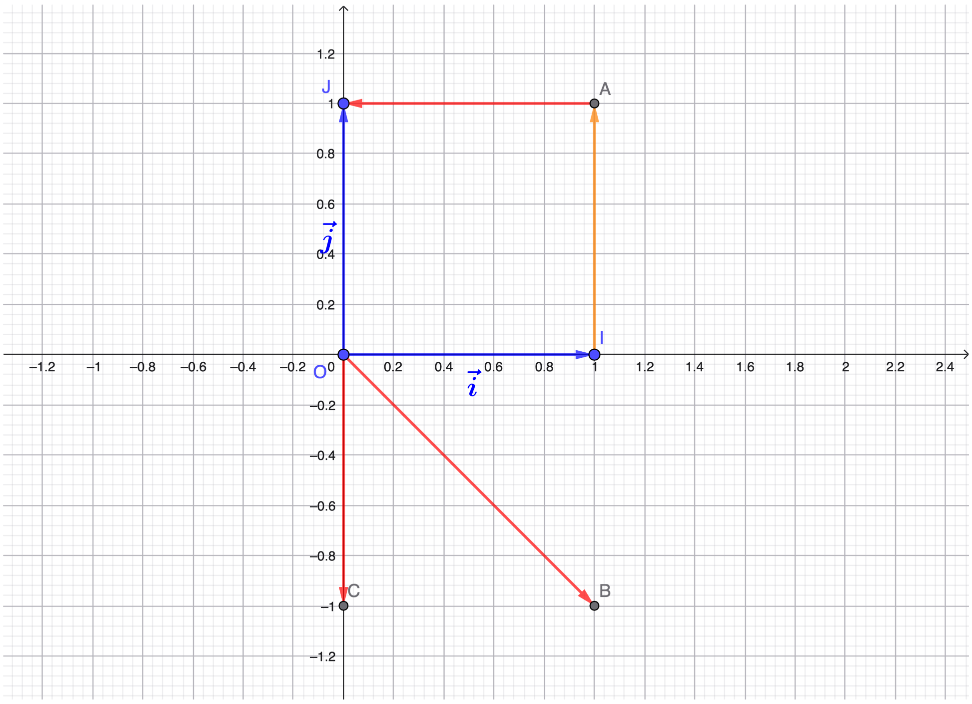
(a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

(b) B a pour coordonnées du point $(1; -1)$.

(c) C a pour coordonnées du point $(0; -1)$.

(d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre R.

Voir figure :



19. Solution de l'exercice 51

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

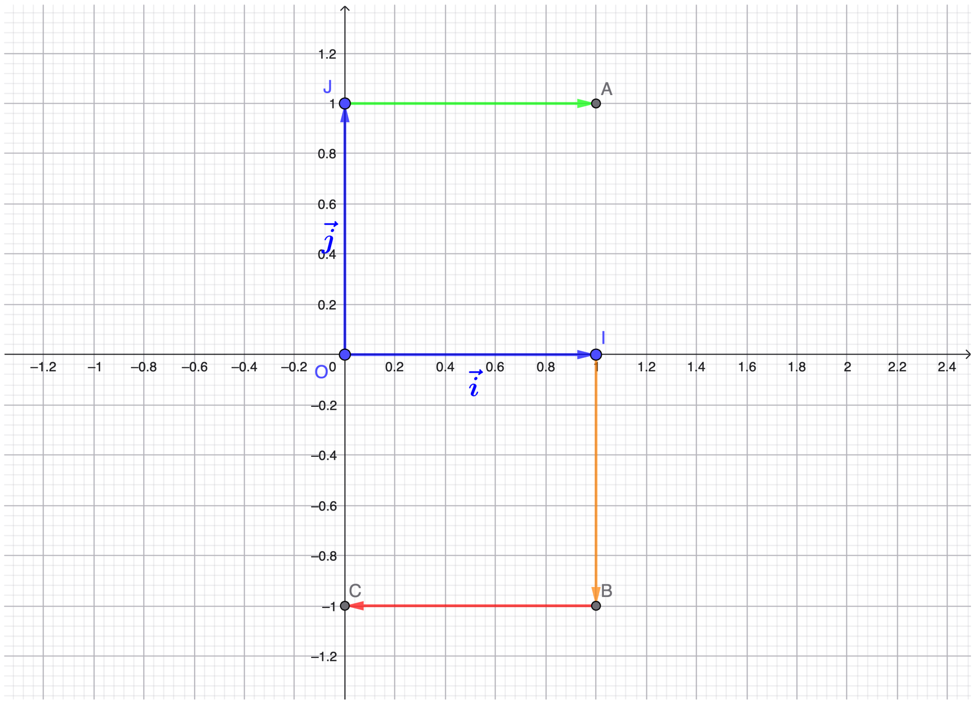
(a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

(b) B a pour coordonnées du point $(1; -1)$.

(c) C a pour coordonnées du point $(0; -1)$.

(d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre S.

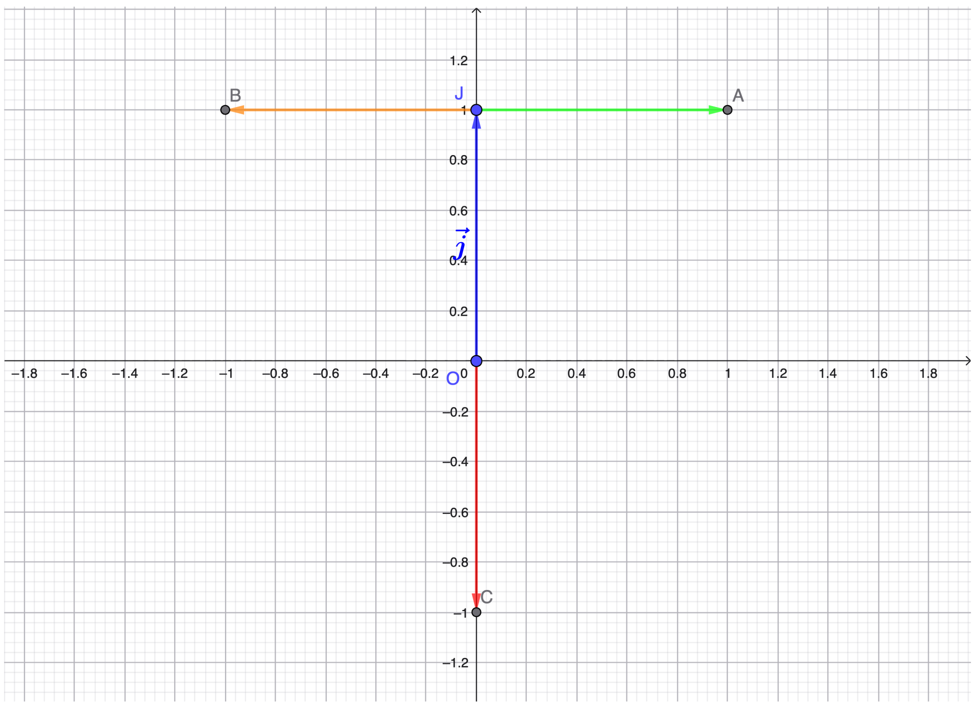
Voir figure :



20. Solution de l'exercice 52

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.
    (b) B a pour coordonnées du point $(-1; 1)$.
    (c) C a pour coordonnées du point $(0; -1)$.
    (d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre T.
    Voir figure :



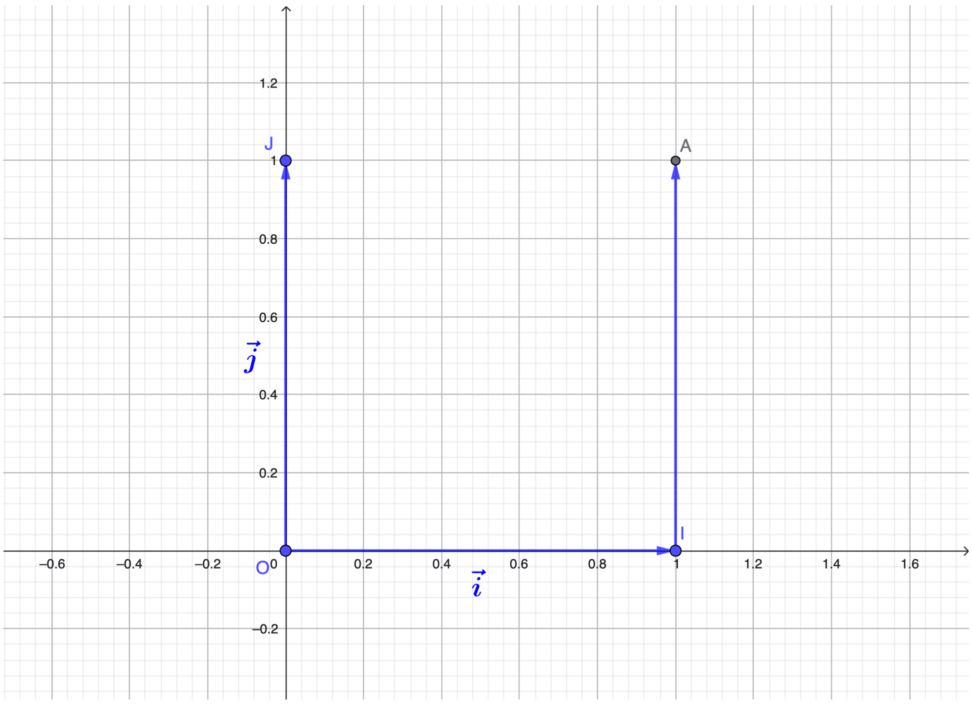
21. Solution de l'exercice 53

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(1; 1)$.

    (b) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre U.

    Voir figure :



22. Solution de l'exercice 54

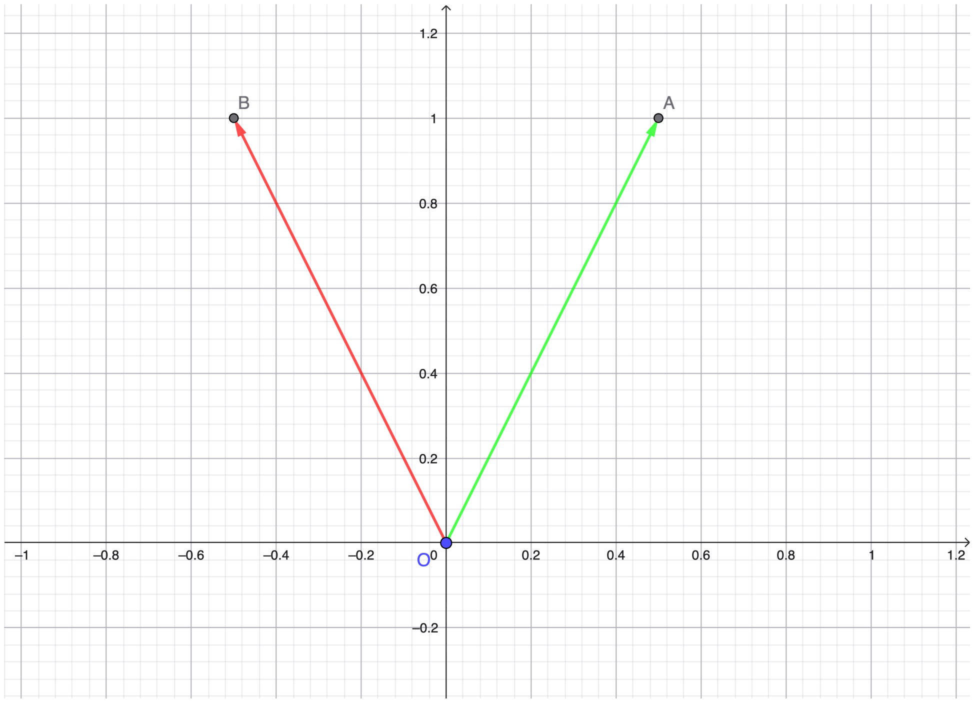
    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(0,5; 1)$.

    (b) B a pour coordonnées du point $(-0,5; 1)$.

    (c) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre V.

    Voir figure :



23. Solution de l'exercice 55

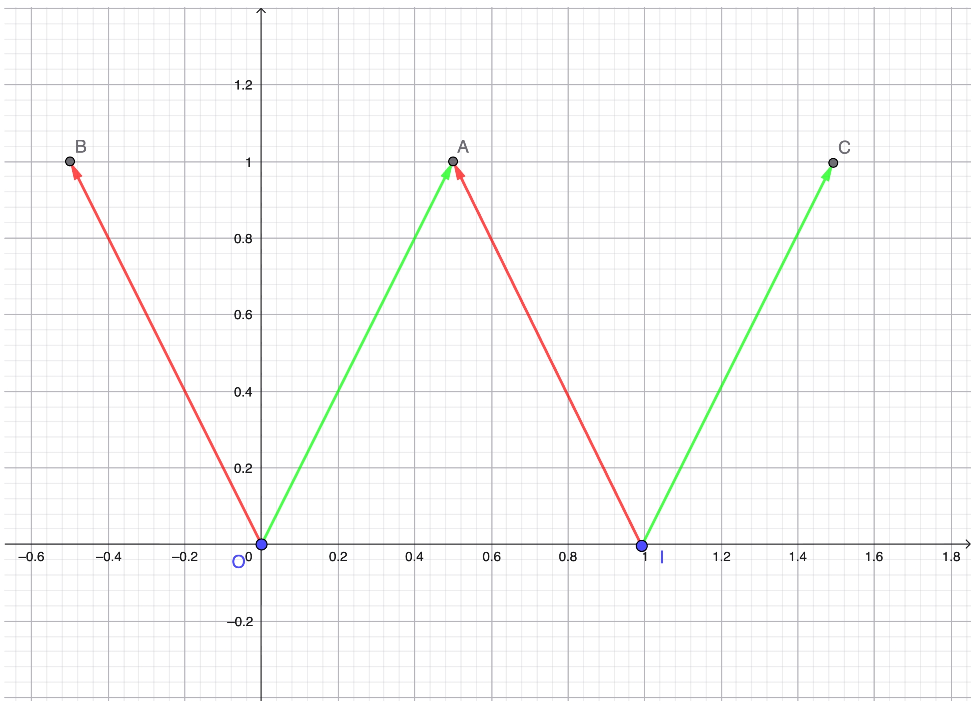
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(a) A a pour coordonnées du point $(0,5;1)$.

