Manipuler les vecteurs du plan (solutions)

Laurent Garnier

17 décembre 2025

Table des matières

Première partie

Solutions des exercices du contenu 1

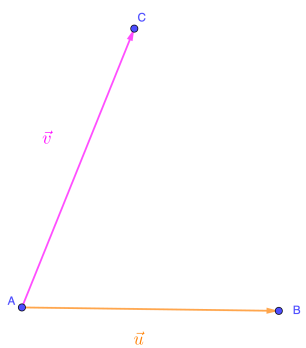
Chapitre 1

Solution de l'exercice 1

Soient les points A, B, C tels que :

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Voir la figure :



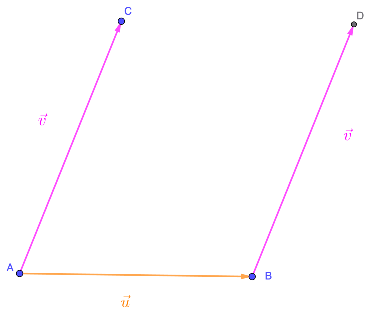
1. L'image du point B par la translation de vecteur

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

est le point D tel que

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$

Voir figure :



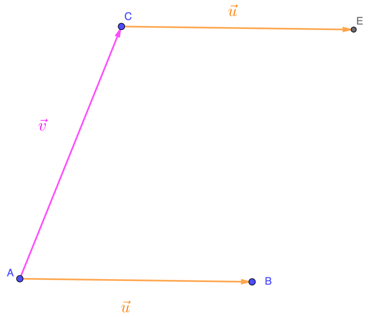
2. L'image du point C par la translation de vecteur

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

est le point E tel que

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$$

Voir figure :



3. On peut en déduire que D = E car :

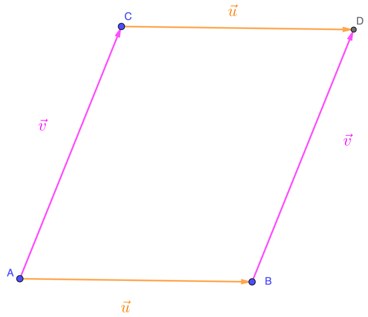
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \vec{v} + \vec{u}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$$

4. ABDC est un parallélogramme car (au choix) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

Une seule égalité suffit.

Voir figure :


C
D
A
B
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{v}$
$\vec{u}$

Chapitre 2

Solution de l'exercice 2

1. Par construction, le point C est l'image de B par la translation de vecteur

   $$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

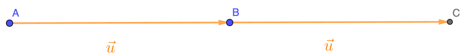
   donc

   $$\overrightarrow{BC} = \vec{u}$$

   Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour

   - direction : la droite (BC), qui est aussi la droite (AB).
   - sens : de B vers C, qui est aussi de A vers B.
   - norme : la longueur BC, qui est aussi la longueur AB

   Voir figure :



2. Le point B représente le milieu du segment [AC].

3. On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} &= \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Chapitre 3

Solution programme 1

```python
print("Un vecteur a 3 caractéristiques fondamentales : ")
entries = ["direction", "norme", "sens"]
definitions = [
    "la droite qui le porte.",
    "la distance entre origine et extrémité.",
    "de l'origine vers l'extrémité."
]
for i in range(len(entries)):
    e, d = entries[i], definitions[i]
    print(f"{i + 1}) {e.capitalize()} : {d}")
```

Chapitre 4

Solution du QCM d'auto-évaluation

Lorsqu'on parle du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'.

1. Quelle est la direction ?

    a. Toute droite parallèle à l'axe des abscisses.
    b. Uniquement la droite (MM').
    c. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées.
    d. Toute droite parallèle à la droite (MM').
    (**Bonne réponse**)

    (a) Quelle est le sens ?

        a. De O à M.
        b. De M à M'.
        (**Bonne réponse**)
        c. De M' à M.
        d. De M à O.

(b) Quelle est la norme ?

a. La distance OM.

b. La distance OM'.

c. La distance MM'.
(Bonne réponse)

d. La distance M'M.
(Bonne réponse)

Deuxième partie

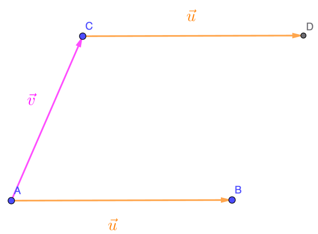
Solutions des exercices du contenu 2

Chapitre 5

Solution de l'exercice 3

1. Puisque D est l'image du point C par la translation de vecteur
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$
alors :
$$\overrightarrow{CD} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
Donc ABDC est un parallélogramme.

Voir figure :



2. On sait que

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$$

donc

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$$
$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{u}$$
$$\vec{w} = \vec{0}$$

Ainsi on remarque que $\vec{w}$ est le vecteur nul.

3. Puisque E est l'image de D par la translation de vecteur

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

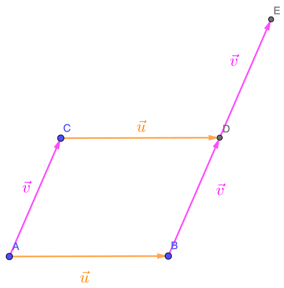
alors

$$\overrightarrow{DE} = \vec{v}$$

donc

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} = \vec{v} - \vec{v}$$
$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

Voir figure :



Chapitre 6

Solution programme 2

```python
msg = "Les vecteurs sont-ils égaux ?"
rep = "\n(O/N) "
msg += rep
egal = input(msg)
if egal.upper() == "O":
    msg = "Les vecteurs sont-ils alignés ?"
    align = input(msg)
    if align.upper() == "N":
        print("C'est un parallélogramme.")
    else:
        print("C'est le même vecteur.")
else:
    print("Les vecteurs ne sont pas colinéaires.")
```

Chapitre 7

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si :

    a. Ils ont la même direction.

    b. Ils ont la même direction et le même sens.

    c. Ils ont la même direction et la même norme.

    d. Ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
    (**Bonne réponse**)

2. On dit qu'un vecteur est nul si :

    a. Sa direction est horizontale.

    b. Sa direction est verticale.

    c. Il va dans un sens puis dans l'autre.

    d. Sa norme vaut zéro.
    (**Bonne réponse**)

Troisième partie

Solutions des exercices du contenu 3

Chapitre 8

Solution de l'exercice 4

1. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Or par construction :

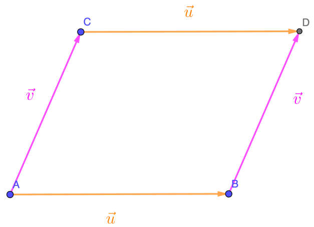
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Donc

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$

Ainsi ABDC est un parallélogramme.

Voir figure :



3. Dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu donc O est le milieu de [AD] et [BC]. Cette information est inutile pour cette question mais elle le sera pour la question suivante.

   En utilisant Chasles ou la question précédente (avec la remarque sur le milieu), on peut trouver plusieurs somme permettant d'obtenir le vecteur $\overrightarrow{AO}$:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO}$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

4. Avant de calculer cette somme vectorielle il faut réarranger l'ordre des vecteurs et utiliser la remarque concernant les milieux. En effet, puisque O est le milieu du segment [AD] alors

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$$

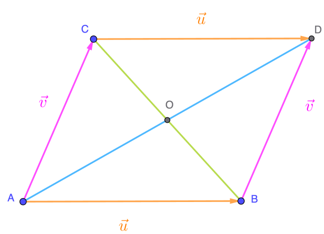
de même puisque O est le milieu du segment [BC] alors

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$$

Voir figure :



Chapitre 9

Solution programme 3

```
abc = """
 C <-- B
 ^    /
 |   /
 |  /
 | /
 A
"""
somme = "Vecteur(A, B) + Vecteur(B, C)"
result = "Vecteur(A, C)"
chasles = somme + " = " + result
print(chasles)
print(abc)
```

Chapitre 10

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Ajouter deux vecteurs revient à :

    a. enchaîner deux translations successives (**Bonne réponse**)

    b. faire une rotation

    c. faire une symétrie

    d. faire une homothétie

2. La relation de Chasles :

    a. augmente la norme d'un vecteur

    b. décompose un vecteur en sommes de vecteurs (**Bonne réponse**)

    c. consiste à passer un coup de fil à Michel

    d. revient à faire une transformation géométrique sur un vecteur

Quatrième partie

Solutions des exercices du contenu 4

Chapitre 11

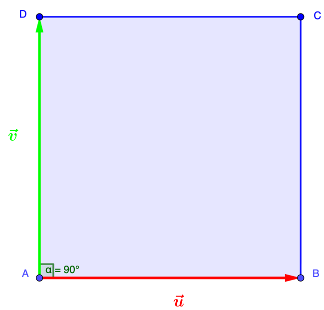
Solution de l'exercice 5

1. Puisque ABCD est un carré alors les droites (AB) et (AD) sont orthogonales et les longueurs AB et AD sont égales. Par conséquent les vecteurs sont associés sont orthogonaux et de même norme. Ainsi

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

est bien une base orthonormée.

Voir figure :



2. Pour déterminer les coordonnées des points dans cette base il faut exprimer les vecteurs partant de l'origine du repère comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base. Tout d'abord il faut remarquer que l'origine du repère est le point A car il s'agit de l'origine de chacun des vecteurs de la base. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA} &= 0 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow A(0;0)\\ \overrightarrow{AB} &= 1 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} \Rightarrow B(1;0)\\ \overrightarrow{AC} &= 1 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow C(1;1)\\ \overrightarrow{AD} &= 0 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} \Rightarrow D(0;1)\end{aligned}$$

3. Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \sqrt{1^2 + 1^2}\\ \overrightarrow{AC} &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Chapitre 12

Solution de l'exercice 5 bis

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

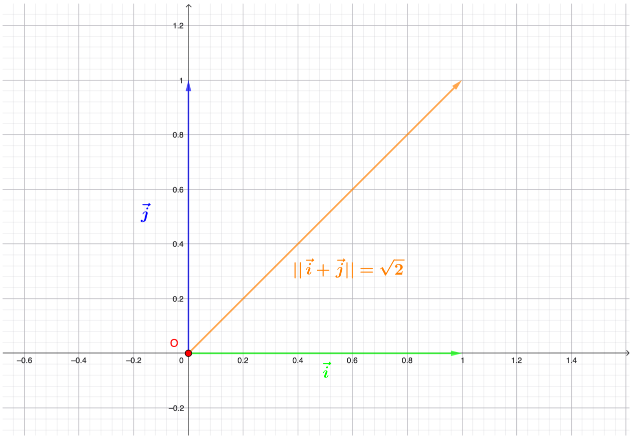
$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les normes des vecteurs suivants :

1.

$$n_1 = ||\vec{i}+\vec{j}||$$
$$n_1 = ||\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}||$$
$$n_1 = \sqrt{1^2+1^2}$$
$$\Rightarrow n_1 = \sqrt{2}$$

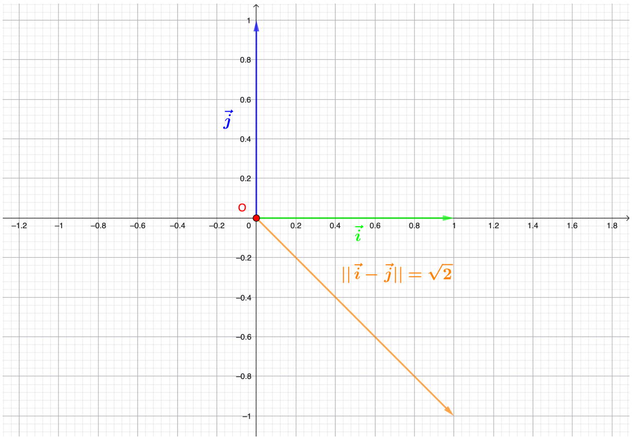
Voir figure :



2.

$$n_2 = ||\vec{i} - \vec{j}||$$
$$n_2 = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}||$$
$$n_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$\Rightarrow n_2 = \sqrt{2}$$

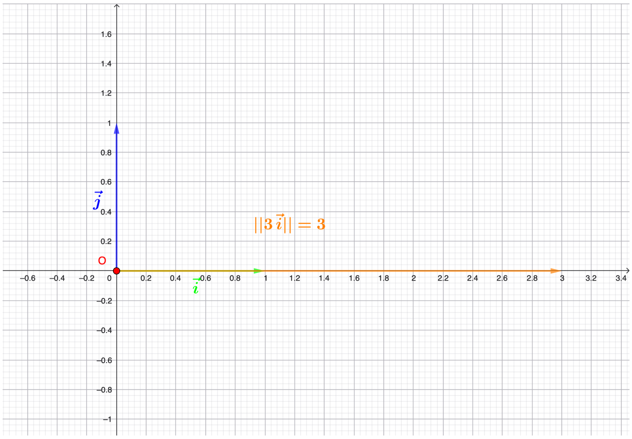
Voir figure :



3.

$$n_3 = ||3\vec{i}||$$
$$n_3 = 3||\vec{i}||$$
$$\Rightarrow n_3 = 3$$

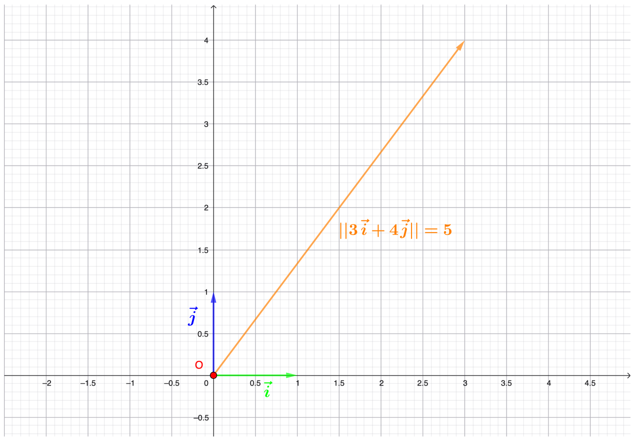
Voir figure :



4.

$$n_4 = ||3\vec{i} + 4\vec{j}||$$
$$n_4 = ||\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}||$$
$$n_4 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$\Rightarrow n_4 = 5$$

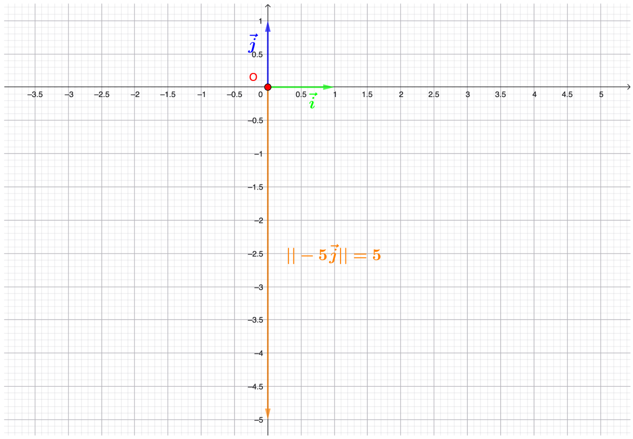
Voir figure :



5.

$$n_5 = ||-5\vec{j}||$$
$$n_5 = |-5|||\vec{j}||$$
$$\Rightarrow n_5 = 5$$

Voir figure :



Chapitre 13

Solution de l'exercice 5 ter

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons et comparons les normes ajoutées séparément

$$s = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

avec celles des vecteurs sommes

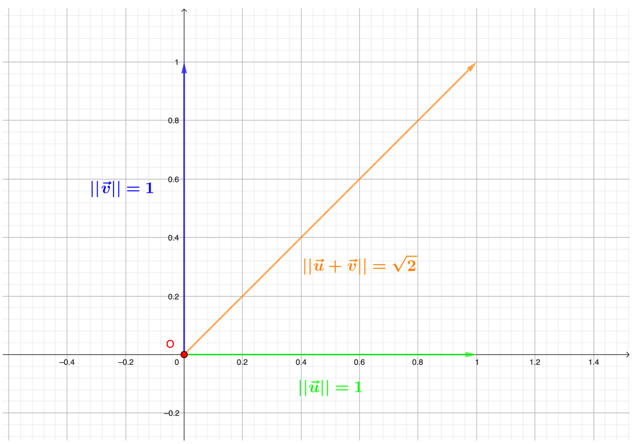
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$

1.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{j})$$

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$$
$$s = 1 + 1 = 2$$
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$
$$e = ||\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}||$$
$$e = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow s = 2 > e = \sqrt{2}$$

Voir figure :

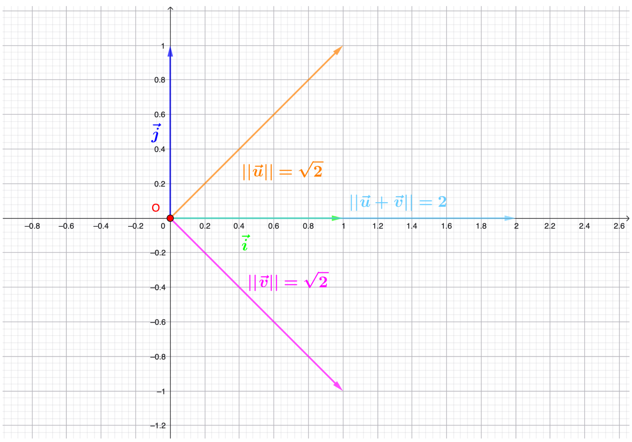


2.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$$

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = \sqrt{2}$$
$$s = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$
$$e = ||2\vec{i}|| = 2||\vec{i}||$$
$$e = 2$$
$$\Rightarrow s = 2\sqrt{2} > e = 2$$

Voir figure :



