Contents

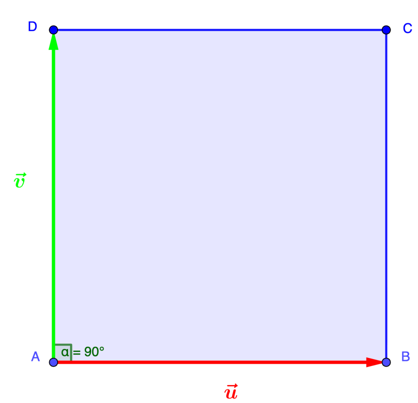
1 Solution de l'exercice 5

1. Puisque ABCD est un carré alors les droites (AB) et (AD) sont orthogonales et les longueurs AB et AD sont égales. Par conséquent les vecteurs sont associés sont orthogonaux et de même norme. Ainsi

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

est bien une base orthonormée.

Voir figure :



2. Pour déterminer les coordonnées des points dans cette base il faut exprimer les vecteurs partant de l'origine du repère comme combinaisons

linéaires des vecteurs de la base. Tout d'abord il faut remarquer que l'origine du repère est le point A car il s'agit de l'origine de chacun des vecteurs de la base. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA} &= 0 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow A(0;0) \\
\overrightarrow{AB} &= 1 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow B(1;0) \\
\overrightarrow{AC} &= 1 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow C(1;1) \\
\overrightarrow{AD} &= 0 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow D(0;1)
\end{aligned}$$

3. Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\
\overrightarrow{AC} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

2 Solution de l'exercice 5 bis

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

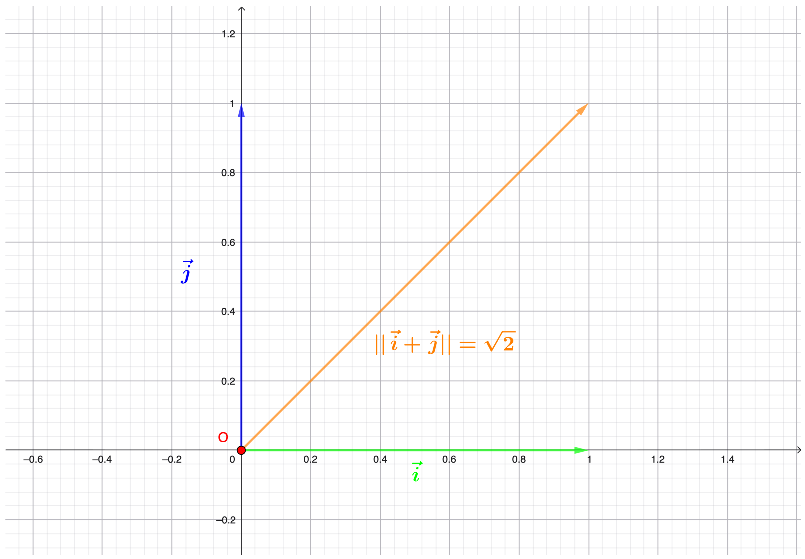
$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les normes des vecteurs suivants :

1.

$$\begin{aligned}
n_1 &= ||\vec{i} + \vec{j}|| \\
n_1 &= ||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}|| \\
n_1 &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\
\Rightarrow n_1 &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

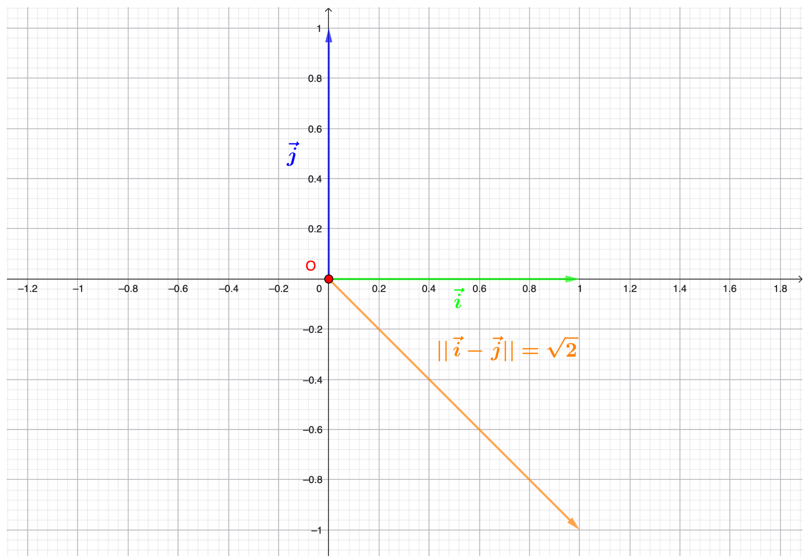
Voir figure :