(b) B a pour coordonnées du point $(-0,5;1)$.

(c) C a pour coordonnées du point $(1,5;1)$.

(d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre W.
Voir figure :



24. Solution de l'exercice 56

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(0,5;1)$.

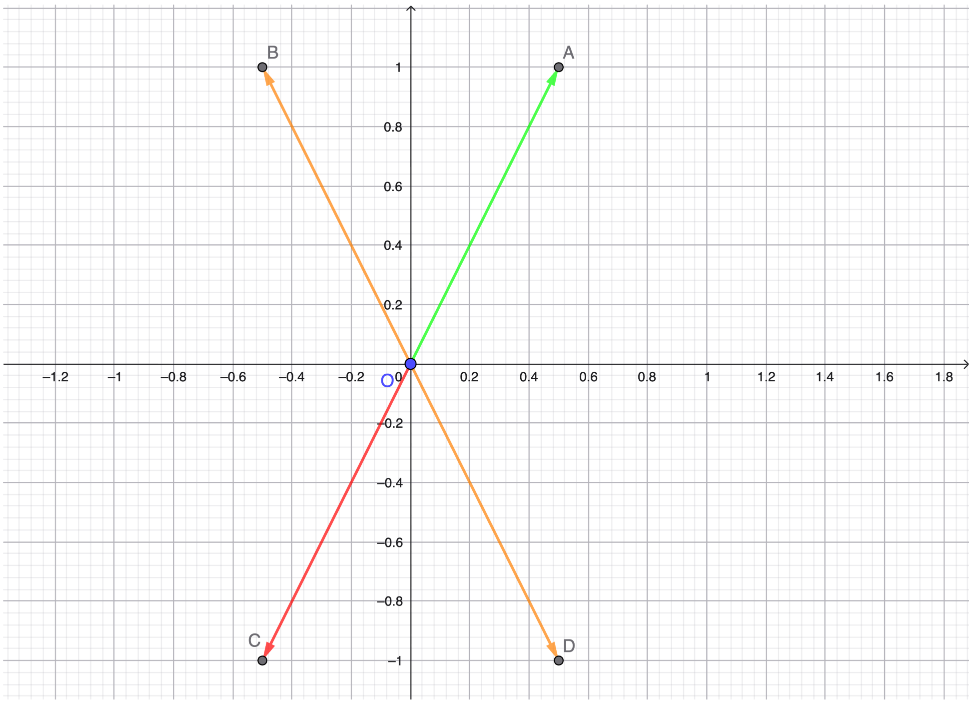
    (b) B a pour coordonnées du point $(-0,5;1)$.

    (c) C a pour coordonnées du point $(-0,5;-1)$.

    (d) D a pour coordonnées du point $(0,5;-1)$.

    (e) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre X.

    Voir figure :



25. Solution de l'exercice 57

    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

    (a) A a pour coordonnées du point $(0,5;1)$.

    (b) B a pour coordonnées du point $(-0,5;1)$.

    (c) C a pour coordonnées du point $(0;-1)$.

    (d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre Y.

    Voir figure :

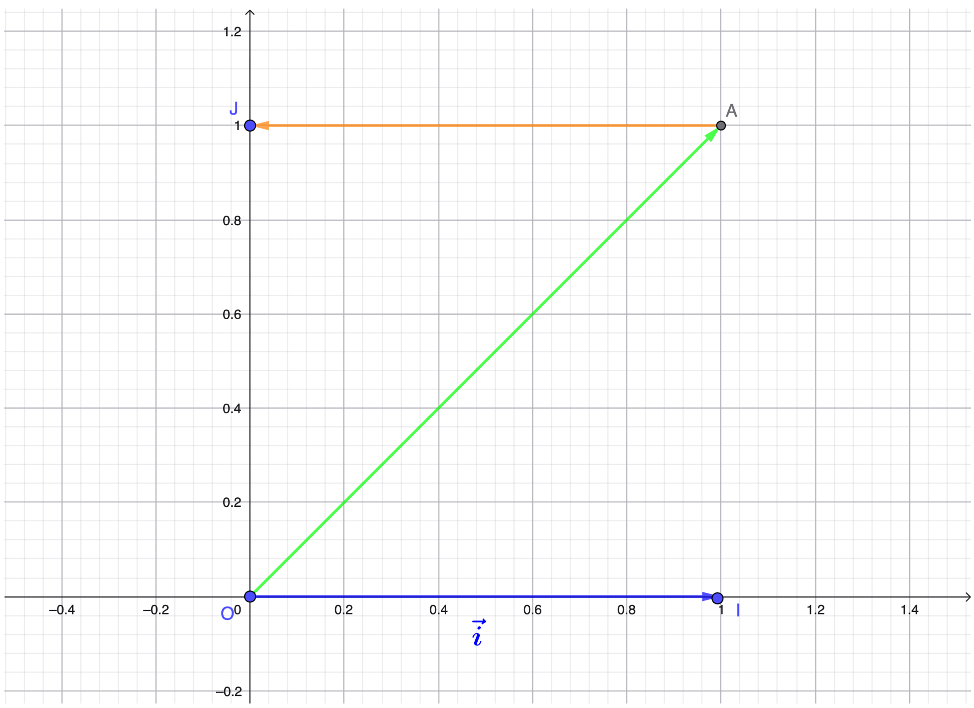
26. Solution de l'exercice 58

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(a) A a pour coordonnées du point $(1;1)$.

(b) On peut vérifier qu'on a bien obtenu la lettre Z.

Voir figure :



16.2 Applications des vecteurs dans la vie réelle

1. Solution de l'exercice 59

   Un drone se déplace selon les vecteurs successifs :

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -30 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_3 \begin{pmatrix} -20 \\ -100 \end{pmatrix}$$

   Pour calculer sa position finale on va ajouter les vecteurs :

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 100 - 30 - 20 \\ 50 + 80 - 100 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

   Si on prend comme origine du repère sa position initiale alors sa position finale sera $(50; 30)$.

   Et pour calculer la distance parcourue au total on va faire la somme des normes :

$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12500} \simeq 111,80$$
$$||\vec{v}_2|| = \sqrt{(-30)^2 + 80^2} = \sqrt{7300} \simeq 85,44$$
$$||\vec{v}_3|| = \sqrt{(-20)^2 + (-100)^2} = \sqrt{10400} \simeq 101,98$$

   Donc la distance totale parcourue est d'environ 299,22 unités de mesure.

2. Solution de l'exercice 60

   On considère un échiquier standard comme celui sur la figure ci-dessous :

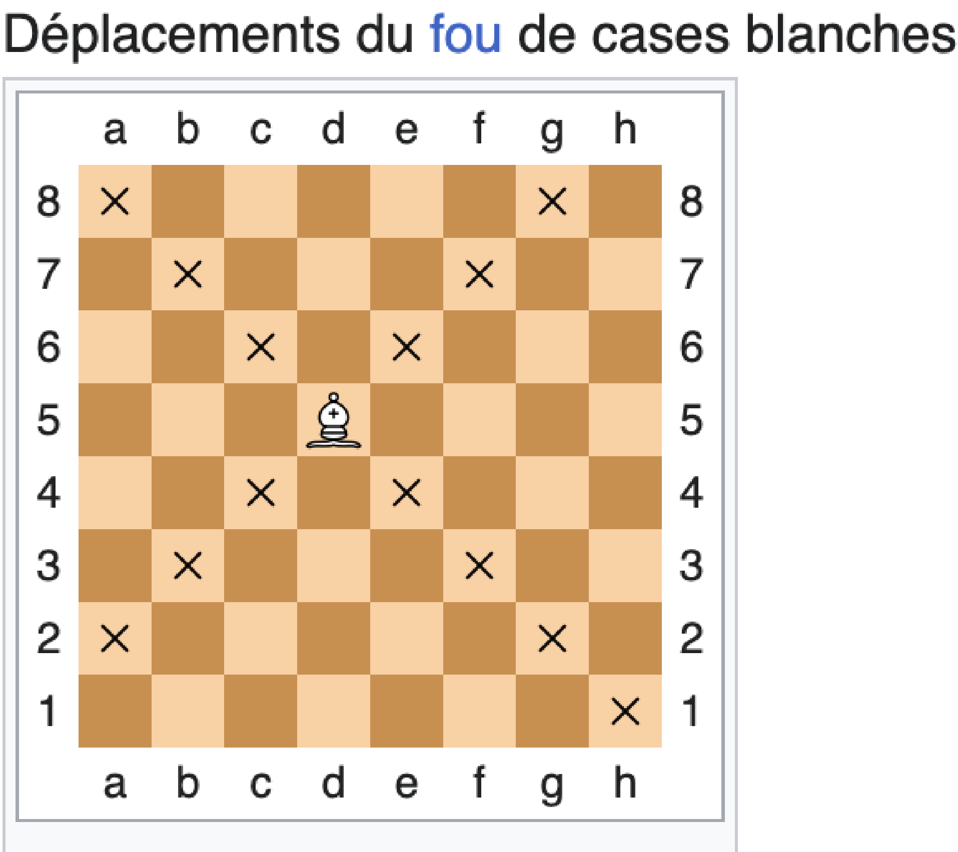
L'échiquier est traditionnellement codé avec les lettres de a à h pour indiquer la position horizontale et les nombres de 1 à 8 pour indiquer la position verticale.

De cette façon le codage a1 correspond à la case en bas à gauche et le codage h8 à la case en haut à droite.

Afin de rendre cette représentation utilisable dans le cadre vectoriel conforme à la classe de seconde on va considérer que l'origine du repère sera la case a1 qu'on identifiera à O.

De même, le vecteur $\vec{i}$ est identifié à la translation de a1 vers b1 et le vecteur $\vec{j}$ à celle de a1 vers a2.

Considérons les déplacements possibles du fou blanc comme indiqué sur la photo ci-dessous :



(a) Le déplacement de la case h1 vers la case a8 (appelée aussi anti-diagonale ou seconde diagonale) correspond à 8 déplacements vers la gauche et 8 déplacement vert le haut d'où le résultat :

$$\vec{v}_1 = 8(\vec{j} - \vec{i}) = 8\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calcul de la norme de ce vecteur

$$||\vec{v}_1|| = 8\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 8\sqrt{2}$$

(c) Le déplacement selon la diagonale a1 vers h8 correspond à 8 déplacements vers la droite et

8 vers le haut d'où les résultats :

$$\vec{v}_2 = 8(\vec{i} + \vec{j}) = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_2|| = 8\sqrt{1^2 + 1^2} = 8\sqrt{2}$$

(d) Le déplacement de la case a2 et finissant à la case g8 correspond à 6 déplacements vers la droite et 6 vers le vaut :

$$\vec{v}_3 = 6(\vec{i} + \vec{j}) = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_3|| = 6\sqrt{1^2 + 1^2} = 6\sqrt{2}$$

(e) Le déplacement de la case a3 et finissant à la case f8 correspond à 5 déplacements vers la droite et 5 vers le vaut :

$$\vec{v}_4 = 5(\vec{i} + \vec{j}) = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_4|| = 5\sqrt{1^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

(f) Le déplacement qui part de a4 et termine en e8 correspond à 4 déplacements vers la droite et 4 vers le vaut :

$$\vec{v}_5 = 4(\vec{i} + \vec{j}) = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_5|| = 4\sqrt{1^2 + 1^2} = 4\sqrt{2}$$

(g) Le déplacement qui part de a5 et termine en d8 correspond à 3 déplacements vers la droite et 3 vers le vaut :

$$\vec{v}_6 = 3(\vec{i} + \vec{j}) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_6|| = 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

(h) Le déplacement qui commence en a6 et finit en c8 correspond à 2 déplacements vers la droite et 2 vers le vaut :

$$\vec{v}_7 = 2(\vec{i} + \vec{j}) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_7|| = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

(i) Le déplacement qui commence en a7 et finit en b8 correspond à 1 déplacement vers la droite et 1 vers le vaut :

$$\vec{v}_8 = \vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_8|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

(j) Le déplacement qui commence en a8 et finit en a8 correspond à 0 déplacements vers la droite et 0 vers le vaut :

$$\vec{v}_9 = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$||\vec{v}_9|| = 0$$

(k) Si on souhaite généraliser les déplacements du fou en programmant un seul vecteur du type : $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ avec

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

et

$$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

les vecteurs de la base canonique, alors les valeurs possibles pour les nombres a et b sont les entiers entre 0 et 8 avec 0 pour l'absence de déplacement et 8 pour le déplacement maximal.

3. Solution de l'exercice 61

Un projectile est lancé depuis O(0 ;0) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de coordonnées $\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}$ m/s.

La gravité exerce une accélération constante $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$ m/s².