3.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{i} + b\vec{j}, c\vec{i} + d\vec{j})$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{u}|| &= \sqrt{a^2+b^2} \\
||\vec{v}|| &= \sqrt{c^2+d^2} \\
s &= ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
s^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
e &= ||\vec{u}+\vec{v}|| = ||(a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j}|| \\
e &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
e &= \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)} \\
e^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd) \\
s^2-e^2 &= 2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - (ac+bd)\right) \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2 \\
(ac+bd)^2 &= (ac)^2+(bd)^2+2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad)^2+(bc)^2-2abcd \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= (ad-bc)^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2-e^2 \geqslant 0 \\
&\Rightarrow s^2 \geqslant e^2 \\
&\Rightarrow s \geqslant e
\end{aligned}
$$

Chapitre 14

Solution programme 4

```
base = """On dit que les vecteurs u et v forment une base s'ils ne sont
pas colinéaires.
Algérbiquement : il n'existe aucun réel k tel que u = kv.
Géométriquement : leurs directions sont des droites sécantes.
Rapidement : det(u, v) != 0.\n
"""

draw_base = """
    ^
   / v
  /
 /       (u, v) forme une base
x----------------------------->
          u
"""

orthonormal = """Ortho vient du grec pour dire droit donc ici qui forme un
```

```
angle droit (directions orthogonales). Normal pour norme, ici de même
norme.\n
"""

draw_orthornormal_base = """
      ^
      |    i et j sont orthogonaux
      |    ||i|| = ||j|| ont même norme
      |
      ^    (i, j) forme une base orthonormée
      | j
------0->----------------------------------->
       i
"""

relation = """Si (i, j) est une base orthonormale alors tout vecteur
u = a * i + b * j a pour coordonnées (a, b).\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) s'écrit :
v_1 = 2 * i + 0 * j.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) s'écrit :
v_2 = 0 * i + 3 * j.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (4, 4) s'écrit :
v_3 = 4 * i + 4 * j.\n
Si le vecteurs v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j
a pour coordonnées : (4, 3).\n
"""

v1 = """
^
```

```
|
| --> v_1 = 2 * i
| -> i
|
0->-------->
 i
"""

v2 = """
  ^       ^
  |       |
  |    ^  |
  |    |  |
  ^    j  v_2 = 3 * j
j |
  0---------------->

"""



v3 = """
^  v_3 = 4 * i + 4 * j
|
8      ^ (7, 8)
| v_3 /|
6    / | 4 * j
|   /  |
4--x---> (7, 4)
|  |4i |
2  |   |
|  |   |
0--3---7----->
"""
```

```

v4 = """
  ^      v_4 = 4 * i + 3 * j
  |
  ^    /^
  |   / |
  |  /  | v_2 = 3 * j
  ^ /   ^
j |/    |
  0->--->----------------->
   i
    2 * v_1 = 4 * i
"""

vectors = [v1, v2, v3, v4]

norme = """Un vecteur u = a * i + b * j de coordonnées (a, b) a pour norme
||u|| = sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2) ** 0.5\n
ou dit autrement ||u||^2 = a^2 + b^2\n
Par exemple le vecteur horizontal v_1 de coordonnées (2, 0) a pour norme :
||v_1|| = sqrt{2^2 + 0^2} = sqrt{2^2} = 2.\n
Par exemple le vecteur vertical v_2 de coordonnées (0, 3) a pour norme :
||v_2|| = sqrt{0^2 + 3^2} = sqrt{3^2} = 3.\n
Par exemple le vecteur diagonal v_3 de coordonnées (5, 5) a pour norme :
||v_3|| = sqrt{5^2 + 5^2} = sqrt{2 * 5^2} = 5 * sqrt{2}.\n
Si le vecteur v_4 = 2 * v_1 + v_2 alors v_4 = 4 * i + 3 * j a pour norme :
||v_4|| = sqrt{4^2 + 3^2} = sqrt{16 + 9} = sqrt{25} = sqrt{5^2} = 5.\n
"""
```

```


menu = """
MENU
1) Définition d'une base orthornomée.
2) Relation vectorielle entre coordonnées et vecteurs de la base.
3) Formule de calcul de la norme.
0) Quitter.
"""
titles = [
    "1) Définition d'une base orthonormée",
    "2) Relation vectorielle coordonnées base",
    "3) Norme d'un vecteur"
]
underlines = ["-" * len(t) for t in titles]
continuer = True
while continuer:
    choix = int(input(menu + "\nVotre choix : "))
    if choix == 1:
        print()
        title1 = titles[choix - 1]
        underline1 = underlines[choix - 1]
        print(title1)
        print(underline1)
        print()
        print("Une base orthonormée est une base de vecteurs orthonormaux.")
        print("base :", base)
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
        print(draw_base)
        print("orthonormal :", orthonormal)
        draw = int(input("Taper 1 afficher le dessin\n"))
```

```
        print(draw_orthornormal_base)


    elif choix == 2:
        print()
        title2 = titles[choix - 1]
        underline2 = underlines[choix - 1]
        print(title2)
        print(underline2)
        print()
        print(relation)

        for i in range(len(vectors)):
            msg = f"Taper {i + 1} pour afficher le vecteur v_{i + 1} : "
            dessin = int(input(msg))
            if dessin == i + 1:
                print(vectors[i])

    elif choix == 3:
        print()
        title3 = titles[choix - 1]
        underline3 = underlines[choix - 1]
        print(title3)
        print(underline3)
        print()
        print(norme)

        def ask_coord(axe, c):
            msg = " du vecteur dont vous voulez calculer la norme "
            msg = f"{axe} {msg} {c} = "
            return msg

        x = float(input(ask_coord("Abscisse", "x")))
```

```
        y = float(input(ask_coord("Ordonnée", "y")))
        n = (x ** 2 + y ** 2) ** 0.5
        print(f"Norme à 2 décimales près n = {n:.2f}")

    elif choix == 0:
        continuer = False

```

Chapitre 15

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Une base orthonormée du plan est :

   a. une station de lancement de fusée

   b. un couple de vecteurs ayant des directions distinctes

   c. un couple de vecteurs ayant des directions orthogonales et la même norme

   (**Bonne réponse**)

   d. un couple de vecteurs ayant la même direction et la même norme

2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$?

   a. Le couple de nombres $(a; b)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

   (**Bonne réponse**)

   b. Les coordonnées du point M obtenu par la translation de vecteur $\vec{u}$ à partir du point O.

c. La somme de celles des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

d. Les coefficients de toute combinaison linéaire des vecteurs de la base.

3. Considérons le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors l'expression de sa norme est :

   a. $||\vec{u}|| = a + b$

   b. $||\vec{u}|| = a^2 - b^2$

   c. $||\vec{u}|| = a^2 + b^2$

   d. $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$

   (**Bonne réponse**)

Cinquième partie

Solutions des exercices du contenu 5

Chapitre 16

Solution de l'exercice 6

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont les mêmes que celles du point A d'où la relation :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sont les mêmes que celles du point B d'où la relation :

$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

3. Utilisons la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

4. On rassemble les résultats obtenus aux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{AB} &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) \\
\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}
\end{aligned}$$

5. Ainsi on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Chapitre 17

Solution du programme 5

```
print("Coordonnées du vecteur AB")
print("x_{AB} = x_B - x_A")
print("y_{AB} = y_B - y_A")
x_A = float(input("x_A = "))
y_A = float(input("y_A = "))
x_B = float(input("x_B = "))
y_B = float(input("y_B = "))
x_AB = x_B - x_A
y_AB = y_B - y_A
print(f"x_AB = {x_AB:.2f}")
print(f"y_AB = {y_AB:.2f}")
```

Chapitre 18

Solution du QCM d'auto-évaluation

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. En utilisant Chasles on peut écrire :

   a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$
   d. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

      (Bonne réponse)

2. En utilisant les coordonnées des points A et B on a :

   a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$
   b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
(Bonne réponse)

d. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A \times x_B \\ y_A \times y_B \end{pmatrix}$

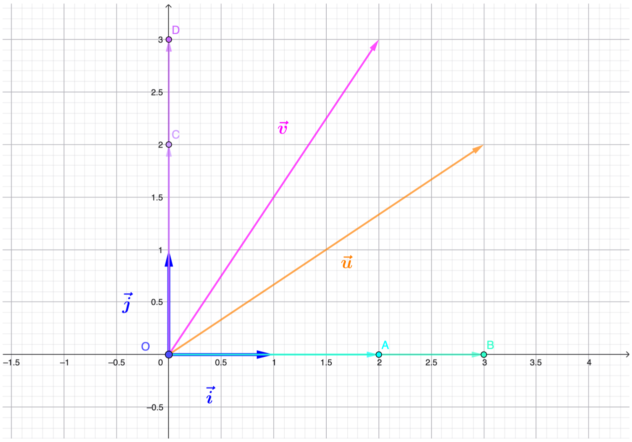
Sixième partie

Solutions des exercices du contenu 6

Chapitre 19

Solution de l'exercice 7

1. Voir figure :



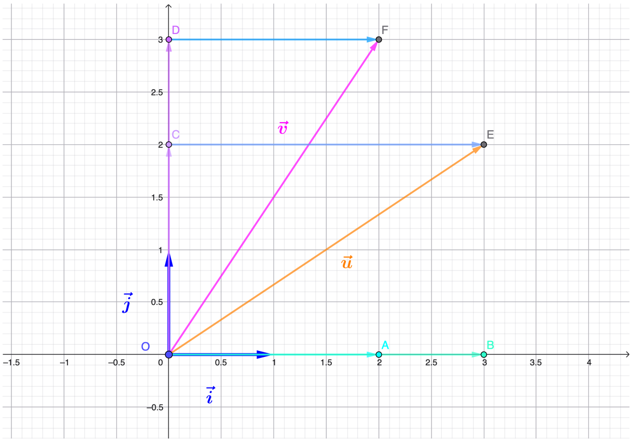
2. On peut voir sur la figure que les points A et B sont sur l'axe des abscisses donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Concrètement :
$$\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$$

3. De même on peut voir sur la figure que les points C et D sont sur l'axe des ordonnées donc les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$

sont colinéaires. Concrètement :

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$$

4. Voir figure :



5. D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} \\
\overrightarrow{DF} &= \vec{v} - 3\vec{j} \\
\overrightarrow{DF} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{j} \\
\overrightarrow{DF} &= 2\vec{i}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} \\
\overrightarrow{CE} &= \vec{u} - 2\vec{j} \\
\overrightarrow{CE} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{j} \\
\overrightarrow{CE} &= 3\vec{i}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DF}$$

Chapitre 20

Solution du programme 6

```python
x_u = float(input("Abscisse du 1er vecteur = "))
y_u = float(input("Ordonnée du 1er vecteur = "))
x_v = float(input("Abscisse du 2e vecteur = "))
y_v = float(input("Ordonnée du 2e vecteur = "))
d = x_u * y_v - x_v * y_u
if d == 0:
    print("Les vecteurs sont colinéaires.")
    k = x_v / x_u
    print(f"Vecteur 2 = {k} * Vecteur 1")
else:
    print("Les vecteurs ne sont pas colinéaires.")
    print("Ils forment donc une base.")
```

Chapitre 21

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à 1 alors :

    a. Le vecteur change de direction.

    b. Le vecteur augmente sa norme.
    (**Bonne réponse**)

    c. Le vecteur change de sens.

    d. Le vecteur reste identique.

2. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel inférieur à -1 alors :

    a. Le vecteur change de direction.

    b. Le vecteur augmente sa norme.
    (**Bonne réponse**)

    c. Le vecteur change de sens.
    (**Bonne réponse**)

   d. Le vecteur reste identique.

3. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à -1 et inférieur à 1 alors :

   a. Le vecteur change de direction.
   b. Le vecteur diminue sa norme.
      (**Bonne réponse**)
   c. Le vecteur change de sens.
   d. Le vecteur reste identique.

4. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel alors :

   a. Le vecteur obtenu n'est pas colinéaire au vecteur initial.
   b. Le vecteur obtenu est colinéaire au vecteur initial.
      (**Bonne réponse**)

Septième partie

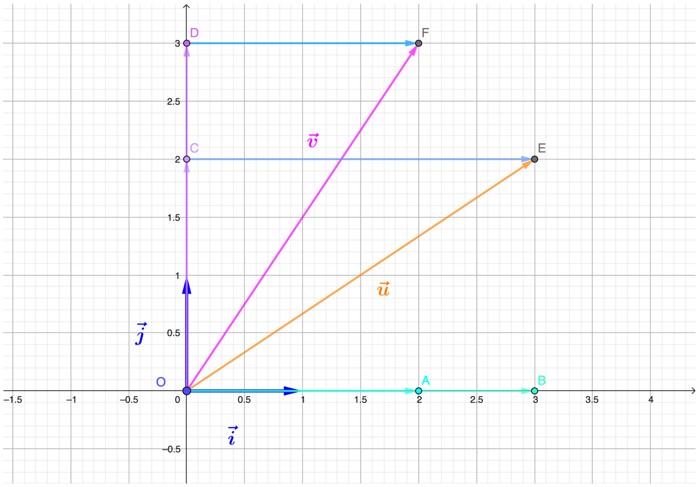
Solutions des exercices du contenu 7

Chapitre 22

Solution de l'exercice 8

On reprend la configuration finale de l'exercice 7.

Voir figure :



1. Calculs de déterminants :

$$d_1 = det(\vec{i},\vec{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

$$d_2 = det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$$

$$d_3 = det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 0 \times 3 = 0$$

$$d_4 = det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times 3 - 2 \times 0 = 0$$

$$d_5 = det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4$$

$$d_6 = det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 0 \times 0 = 9$$

2. En utilisant le déterminant montrons que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires :

$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = 2 \times 0 - 0 \times 3$$

$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = 0$$

Or $||\overrightarrow{DF}|| = 2$ et $||\overrightarrow{CE}|| = 3$.

On en déduit que le quadrilatère DCEF est un trapèze.

3. Faisons de même pour $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et le quadrilatère ABEF.

$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = 0 \times 2 - 3 \times 0$$
$$det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}) = 0$$

   Or $||\overrightarrow{AF}|| = 3$ et $||\overrightarrow{BE}|| = 2$.

   On en déduit que le quadrilatère ABFE est un trapèze.

4. Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{JE}$:

$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{10}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(x_E - x_J)^2 + (y_E - y_J)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{10}$$

5. Comparons les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \vec{j} - \vec{i}$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\overrightarrow{EF} = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\overrightarrow{EF} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$\overrightarrow{EF} = \vec{j} - \vec{i}$$

   Ainsi

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF}$$

Le quadrilatère IEFJ est donc un parallélogramme. Or d'après la question précédente ses diagonales [IF] et [JE] sont égales. Par conséquent IEFJ est un rectangle.

6. Puisque G l'intersection des segments [IF] et [JE] et que ce sont les diagonales d'un rectangle alors G est leur milieu. Déterminons ses coordonnées :

$$G\begin{pmatrix}\frac{x_I+x_F}{2}\\ \frac{y_I+y_F}{2}\end{pmatrix}$$
$$G\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Le point H est tel que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$ alors en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$$

Ainsi on obtient les coordonnées de H en doublant celles de G, H(3 ; 3). Étudions la nature du quadrilatère OBHD :

$$\overrightarrow{OH} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OD} = 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

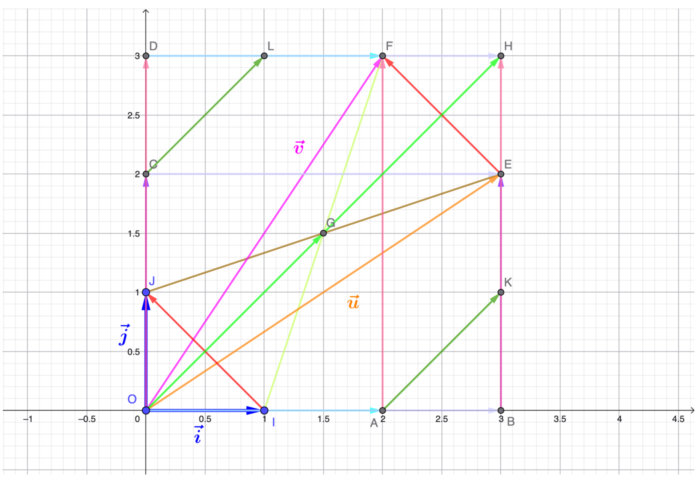
On vient de prouver que OBHD est un carré. Pourquoi ? Parce que $\overrightarrow{OH}$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux de même norme.

7. Le triangle OFE est isocèle en O car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont

même norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

8. D'après la question 6 on sait que OBHD est un carré et que G est le milieu de la diagonale OH. Par conséquent G est aussi le milieu de la diagonale BD. Ainsi l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$ est D.
9. Le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \vec{j}$ a pour coordonnées K(3 ; 1).
10. Le point L tel que $\overrightarrow{DL} = \vec{i}$ a pour coordonnées L(1 ; 3).



Chapitre 23

Solution du programme 7

```python
def abc_aligned():
  points = []

  for i in range(3):
    x = float(input(f"Abscisse du {i + 1}e point = "))
    y = float(input(f"Ordonnée du {i + 1}e point = "))
    points.append((x, y))

  x_p1p2 = points[1][0] - points[0][0]
  y_p1p2 = points[1][1] - points[0][1]
  x_p1p3 = points[2][0] - points[0][0]
  y_p1p3 = points[2][1] - points[0][1]

  det = x_p1p2 * y_p1p3 - x_p1p3 * y_p1p2

  if det == 0:
    return True
  else:
    return False
```

```
# Test
if abc_aligned():
  print("Les points sont alignés.")
else:
  print("Les points ne sont pas alignés.")

