Contents

1 Solution de l'exercice 15

Pour chacune des situations suivantes, indiquons comment la résoudre selon la représentation vectorielle parmi :

- Analytique (coordonnées, calculs algébriques)
- Colinéarité (proportionnalité, déterminant)
- Géométrique (relation de Chasles, parallélogramme)

1. Démontrer que les points A, B, C sont alignés.
    - Analytique : à l'aide des coordonnées de chaque point on peut calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifier si les vecteurs sont colinéaires ou pas.
    - Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la décomposition de Chasles on peut calculer le déterminant ou établir une relation du type $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ si les vecteurs sont colinéaires.
    - Géométrique : la relation de Chasles nous permet d'établie si la relation $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ existe ou pas
2. Calculer la distance entre deux points A(2;3) et B(5;7)
    - Analytique : on applique la formule (qui découle de Pythagore)
    - Colinéarité : pour ce type de problème la colinéarité est inutile
    - Géométrique : pour ce type de problème ni Chasles ni les identités du parallélogramme ne peuvent servir
3. Montrer que ABCD est un parallélogramme
    - Analytique : à l'aide des coordonnées on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle

    $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

    ou pas.

- Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la relation de Chasles on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
ou pas. On peut également calculer les deux déterminants importants
$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \quad det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$$
- Géométrique : en utilisant Chasles on peut vérifier si on obtient la relation
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

4. Trouver les coordonnées du point M tel que :
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
   - Analytique : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on résout les deux équations pour obtenir les coordonnées du points M(x ; y). Concrètement :
$$\begin{aligned} x - x_A &= 2(x_B - x_A) + 3(x_C - x_A) \\ y - y_A &= 2(y_B - y_A) + 3(y_C - y_A) \\ x &= -4x_A + 2x_B + 3x_C \\ y &= -4y_A + 2y_B + 3y_C \end{aligned}$$
   - Colinéarité : on ne peut pas obtenir les coordonnées du point M uniquement avec le déterminant.
   - Géométrique : on peut construire le point M grâce à la relation vectorielle puis en utilisant Chasles on peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

5. Vérifier si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles
   - Analytique : on peut comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
   - Colinéarité : on peut calculer le déterminant $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et voir s'il est nul ou pas
   - Géométrique : on peut vérifier si on obtient une identité du parallélogramme ou pas

2 Solution du programme

Écrire un programme Python qui résout le problème

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

C'est-à-dire un programme qui permet d'exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres a et b et des coordonnées des points déjà existants A, B, et C.

```
def get_M
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    + a : 1 float correspondant au coefficient du vecteur AB
    + b : 1 float correspondant au coefficient du vecteur AC
    + A : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point A
    + B : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point B
    + C : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point C
    et elle renvoie 1 tuple de float correspondant
    aux coordonnées du point M
    """
      =  1 -   -    *   0  +   *   0  +   *   0
      =  1 -   -    *   1  +   *   1  +   *   1
    return


def vectAB
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    + A : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point A
    + B : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point B
    et renvoie 1 tuple de float correspondant
    aux coordonnées du vecteur AB
    """
      =   0  -   0
      =   1  -   1
    return


# Tests
              = 1  1   3  2    -3  2    3  -2

  =

         = f"On a la relation Vect(A, M) = "
         += f"{ }Vect(A, B) + { }Vect(A, C)"

print

input "Pour voir les coordonnées du point M tapez 1\t"
```

```

            = f"Voici les coordonnées du point M({  0 }, {  1 })"
    print

             =
             =              =

         = f"x - {  0 } = { } * {        0 } + { } * {        0 }"
    input "Pour voir l'équation en x tapez 1\t"
    print

         = f"y - {  1 } = { } * {        1 } + { } * {        1 }"
    input "Pour voir l'équation en y tapez 1\t"
    print

             = f"x = {  0  +   *        0  +   *        0 }"
    input "Pour voir la solution de l'équation en x tapez 1\t"
    print

             = f"y = {  1  +   *        1  +   *        1 }"
    input "Pour voir la solution de l'équation en y tapez 1\t"
    print

```

3 Solution du QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Si ABC est un triangle et que D est un 4ème point qui vérifie l'égalité

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

alors on peut en déduire que :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ la relation de Chasles n'est pas une déduction, elle existe toujours

(b) ABCD est un parallélogramme

(c) ABDC est un parallélogramme
(**Bonne réponse**)

(d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ les deux égalités sont vraies
(**Bonne réponse**)

(e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ une seule des deux égalités est vraie

(f) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ aucune des égalités n'est vraie

(g) le point D est à l'intérieur du triangle ABC

(h) le point D est l'image du point A par la symétrie de centre le milieu du segment [BC]
(**Bonne réponse**)

(i) le point D est à l'extérieur du triangle ABC
(**Bonne réponse**)

(j) le point D est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu du segment [BC]
(**Bonne réponse**)