Après 1 seconde, la vitesse devient $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}$.

(a) Calcul des coordonnées de $\vec{v}_1$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \vec{g}\\
\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\\
\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix}20+0\\30+(-10)\end{pmatrix}\\
\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Calcul de la norme de $\vec{v}_1$ (vitesse en m/s) :

$$\begin{aligned}
||\vec{v}_1|| &= \sqrt{20^2+20^2}\\
||\vec{v}_1|| &= 20\sqrt{2} \simeq 28,28
\end{aligned}$$

(c) La position après 1s est $\vec{p}_1 = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}$. Calcul des coordonnées du point P_1 :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}\\
\vec{p}_1 &= \begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\\
\vec{p}_1 &= \begin{pmatrix}20+\frac{1}{2}\times 0\\30+\frac{1}{2}(-10)\end{pmatrix}\\
\vec{p}_1 &= \begin{pmatrix}20\\25\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le point P_1 a pour coordonnées $(20; 25)$.

(d) Après combien de temps le projectile retombe-t-il au sol (y=0) ?

Image Bitmap (PNG) **Image Vectorielle (SVG)**

40 000 pixels pour 200×200 3 points + 2 vecteurs

FIG. 16.1 : Différence entre image bitmap et image vectorielle

4. Solution de l'exercice 62 : Images vectorielles vs images bitmap

   Les images numériques peuvent être de deux types : **bitmap** (aussi appelées matricielles ou raster) ou **vectorielles**.

   - Une image bitmap (JPEG, PNG, GIF) est constituée d'une grille de pixels. Chaque pixel a une couleur définie. Si on agrandit l'image, elle devient floue et pixelisée.
   - Une image vectorielle (SVG, PDF vectoriel) est constituée de formules mathématiques décrivant des formes géométriques (lignes, courbes, polygones). On peut l'agrandir infiniment sans perte de qualité.

   Réponses :

   (a) Dans un logiciel de dessin vectoriel, on trace un segment de A(100 ; 150) à B(300 ; 450). Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

   $$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{AB}} &= x_B - x_A = 300 - 100 = 200 \\ y_{\overrightarrow{AB}} &= y_B - y_A = 450 - 150 = 300 \\ \overrightarrow{AB} &\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (b) Pour afficher ce segment à l'écran, l'ordinateur calcule sa longueur. Calcul de la norme :

   $$\begin{aligned} ||\overrightarrow{AB}|| = AB &= \sqrt{200^2 + 300^2} \\ AB &= \sqrt{200000} = \sqrt{4 \times 10^4 \times 5} = 200\sqrt{5} \\ AB &\simeq 447 \end{aligned}$$

   (c) L'utilisateur applique un zoom ×2 (homothétie de rapport 2 centrée à l'origine). Les nouvelles coordonnées de A' et B' sont $A'(200; 300)$ et $B'(600; 900)$.

   (d) Pour savoir si le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ on va calculer ses coordonnées puis les comparer :

   $$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{A'B'}} &= x_{B'} - x_{A'} = 600 - 200 = 400 \\ y_{\overrightarrow{A'B'}} &= y_{B'} - y_{A'} = 900 - 300 = 600 \\ \overrightarrow{A'B'} &\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{A'B'} &= 2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Les vecteurs sont clairement colinéaires.

(e) La longueur du segment [A'B'] après le zoom est 2 fois celle du segement [AB] avant le zoom. Concrètement :

$$A'B' = 2AB = 400\sqrt{5} \simeq 894$$

(f) Une image bitmap est composée d'une grille fixe de pixels donc lorsque l'image est agrandie le logiciel doit faire une sorte de moyenne et perd donc de l'information donc de la qualité visuelle. A contrario, une image vectorielle est définie par des formules mathématiques permettant de construire les objets grâce à leurs coordonnées. À chaque affichage ou agrandissement le logiciel recalcule les nouvelles coordonnées ce qui ajuste SANS perte d'information la forme des objets affichés avec les bonnes coordonnées.

Note : Les formats SVG (Scalable Vector Graphics) et PDF utilisent exactement ces principes mathématiques. C'est pourquoi les logos d'entreprises, icônes d'applications, et schémas techniques sont toujours créés en vectoriel !

5. Solution de l'exercice 63 : Décoder un fichier SVG

Le format SVG (Scalable Vector Graphics) est un format d'image vectorielle basé sur du code XML. Voici un extrait simplifié d'un fichier SVG :

```
<svg
    width="500"
    height="400">
  <line
      x1="50" y1="100"
      x2="200" y2="250"
      stroke="blue" />
  <line
      x1="200" y2="250"
      x2="350" y2="100"
      stroke="red" />
  <circle
      cx="200" cy="175"
      r="80" fill="none"
      stroke="green" />
</svg>
```

Ce code décrit :

- Une ligne bleue du point A(50 ; 100) au point B(200 ; 250)
- Une ligne rouge du point B(200 ; 250) au point C(350 ; 100)
- Un cercle vert de centre O(200 ; 175) et de rayon 80 pixels

Attention : En SVG, l'axe des ordonnées est **inversé** par rapport au repère mathématique classique (l'origine est en haut à gauche, y augmente vers le bas).

Réponses :

(a) Calcul des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère SVG :

$$\begin{aligned}
x_{\overrightarrow{AB}} &= x_B - x_A = 200 - 50 = 150 \\
y_{\overrightarrow{AB}} &= y_B - y_A = 250 - 100 = 150 \\
\overrightarrow{AB} &\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix} \\
x_{\overrightarrow{BC}} &= x_C - x_B = 350 - 200 = 150 \\
y_{\overrightarrow{BC}} &= y_C - y_B = 100 - 250 = -150 \\
\overrightarrow{BC} &\begin{pmatrix} 150 \\ -150 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Pour savoir si les points A, B, C sont alignés on va calculer le déterminant :

$$\begin{aligned}
det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix} 150 & 150 \\ 150 & -150 \end{vmatrix} \\
det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) &= 150 \times (-150) - 150 \times 150 = -2 \times 150^2 \\
det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) &\neq 0
\end{aligned}$$

Le déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés. En fait, on pouvait le voir directement sur les coordonnées puisqu'ils ont la même abscisse mais des ordonnées opposées (ils sont donc orthogonaux).

(c) Le triangle ABC est rectangle en B. En effet :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (350 - 50)^2 + (100 - 100)^2 \\
AC^2 &= 300^2 \\
AB^2 + BC^2 &= 150^2 + 150^2 + 150^2 + (-150)^2 = 4 \times 150^2 \\
AB^2 + BC^2 &= 2^2 \times 150^2 = (2 \times 150)^2 = 300^2
\end{aligned}$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée pour l'hypoténuse AC.

(d) Pour savoir si le centre O du cercle appartient au segment [AC] on va calculer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ et le comparer avec le vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
x_{\overrightarrow{AO}} &= x_O - x_A = 200 - 50 = 150 \\
y_{\overrightarrow{AO}} &= y_O - y_A = 175 - 100 = 75 \\
\overrightarrow{AO} &\begin{pmatrix} 150 \\ 75 \end{pmatrix} \\
x_{\overrightarrow{AC}} &= x_C - x_A = 350 - 50 = 300 \\
y_{\overrightarrow{AC}} &= y_C - y_A = 100 - 100 = 0 \\
\overrightarrow{AC} &\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur horizontal (son ordonnée est nulle) alors que ce n'est pas le cas pour $\overrightarrow{AO}$ (le calcul de leur déterminant est non nul). Par conséquent le centre O du cercle n'appartient pas au segment [AC].

(e) **Défi** : Écrivons le code SVG d'un carré DEFG de côté 100 pixels avec $D(100;100)$ comme sommet en haut à gauche. Avant d'écrire le code précisons que puisque le point D est en haut à gauche et que l'axe des ordonnées est inversé (un écran défile du haut vers le bas) alors pour descendre de 100 unités sur les ordonnées il faut donc ajouter 100 ce qui nous amène au point $E(100;200)$. Ensuite pour aller vers la droite ça ne change pas donc on obtient le point $F(200;200)$. Et maintenant pour remonter sur les ordonnées on retire 100 unités d'où $G(200;100)$.

```
<svg
 width="500"
 height="400">
 <line
   x1="100" y1="100"
   x2="100" y2="200"
   stroke="green" />
 <line
   x1="100" y2="200"
   x2="200" y2="200"
   stroke="green" />
  <line
   x1="200" y2="200"
   x2="200" y2="100"
   stroke="green" />
  <line
   x1="200" y2="100"
   x2="100" y2="100"
   stroke="green" />
</svg>
```

Explications :

- Une ligne verte du point $D(100;100)$ au point $E(100;200)$
- Une ligne verte du point $E(100;200)$ au point $F(200;200)$
- Une ligne verte du point $F(200;200)$ au point $G(200;100)$
- Une ligne verte du point $G(200;100)$ au point $D(100;100)$

Pour aller plus loin : Ouvrez un fichier .svg avec un éditeur de texte (Bloc-notes, TextEdit) et observez le code. Vous verrez des vecteurs partout !

6. Solution de l'exercice 64 : Pourquoi les PDF sont-ils vectoriels ?

Un fichier PDF peut contenir du texte, des images et des graphiques. Le texte et les graphiques sont généralement stockés sous forme **vectorielle**.

Prenons l'exemple de la lettre "A" :

- Dans une image bitmap (photo), le "A" est une grille de pixels noirs et blancs
- Dans un PDF vectoriel, le "A" est décrit par ses contours : deux segments obliques et un segment horizontal

Situation : Un *designer* (graphiste en bon français) crée un logo avec la lettre "V" formée par deux segments :

- Segment 1 : de O(0 ; 100) à M(50 ; 0)

- Segment 2 : de M(50 ; 0) à N(100 ; 100)

Questions :

(a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MN}$:

$$x_M - x_O = 50 - 0 = 50$$
$$y_M - y_O = 0 - 100 = -100$$
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 50 \\ -100 \end{pmatrix}$$
$$x_N - x_M = 100 - 50 = 50$$
$$y_N - y_M = 100 - 0 = 100$$
$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 50 \\ -100 \end{pmatrix}$$

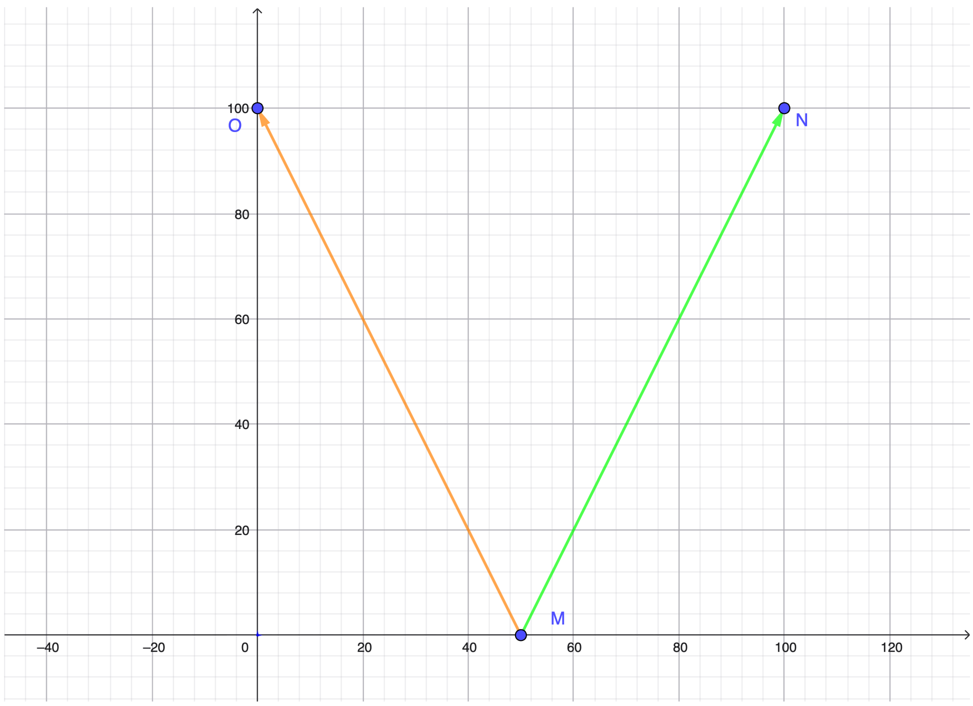
(b) Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car ils ont la même abscisse mais des ordonnées opposées. On peut en déduire que la forme de la lettre "V" est bien respectée.

(c) Calcul des normes $\|\overrightarrow{OM}\|$ et $\|\overrightarrow{MN}\|$:

$$OM = \sqrt{50^2 + (-100)^2} = \sqrt{12500} = 50\sqrt{5} \simeq 111,80$$
$$MN = \sqrt{50^2 + 100^2} = \sqrt{12500} = 50\sqrt{5} \simeq 111,80$$

La lettre "V" est symétrique car les vecteurs ont la même norme donc le triangle est isocèle en M où passe l'axe de symétrie.