```

Chapitre 24

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Considérons les vecteurs

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

alors :

a.

$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

b.

$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

c.
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 + y_1x_2$$

d.
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

(Bonne réponse)

2. Considérons les mêmes vecteurs que précédemment.

   On dira que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si :

   a. $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$
   b. $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$
      (Bonne réponse)
   c. il existe un réel k tel que $x_1 = kx_2$ et $y_1 = ky_2$
      (Bonne réponse)
   d. $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$
      (Bonne réponse)

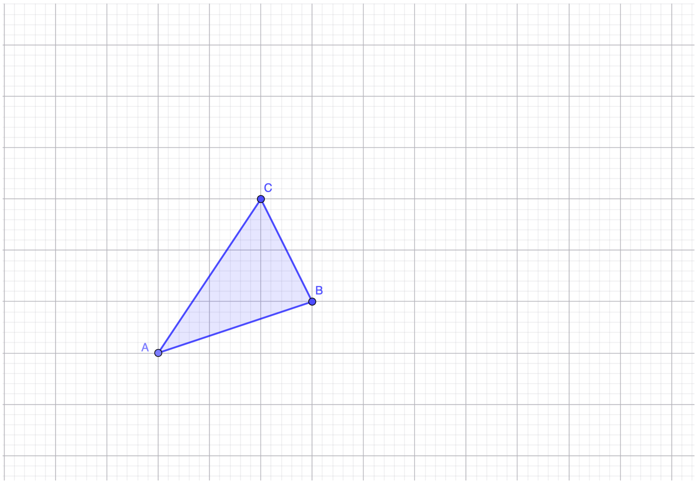
Huitième partie

Solutions des exercices de la Ca_1

Chapitre 25

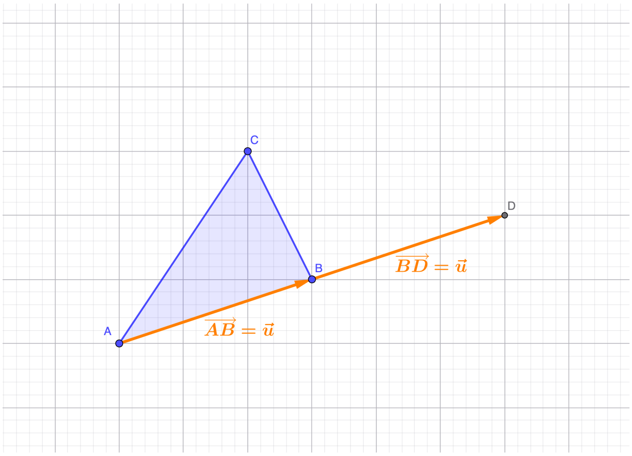
Solution de l'exercice 9

On considère le triangle ABC représenté sur la figure avec le quadrillage :



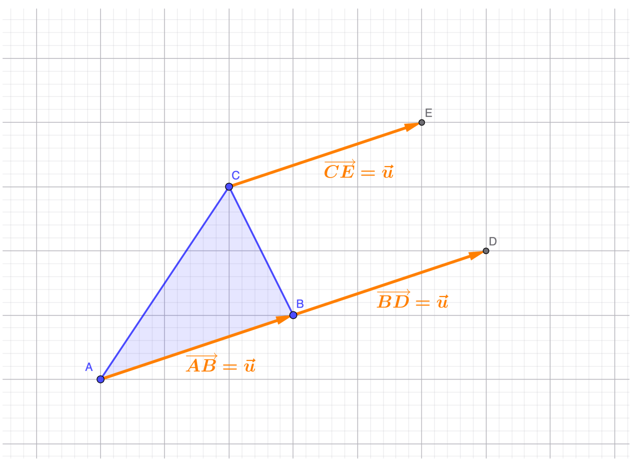
1. Pour construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ il faut d'abord comprendre que D est le symétrique de A par rapport à B. Ou, dit autrement, B est le milieu de [AD].

   Voir figure :



2. Pour construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ il faut bien comprendre que l'on complète le triangle pour obtenir un parallélogramme.

   Voir figure :

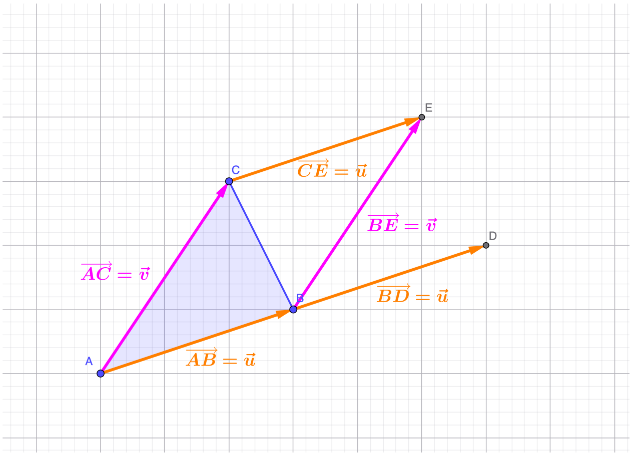


3. Utilisons la relation de Chasles pour décomposer le vecteur

$\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$$

Voir figure :



Chapitre 26

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Un vecteur est caractérisé par :

   a. Sa longueur uniquement

   b. Sa direction et son sens uniquement

   c. Sa direction, son sens et sa norme
   (**Bonne réponse**)

   d. Son origine et son extrémité

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

   a. A = C et B = D
   (**Bonne réponse**)

   b. ABDC est un parallélogramme
   (**Bonne réponse**)

   c. AB = CD (distances égales)

   d. Les segments [AB] et [CD] sont parallèles

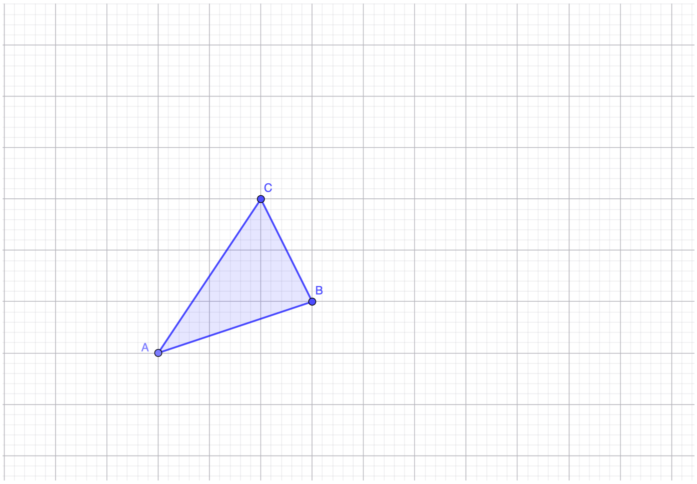
Neuvième partie

Solutions des exercices de la Ca_2

Chapitre 27

Solution de l'exercice 10

On considère la configuration initiale de l'exercice 9 voir figure :



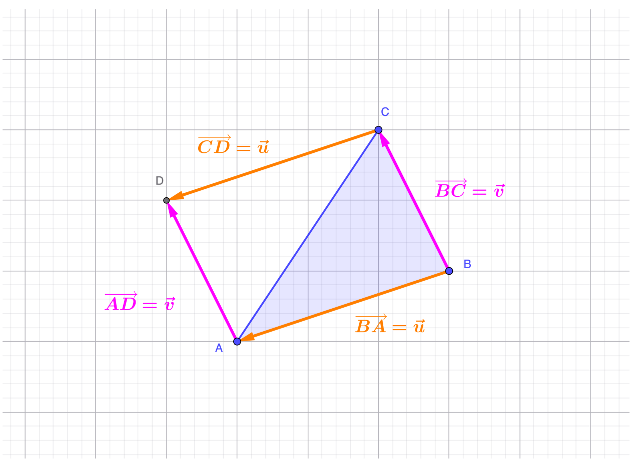
1. Pour construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ il faut reporter le vecteur $\overrightarrow{BA}$ à partir du point C.

2. On en déduit que le quadrilatère ABCD est un parallélo-

gramme. En effet :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Voir figure :



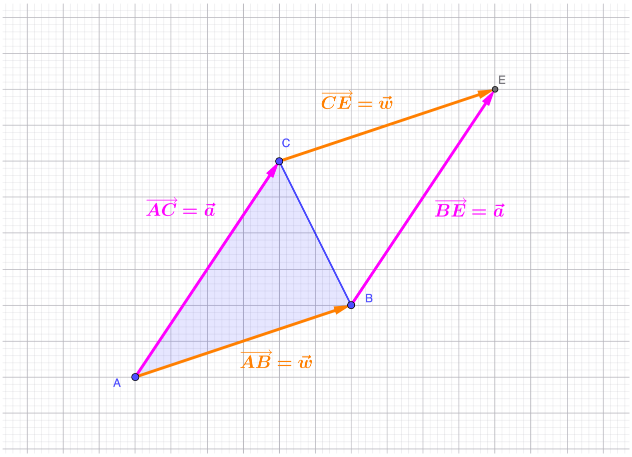
3. Construisons le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ de façon similaire à la question 1.

4. On en déduit que le quadrilatère ABEC est un parallélo-

gramme de façon similaire à la question 2. En effet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}
\end{aligned}$$

Voir figure :



Chapitre 28

Solution du QCM d'auto-évaluation

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Pour construire géométriquement la somme il faut :

   a. partir de l'origine du vecteur $\vec{u}$ puis, arrivé à son extrémité appliquer le vecteur $\vec{v}$

   (**Bonne réponse**)

   b. partir de l'origine du vecteur $\vec{v}$ puis, arrivé à son extrémité appliquer le vecteur $\vec{u}$

   (**Bonne réponse**)

   c. les deux propositions précédentes aboutissent au même résultat

   (**Bonne réponse**)

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$:

   a. est un vecteur ayant même direction que $\vec{u}$ et $\vec{v}$

b. représente la diagonale du parallélogramme obtenu en faisant partir $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la même origine

(**Bonne réponse**)

Dixième partie

Solutions des exercices de la Ca_3

Chapitre 29

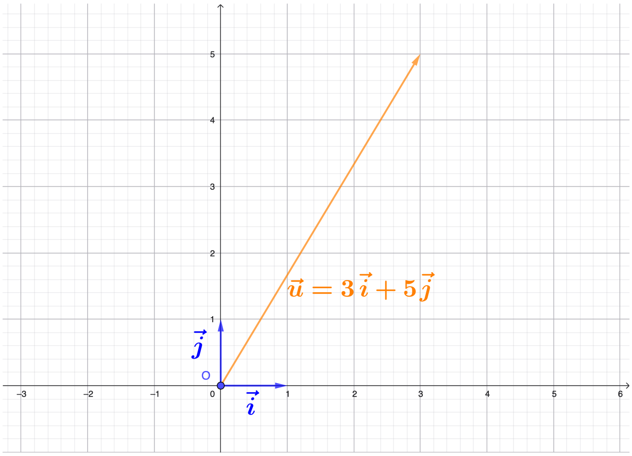
Solution de l'exercice 11

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Avec :

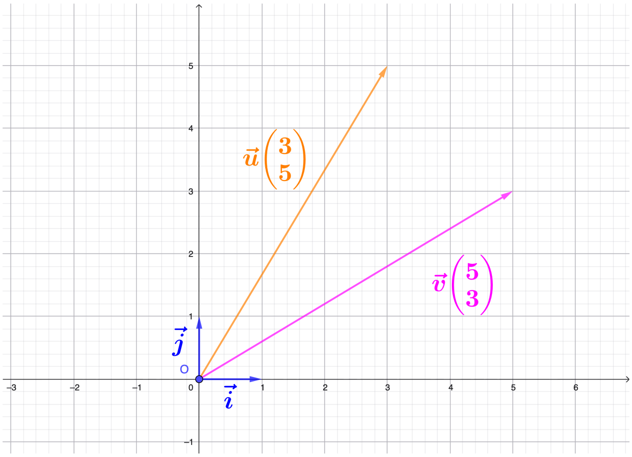
$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1. Représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Voir figure :



2. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sur la figure :



On peut voir sur la figure que :

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

Ainsi les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

Chapitre 30

Solution du QCM d'auto-évaluation

Considérons le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors :

1. Pour le représenter dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

   a. on se place au point M de coordonnées (a ; b) et on trace le vecteur en se déplaçant de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical.

   b. partant de l'origine du repère on se déplace de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical. (**Bonne réponse**)

2. Pour lire les cordonnées d'un vecteur $\vec{v}$:

   a. on se place à son origine et on reporte les coordonnées du point

   b. on trace un représentant du vecteur en partant de l'origine du repère et on lit les coordonnées de son extrémité

(**Bonne réponse**)

Onzième partie

Solutions des exercices de la Ca_4

Chapitre 31

Solution de l'exercice 12

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{s}=\vec{i}+\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}=3\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}=2\vec{s}-5\vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

Chapitre 32

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Soients

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs alors

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

a pour coordonnées :

a. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(Bonne réponse)

d. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{y_1}{y_2} \end{pmatrix}$

2. Soient un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et un réel k alors $\vec{v} = ku$ vérifie :

a. $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$

b. $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$

c. $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$

(Bonne réponse)

d. $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{k}x \\ \frac{1}{k}y \end{pmatrix}$

Douzième partie

Solutions des exercices de la Ca_5

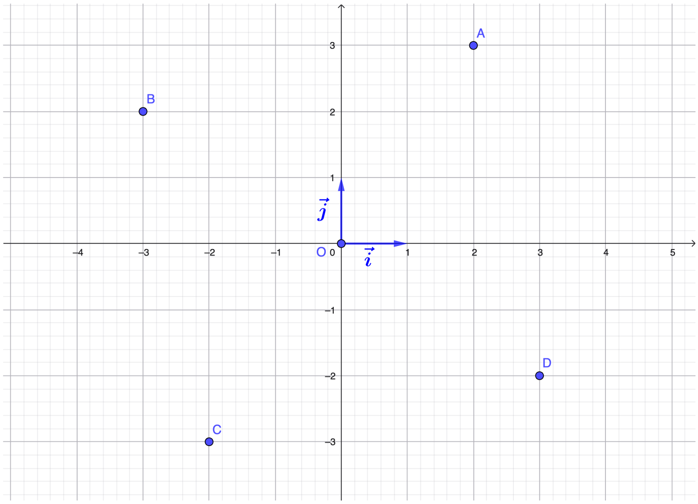
Chapitre 33

Solution de l'exercice 13

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

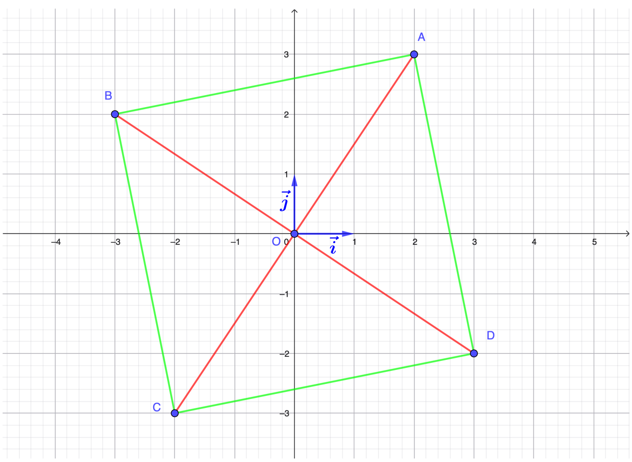
On considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) et D(3 ; -2) tels que sur la figure :



1. Calculs des distances AB, AC, AD, BC, BD, CD :

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52}$$
$$AD = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$BC = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{26}$$
$$BD = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52}$$
$$CD = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

Voir figure :

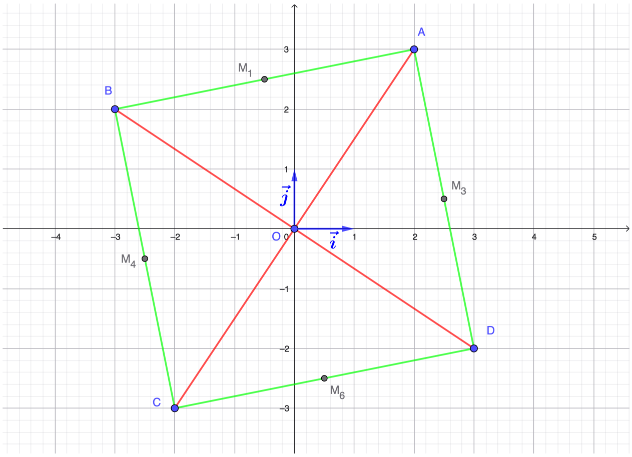


2. Calculs des coordonnées des milieux des segments [AB],

[AC], [AD], [BC], [BD], [CD] :

$$M_1\begin{pmatrix}\frac{2+(-3)}{2}\\ \frac{3+2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$
$$M_2\begin{pmatrix}\frac{2+(-2)}{2}\\ \frac{3+(-3)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=O$$
$$M_3\begin{pmatrix}\frac{2+3}{2}\\ \frac{3+(-2)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$M_4\begin{pmatrix}\frac{(-3)+(-2)}{2}\\ \frac{2+(-3)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$M_5\begin{pmatrix}\frac{(-3)+3}{2}\\ \frac{2+(-2)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=O$$
$$M_6\begin{pmatrix}\frac{(-2)+3}{2}\\ \frac{(-3)+(-2)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Voir figure :



Chapitre 34

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. La distance entre $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ vaut :

   a. $AB = x_A x_B + y_A y_B$
   b. $AB = (x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2$
   c. $AB = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$
   d. $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
   (Bonne réponse)

2. Le milieu $M(x_M; y_M)$ du segment [AB] vérifie :

   a. $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
   (Bonne réponse)
   b. $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A - x_B}{2}; \frac{y_A - y_B}{2}\right)$
   c. $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A \times x_B}{2}; \frac{y_A \times y_B}{2}\right)$
   d. $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A \div x_B}{2}; \frac{y_A \div y_B}{2}\right)$

Treizième partie

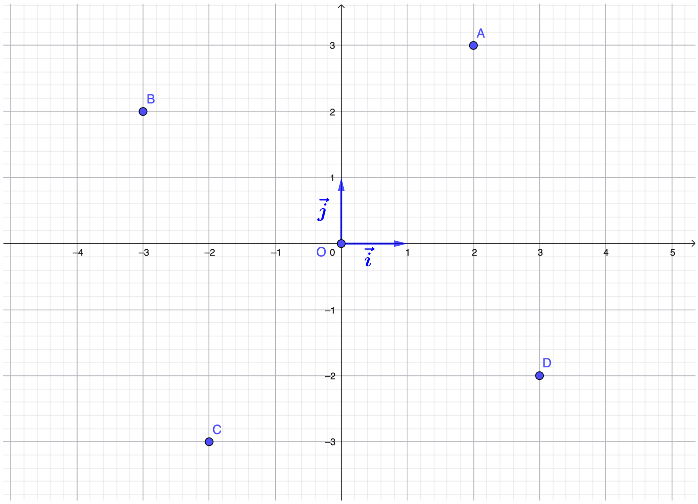
Solutions des exercices de la Ca_6

Chapitre 35

Solution de l'exercice 14

On reprend la configuration de l'exercice précédent.

