Manipuler les vecteurs du plan

Laurent Garnier

13 décembre 2025

Table des matières

Première partie

Introduction

Chapitre 1

À qui s'adresse ce livre

Ce livre constitue une mise en oeuvre concrète et pratique de la rubrique intitulée "Manipuler les vecteurs du plan" pages 8 et 9 du programme officiel de mathématiques pour la classe de seconde accessible à cette URL : `https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf`

Par conséquent, il intéressera :

- les élèves de fin de collège souhaitant prendre de l'avance et préparer au mieux leur entrée au lycée
- bien entendu les élèves de seconde qui sont les premiers concernés
- les élèves de premières, terminales, et même du supérieur, qui pourront (re)voir des notions pas toujours bien maîtrisées alors que cet aspect fondamental des mathématiques modernes est crucial
- enfin, toutes les personnes, amatrices ou professionnelles, soucieuses d'apprendre ou de ré-apprendre à des fins per-

sonnelles et/ou d'aide de personnes tierces (de façon bénévole ou rémunérée)

À l'heure où les deux lettres IA (pour Intelligence Artificielle) sont sur toutes les lèvres il me semble important de bien faire comprendre (ou de rappeler pour ceux qui l'avaient oublié) que les modèles de langage tels que ChatGPT, ClaudeAI, DeepSeek, Gemini, Grok, Kimi, Mistral et consort ne font que manipuler des vecteurs à chaque prompt que vous leur écrivez ou dictez.

Oui, vous m'avez bien lu, les fameuses IAs supposément magiciennes et "aptes" à "nous remplacer" selon certains (oui je pense très fort à Laurent Alexandre), elles ne font QUE du calcul vectoriel.

L'espace dédié à cette introduction, et même le cadre global de cet ouvrage, ne se prête pas aux explications générales et totales du pourquoi et du comment mais je vous livre tout de même une ressource très pédagogique qui vous permettra de mieux comprendre tous les détails par vous même : la chaîne 3blue1brown (meilleure chaîne de mathématiques au monde) a consacré une série de vidéos pour expliquer précisément comment les modèles de langage fonctionnent, voici l'URL : https://youtu.be/LPZh9BOjkQs?si=QMzyEqxItcq7ZIR7

En conclusion de cette introduction, je dirais donc qu'il n'a jamais été aussi important de comprendre comment fonctionne le concept de vecteur car une très grande partie de cette technologie qui apparaît comme de la magie repose, expose et manipule quasi-exclusivement ce concept si fécond.

Alors, cessez d'être spectateurs, devenez acteurs !

Chapitre 2

Organisation de l'ouvrage

Comme indiqué précédemment, cet ouvrage se base sur le programme officiel de mathématiques en classe de seconde dans le système scolaire français auquel vous pouvez accéder via cette URL : https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

Ainsi, les 7 contenus sont listés dans le même ordre avec un ou deux exercices d'illustration à chaque fois et un QCM d'auto-évaluation.

Ensuite viennent les 7 capacités attendues également illustrées par au moins un exercice par capacité ainsi qu'un QCM d'auto-évaluation.

Viennent ensuite des exercices de synthèse, puis quelques démonstrations et enfin des exercices divers.

Les exercices divers se veulent (beaucoup) plus originaux (par exemple analyse des déplacements du fou sur un échiquier) et concrets.

Subséquemment vient une partie sur les erreurs fréquentes à éviter.

Par suite vous obtiendrez des explications sur la façon d'obtenir les solutions qui ont volontairement été séparées de l'ouvrage afin de limiter la tentation de recourir à la solution avant d'avoir cherché à résoudre les exercices.

On ne le dira jamais assez mais c'est durant la phase de recherche que vous évaluez votre niveau réel et que vous solidifiez les apprentissages.

Enfin une dernière partie est consacrée aux remerciements et feedback.

Bonne lecture, mais surtout, bonne action !