Voir figure :



(d) Le *designer* (graphiste en bon français) applique une transformation : tous les points sont multipliés par 2. Calculs des nouvelles coordonnées de O', M', N' :

$$
\begin{aligned}
x_{O'} &= 2 \times x_O = 0 & y_{O'} &= 2 \times y_O = 200 \\
x_{M'} &= 2 \times x_M = 100 & y_{M'} &= 2 \times y_M = 0 \\
x_{N'} &= 2 \times x_N = 200 & y_{N'} &= 2 \times y_N = 200
\end{aligned}
$$

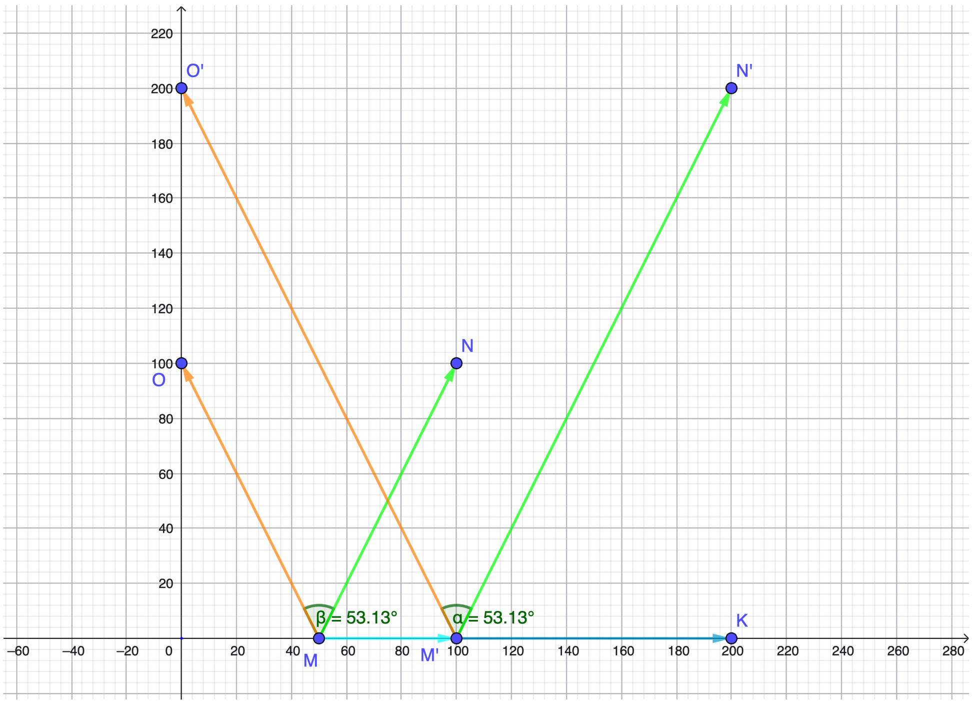
(e) Les segments [O'M'] et [M'N'] conservent les mêmes angles que [OM] et [MN] car les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M'}$ sont colinéaires et les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont également colinéaires. Ainsi puisque les droites (OM) et (O'M') sont parallèles les angles correspondants sont égaux :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{MO}) = (\vec{i}, \overrightarrow{M'O'})$$

Idem pour les droites (MN) et (M'N') avec leurs angles correspondants :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{MN}) = (\vec{i}, \overrightarrow{M'N'})$$

Voir figure :



(f) **Application** : un agrandissement ou une réduction revient simplement à multiplier les vecteurs par un nombre réel et par conséquent chaque vecteur est transformé en un vecteur colinéaire contrairement aux photos qui elles stockent des pixels fixes et non des déplacements vectoriels.

À retenir : Quand vous convertissez un document Word en PDF, tout le texte est transformé en vecteurs. C'est pour ça qu'on peut zoomer sans pixelisation !

7. Solution de l'exercice 65 : Bitmap vs Vectoriel - Étude comparative

On souhaite créer un logo carré de 200×200 pixels pour une application mobile.

Méthode 1 : Image bitmap (PNG)

- Le logo est une grille de 200×200 = 40 000 pixels

- Chaque pixel stocke sa couleur (3 octets RGB)
- Taille du fichier : ≈ 120 Ko (avec compression)
- Si on agrandit à 400×400, il faut recalculer 160 000 pixels par interpolation ⟶ image floue

Méthode 2 : Image vectorielle (SVG)

- Le logo est décrit par 4 segments formant un carré
- Stockage : 4 vecteurs avec leurs coordonnées
- Taille du fichier : ≈ 1 Ko
- Si on agrandit, on multiplie simplement les coordonnées par 2 ⟶ image parfaitement nette

Réponses :

(a) Un carré vectoriel a pour sommets A(0 ;0), B(200 ;0), C(200 ;200), D(0 ;200). Donnons les coordonnées des 4 vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}200\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\200\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-200\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\-200\end{pmatrix}$$

(b) On applique un zoom ×3. Calculons les nouvelles coordonnées des 4 sommets : A(0 ; 0), B(600 ; 0), C(600 ; 600), D(0 ; 600).

(c) Calculons le périmètre du carré initial et du carré agrandi :

$$P_0 = 4 \times 200 = 800$$
$$P_1 = 4 \times 600 = 2400$$

On peut vérifier que le rapport est bien 3.

(d) **Calcul de taille** :

i. Bitmap : dans l'image agrandie on a $600 \times 600 = 3600$ pixels.

ii. Vectoriel : dans l'image agrandie on a toujours 4 vecteurs.

Conclusion : Les vecteurs que vous apprenez en seconde sont utilisés quotidiennement par des millions d'ordinateurs, smartphones et imprimantes pour afficher des textes, logos, icônes et graphiques !

8. Solution de l'exercice 66 : Créer une icône vectorielle (Projet)

Les icônes d'applications sur smartphone sont toujours créées en vectoriel pour s'adapter aux différentes tailles d'écran (iPhone, iPad, etc.).

Projet : Créer l'icône ⍰ (éclair) en utilisant uniquement des vecteurs.

Étape 1 : Conception On dessine l'éclair avec 7 points :

- A(100 ; 0) [sommet haut]
- B(60 ; 80)
- C(80 ; 80)
- D(40 ; 200) [sommet bas]
- E(80 ; 120)

- F(60 ; 120)
- G(100 ; 0) [retour au début]

Questions :

(a) Calcul des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-40\\80\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-40\\120\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}40\\-80\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-20\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}40\\-120\end{pmatrix}$$

(b) Vérifions que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\vec{0}$.
En appliquant la relation de Chasles on obtient le vecteur $\overrightarrow{AG}$ or les points A et G sont confondus d'où le résultat.

(a) Pour passer de 200 à 32 il faut diviser par 25 et multiplier par 4 d'où le facteur d'homothétie $k_1 = \dfrac{4}{25} = 0,16$. Pour passer de 200 à 64 il faut diviser par 25 et multiplier 8 d'où le facteur d'homothétie $k_2 = \dfrac{8}{25} = 0,32$. Pour passer de 200 à 128 il faut diviser par 25 et multiplier 16 d'où le facteur d'homothétie $k_3 = \dfrac{16}{25} = 0,64$.

Pour aller plus loin : Les *designers* (graphistes en bon français) utilisent des logiciels comme Adobe Illustrator, Inkscape (gratuit), ou Figma pour créer des images vectorielles. Tous ces outils manipulent des vecteurs mathématiques en arrière-plan !

16.3 Chiffres

1. Solution de l'exercice 67

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

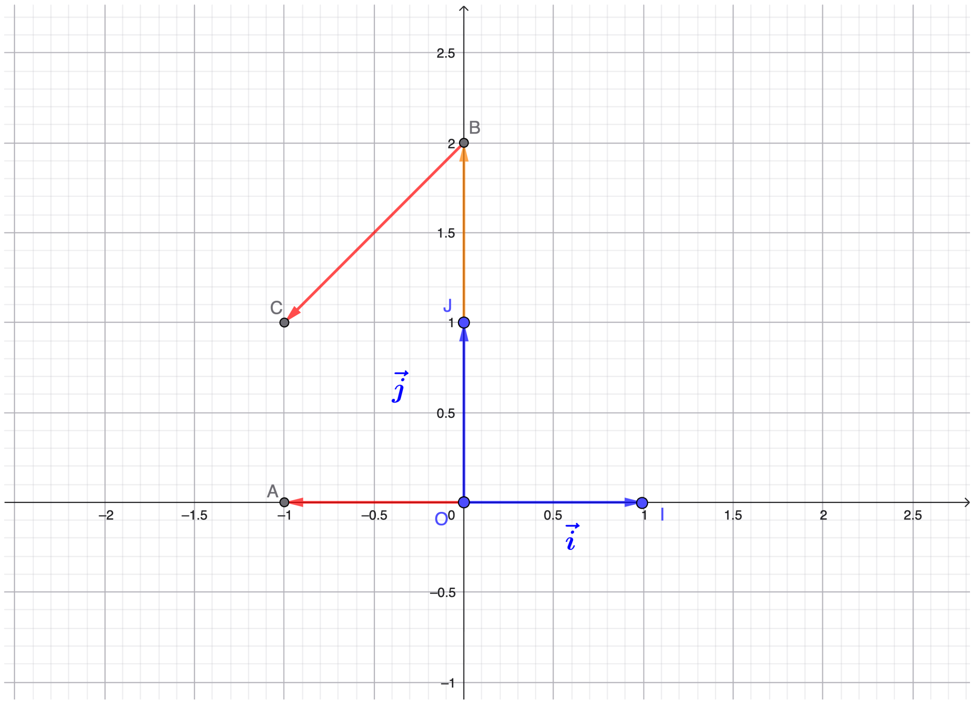
$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

(a) Le point A a pour coordonnées $(-1;0)$.

(b) Le point B a pour coordonnées $(0;2)$.

(c) Le point C a pour coordonnées $(-1;1)$.

(d) On peut vérifier qu'on a bien obtenu le chiffre 1.
Voir figure :

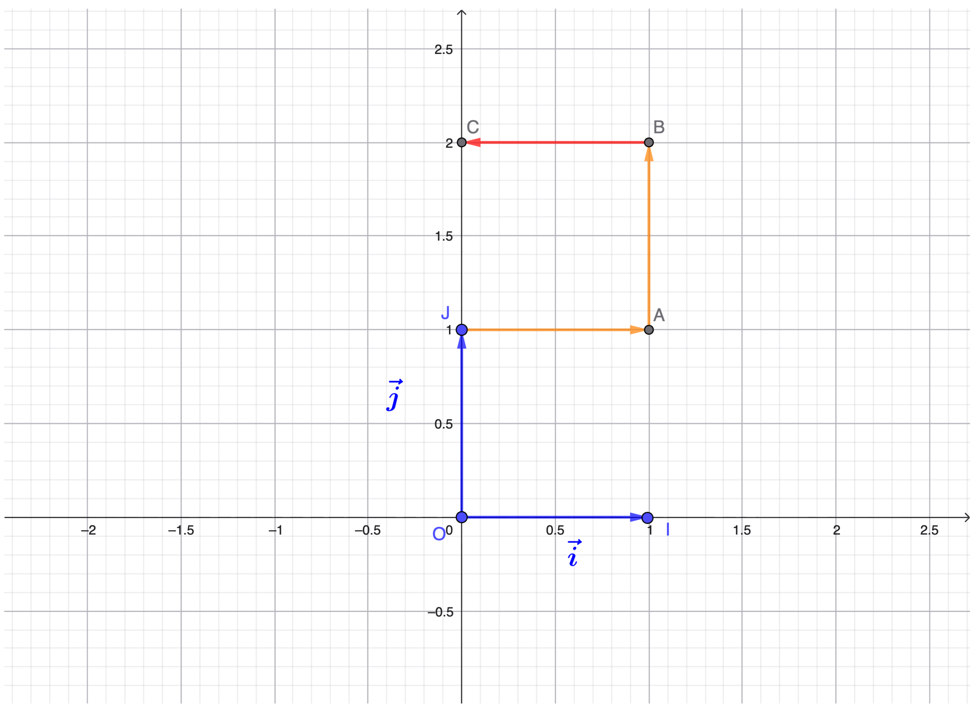


2. Solution de l'exercice 68

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.
   (b) Le point B a pour coordonnées $(1; 2)$.
   (c) Le point C a pour coordonnées $(0; 2)$.
   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 2.
   Voir figure :

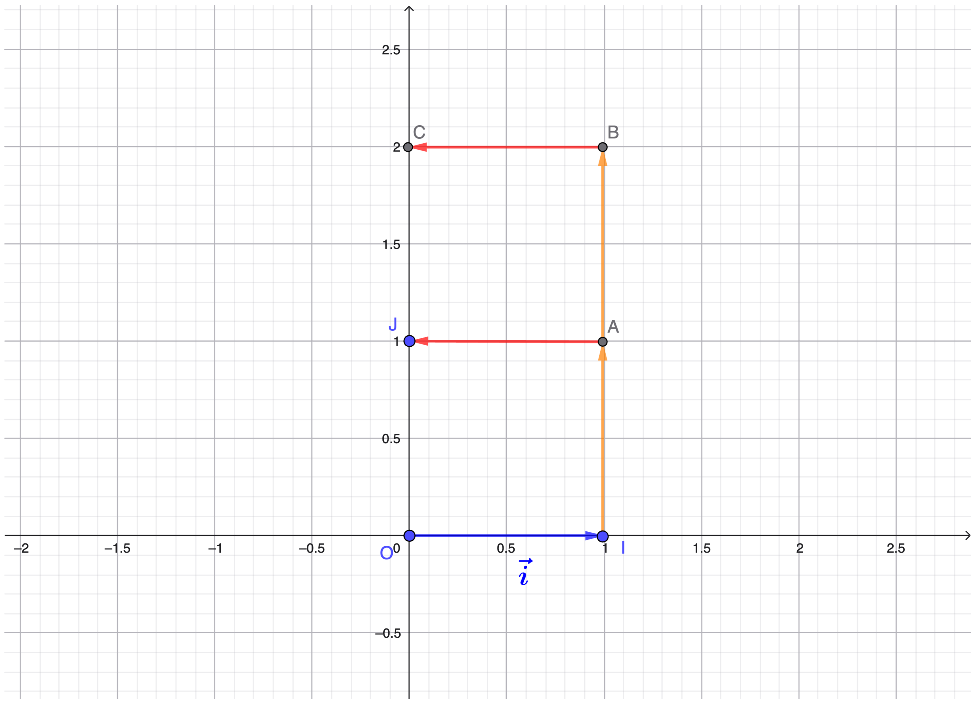


3. Solution de l'exercice 69

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.
   (b) Le point B a pour coordonnées $(1; 2)$.
   (c) Le point C a pour coordonnées $(0; 2)$.
   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 3.
   Voir figure :