Voir la figure :

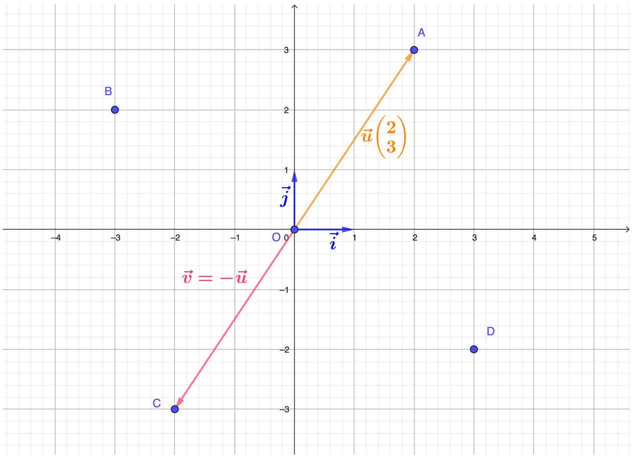


1. Le point O étant l'origine du repère on peut facilement déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ et ainsi

déterminer si les points A, O et C sont alignés :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$$

Voir figure :



2. D'après ce qui précède on a :

$$||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{OA}|| = ||\overrightarrow{OC}||$$
$$||\vec{u}|| = \sqrt{13}$$

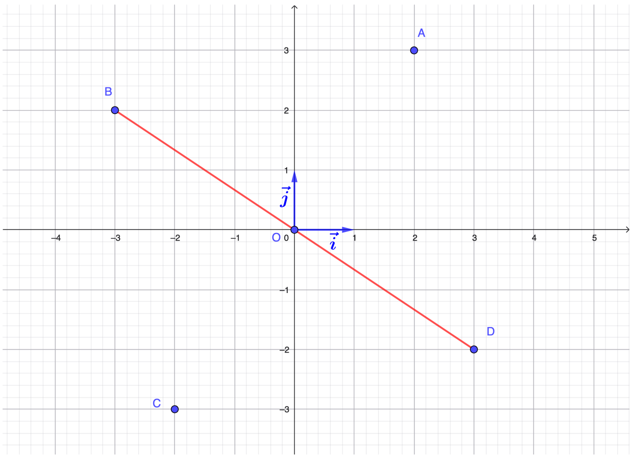
On en déduit que O est le milieu du segment [AC].

3. Calculons le déterminant $det(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$:

$$det(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-2) \times (-3) = 0$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Puisqu'ils ont la même origine on en déduit que les points B, O et D sont alignés.

Voir figure :

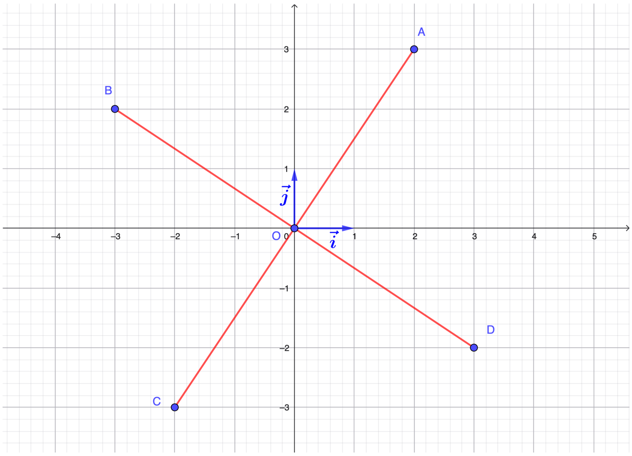


4. Comparons OB et OD :

$$OB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$OD = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$OB = OD$$

On en déduit que O est le milieu de [BD] et donc que ABCD est un rectangle car ses diagonales sont de même longueur $2\sqrt{13} = \sqrt{52}$.

Voir figure :

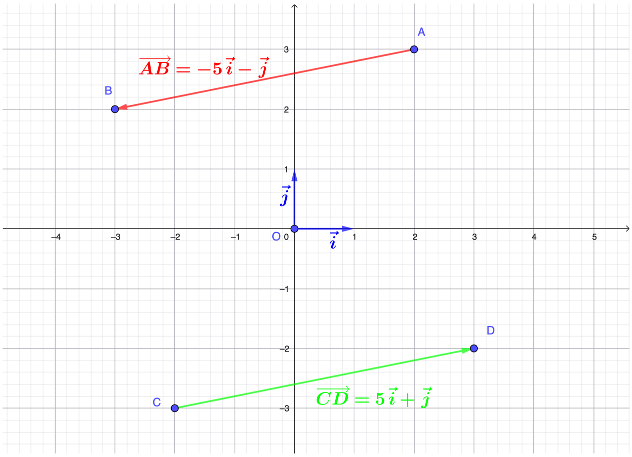


5. Puisque ABCD est un rectangle, c'est donc un parallélogramme donc on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

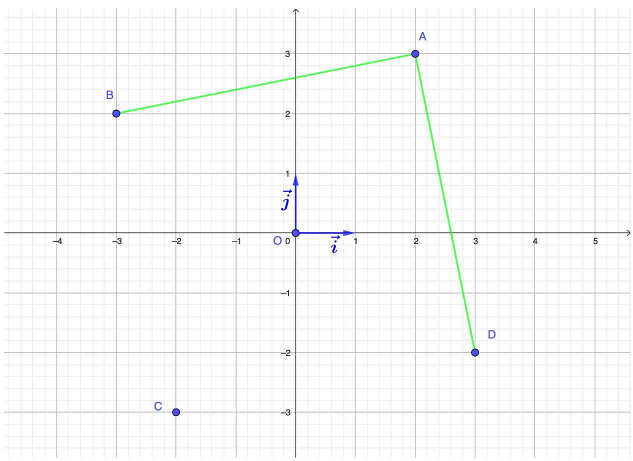
Voir figure :



6. Comparons AB et AD :

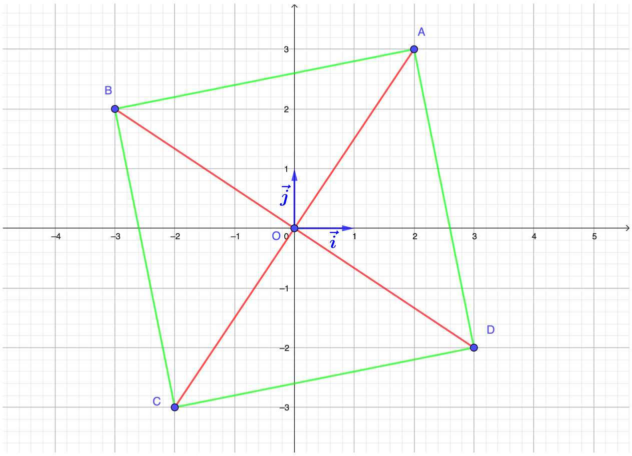
$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$AD = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$$
$$AB = AD$$

Voir figure :



7. Le quadrilatère ABCD est un carré car c'est un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Voir figure :


A
B
C
D
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$

Chapitre 36

Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Pour montrer que A, B et C sont alignés il faut :

   a. que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

   b. qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
   (Bonne réponse)

   c. vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

   d. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
   (Bonne réponse)

2. Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles il faut :

   a. montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
   (Bonne réponse)

   b. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$
   (Bonne réponse)

   c. montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

d. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$

Quatorzième partie

Solutions pour la Ca_7

Chapitre 37

Solution de l'exercice 15

Pour chacune des situations suivantes, indiquons comment la résoudre selon la représentation vectorielle parmi :

- Analytique (coordonnées, calculs algébriques)
- Colinéarité (proportionnalité, déterminant)
- Géométrique (relation de Chasles, parallélogramme)

1. Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

    - Analytique : à l'aide des coordonnées de chaque point on peut calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifier si les vecteurs sont colinéaires ou pas.
    - Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la décomposition de Chasles on peut calculer le déterminant ou établir une relation du type $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ si les vecteurs sont colinéaires.
    - Géométrique : la relation de Chasles nous permet d'établie si la relation $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ existe ou pas

2. Calculer la distance entre deux points A(2 ;3) et B(5 ;7)

   - Analytique : on applique la formule (qui découle de Pythagore)
   - Colinéarité : pour ce type de problème la colinéarité est inutile
   - Géométrique : pour ce type de problème ni Chasles ni les identités du parallélogramme ne peuvent servir

3. Montrer que ABCD est un parallélogramme

   - Analytique : à l'aide des coordonnées on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle

     $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

     ou pas.
   - Colinéarité : à l'aide des coordonnées ou de la relation de Chasles on peut vérifier si on a l'égalité vectorielle

     $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

     ou pas. On peut également calculer les deux déterminants importants

     $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \quad det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$$

   - Géométrique : en utilisant Chasles on peut vérifier si on obtient la relation

     $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

4. Trouver les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

   - Analytique : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on résout les deux équations pour obtenir les coordonnées du points M(x ; y). Concrètement :

$$\begin{aligned} x - x_A &= 2(x_B - x_A) + 3(x_C - x_A) \\ y - y_A &= 2(y_B - y_A) + 3(y_C - y_A) \\ x &= -4x_A + 2x_B + 3x_C \\ y &= -4y_A + 2y_B + 3y_C \end{aligned}$$

   - Colinéarité : on ne peut pas obtenir les coordonnées du point M uniquement avec le déterminant.
   - Géométrique : on peut construire le point M grâce à la relation vectorielle puis en utilisant Chasles on peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

5. Vérifier si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles

   - Analytique : on peut comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
   - Colinéarité : on peut calculer le déterminant $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ et voir s'il est nul ou pas
   - Géométrique : on peut vérifier si on obtient une identité du parallélogramme ou pas

Chapitre 38

Solution du programme

Écrire un programme Python qui résout le problème

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

C'est-à-dire un programme qui permet d'exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres a et b et des coordonnées des points déjà existants A, B, et C.

```
def get_M(a, b, A, B, C):
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    + a : 1 float correspondant au coefficient du
      vecteur AB
    + b : 1 float correspondant au coefficient du
      vecteur AC
    + A : 1 tuple de float correspondant aux
      coordonnées du point A
    + B : 1 tuple de float correspondant aux
      coordonnées du point B
    + C : 1 tuple de float correspondant aux
      coordonnées du point C
```

```python
    et elle renvoie 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point M
    """
    x = (1 - a - b) * A[0] + a * B[0] + b * C[0]
    y = (1 - a - b) * A[1] + a * B[1] + b * C[1]
    return (x, y)


def vectAB(A, B):
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    + A : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point A
    + B : 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du point B
    et renvoie 1 tuple de float correspondant aux coordonnées du vecteur AB
    """
    x = B[0] - A[0]
    y = B[1] - A[1]
    return (x, y)


# Tests
a, b, A, B, C = 1, 1, (3, 2), (-3, 2), (3, -2)
M = get_M(a, b, A, B, C)
relation = f"On a la relation Vect(A, M) = {a}Vect(A, B) + {b}Vect(A, C)"
print(relation)
input("Pour voir les coordonnées du point M tapez 1\t")
coordM = f"Voici les coordonnées du point M({M[0]}, {M[1]})"
print(coordM)
coordAB = vectAB(A, B)
coordAC = vectAB(A, B = C)
```

```
eqX = f"x - {A[0]} = {a} * {coordAB[0]} + {b} *
    {coordAC[0]}"
input("Pour voir l'équation en x tapez 1\t")
print(eqX)
eqY = f"y - {A[1]} = {a} * {coordAB[1]} + {b} *
    {coordAC[1]}"
input("Pour voir l'équation en y tapez 1\t")
print(eqY)
solve_x = f"x = {A[0] + a * coordAB[0] + b *
    coordAC[0]}"
input("Pour voir la solution de l'équation en x tapez
    1\t")
print(solve_x)
solve_y = f"y = {A[1] + a * coordAB[1] + b *
    coordAC[1]}"
input("Pour voir la solution de l'équation en y tapez
    1\t")
print(solve_y)
```

Chapitre 39

Solution du QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Si ABC est un triangle et que D est un 4ème point qui vérifie l'égalité
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
alors on peut en déduire que :
   a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ la relation de Chasles n'est pas une déduction, elle existe toujours
   b. ABCD est un parallélogramme
   c. ABDC est un parallélogramme
   (Bonne réponse)
   d. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ les deux égalités sont vraies
   (Bonne réponse)
   e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ une seule des deux égalités est vraie

f. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ aucune des égalités n'est vraie

g. le point D est à l'intérieur du triangle ABC

h. le point D est l'image du point A par la symétrie de centre le milieu du segment [BC]

(Bonne réponse)

i. le point D est à l'extérieur du triangle ABC

(Bonne réponse)

j. le point D est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu du segment [BC]

(Bonne réponse)

2. Si ABCD est un carré alors :

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base orthonormée

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base orthonormée

(Bonne réponse)

c. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

d. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

e. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

f. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

g. $AC^2 = AB^2 + BC^2$

(Bonne réponse)

h. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

i. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

(Bonne réponse)

j. Le centre O du carré vérifie

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

(**Bonne réponse**)

3. Si ABCD est un rectangle et O l'intersection des droites (AC) et (BD) alors :

a. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

(**Bonne réponse**)

b. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(**Bonne réponse**)

c. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

d. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

e. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

f. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

g. $AC > AB + BC$

h. $AC < AB + AD$

(**Bonne réponse**)

i. $AC = BD$

(**Bonne réponse**)

j. $AC \neq BD$

4. Soient A et B deux points distincts du plan. Si C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors :

a. B est le milieu du segment [AC]

(**Bonne réponse**)

b. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

c. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

d. les coordonnées de C vérifient :

$$x_C = 2x_B - x_A$$
$$y_C = 2y_B - y_A$$

e. les coordonnées de C vérifient :

$$x_C = 2x_B + x_A$$
$$y_C = 2y_B + y_A$$

(**Bonne réponse**)

f. C est l'image de A par la symétrie de centre B.

(**Bonne réponse**)

g. C est le milieu du segment [AB].

h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

(**Bonne réponse**)

i. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

(**Bonne réponse**)

j. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

(**Bonne réponse**)

5. Si on a $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0$ alors :

a. ABCD ou ABDC est un trapèze.

(**Bonne réponse**)

b. Si AB = DC alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme.

(**Bonne réponse**)

c. Si AB = AD = DC alors ABCD est un losange.
(**Bonne réponse**)

d. Si AB = AC = CD alors ABDC est un losange.
(**Bonne réponse**)

e. Si AB = DC et CA = BD alors ABDC est un rectangle.

f. Si AB = DC et AD = BC alors ABDC est un rectangle.

g. Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un rectangle.
(**Bonne réponse**)

h. Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un rectangle.

i. Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un losange.

j. Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un losange.
(**Bonne réponse**)

6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

a. Si $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{w}||$ alors les trois vecteurs sont colinéaires.

b. Il est impossible que les trois vecteurs soient colinéaires.

c. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors les trois vecteurs sont colinéaires.

d. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors $det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

e. Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

f. $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| > ||\vec{w}||$

g. $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| < ||\vec{w}||$

h. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{u} = \vec{0}$ soit $\vec{v} = \vec{0}$

i. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{w} = \vec{u}$ soit $\vec{w} = \vec{v}$

j. Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors soit $\vec{u} = -\vec{v}$ soit $\vec{w} = \vec{0}$

7. Soit un vecteur $\vec{u}$ de norme $||\vec{u}|| = 5$.

   a. Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.

   b. Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.

   c. Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.

   d. Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.

   e. Si $x_{\vec{u}} = \pm 3$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 4$.

      (**Bonne réponse**)

   f. Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.

   g. Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.

   h. Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.

   i. Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.

   j. Si $x_{\vec{u}} = \pm 4$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 3$.

      (**Bonne réponse**)

8. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(3 ; 2), B(3 ; -2), C(-3 ; -2), D(3 ; -1), E(-3 ; -1), F(-1 ; -1), G(1 ; 1), H(1 ; 2), I(-1 ; 2).

   a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car

   $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car

   $$det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}) = 0$$

   c. Les points A, B et C sont alignés.

   d. Les points D, E et F sont alignés.