2.

$$n_2 = ||\vec{i} - \vec{j}||$$
$$n_2 = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}||$$
$$n_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$\Rightarrow n_2 = \sqrt{2}$$

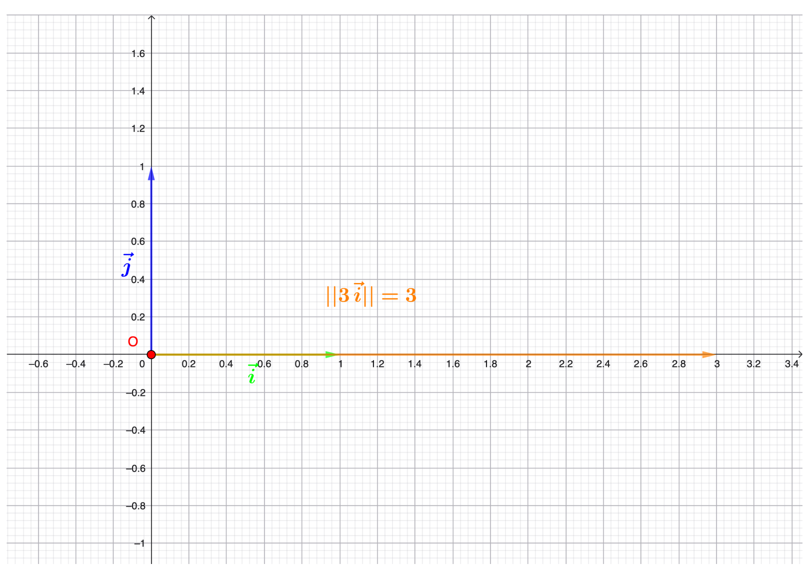
Voir figure :



3.

$$n_3 = ||3\vec{i}||$$
$$n_3 = 3||\vec{i}||$$
$$\Rightarrow n_3 = 3$$

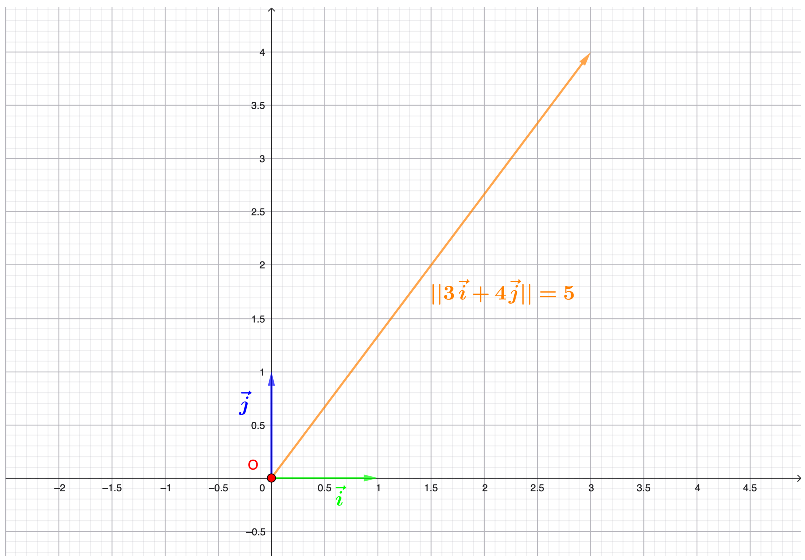
Voir figure :