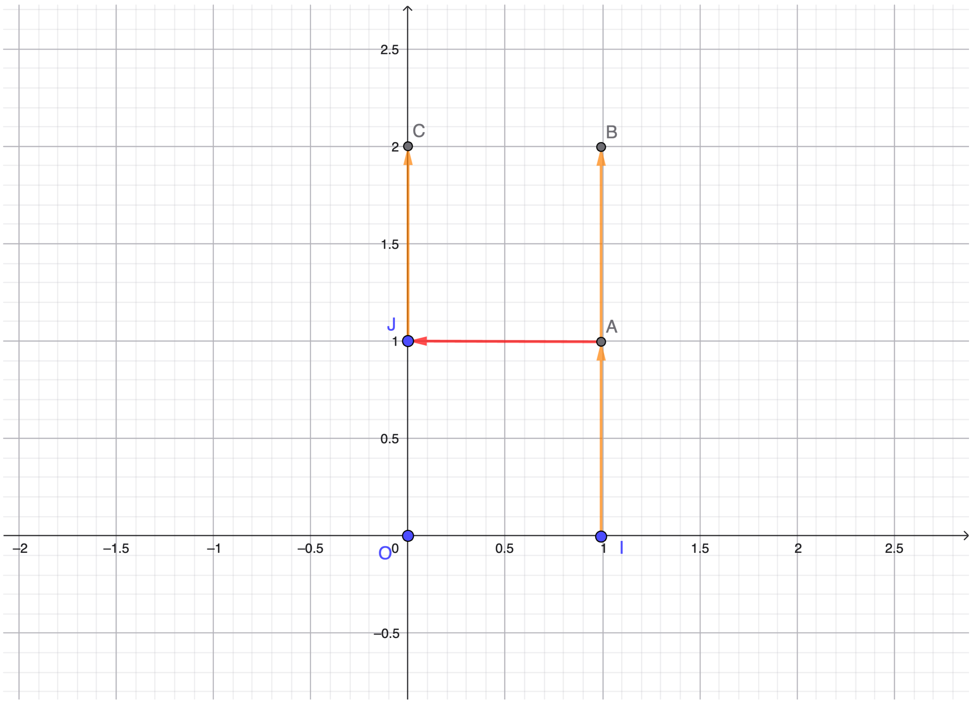


4. Solution de l'exercice 70

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.
   (b) Le point B a pour coordonnées $(1; 2)$.
   (c) Le point C a pour coordonnées $(0; 2)$.
   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 4.
   Voir figure :

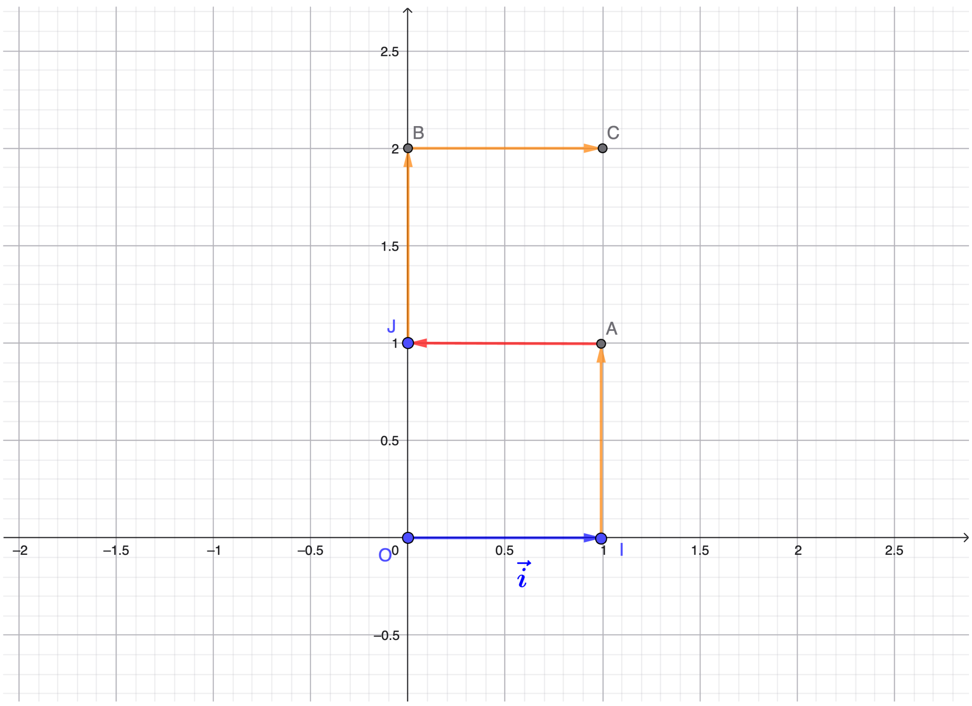


5. Solution de l'exercice 71

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1;1)$.
   (b) Le point B a pour coordonnées $(0;2)$.
   (c) Le point C a pour coordonnées $(1;2)$.
   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 5.
   Voir figure :



6. Solution de l'exercice 72

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

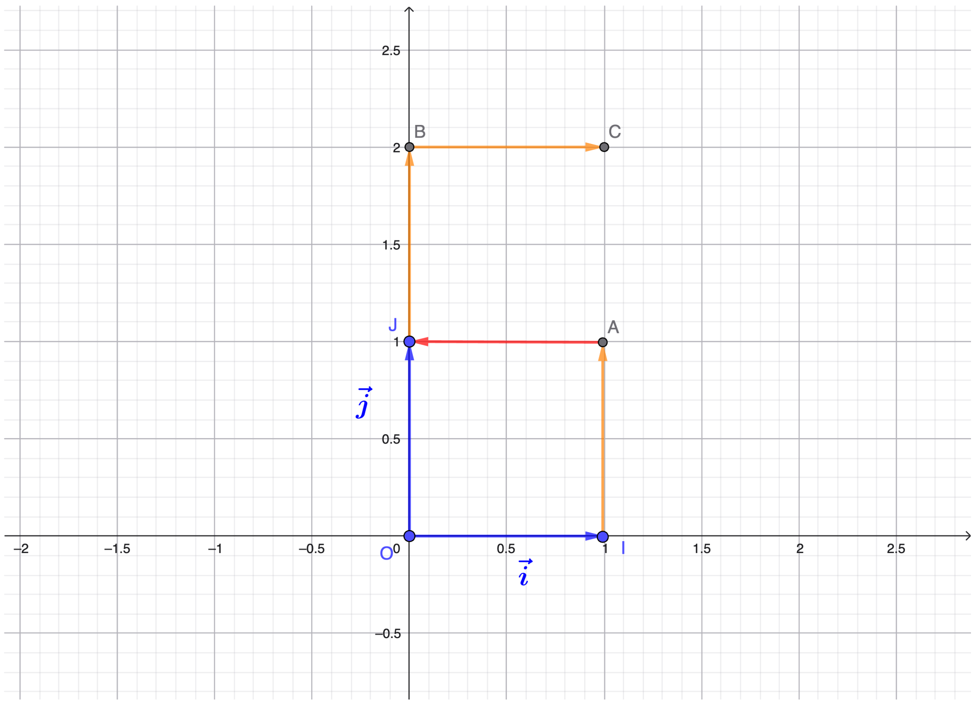
   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.

   (b) Le point B a pour coordonnées $(0; 2)$.

   (c) Le point C a pour coordonnées $(1; 2)$.

   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 6.

   Voir figure :



7. Solution de l'exercice 73

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

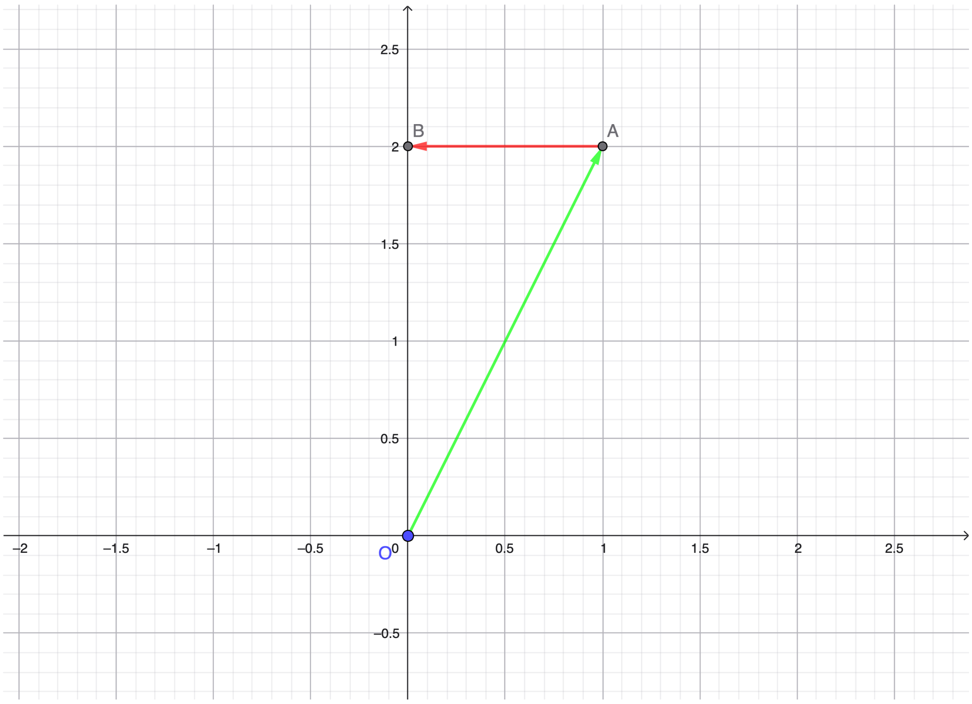
$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.

   (b) Le point B a pour coordonnées $(0; 2)$.

   (c) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 7.

   Voir figure :

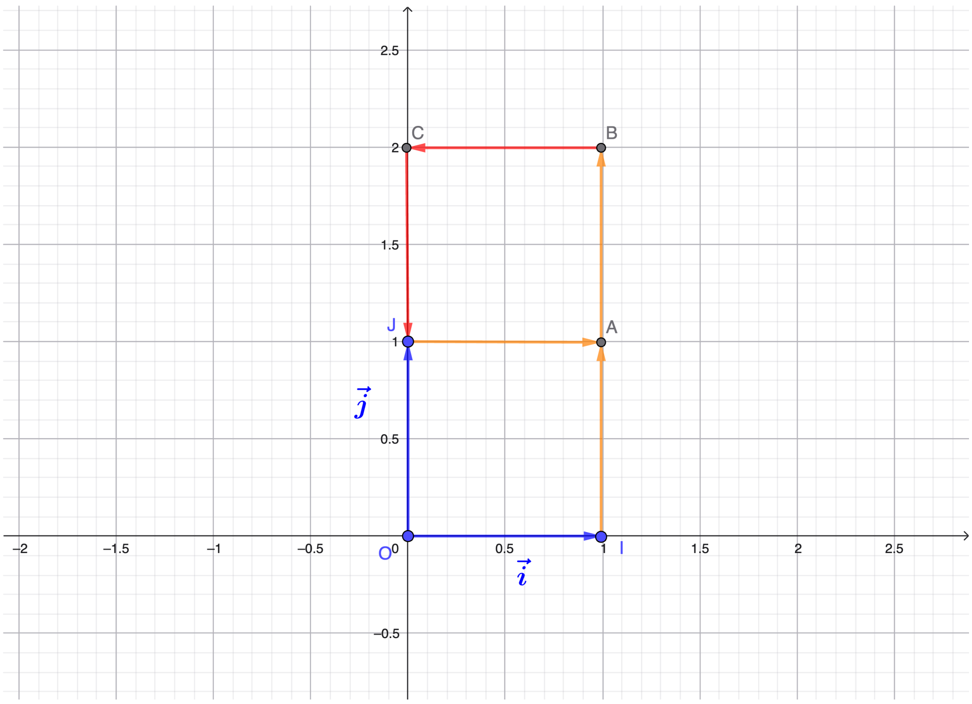


8. Solution de l'exercice 74

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

   (a) Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$.
   (b) Le point B a pour coordonnées $(0; 2)$.
   (c) Le point C a pour coordonnées $(1; 2)$.
   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 8.
   Voir figure :



9. Solution de l'exercice 75

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

   $$(O;\vec{i};\vec{j})$$

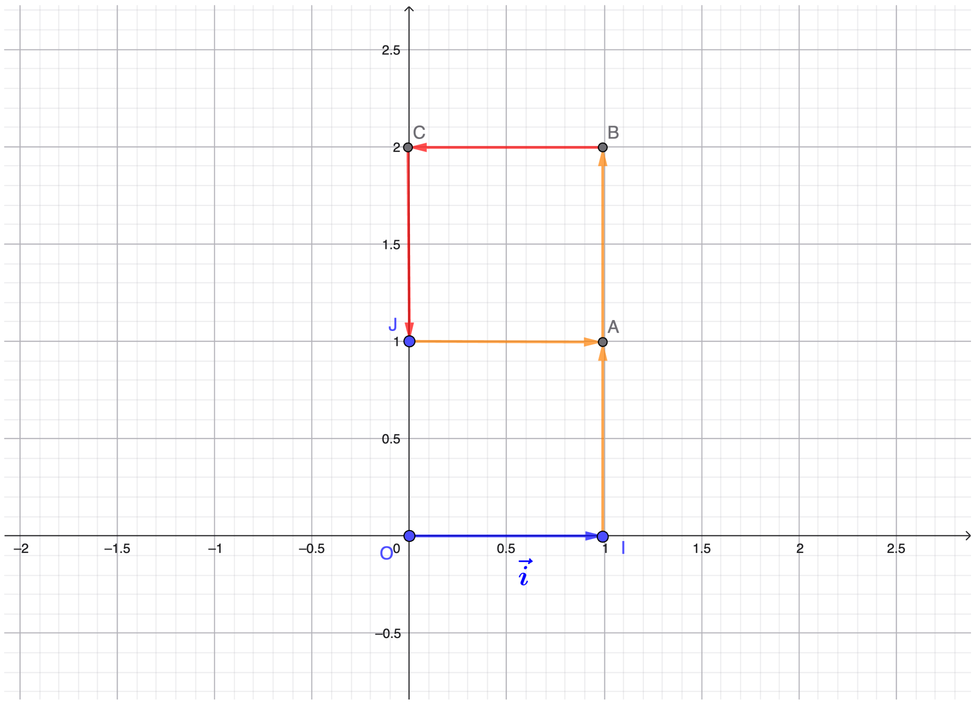
   (a) Le point A a pour coordonnées $(1;1)$.