      (**Bonne réponse**)

e. ABC est un triangle rectangle en B.
   (**Bonne réponse**)
f. ABD est un triangle rectangle en B.
g. GDF est un triangle rectangle en G.
   (**Bonne réponse**)
h. GDF est un triangle isocèle en G.
   (**Bonne réponse**)
i. BCHA est un trapèze.
   (**Bonne réponse**)
j. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
   (**Bonne réponse**)

9. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) ; D(3 ; -2).

   a. Le triangle BOA est isocèle en A.
   b. Le triangle BOA est isocèle en B.
   c. Le triangle BOA est isocèle en O.
      (**Bonne réponse**)
   d. Le triangle BOA est rectangle en A.
   e. Le triangle BOA est rectangle en B.
   f. Le triangle BOA est rectangle en O.
      (**Bonne réponse**)
   g. C est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
      (**Bonne réponse**)
   h. D est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
      (**Bonne réponse**)
   i. ABDC est un carré.

j. ABCD est un carré.

   (**Bonne réponse**)

Quinzième partie

Solutions des exercices complémentaires

Chapitre 40

Pour s'exercer davantage

40.1 Solution exercice 16

On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

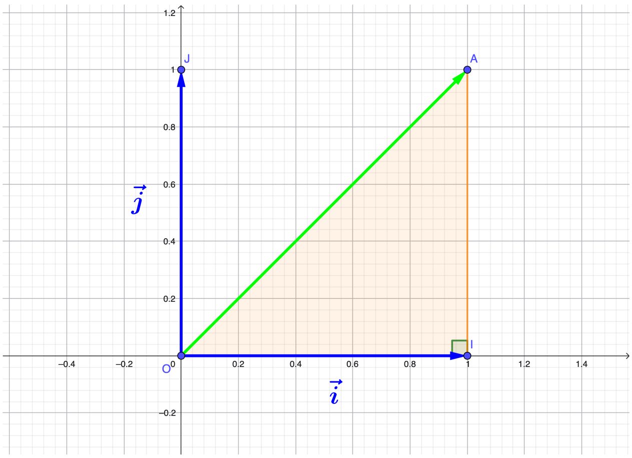
1. Placer les points O(0 ; 0), I(1 ; 0), J(0 ; 1) et A tel que

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$$

   On peut voir sur la figure que le triangle OIA est rectangle et isocèle en I.

$$OI^2 + IA^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$
$$OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

   Voir figure :



2. Placer le point B tel que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}$$

Une égalité vectorielle plus simple pour placer le point B est

$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{j}$$

Pour la trouver on utilise Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} \\
\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{OB} &= \vec{j} - \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} \\
\overrightarrow{OB} &= 2\vec{j}
\end{aligned}$$

Par Pythagore :

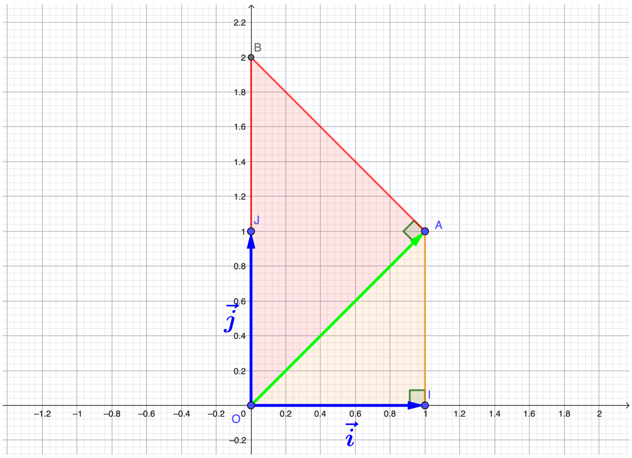
$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

En effet :

$$OB^2 = 0^2 + 2^2 = 4$$
$$OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 = 4$$

Le triangle OAB est isocèle et rectangle en A.

Voir figure :



3. Placer le point C tel que

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{AB}$$

Une égalité vectorielle plus simple pour placer le point C est

$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i}$$

On la trouve en utilisant Chasles :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{BC} = 2(\vec{j} - \vec{i}) - 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{i}$$

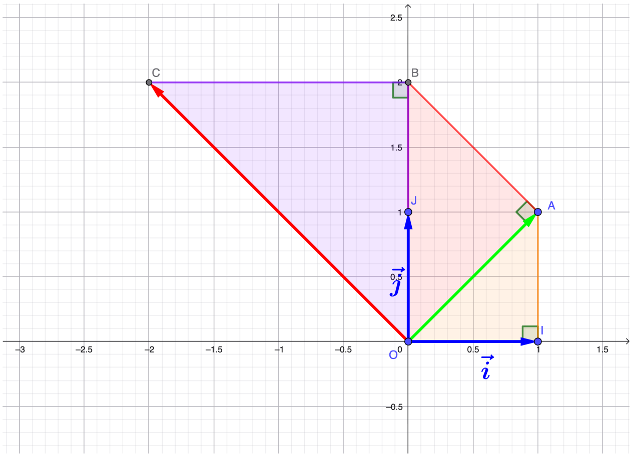
Par Pythagore :

$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

En effet :

$$OC^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$
$$OB^2 + BC^2 = 0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 = 8$$

Voir figure :



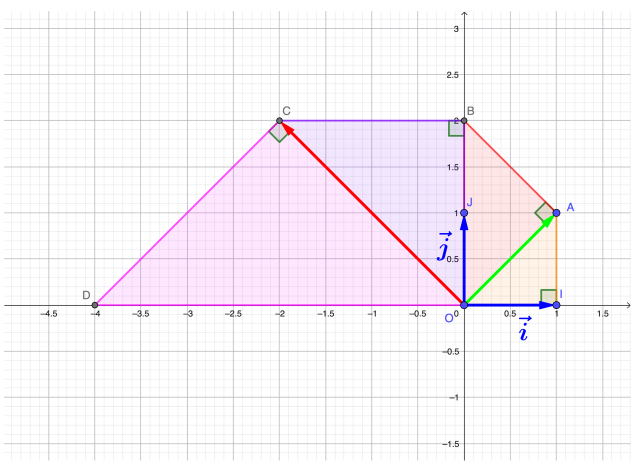
4. Placer le point D tel que

$$\overrightarrow{OD} = -4\vec{i}$$

Le triangle COD est isocèle et rectangle en C :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (-2)^2 + 2^2 = 8 \\
\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \\
\overrightarrow{CD} &= 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{i} \\
\overrightarrow{CD} &= -2(\vec{i} + \vec{i}) \\
CD^2 &= (-2)^2 + (-2)^2 = 8 \\
OD^2 &= (-4)^2 + 0^2 = 16
\end{aligned}$$

Voir figure :



5. Placer le point E tel que

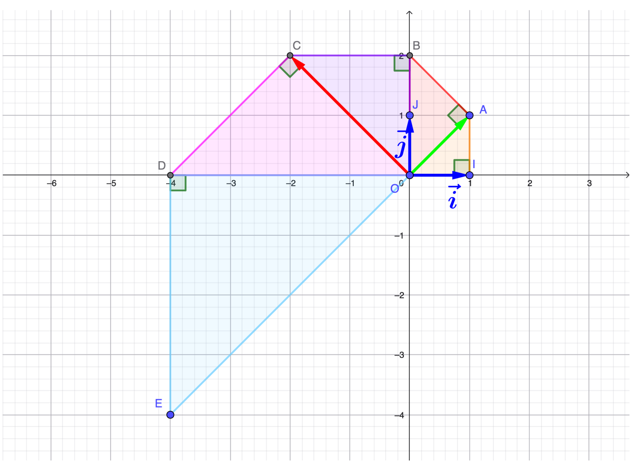
$$\overrightarrow{DE} = -4\vec{j}$$

Le triangle ODE est isocèle est rectangle en D. Les vecteurs

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{OE} = -4\vec{i} - 4\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OE} = -4\overrightarrow{OA}$$
$$DE^2 = 0^2 + (-4)^2 = 16$$
$$OD^2 = (-4)^2 + 0^2 = 16$$
$$OE^2 = (-4)^2 + (-4)^2 = 32$$

Voir figure :



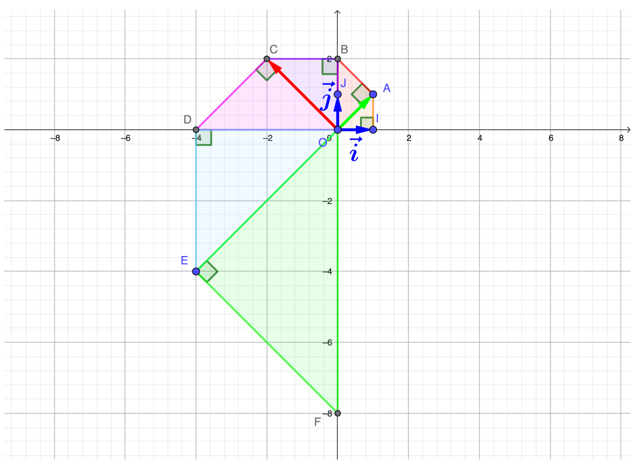
6. Placer le point F tel que

$$\overrightarrow{OF} = -4\overrightarrow{OB}$$

Le triangle EOF est isocèle est rectangle en E.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\overrightarrow{EF} = 4(\vec{i} + \vec{j}) - 4(2\vec{j})$$
$$\overrightarrow{EF} = 4(\vec{i} - \vec{j})$$
$$EF^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32$$
$$OE^2 = (-4)^2 + (-4)^2 = 32$$
$$OF^2 = (-4)^2 \times 2^2 = 64$$

Voir figure :



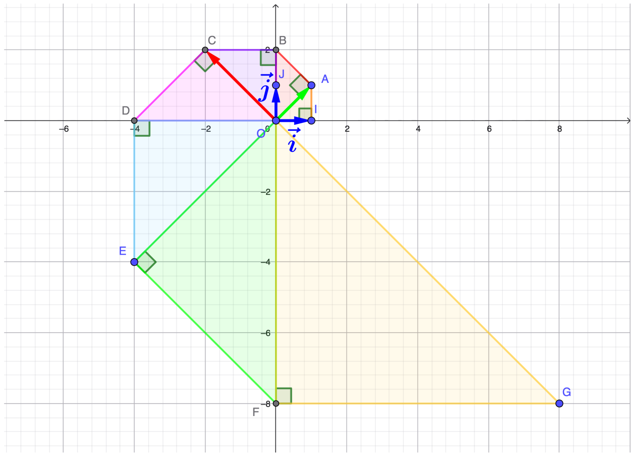
7. Placer le point G tel que

$$\overrightarrow{FG} = 8\vec{i}$$

Le triangle FOG est isocèle et rectangle en F.

$$OF^2 = 64$$
$$FG^2 = 8^2 + 0^2 = 64$$
$$OG^2 = 64 + 64 = 128$$

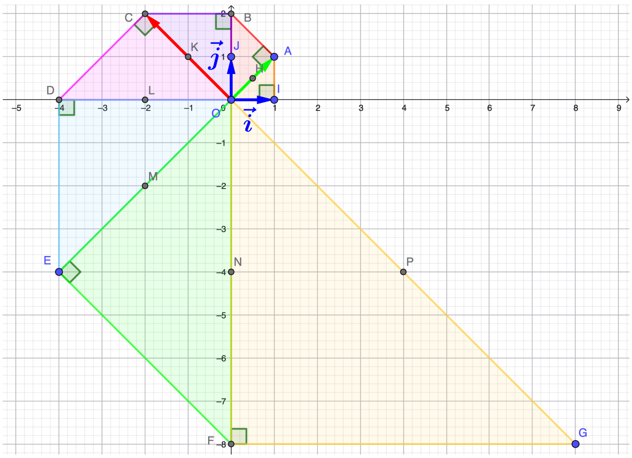
Voir figure :



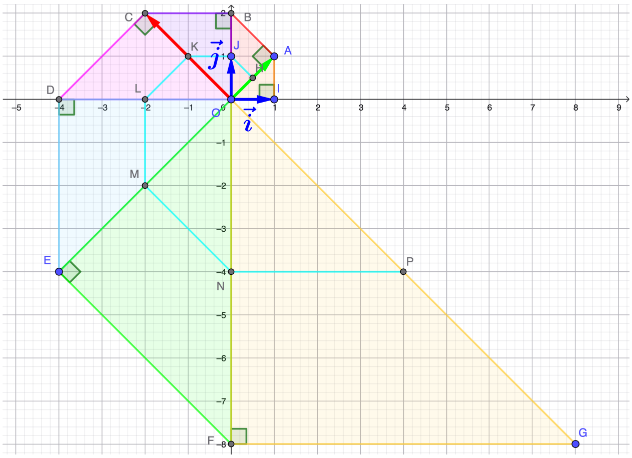
8. Calcul des coordonnées des points H, K, L, M, N, P milieux respectifs des segments [OA], [OC], [OD], [OE], [OF], [OG] :

$$H\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$
$$L\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$
$$N\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

Voir figure :

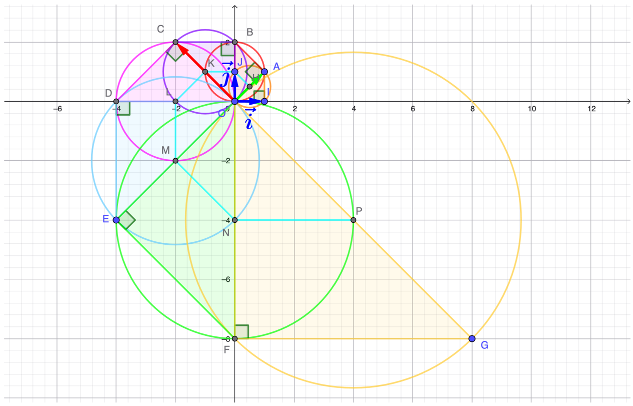


9. Voir figure :



10. On remarque que les cercles sont circonscrits aux triangles respectifs.

Voir figure :



40.2 Solution de l'exercice 17

On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour la suite de l'exercice on considère les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$ ainsi que le vecteur

$$\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{i}$$

1. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

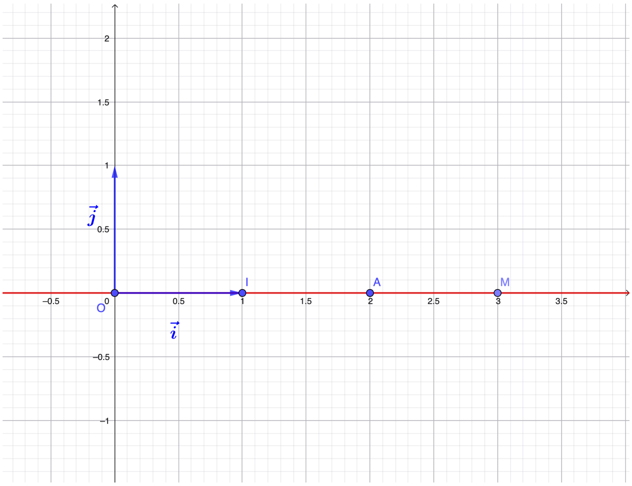
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0$$

est l'axe des abscisses. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff y = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des abscisses.

Voir figure :



2. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

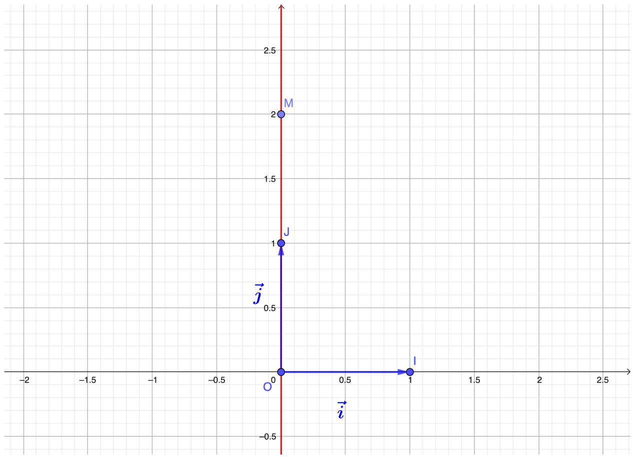
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0$$

est l'axe des ordonnées. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff x = 0$$
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = 0 \iff \overrightarrow{OM} = y\vec{j}$$

Avec $y \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des ordonnées.

Voir figure :



3. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0$$

est la droite d'équation cartésienne

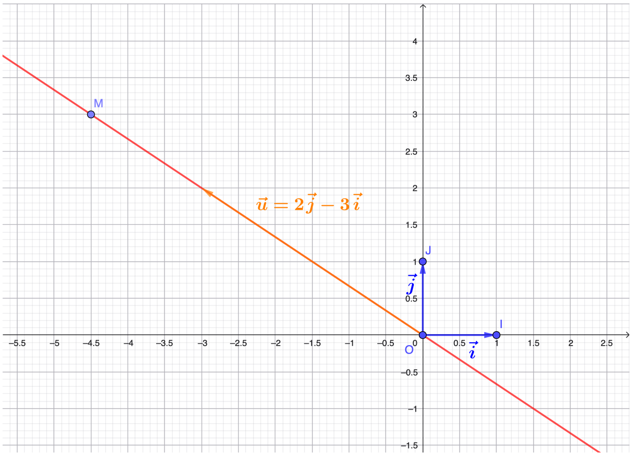
$$2x + 3y = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & -3 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0 \iff 2x + 3y = 0$$

Si $2x+3y = 0$ alors on peut écrire $y = -\frac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction linéaire.