4.

$$n_4 = ||3\vec{i} + 4\vec{j}||$$
$$n_4 = ||\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}||$$
$$n_4 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$\Rightarrow n_4 = 5$$

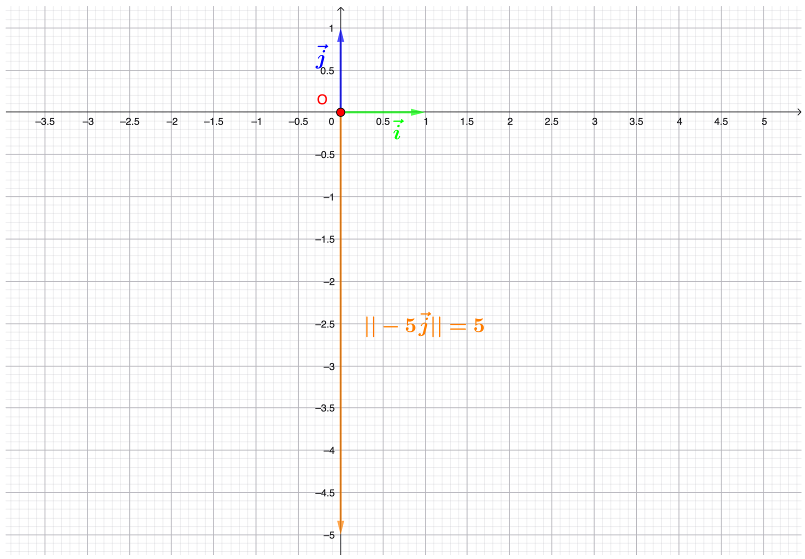
Voir figure :



5.

$$n_5 = ||-5\vec{j}||$$
$$n_5 = |-5|||\vec{j}||$$
$$\Rightarrow n_5 = 5$$

Voir figure :



3 Solution de l'exercice 5 ter

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons et comparons les normes ajoutées séparément

$$s = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

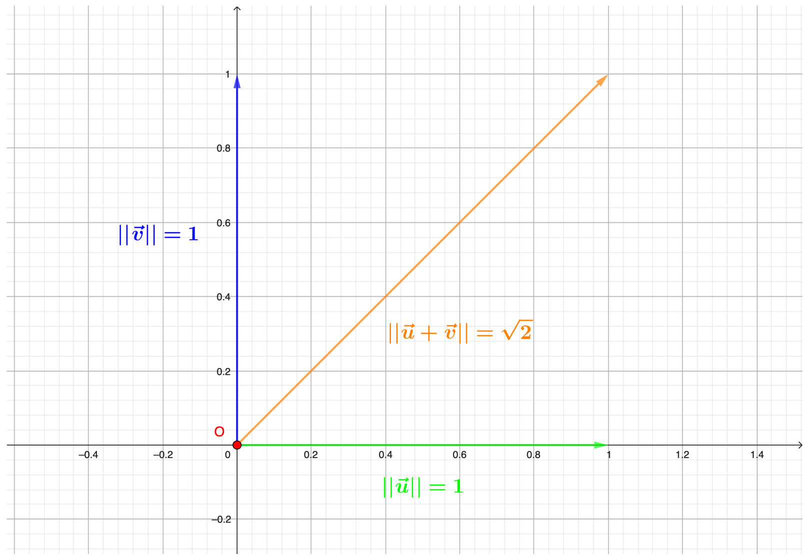
avec celles des vecteurs sommes

$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$

1.
$$(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{i},\vec{j})$$

$$\begin{aligned}
||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| &= 1\\
s &= 1+1 = 2\\
e &= ||\vec{u}+\vec{v}||\\
e &= ||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}||\\
e &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\
&\Rightarrow s = 2 > e = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Voir figure :