   (b) Le point B a pour coordonnées $(0;2)$.

   (c) Le point C a pour coordonnées $(1;2)$.

   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 9.

   Voir figure :



10. Solution de l'exercice 76

   Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

   $$(O;\vec{i};\vec{j})$$

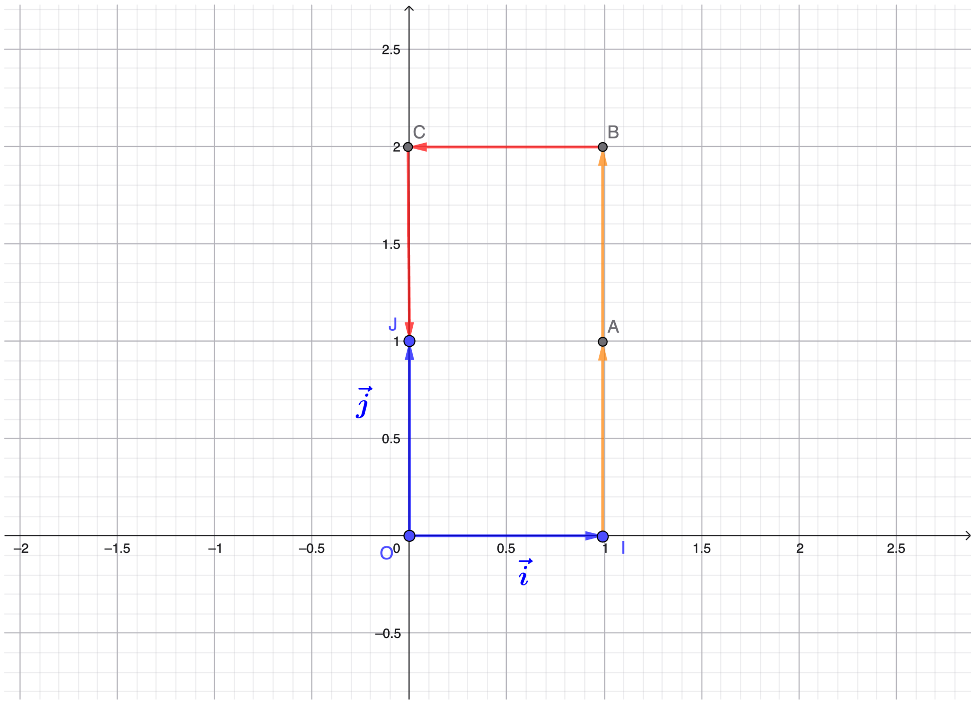
   (a) Le point A a pour coordonnées $(1;1)$.

   (b) Le point B a pour coordonnées $(0;2)$.

   (c) Le point C a pour coordonnées $(1;2)$.

   (d) On peut vérifier que vous avez bien obtenu le chiffre 0.

   Voir figure :

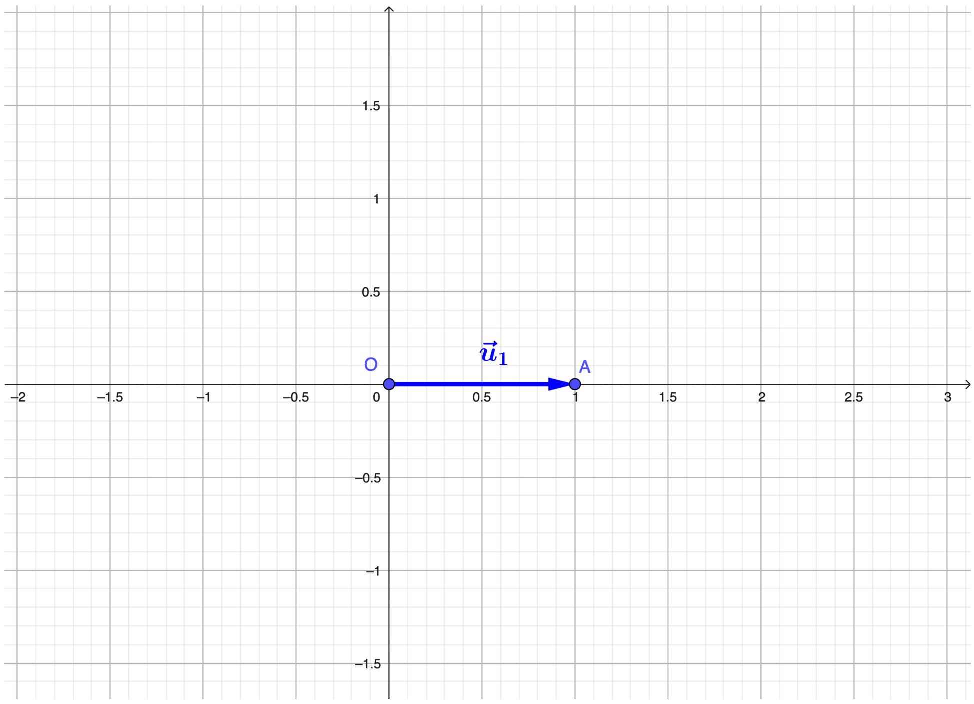


16.4 Solutions des paradoxes

1. Solution de l'exercice 77

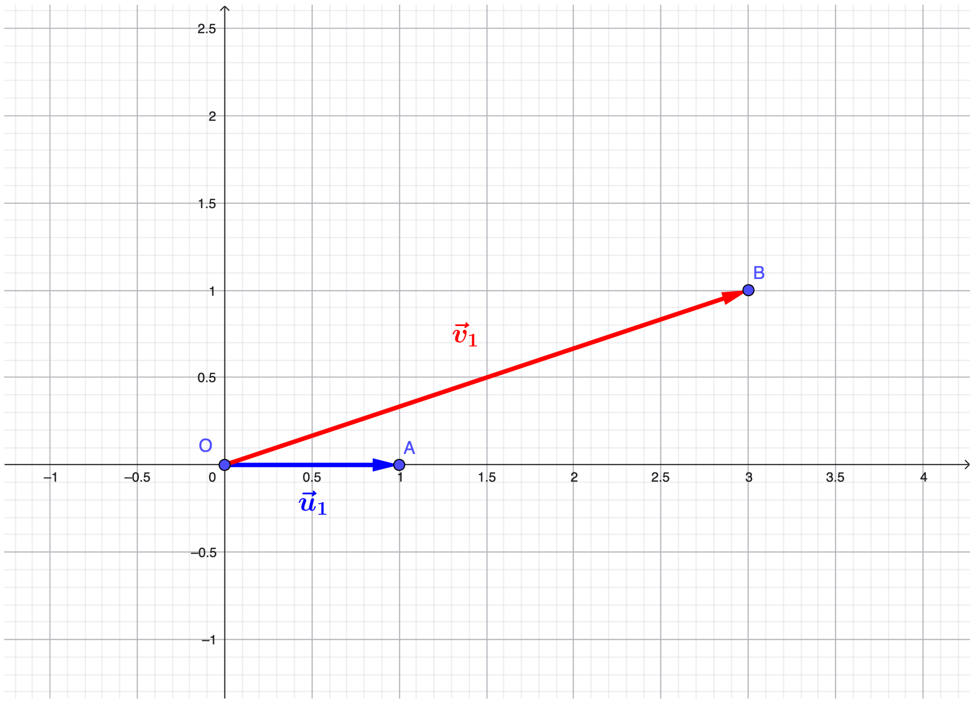
   (a) Placement des points O(0 ; 0) et A(1 ; 0) ainsi que la construction du vecteur

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$$



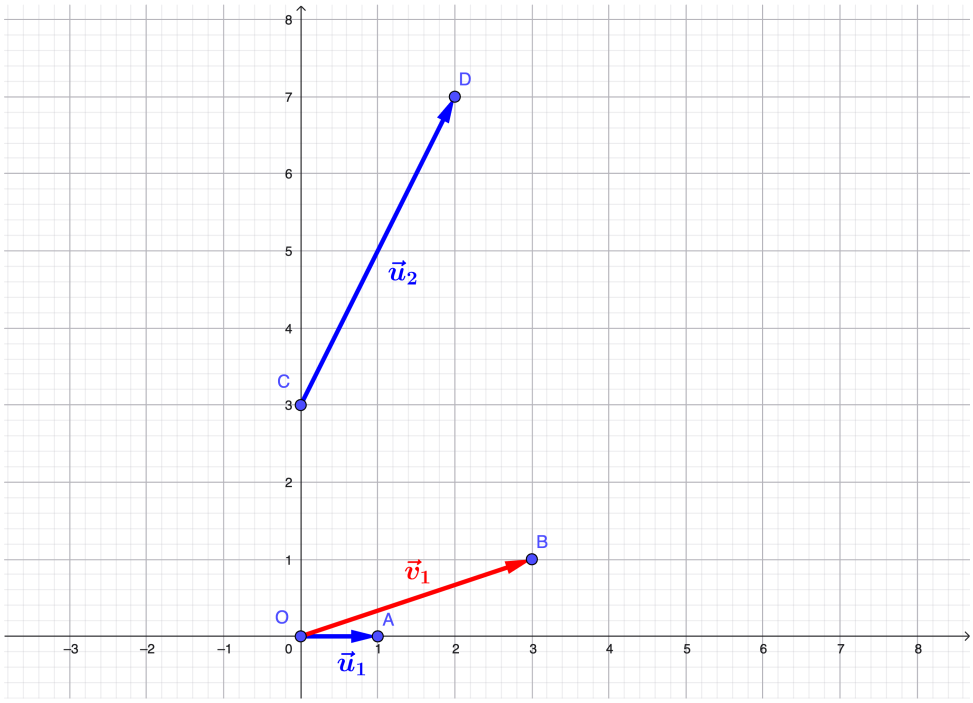
   (b) Placement du point B(3 ; 1) et construction du vecteur

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB}$$



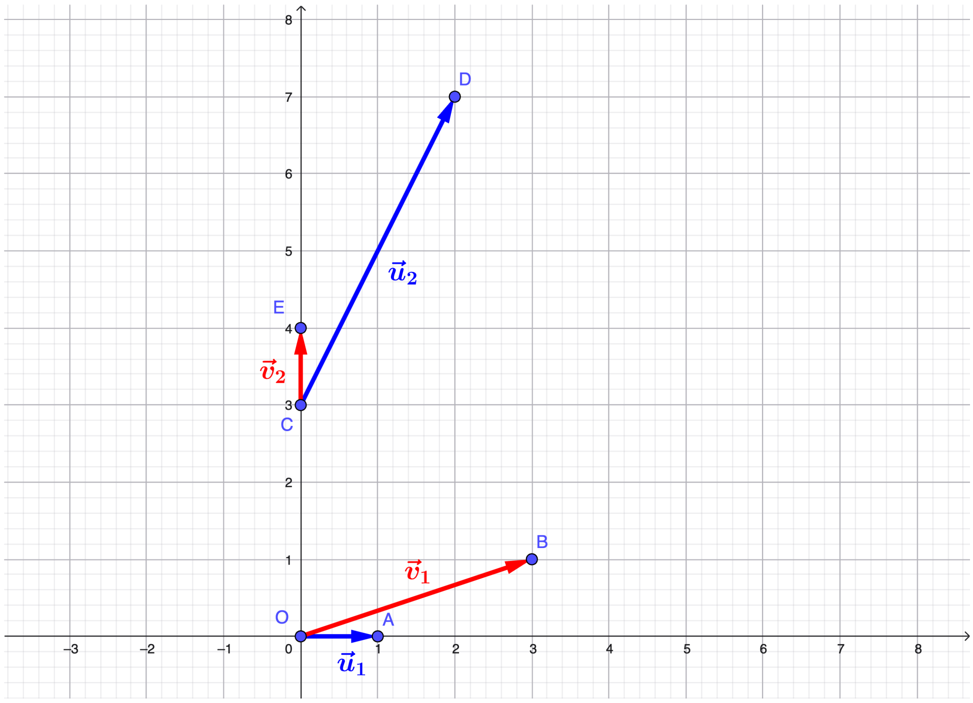
(c) Placement des points C$(0\,;3)$ et D$(2\,;7)$ ainsi que la construction du vecteur

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD}$$



(d) Placement du point E$(0\,;4)$ et construction du vecteur

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{CE}$$



(e) **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).
Concrètement :

$$\begin{aligned}
p_{\vec{u}_1} &= \frac{y_{\vec{u}_1}}{x_{\vec{u}_1}} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} \\
p_{\vec{u}_1} &= \frac{0-0}{1-0} = 0 \\
p_{\vec{v}_1} &= \frac{y_{\vec{v}_1}}{x_{\vec{v}_1}} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} \\
p_{\vec{v}_1} &= \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow p_{\vec{u}_1} = 0 < p_{\vec{v}_1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{v}_1$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{u}_1$.