Voir figure :



4. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

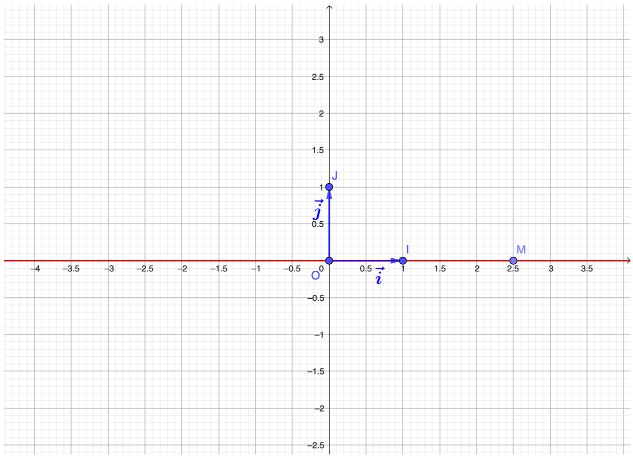
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0$$

est l'axe des abscisses. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned} det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & y-0 \end{vmatrix} = 0 \\ det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff y = 0 \\ det(\vec{i}, \overrightarrow{IM}) = 0 &\iff \overrightarrow{IM} = (x-1)\vec{i} \end{aligned}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des abscisses.

Voir figure :



5. L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

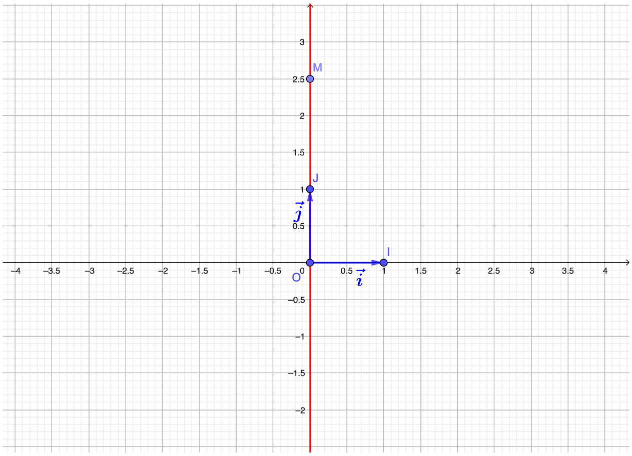
$$det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0$$

est l'axe des ordonnées. En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned} det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & y-1 \end{vmatrix} = 0 \\ det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff x = 0 \\ det(\vec{j}, \overrightarrow{JM}) = 0 &\iff \overrightarrow{OM} = (y-1)\vec{j} \end{aligned}$$

Avec $y \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout l'axe des ordonnées.

Voir figure :



6. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0$$

est la droite horizontale d'équation

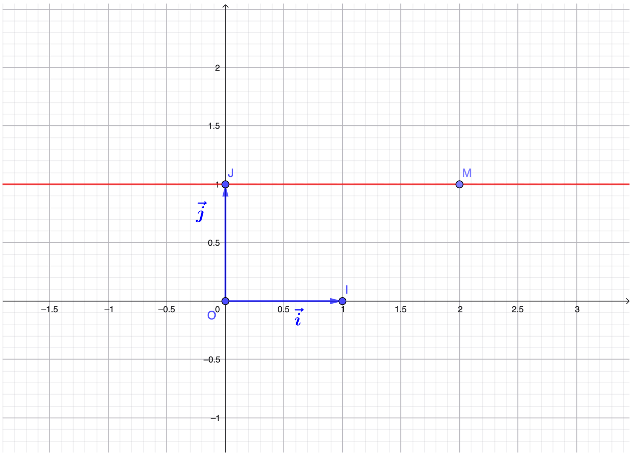
$$y = 1$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y-1 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff y = 1$$
$$det(\vec{i}, \overrightarrow{JM}) = 0 \iff \overrightarrow{JM} = x\vec{i}$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par J.

Voir figure :



7. L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\vec{j},\overrightarrow{IM})=0$$

est la droite verticale d'équation

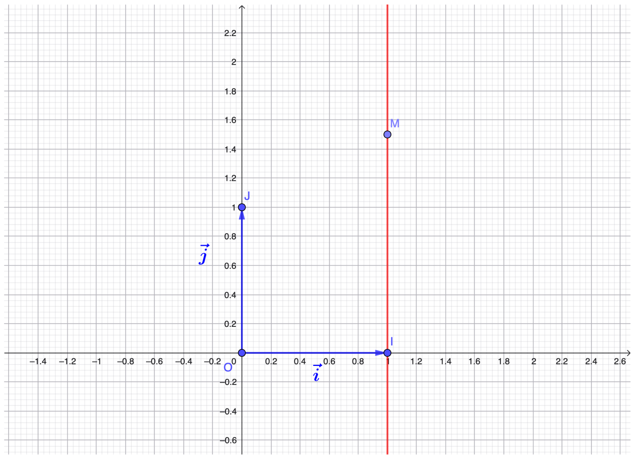
$$x=1$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
det(\vec{j},\overrightarrow{IM})=0 &\iff \begin{vmatrix}0 & x-1\\ 1 & y\end{vmatrix}=0\\
det(\vec{j},\overrightarrow{IM})=0 &\iff x=1\\
det(\vec{j},\overrightarrow{IM})=0 &\iff \overrightarrow{IM}=y\vec{j}
\end{aligned}$$

Avec $y\in\mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle et donc qui couvre tout la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par I.

Voir figure :



8. L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$det(\overrightarrow{IM},\vec{u}) = 0$$

est la droite d'équation

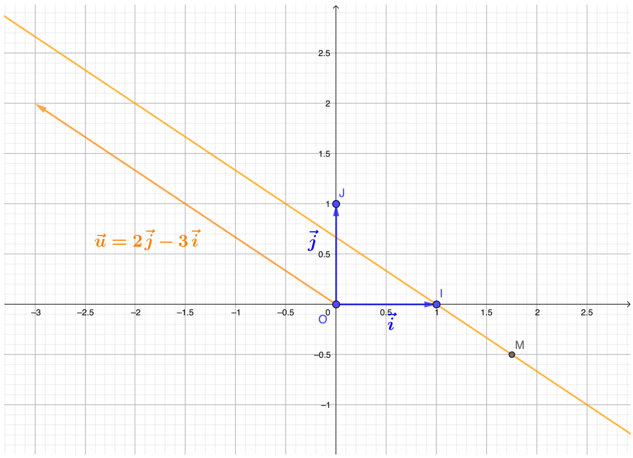
$$2x + 3y - 2 = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\overrightarrow{IM},\vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\overrightarrow{IM},\vec{u}) = 0 \iff 2x + 3y - 2 = 0$$

Si $2x + 3y - 2 = 0$ alors on peut écrire $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Voir figure :



9. L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

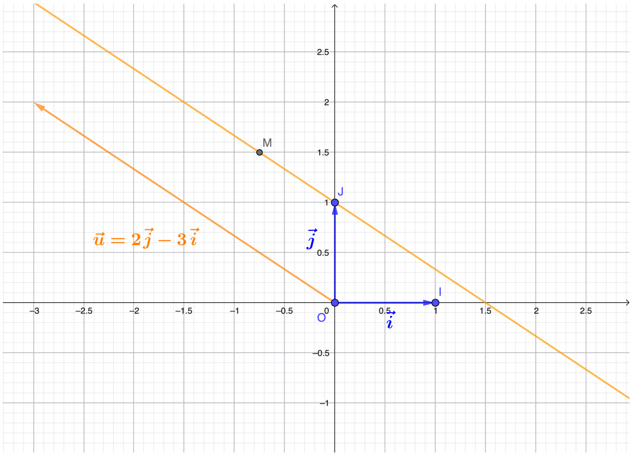
$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0$$

En effet, si le déterminant est nul alors les vecteurs sont colinéaires. Par conséquent :

$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & -3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0 \iff 2x + 3y - 3 = 0$$

Si $2x + 3y - 3 = 0$ alors on peut écrire $y = 1 - \dfrac{2}{3}x$ et on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Voir figure :



10. Soient un point $P(x_P; y_P)$ et un vecteur $\vec{v} = a\vec{j} - b\vec{i}$. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0$$

est la droite d'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

Démontrons cela en détails :

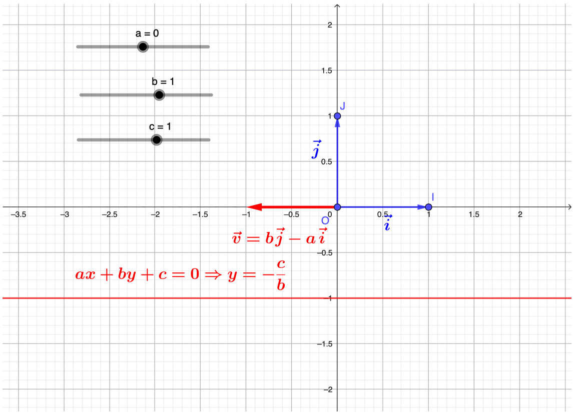
$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -b & (x - x_P) \\ a & (y - y_P) \end{vmatrix} = 0$$
$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 \iff a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$$
$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 \iff ax + by - (ax_P + by_P) = 0$$
$$det(\vec{v}, \overrightarrow{PM}) = 0 \iff ax + by + c = 0$$

Il suffit de ce rappeler que

$$c = -(ax_P + by_P)$$

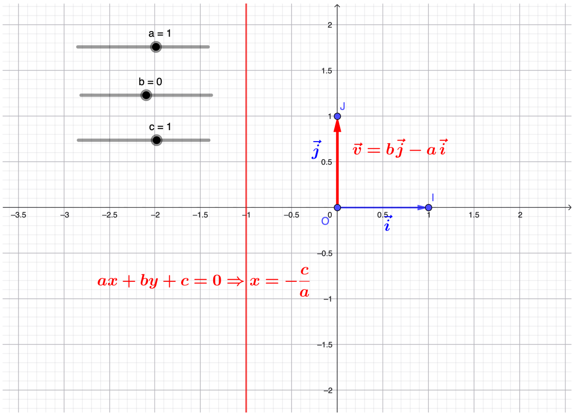
- Si $a = 0$ on obtient $y = -\dfrac{c}{b}$ c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des abscisses.

  Voir figure :



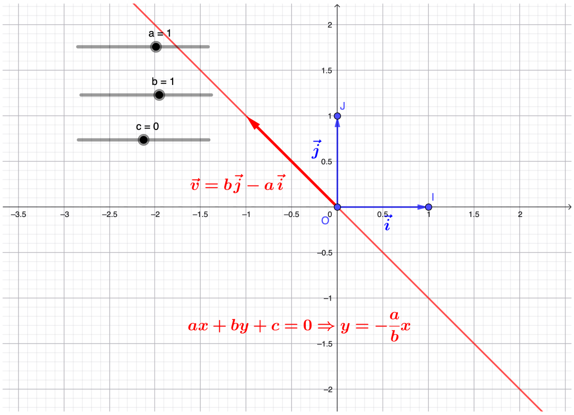
- Si $b = 0$ on obtient $x = -\dfrac{c}{a}$ c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

  Voir figure :



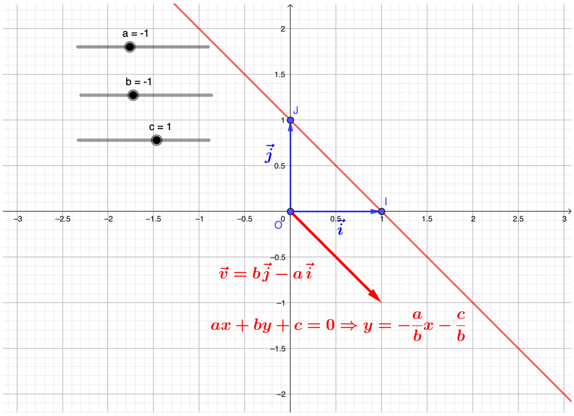
- Si $c = 0$ on obtient $y = -\dfrac{a}{b}x$ c'est-à-dire une fonction linéaire donc une droite oblique passant par l'origine.

  Voir figure :



- Si $abc \neq 0$ on obtient $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ c'est-à-dire une fonction affine donc une droite oblique ne passant pas par l'origine.

  Voir figure :



Dans tous les cas le vecteur $\vec{v} = a\vec{j} - b\vec{i}$ dirige la droite obtenue.

40.3 Solution de l'exercice 18

Puisque nous avons A et B deux points distincts dans le plan et que la condition est MA = MB alors la seule chose que l'on peut faire c'est de calculer les distances. Or les distances sont des nombres positifs donc on peut utiliser leurs carrés ce qui nous évitera de manipuler des radicaux (racines carrées).

$$\begin{aligned}
MA &= MB \\
MA^2 &= MB^2 \\
MA^2 - MB^2 &= 0 \\
(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - (x - x_B)^2 - (y - y_B)^2 &= 0 \\
2x(x_B - x_A) + (x_A)^2 - (x_B)^2 + 2y(y_B - y_A) + (y_A)^2 - (y_B)^2 &= 0 \\
2x_{\overrightarrow{AB}}x + 2y_{\overrightarrow{AB}}y - (x_B + x_A)x_{\overrightarrow{AB}} - (y_B + y_A)y_{\overrightarrow{AB}} &= 0 \\
x_{\overrightarrow{AB}}x + y_{\overrightarrow{AB}}y - \left(\frac{x_B + x_A}{2}x_{\overrightarrow{AB}} + \frac{y_B + y_A}{2}y_{\overrightarrow{AB}}\right) &= 0 \\
ax + by + c &= 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une droite passant par le milieu du segment [AB] de coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

et dirigée par le vecteur

$$\vec{v} = b\vec{j} - a\vec{i}$$

Avec

$$a = (x_B - x_A) = x_{\overrightarrow{AB}}$$
$$b = (y_B - y_A) = y_{\overrightarrow{AB}}$$
$$c = \frac{(x_A)^2 - (x_B)^2 + (y_A)^2 - (y_B)^2}{2}$$
$$c = -\left(\frac{x_B + x_A}{2} x_{\overrightarrow{AB}} + \frac{y_B + y_A}{2} y_{\overrightarrow{AB}}\right)$$

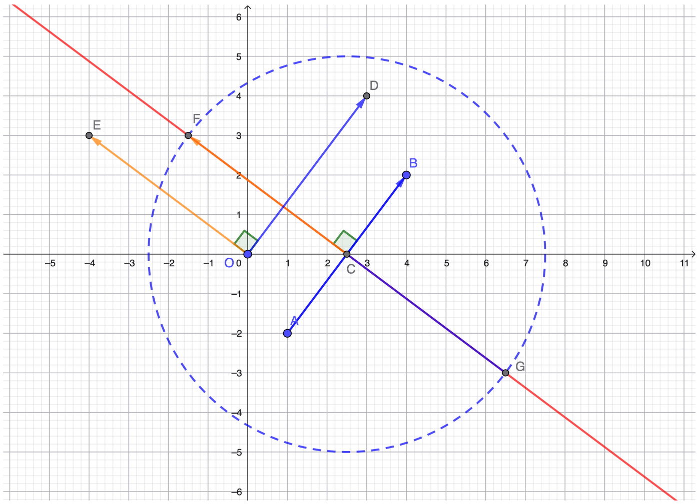
Si on considère les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OE} = \vec{v}$$
$$DE^2 = ((y_B - y_A) - (x_B - x_A))^2 + (-(x_B - x_A) - (y_B - y_A))^2$$
$$DE^2 = ((x_B - x_A) - (y_B - y_A))^2 + ((x_B - x_A) + (y_B - y_A))^2$$
$$DE^2 = 2\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2\right)$$
$$DE^2 = 2||\vec{v}||^2$$
$$||\vec{v}|| = AB = OD$$

Ainsi le triangle ODE est rectangle en O donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

L'ensemble des points vérifiants MA = MB est donc une droite passant perpendiculairement par le milieu du segment [AB], c'est donc la médiatrice du segment [AB].

Voir figure :



40.4 Solution de l'exercice 19

1. Pour que les trois points A, B et C soient alignés il faut obtenir l'une des égalités vectorielles suivantes :

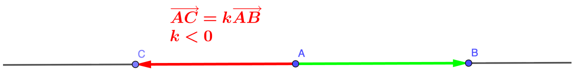
$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$$

   Avec $k \in \mathbb{R}$ un nombre réel non nul (qui n'est pas le même dans les deux égalités). Une seule des deux égalités suffit. Il est important que l'origine du vecteur soit l'un des deux points connus (A ou B) et l'extrémité le nouveau point C. De cette manière on a deux vecteurs colinéaires avec la même origine donc les points sont alignés.

2. Il existe 3 configurations différentes pour que les points A, B et C soient alignés. Sans perte de généralité on va supposer que le point A est plus à gauche que le point B.

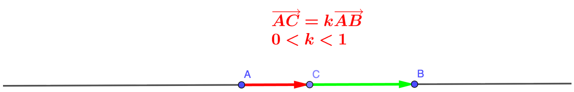
(a) Le point C est situé avant le point A ce qui correspond à $k < 0$ dans la première égalité.

Voir figure :



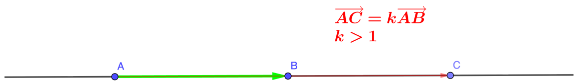
(b) Le point C est situé entre le point A et le point B ce qui correspond à $0 < k < 1$ dans la première égalité.

Voir figure :



(c) Le point C est situé après le point B ce qui correspond à $k > 1$ dans la première égalité.

Voir figure :



3. Désormais on ajoute un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par conséquent les points ont les coordonnées respectives :

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$$

On peut donc calculer le déterminant.

$$det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_B - x_A \\ y_C - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (y_C - y_A)(x_B - x_A)$$

Si le déterminant est nul alors les points A, B et C sont alignés et sinon ils forment un triangle.