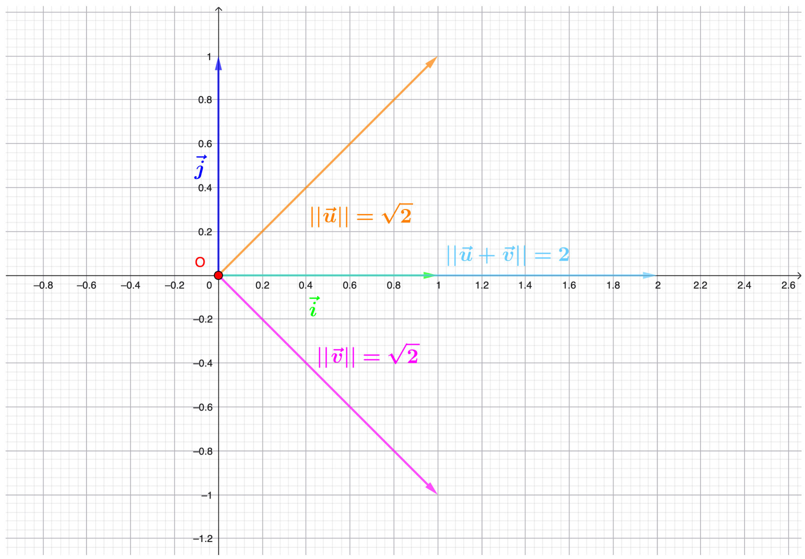


2.

$$(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{i}+\vec{j},\vec{i}-\vec{j})$$

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = \sqrt{2}$$
$$s = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$e = ||\vec{u}+\vec{v}||$$
$$e = ||2\vec{i}|| = 2||\vec{i}||$$
$$e = 2$$
$$\Rightarrow s = 2\sqrt{2} > e = 2$$

Voir figure :



3.

$$(\vec{u},\vec{v}) = (a\vec{i}+b\vec{j}, c\vec{i}+d\vec{j})$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u}|| &= \sqrt{a^2+b^2} \\
||\vec{v}|| &= \sqrt{c^2+d^2} \\
s &= ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
s^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
e &= ||\vec{u}+\vec{v}|| = ||(a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j}|| \\
e &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
e &= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)} \\
e^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd) \\
s^2-e^2 &= 2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - (ac+bd)\right) \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2 \\
(ac+bd)^2 &= (ac)^2+(bd)^2+2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad)^2+(bc)^2-2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad-bc)^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2-e^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2 \geqslant e^2 \\
&\Rightarrow s \geqslant e
\end{aligned}
$$