2. Si ABCD est un carré alors :

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base orthornomée

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base orthornomée
(**Bonne réponse**)

(c) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

(d) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

(e) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

(f) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

(g) $AC^2 = AB^2 + BC^2$
(**Bonne réponse**)

(h) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
(**Bonne réponse**)

(j) Le centre O du carré vérifie

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

(**Bonne réponse**)

3. Si ABCD est un rectangle et O l'intersection des droites (AC) et (BD) alors :

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
(**Bonne réponse**)

(b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
(**Bonne réponse**)

(c) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

(d) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

(e) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

(f) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

(g) $AC > AB + BC$

(h) $AC < AB + AD$
(**Bonne réponse**)

(i) $AC = BD$
(**Bonne réponse**)

(j) $AC \neq BD$

4. Soient A et B deux points distincts du plan. Si C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors :

(a) **B est le milieu du segment [AC] (Bonne réponse)**

(b) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

(d) les coordonnées de C vérifient :

$$x_C = 2x_B - x_A$$
$$y_C = 2y_B - y_A$$

(e) **les coordonnées de C vérifient :**

$$x_{\mathrm{C}}\& = 2x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}$$
$$y_{\mathrm{C}}\& = 2y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{A}}$$

(Bonne réponse)

(f) **C est l'image de A par la symétrie de centre B. (Bonne réponse)**

(g) C est le milieu du segment [AB].

(h) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **(Bonne réponse)**

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ **(Bonne réponse)**

(j) $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ **(Bonne réponse)**

5. Si on a $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0$ alors :

(a) **ABCD ou ABDC est un trapèze. (Bonne réponse)**

(b) **Si AB = DC alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme. (Bonne réponse)**

(c) **Si AB = AD = DC alors ABCD est un losange. (Bonne réponse)**

(d) **Si AB = AC = CD alors ABDC est un losange. (Bonne réponse)**

(e) Si AB = DC et CA = BD alors ABDC est un rectangle.

(f) Si AB = DC et AD = BC alors ABDC est un rectangle.

(g) **Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un rectangle. (Bonne réponse)**

(h) Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un rectangle.

(i) Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un losange.

(j) **Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un losange. (Bonne réponse)**

6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

(a) **Si** $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{w}||$ **alors les trois vecteurs sont colinéaires. (Bonne réponse)**

(b) Il est impossible que les trois vecteurs soient colinéaires.

(c) **Si** $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ **alors les trois vecteurs sont colinéaires. (Bonne réponse)**

(d) **Si** $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ **alors** $det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$**. (Bonne réponse)**

(e) **Si** $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ **alors** $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$**. (Bonne réponse)**

(f) $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| > ||\vec{w}||$

(g) $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| < ||\vec{w}||$

(h) Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{u} = \vec{0}$ soit $\vec{v} = \vec{0}$

(i) Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{w} = \vec{u}$ soit $\vec{w} = \vec{v}$

(j) Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors soit $\vec{u} = -\vec{v}$ soit $\vec{w} = \vec{0}$

7. Soit un vecteur $\vec{u}$ de norme $||\vec{u}|| = 5$.

(a) Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.

(b) Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.

(c) Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.

(d) Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.

(e) **Si** $x_{\vec{u}} = \pm 3$ **alors** $y_{\vec{u}} = \pm 4$**. (Bonne réponse)**

(f) Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
(g) Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
(h) Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
(i) Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
(j) **Si $x_{\vec{u}} = \pm 4$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 3$. (Bonne réponse)**

8. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(3 ; 2), B(3 ; -2), C(-3 ; -2), D(3 ; -1), E(-3 ; -1), F(-1 ; -1), G(1 ; 1), H(1 ; 2), I(-1 ; 2).

   (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car
   $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car
   $$det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}) = 0$$
   (c) Les points A, B et C sont alignés.
   (d) **Les points D, E et F sont alignés. (Bonne réponse)**
   (e) **ABC est un triangle rectangle en B. (Bonne réponse)**
   (f) ABD est un triangle rectangle en B.
   (g) **GDF est un triangle rectangle en G. (Bonne réponse)**
   (h) **GDF est un triangle isocèle en G. (Bonne réponse)**
   (i) **BCHA est un trapèze. (Bonne réponse)**
   (j) **Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires. (Bonne réponse)**

9. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3); D(3 ; -2).

   (a) Le triangle BOA est isocèle en A.
   (b) Le triangle BOA est isocèle en B.
   (c) **Le triangle BOA est isocèle en O. (Bonne réponse)**
   (d) Le triangle BOA est rectangle en A.
   (e) Le triangle BOA est rectangle en B.
   (f) **Le triangle BOA est rectangle en O. (Bonne réponse)**
   (g) **C est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. (Bonne réponse)**
   (h) **D est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$. (Bonne réponse)**
   (i) ABDC est un carré.
   (j) **ABCD est un carré. (Bonne réponse)**