4. Écrivons un programme Python :

```python
x_1 = float(input("Abscisse du point 1, x_1 = "))
y_1 = float(input("Ordonnée du point 1, y_1 = "))
x_2 = float(input("Abscisse du point 2, x_2 = "))
y_2 = float(input("Ordonnée du point 2, y_2 = "))
x_3 = float(input("Abscisse du point 3, x_3 = "))
y_3 = float(input("Ordonnée du point 3, y_3 = "))
```

```
x12 = x_2 - x_1
y12 = y_2 - y_1
x13 = x_3 - x_1
y13 = y_3 - y_1
det = x12 * y13 - y12 * x13
if det == 0:
    print("Les points sont alignés")
    if x13 / x12 < 0:
        print("Le 3ème point est à gauche du
            1er.")
    elif x13 / x12 > 1:
        print("Le 3ème point est à droite du
            2nd.")
    else:
        print("Le 3ème point est entre les 2
            premiers.")
else:
    print("Les 3 points forment un triangle.")
```

40.5 Solution de l'exercice 20

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

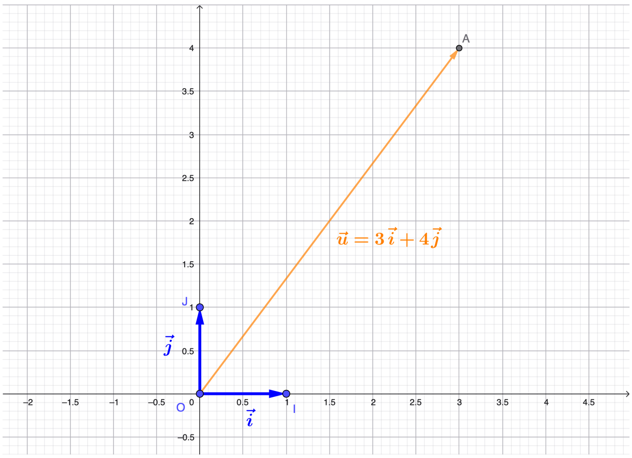
1. Construction du vecteur

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

et placement du point A tel que

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$$

Voir figure :



2. Plaçons le point H tel que

$$\overrightarrow{OH} = 3\vec{i}$$

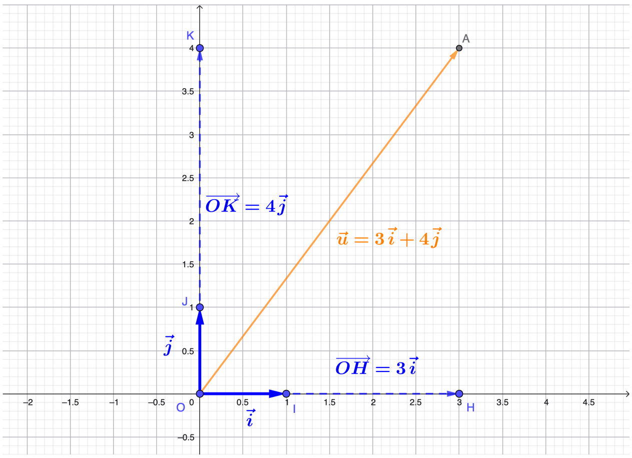
et le point K tel que

$$\overrightarrow{OK} = 4\vec{j}$$

On en déduit une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

Voir figure :



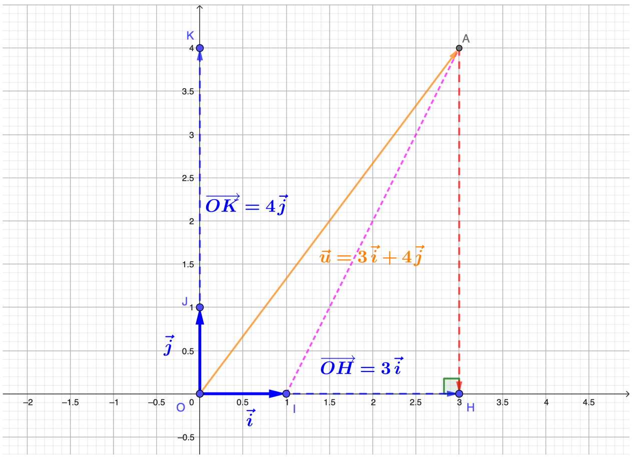
3. Le triangle AHO est rectangle en H car

$$OA^2 = 3^2 + 4^2$$
$$OH^2 + HA^2 = 3^2 + 4^2$$

Le triangle AHI est rectangle en H car

$$IA^2 = (3-1)^2 + (4-0)^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$
$$IH^2 + HA^2 = (3-1)^2 + 4^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

Voir figure :



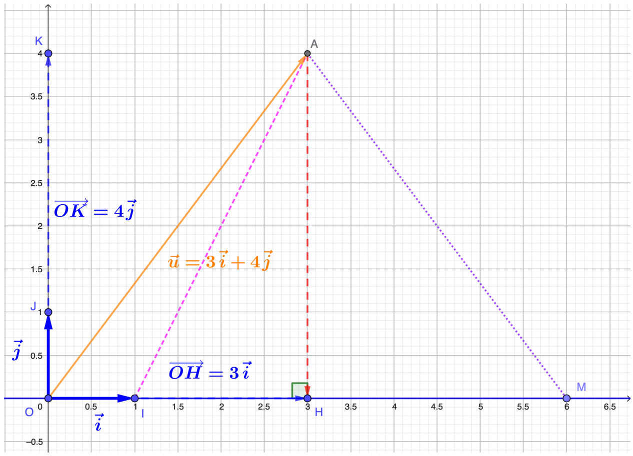
4. Soit M un point quelconque sur l'axe des abscisses. Comparons AM et AH :

   - soit $M = H$ et dans ce cas $AM = AH$
   - soit $M \neq H$ et dans ce cas AMH est rectangle en H donc AM est l'hypoténuse ce qui veut dire AM > AH :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x-3)^2 + 4^2 \\ AH^2 + HM^2 &= 4^2 + (x-3)^2 \\ AM^2 &= AH^2 + HM^2 \end{aligned}$$

   Il est impossible de trouver un point M tel que AM < AH.

   Voir figure :



5. D'après ce qui précède le point M de l'axe des abscisses tel que la distance AM soit minimale est le point H. Ainsi cette distance entre A et l'axe des abscisses est :

$$d(A;(OI)) = \min_{M\in(OI)} (AM) = AH$$

On en déduit sa valeur qui est $AH = 4$.

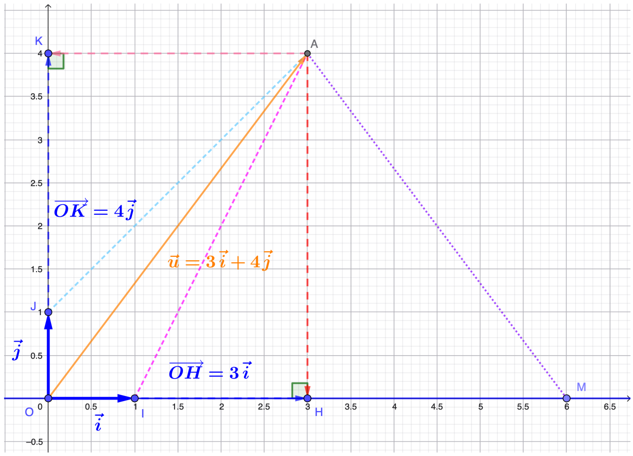
6. Le triangle AKO est rectangle en K car :

$$OA^2 = 3^2 + 4^2$$
$$OK^2 + KA^2 = 4^2 + 3^2$$

Le triangle AKJ est rectangle en K car :

$$AJ^2 = 3^2 + (y-4)^2$$
$$JK^2 + KA^2 = (y-4)^2 + 3^2$$

Voir figure :



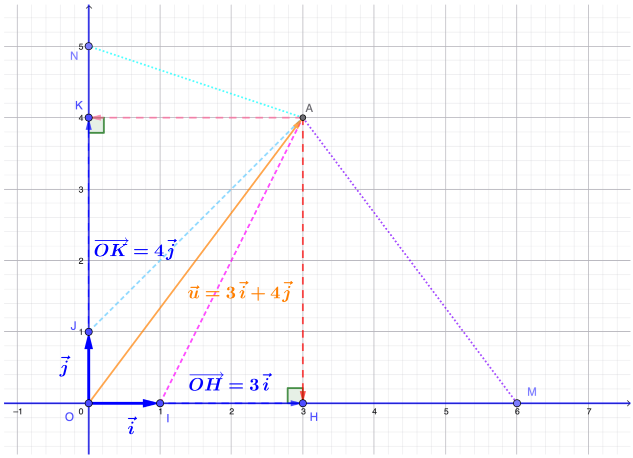
7. Soit N un point quelconque sur l'axe des ordonnées. Comparons AN et AK :

- soit $N = K$ et dans ce cas $AN = AK$
- soit $N \neq K$ et dans ce cas ANK est rectangle en K donc AN est l'hypoténuse ce qui veut dire AN > AK :

$$\begin{aligned} AN^2 &= 3^2 + (y-4)^2 \\ AK^2 + KN^2 &= 3^2 + (y-4)^2 \\ AN^2 &= AK^2 + KN^2 \end{aligned}$$

Il est impossible de trouver un point N tel que AN < AK.

Voir figure :



8. D'après ce qui précède le point N de l'axe des ordonnées tel que la distance AN soit minimale est le point K. Ainsi cette distance entre A et l'axe des ordonnées est :

$$d(A;(OJ)) = \min_{N \in (OJ)} (AN) = AK$$

On en déduit sa valeur qui est $AK = 3$.

40.6 Solution de l'exercice 21

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calcul des coordonnées du point L milieu du segment [OK] :

$$x_L = \frac{x_O + x_K}{2} = \frac{1}{2}$$
$$y_L = \frac{y_O + y_K}{2} = \frac{1}{2}$$

Pour en déduire la nature des triangles LOI et JOL il faut calculer les longueurs des côtés :

$$\begin{aligned}
OL^2 &= \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\
LI^2 &= \left(1 - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\
OI^2 &= 1^2 = 1 \\
OI^2 &= OL^2 + LI^2 \\
JL^2 &= \left(\frac{2}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} \\
JO^2 &= 1^2 = 1 \\
JO^2 &= OL^2 + JL^2
\end{aligned}$$

Les deux triangles sont isocèles et rectangles, LOI en I et JOL en J.

2. Comparons IK et IL :

$$\begin{aligned}
IK^2 &= (1-1)^2 + (1-0)^2 = 1 \\
IL^2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi IK > IL.

On en déduit la distance entre le point I et la droite (OK) à savoir
$$d(I,(OK)) = IL = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : c'est parce que dans la question précédente on a établi que LOI était rectangle en I qu'on peut conclure.

3. Comparons JK et JL :

$$JK^2 = (1-0)^2 + (1-1)^2 = 1$$
$$JL^2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi JK > JL.

On en déduit la distance entre le point J et la droite (OK) à savoir
$$d(J,(OK)) = JL = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : c'est parce que dans la question précédente on a établi que JOL était rectangle en J qu'on peut conclure.

4. Par construction les points A et B sont tels que :

$$\overrightarrow{IA} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{JB} = \vec{u}$$

Donc IABJ est un parallélogramme.

Maintenant comparons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$:

$$x_A = x_I + x_{\vec{u}} = 1 + 1 = 2$$
$$y_A = y_I + y_{\vec{u}} = 0 + 1 = 1$$
$$x_B = x_J + x_{\vec{u}} = 0 + 1 = 1$$
$$y_B = y_J + y_{\vec{u}} = 1 + 1 = 2$$
$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 1 - 2 = -1$$
$$y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 2 - 1 = 1$$
$$x_{\overrightarrow{IJ}} = x_J - x_I = 0 - 1 = -1$$
$$y_{\overrightarrow{IJ}} = y_J - y_I = 1 - 0 = 1$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ et de plus

$$IA = AB$$

Donc IABJ est un losange.

Maintenant comparons AJ et IB :

$$AJ^2 = (0-2)^2 + (1-1)^2 = 4$$
$$IB^2 = (1-1)^2 + (2-0)^2 = 4$$

Ainsi AJ = IB donc IABJ est un losange.

Finalement IABJ est un carré.

5. Puisque IABJ est un carré la distance entre le point A et la droite (IJ) est tout simplement

$$IA = \sqrt{2}$$

40.7 Solution de l'exercice 22

Soit ABC un triangle. Le point G vérifie :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1. Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\ 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

2. Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{BG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:
$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$

3. Appliquons la relation de Chasles dans l'égalité initiale et exprimons le vecteur $\overrightarrow{CG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$:
$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

4. Déterminons les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA] :

$$\begin{aligned}x_I&=\frac{x_A+x_B}{2} & y_I&=\frac{y_A+y_B}{2}\\ x_J&=\frac{x_B+x_C}{2} & y_J&=\frac{y_B+y_C}{2}\\ x_K&=\frac{x_C+x_A}{2} & y_K&=\frac{y_C+y_A}{2}\end{aligned}$$

5. Appliquons la relation de Chasles dans l'identité du milieu et exprimons le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

6. Faisons de même avec le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$$

7. Faisons de même avec le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

On en déduit une comparaison avec $\overrightarrow{CG}$:

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$$

8. En utilisant les éléments précédents on peut établir le calcul des coordonnées du point G en fonction de celles des points

A, B, C :

$$\begin{aligned} x_G - x_A &= \frac{1}{3}(x_B - x_A + x_C - x_A) \\ x_G &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G &= \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{aligned}$$

9. En utilisant les éléments précédents on peut établir le calcul des coordonnées du point G en fonction de celles des points I, J, K :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \\ \frac{2}{3}(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CI}) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CI} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GI} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GI} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK} \\ \overrightarrow{IG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}) \\ x_G - x_I &= \frac{1}{3}(x_J - x_I + x_K - x_I) \\ x_G &= \frac{1}{3}(x_I + x_J + x_K) \\ y_G &= \frac{1}{3}(y_I + y_J + y_K) \end{aligned}$$

10. Appliquons les résultats précédents dans un cas concret avec les points $A(-4;4), B(5;4), C(-1;-2)$. Calculons les co-

ordonnées des milieux I, J, K :

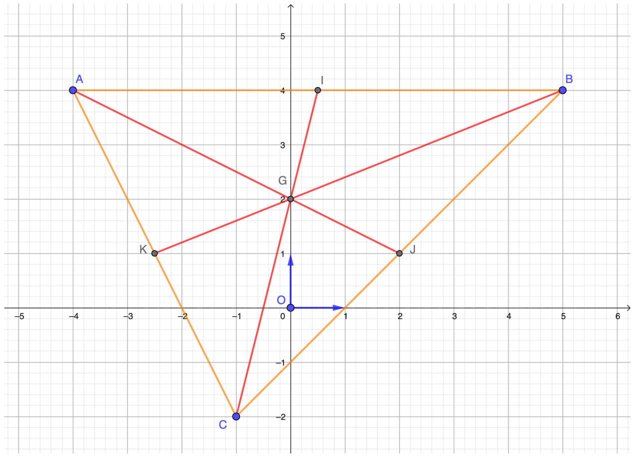
$$x_I = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2} \qquad y_I = \frac{4+4}{2} = 4$$
$$x_J = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \qquad y_J = \frac{4+(-2)}{2} = 2$$
$$x_K = \frac{-1+(-4)}{2} = -\frac{5}{2} \qquad y_K = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

Calculons les coordonnées du point G :

$$x_G = \frac{1}{3}(-4+5-1) = 0$$
$$y_G = \frac{1}{3}(4+4-2) = 2$$

On remarque que G est le centre de gravité du triangle.