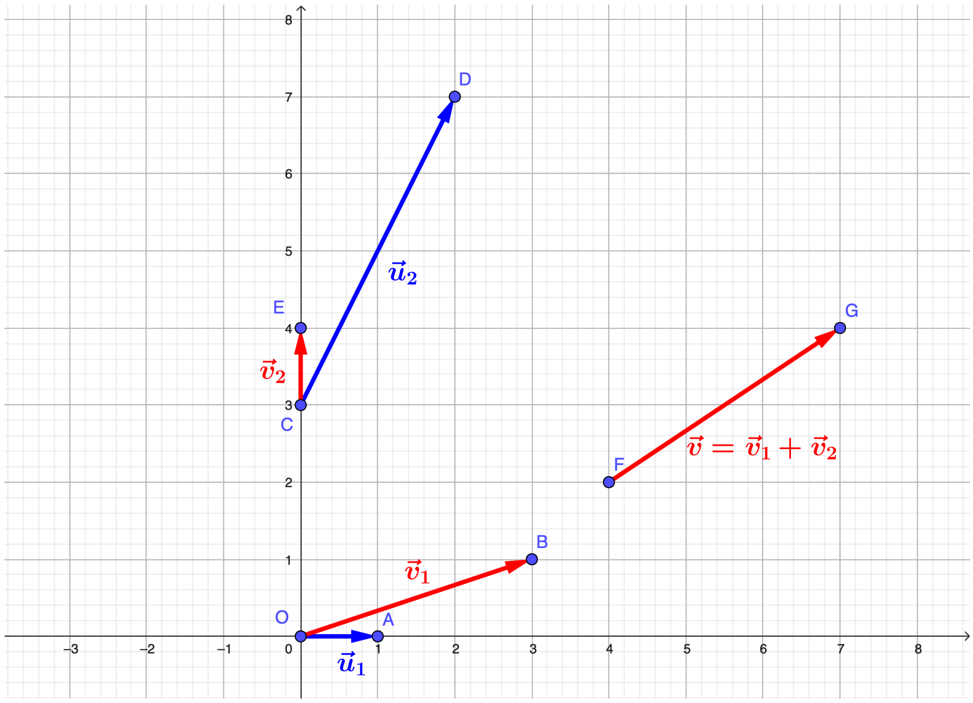
(f) **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).
Concrètement :

$$\begin{aligned}
p_{\vec{u}_2} &= \frac{y_{\vec{u}_2}}{x_{\vec{u}_2}} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \\
p_{\vec{u}_2} &= \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2 \\
p_{\vec{v}_2} &= \frac{y_{\vec{v}_2}}{x_{\vec{v}_2}} = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} \\
p_{\vec{v}_2} &= \frac{4-3}{0-0} = +\infty \\
&\Rightarrow p_{\vec{u}_2} = 2 < p_{\vec{v}_2} = +\infty
\end{aligned}$$

Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{v}_2$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{u}_2$.

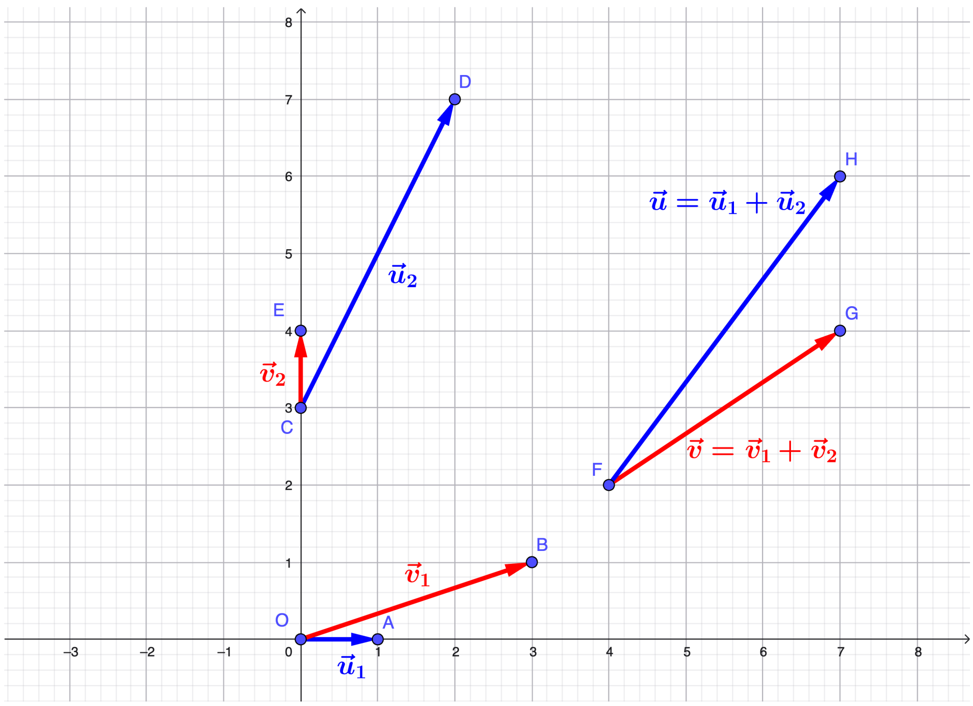
(g) Placement des points F(4 ; 2) et G(7 ; 4) ainsi que la construction du vecteur

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{FG}$$



(h) Placement du point H(7 ; 6) et construction du vecteur

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{FH}$$

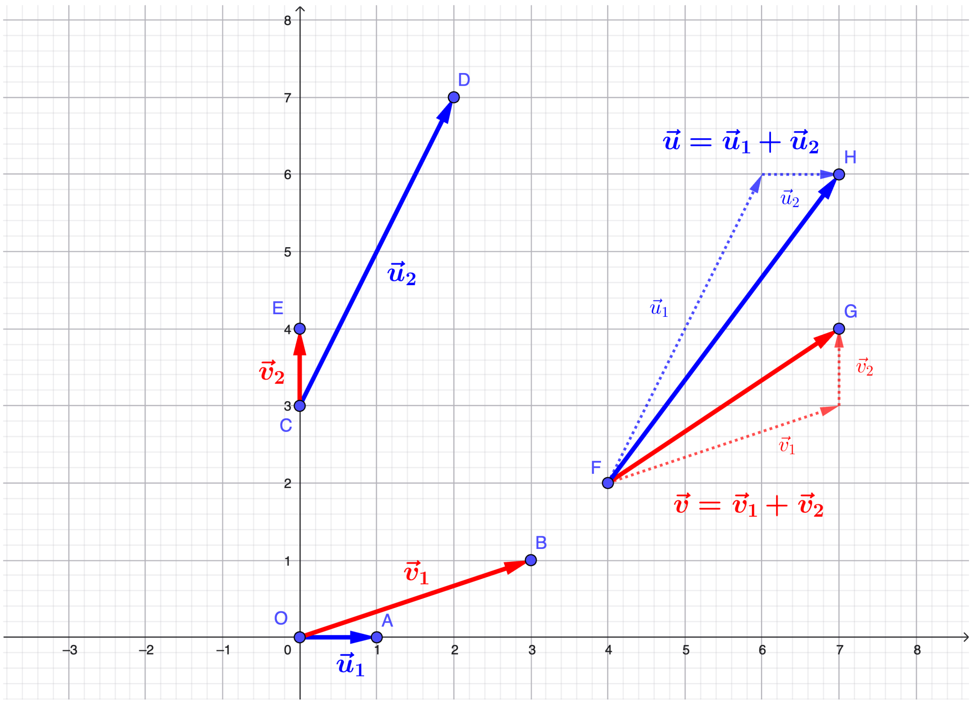


(i) **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).

Concrètement :

$$p_{\vec{u}} = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{y_H - y_F}{x_H - x_F}$$
$$p_{\vec{u}} = \frac{6-2}{7-4} = \frac{4}{3}$$
$$p_{\vec{v}} = \frac{y_{\vec{v}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F}$$
$$p_{\vec{v}} = \frac{4-2}{7-4} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow p_{\vec{u}} = \frac{4}{3} > p_{\vec{v}} = \frac{2}{3}$$

Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{u}$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{v}$.



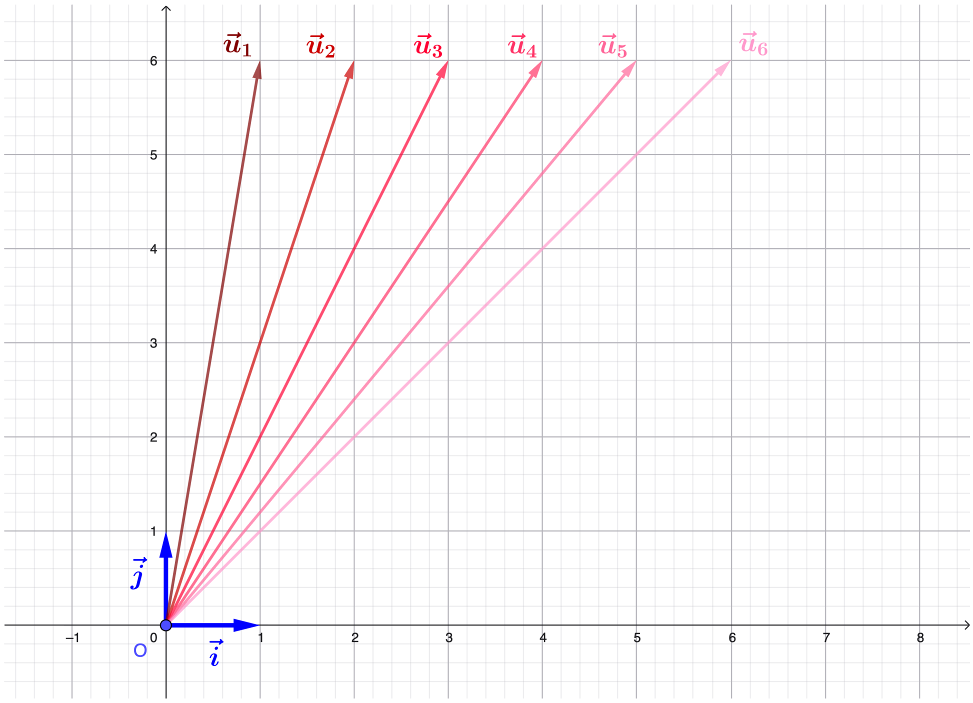
16.5 Solutions des exercices d'arithmétique

1. Solution de l'exercice 78

   On se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique.

   (a) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tracer les 6 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix}$$



(b) Calcul des pentes respectives p_n :

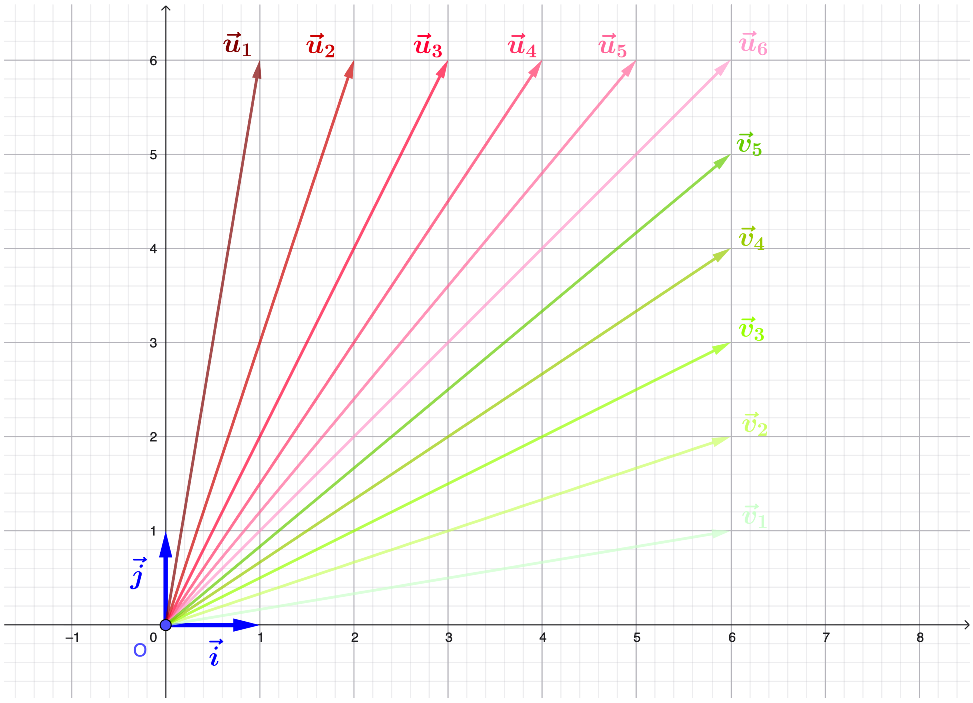
$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{6}{1} = 6 \\
p_2 &= \frac{6}{2} = 3 \\
p_3 &= \frac{6}{3} = 2 \\
p_4 &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \\
p_5 &= \frac{6}{5} = 1,2 \\
p_6 &= \frac{6}{6} = 1
\end{aligned}
$$

(c) Les pentes p_1, p_2, p_3, p_6 sont des entiers.