4 Solution programme 4

```
base = """On dit que les vecteurs u et v forment une base s'ils ne sont
pas colinéaires.
Algérbiquement : il n'existe aucun réel k tel que u = kv.
Géométriquement : leurs directions sont des droites sécantes.
Rapidement : det(u, v) != 0.\n
"""

draw_base = """
   ^
  / v
 /
/       (u, v) forme une base
x---------------------------->
               u
"""
```

```
orthonormal = """Ortho vient du grec pour dire droit donc ici qui forme un
angle droit (directions orthogonales). Normal pour norme, ici de même
norme.\n
"""

draw_orthornormal_base = """
^
|    i et j sont orthogonaux
|    ||i|| = ||j|| ont même norme
|
^    (i, j) forme une base orthonormée
| j
------0->----------------------------------->
i
"""

relation = """Si (i, j) est une base orthonormale alors tout vecteur
u = a * i + b * j a pour coordonnées (a, b).\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) s'écrit :
v_1 = 2 * i + 0 * j.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) s'écrit :
v_2 = 0 * i + 3 * j.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (4, 4) s'écrit :
v_3 = 4 * i + 4 * j.\n
Si le vecteurs v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j
a pour coordonnées : (4, 3).\n
"""

v1 = """
^
|
| --> v_1 = 2 * i
| -> i
|
0->--------->
i
"""

v2 = """
```

```
  ^       ^
  |       |
  |    ^  |
  |    |  |
  ^    j  v_2 = 3 * j
j |
0------------------>

"""



v3 = """
^  v_3 = 4 * i + 4 * j
|
8      ^ (7, 8)
| v_3 /|
6    / | 4 * j
|   /  |
4--x---> (7, 4)
|  |4i |
2  |   |
|  |   |
0--3---7----->
"""

v4 = """
  ^      v_4 = 4 * i + 3 * j
  |
  ^    /^
  |   / |
  |  /  | v_2 = 3 * j
  ^ /   ^
j |/    |
  0->--->----------------->
   i
        2 * v_1 = 4 * i
"""

vectors = [v1, v2, v3, v4]
```

```python
norme = """Un vecteur u = a * i + b * j de coordonnées (a, b) a pour norme
||u|| = sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2) ** 0.5\n
ou dit autrement ||u||^2 = a^2 + b^2\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) a pour norme :
||v_1|| = sqrt{2^2 + 0^2} = sqrt{2^2} = 2.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) a pour norme :
||v_2|| = sqrt{0^2 + 3^2} = sqrt{3^2} = 3.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (5, 5) a pour norme :
||v_3|| = sqrt{5^2 + 5^2} = sqrt{2 * 5^2} = 5 * sqrt{2}.\n
Si le vecteur v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j a pour norme :
||v_4|| = sqrt{4^2 + 3^2} = sqrt{16 + 9} = sqrt{25} = sqrt{5^2} = 5.\n
"""


menu = """
MENU
1) Définition d'une base orthornomée.
2) Relation vectorielle entre coordonnées et vecteurs de la base.
3) Formule de calcul de la norme.
0) Quitter.
"""
titles = [
    "1) Définition d'une base orthornomée",
    "2) Relation vectorielle coordonnées base",
    "3) Norme d'un vecteur"
]
underlines = ["-" * len(t) for t in titles]
continuer = True
while continuer:
    choix = int(input(menu + "\nVotre choix : "))
    if choix == 1:
        print()
        title1 = titles[choix - 1]
        underline1 = underlines[choix - 1]
        print(title1)
        print(underline1)
        print()
        print("Une base orthonormée est une base de vecteurs orthonormaux.")
        print("base :", base)
```

```python
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
        print(draw_base)
        print("orthonormal :", orthonormal)
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
        print(draw_orthornormal_base)


    elif choix == 2:
        print()
        title2 = titles[choix - 1]
        underline2 = underlines[choix - 1]
        print(title2)
        print(underline2)
        print()
        print(relation)

        for i in range(len(vectors)):
            msg = f"Taper {i + 1} pour afficher le vecteur v_{i + 1} : "
            dessin = int(input(msg))
            if dessin == i + 1:
                print(vectors[i])

    elif choix == 3:
        print()
        title3 = titles[choix - 1]
        underline3 = underlines[choix - 1]
        print(title3)
        print(underline3)
        print()
        print(norme)


        def ask_coord(axe, c):
            msg = " du vecteur dont vous voulez calculer la norme "
            msg = f"{axe} {msg} {c} = "
            return msg


        x = float(input(ask_coord("Abscisse", "x")))
        y = float(input(ask_coord("Ordonnée", "y")))
```

```
        n = (x ** 2 + y ** 2) ** 0.5
        print(f"Norme à 2 décimales près n = {n:.2f}")

    elif choix == 0:
        continuer = False
```

5 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Une base orthonormée du plan est :

   (a) une station de lancement de fusée

   (b) un couple de vecteurs ayant des directions distinctes

   (c) **un couple de vecteurs ayant des directions orthogonales et la même norme (Bonne réponse)**

   (d) un couple de vecteurs ayant la même direction et la même norme

2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$?

   (a) **Le couple de nombres $(a; b)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. (Bonne réponse)**

   (b) Les coordonnées du point M obtenu par la translation de vecteur $\vec{u}$ à partir du point O.

   (c) La somme de celles des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   (d) Les coefficients de toute combinaison linéaire des vecteurs de la base.

3. Considérons le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors l'expression de sa norme est :

   (a) $||\vec{u}|| = a + b$

   (b) $||\vec{u}|| = a^2 - b^2$

   (c) $||\vec{u}|| = a^2 + b^2$

   (d) $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **(Bonne réponse)**