Voir figure :



Seizième partie

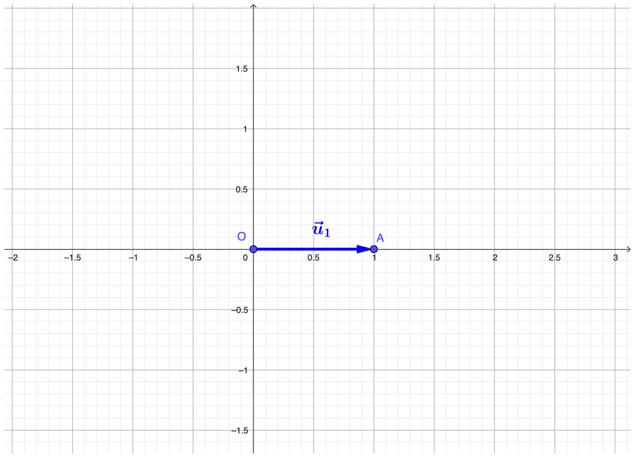
Solutions des exercices divers

Chapitre 41

Solutions des paradoxes

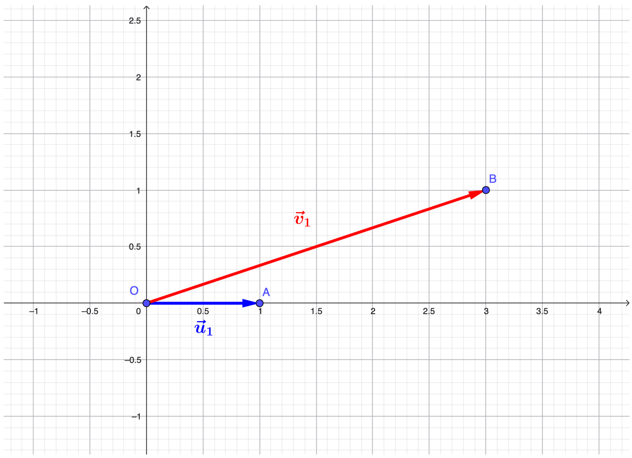
41.1 Solution de l'exercice 77

1. Placement des points O(0 ; 0) et A(1 ; 0) ainsi que la construction du vecteur
$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$$



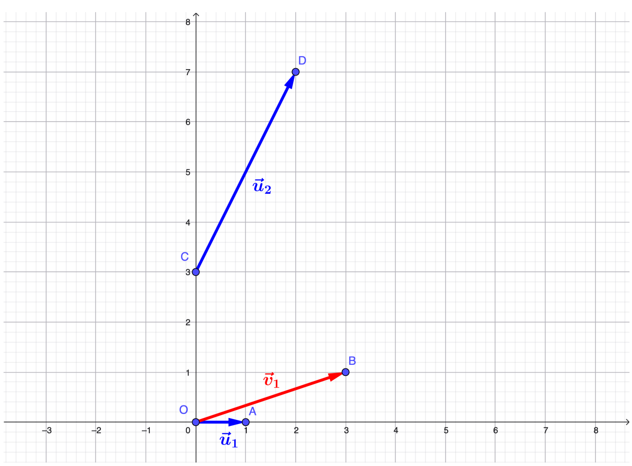
2. Placement du point B(3 ; 1) et construction du vecteur

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB}$$



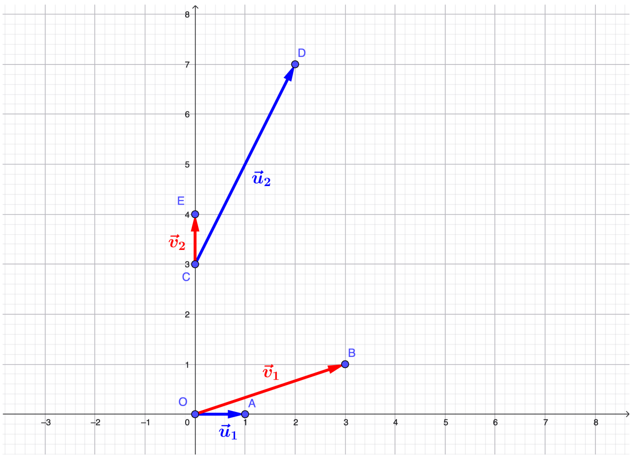
3. Placement des points C(0 ; 3) et D(2 ; 7) ainsi que la construction du vecteur

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD}$$



4. Placement du point E(0 ; 4) et construction du vecteur

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{CE}$$



5. **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).

   Concrètement :

$$p_{\vec{u}_1} = \frac{y_{\vec{u}_1}}{x_{\vec{u}_1}} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O}$$
$$p_{\vec{u}_1} = \frac{0-0}{1-0} = 0$$
$$p_{\vec{v}_1} = \frac{y_{\vec{v}_1}}{x_{\vec{v}_1}} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O}$$
$$p_{\vec{v}_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow p_{\vec{u}_1} = 0 < p_{\vec{v}_1} = \frac{1}{3}$$

Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{v}_1$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{u}_1$.

6. **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).

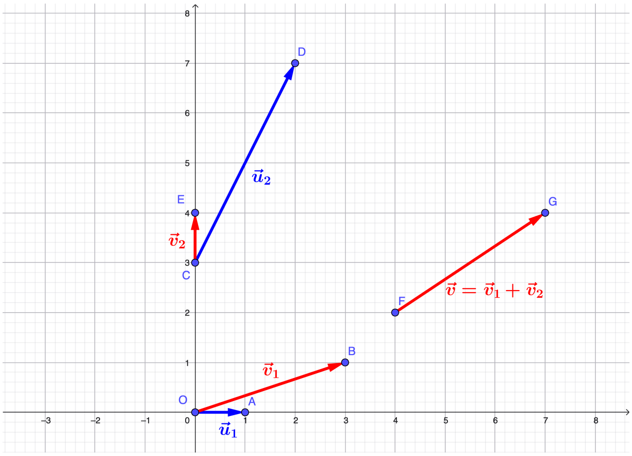
   Concrètement :

$$p_{\vec{u}_2} = \frac{y_{\vec{u}_2}}{x_{\vec{u}_2}} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$
$$p_{\vec{u}_2} = \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$
$$p_{\vec{v}_2} = \frac{y_{\vec{v}_2}}{x_{\vec{v}_2}} = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C}$$
$$p_{\vec{v}_2} = \frac{4-3}{0-0} = +\infty$$
$$\Rightarrow p_{\vec{u}_2} = 2 < p_{\vec{v}_2} = +\infty$$

   Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{v}_2$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{u}_2$.

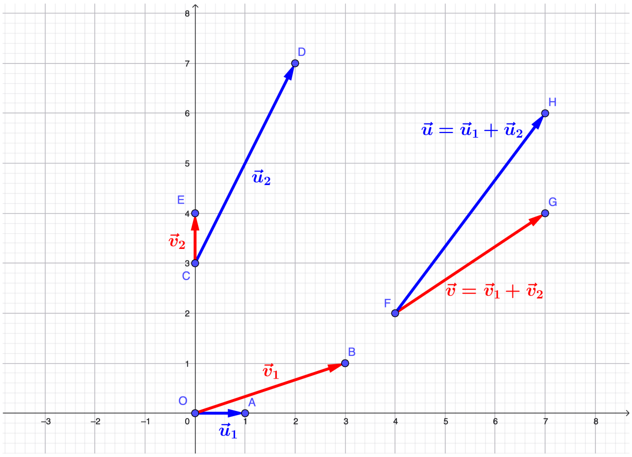
7. Placement des points F(4 ; 2) et G(7 ; 4) ainsi que la construction du vecteur

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{FG}$$



8. Placement du point H(7 ; 6) et construction du vecteur

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{FH}$$

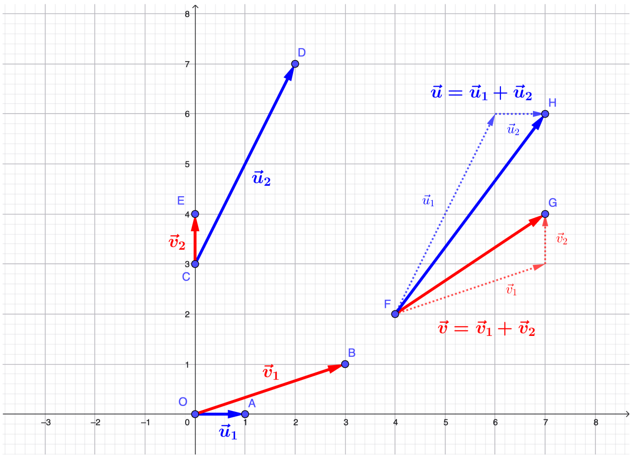


9. **Rappel** : La pente d'un vecteur se calcule en faisant le rapport entre son ordonnée (déplacement vertical) divisée par son abscisse (déplacement horizontal).

Concrètement :

$$\begin{aligned}
p_{\vec{u}} &= \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{y_H - y_F}{x_H - x_F} \\
p_{\vec{u}} &= \frac{6-2}{7-4} = \frac{4}{3} \\
p_{\vec{v}} &= \frac{y_{\vec{v}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} \\
p_{\vec{v}} &= \frac{4-2}{7-4} = \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow p_{\vec{u}} = \frac{4}{3} > p_{\vec{v}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Les calculs confirment ce qu'on peut observer graphiquement, le vecteur $\vec{u}$ est plus incliné vers le haut verticalement que le vecteur $\vec{v}$.



Chapitre 42

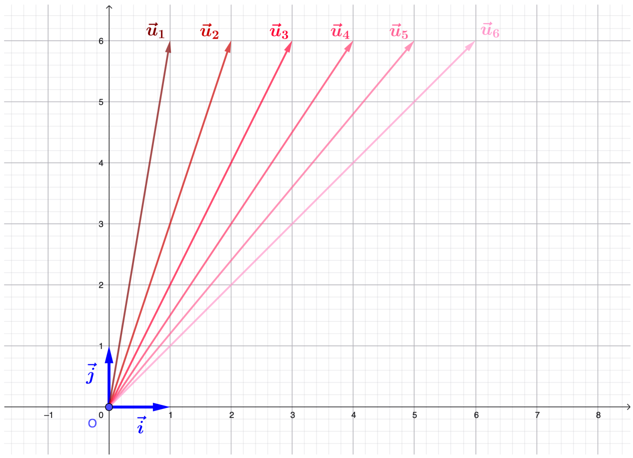
Solutions des exercices d'arithmétique

42.1 Solution de l'exercice 78

On se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique.

1. Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tracer les 6 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix}$$



2. Calcul des pentes respectives p_n :

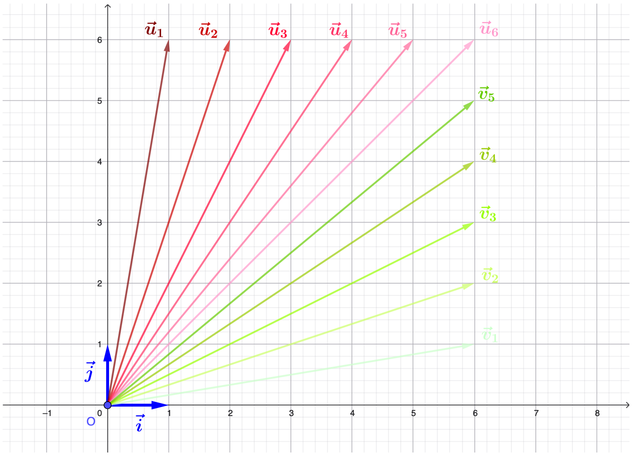
$$p_1 = \frac{6}{1} = 6$$
$$p_2 = \frac{6}{2} = 3$$
$$p_3 = \frac{6}{3} = 2$$
$$p_4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$p_5 = \frac{6}{5} = 1,2$$
$$p_6 = \frac{6}{6} = 1$$

3. Les pentes p_1, p_2, p_3, p_6 sont des entiers.

4. On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont des diviseurs de 6.

5. Tracer les 6 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 6 \\ n \end{pmatrix}$$



On remarque que $\vec{v}_6 = \vec{u}_6$.

6. Calcul des pentes respectives q_n :

$$q_1 = \frac{1}{6}$$
$$q_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$q_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$q_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$q_5 = \frac{5}{6}$$
$$q_6 = \frac{6}{6} = 1$$

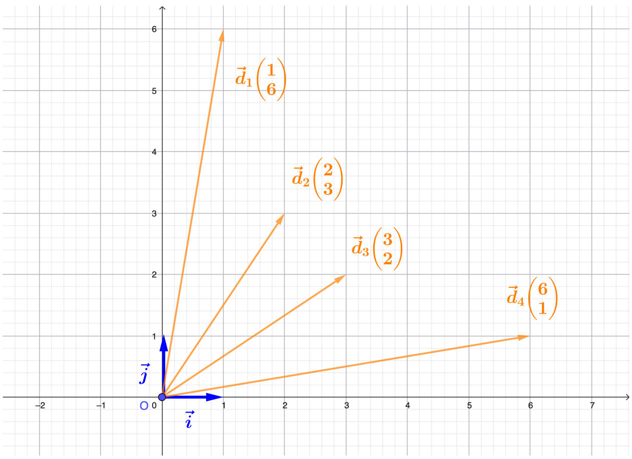
7. On peut obtenir les $q_n)partir des p_n$ en appliquant la fonction inverse.

8. Concrètement la relation entre les p_n et les q_n est :

$$q_n = \frac{1}{p_n}$$

9. Il y a exactement 4 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit à coordonnées entières tels que leur produit vaut 6.

10. Les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente sont :

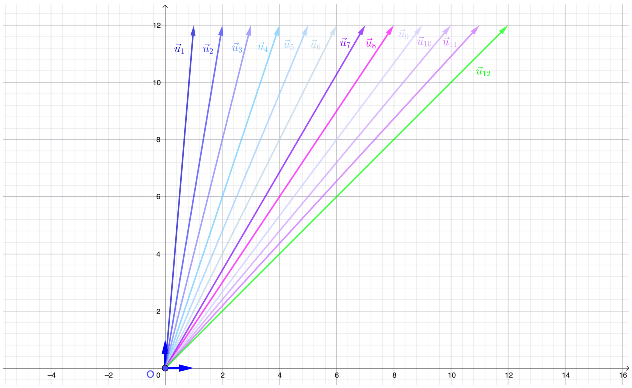


42.2 Solutions de l'exercice 79

On se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique.

1. Pour $n \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ voici les 12 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 12 \end{pmatrix}$$



2. Calcul des pentes respectives p_n :

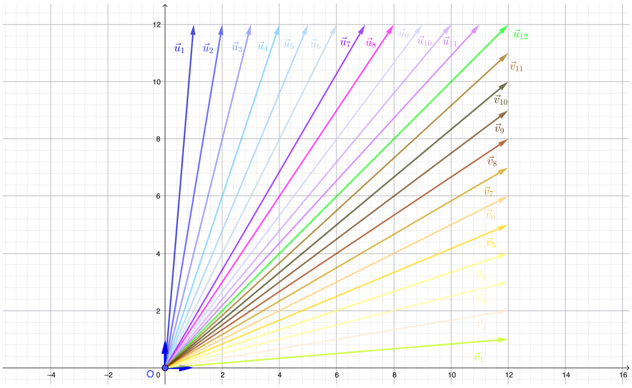
$$p_1 = \frac{12}{1} = 12$$
$$p_2 = \frac{12}{2} = 6$$
$$p_3 = \frac{12}{3} = 4$$
$$p_4 = \frac{12}{4} = 3$$
$$p_5 = \frac{12}{5} = 2,4$$
$$p_6 = \frac{12}{6} = 2$$
$$p_7 = \frac{12}{7}$$
$$p_8 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$p_9 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$
$$p_{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2$$
$$p_{11} = \frac{12}{11}$$
$$p_{12} = \frac{12}{12} = 1$$

3. Les pentes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_6, p_{12}$ sont des nombres entiers.

4. On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont les diviseurs de 12.

5. Voici les 12 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 12 \\ n \end{pmatrix}$$



On remarque que $\vec{v}_{12} = \vec{u}_{12}$.

6. Calcul des pentes respectives q_n :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{12} \\
q_2 &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\
q_3 &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\
q_4 &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\
q_5 &= \frac{5}{12} \\
q_6 &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0,5 \\
q_7 &= \frac{7}{12} \\
q_8 &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\
q_9 &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \\
q_{10} &= \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \\
q_{11} &= \frac{11}{12} \\
q_{12} &= \frac{12}{12} = 1
\end{aligned}
$$

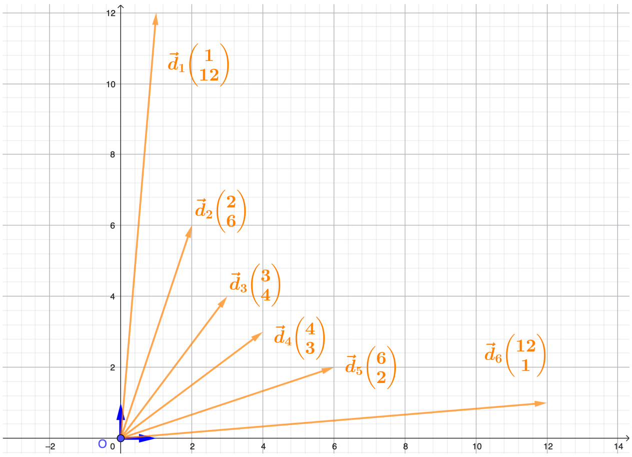
7. On peut les obtenir à partir des p_n en appliquant la fonction inverse.

8. La relation entre les p_n et les q_n est

$$q_n = \frac{1}{p_n}$$

9. Il y a 6 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de coordonnées entières tels que leur produit vaut 12.

10. Voici tous les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente :



42.3 Solutions de l'exercice 80

On poursuit la même logique que les deux exercices précédents.

Mais cette fois on va calculer sans représenter les vecteurs parce qu'on va prendre $n = 60$.

1. Pour $n \in \{1, 2, \ldots, 60\}$ les vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 12 \end{pmatrix}$$

qui ont une pente entière sont :

$$\begin{array}{ll}
\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = 60 & \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = 30 \\
\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_3 = 20 & \vec{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_4 = 15 \\
\vec{u}_5 \begin{pmatrix} 5 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_5 = 12 & \vec{u}_6 \begin{pmatrix} 6 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_6 = 10 \\
\vec{u}_{10} \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{10} = 6 & \vec{u}_{12} \begin{pmatrix} 12 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{12} = 5 \\
\vec{u}_{15} \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{15} = 4 & \vec{u}_{20} \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{20} = 3 \\
\vec{u}_{30} \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{30} = 2 & \vec{u}_{60} \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{60} = 1
\end{array}$$

2. On en déduit que les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier sont les diviseurs de 60.

3. Il y a 12 vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de

coordonnées entières tels que leur produit vaut 60 :

$$\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\60\end{pmatrix} \qquad \vec{d_{12}}\begin{pmatrix}60\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{d_2}\begin{pmatrix}2\\30\end{pmatrix} \qquad \vec{d_{11}}\begin{pmatrix}30\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{d_3}\begin{pmatrix}3\\20\end{pmatrix} \qquad \vec{d_{10}}\begin{pmatrix}20\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{d_4}\begin{pmatrix}4\\15\end{pmatrix} \qquad \vec{d_9}\begin{pmatrix}15\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{d_5}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \qquad \vec{d_8}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{d_6}\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix} \qquad \vec{d_7}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$$