(d) On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont des diviseurs de 6.

(e) Tracer les 6 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 6 \\ n \end{pmatrix}$$



On remarque que $\vec{v}_6 = \vec{u}_6$.

(f) Calcul des pentes respectives q_n :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{6} \\
q_2 &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
q_3 &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
q_4 &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
q_5 &= \frac{5}{6} \\
q_6 &= \frac{6}{6} = 1
\end{aligned}
$$

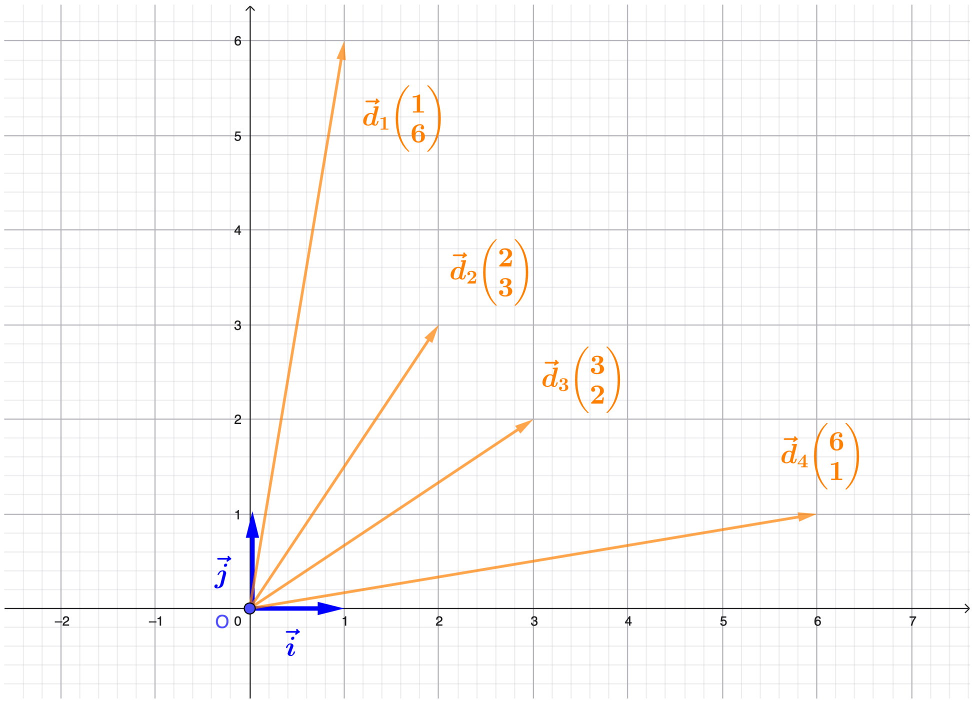
(g) On peut obtenir les $q_n)partirdesp_n$ en appliquant la fonction inverse.

(h) Concrètement la relation entre les p_n et les q_n est :

$$q_n = \frac{1}{p_n}$$

(i) Il y a exactement 4 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit à coordonnées entières tels que leur produit vaut 6.

(j) Les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente sont :

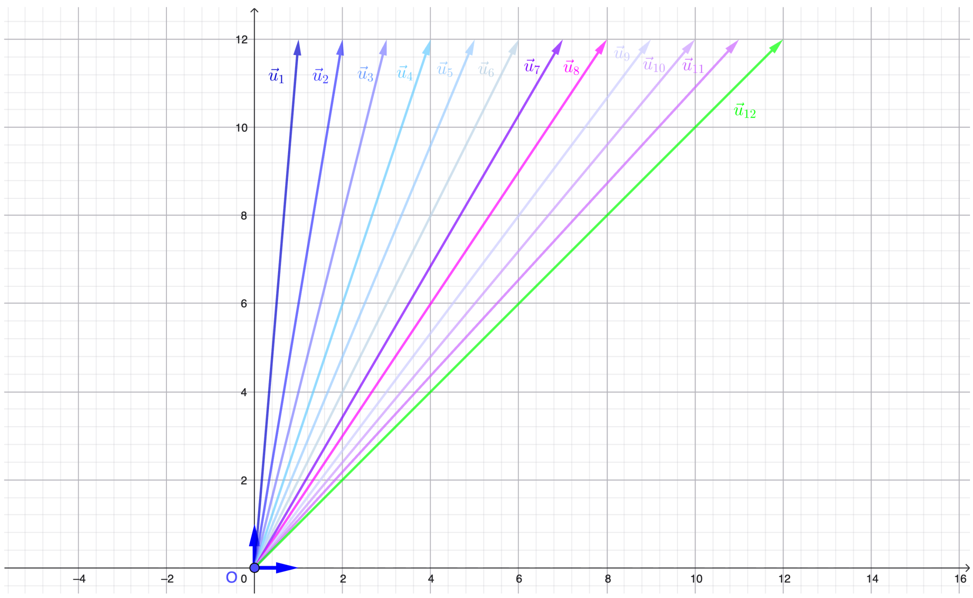


2. Solutions de l'exercice 79

   On se place dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $(\vec{i},\vec{j})$ la base canonique.

   (a) Pour $n \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ voici les 12 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 12 \end{pmatrix}$$



(b) Calcul des pentes respectives p_n :

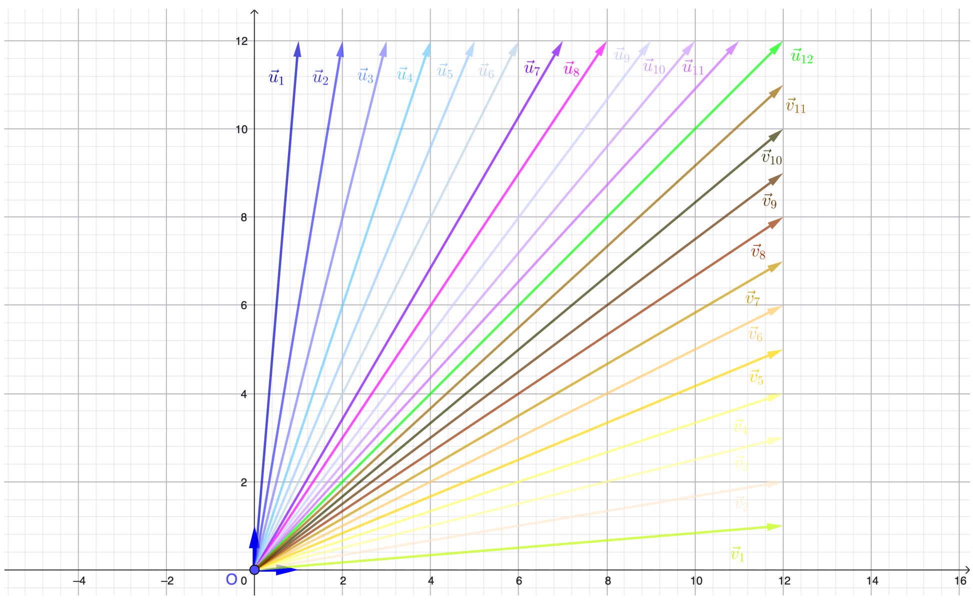
$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{12}{1} = 12 \\
p_2 &= \frac{12}{2} = 6 \\
p_3 &= \frac{12}{3} = 4 \\
p_4 &= \frac{12}{4} = 3 \\
p_5 &= \frac{12}{5} = 2,4 \\
p_6 &= \frac{12}{6} = 2 \\
p_7 &= \frac{12}{7} \\
p_8 &= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5 \\
p_9 &= \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \\
p_{10} &= \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
p_{11} &= \frac{12}{11} \\
p_{12} &= \frac{12}{12} = 1
\end{aligned}$$

(c) Les pentes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_6, p_{12}$ sont des nombres entiers.

(d) On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont les diviseurs de 12.

(e) Voici les 12 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 12 \\ n \end{pmatrix}$$



On remarque que $\vec{v}_{12} = \vec{u}_{12}$.

(f) Calcul des pentes respectives q_n :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{12} \\
q_2 &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\
q_3 &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\
q_4 &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\
q_5 &= \frac{5}{12} \\
q_6 &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5 \\
q_7 &= \frac{7}{12} \\
q_8 &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\
q_9 &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \\
q_{10} &= \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \\
q_{11} &= \frac{11}{12} \\
q_{12} &= \frac{12}{12} = 1
\end{aligned}$$

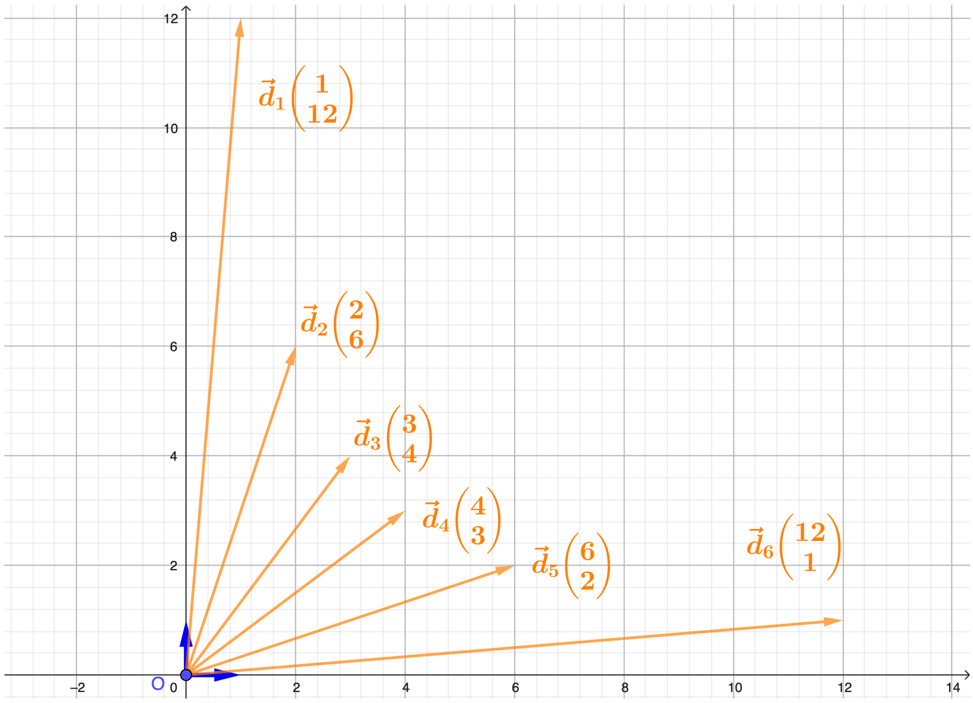
(g) On peut les obtenir à partir des p_n en appliquant la fonction inverse.

(h) La relation entre les p_n et les q_n est

$$q_n = \frac{1}{p_n}$$

(i) Il y a 6 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de coordonnées entières tels que leur produit vaut 12.

(j) Voici tous les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente :



3. Solutions de l'exercice 80

On poursuit la même logique que les deux exercices précédents.

Mais cette fois on va calculer sans représenter les vecteurs parce qu'on va prendre $n = 60$.

(a) Pour $n \in \{1, 2, \ldots, 60\}$ les vecteurs

$$\vec{u}_n\begin{pmatrix}n\\12\end{pmatrix}$$

qui ont une pente entière sont :

$$\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = 60 \qquad \vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = 30$$
$$\vec{u}_3\begin{pmatrix}3\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_3 = 20 \qquad \vec{u}_4\begin{pmatrix}4\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_4 = 15$$
$$\vec{u}_5\begin{pmatrix}5\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_5 = 12 \qquad \vec{u}_6\begin{pmatrix}6\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_6 = 10$$
$$\vec{u}_{10}\begin{pmatrix}10\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{10} = 6 \qquad \vec{u}_{12}\begin{pmatrix}12\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{12} = 5$$
$$\vec{u}_{15}\begin{pmatrix}15\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{15} = 4 \qquad \vec{u}_{20}\begin{pmatrix}20\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{20} = 3$$
$$\vec{u}_{30}\begin{pmatrix}30\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{30} = 2 \qquad \vec{u}_{60}\begin{pmatrix}60\\60\end{pmatrix} \Rightarrow p_{60} = 1$$

(b) On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont les diviseurs de 60.

(c) Il y a 12 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de coordonnées entières tels que leur produit vaut 60 :

$$\vec{d}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 60 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 60 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_{11} \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_9 \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_5 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_8 \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_6 \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}_7 \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Quatrième partie

Index des programmes Python INDEX

TAB. 16.1 : Liste des programmes Python inclus dans ce document

Programme	Description
prog_1.py	Affiche les caractéristiques fondamentales d'un vecteur
prog_2.py	Vérifie l'égalité et la colinéarité de vecteurs
prog_3.py	Illustre la relation de Chasles
prog_4.py	Définition et utilisation des bases orthonormées
prog_5.py	Calcul des coordonnées d'un vecteur à partir de deux points
prog_6.py	Vérification de la colinéarité de deux vecteurs
prog_7.py	Vérification de l'alignement de trois points