Deuxième partie

Contenus

- C_1 : Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.
- C_2 : Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
- C_3 : Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- C_4 : Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- C_5 : Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.
- C_6 : Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- C_7 : Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

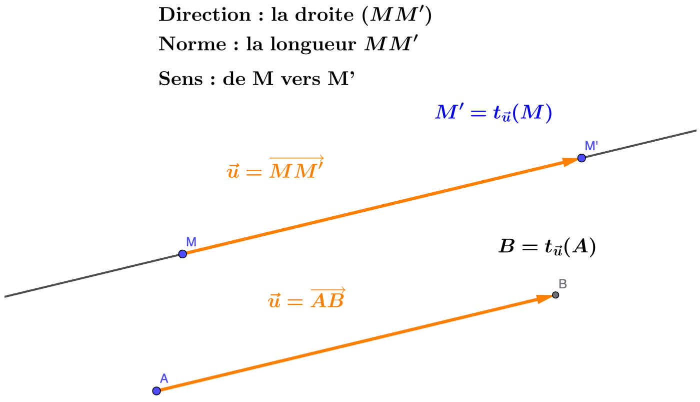
Chapitre 3

Contenu 1

3.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 1.

- C_1 : Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.

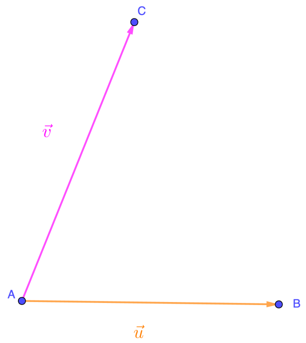


3.2 Exercice 1

Soit les points A, B, C tels que :

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Voir la figure :



1. Quelle est l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{v}$ c'est-à-dire qui transforme A en C ? On appellera D le point image.
2. Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\vec{u}$ c'est-à-dire qui transforme A en B ? On appellera E le point image.
3. Que peut-on déduire ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

3.3 Exercice 2

Soient A et B deux points distincts dans le plan.

1. On considère le point C image de B par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Quelle est la direction du vecteur $\overrightarrow{BC}$? Quelle est son sens ? Quelle est sa norme ?

2. Que représente le point B pour le segment [AC] ?

3. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ entre eux et avec le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3.4 Programme 1

Écrire un programme Python qui rappelle qu'un vecteur est défini par 3 caractéristiques fondamentales :

1. Direction

2. Norme

3. Sens

3.5 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

Lorsqu'on parle du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la transalation qui transforme M en M'.

1. Quelle est la direction ?

   a. Toute droite parallèle à l'axe des abscisses.

   b. Uniquement la droite (MM').

c. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées.

d. Toute droite parallèle à la droite (MM').

2. Quelle est le sens ?

a. De O à M.

b. De M à M'.

c. De M' à M.

d. De M à O.

3. Quelle est la norme ?

a. La distance OM.

b. La distance OM'.

c. La distance MM'.

d. La distance M'M.

Chapitre 4

Contenu 2

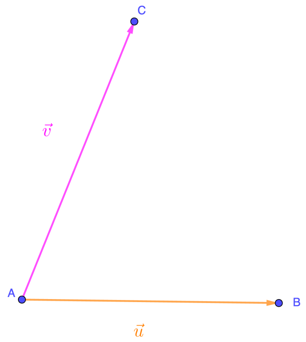
4.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 2.

- C_2 : Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.

4.2 Exercice 3

On reprend la figure de l'exercice 1 :



Soit D l'image du point C par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1. Comparer les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Soit le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

   Que remarquez-vous ?
3. Soit E l'image de D par la translation de vecteur

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

   Calculer

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{ED}$$

4.3 Programme 2

Écrire un programme Python qui :

- demande à l'utilisateur si les vecteurs sont égaux

- ensuite demande s'ils sont alignés
- indique les déductions en fonction des réponses

Indication : réfléchir aux différents cas possibles.

4.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si :

   a. Ils ont la même direction.

   b. Ils ont la même direction et le même sens.

   c. Ils ont la même direction et la même norme.

   d. Ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

2. On dit qu'un vecteur est nul si :

   a. Sa direction est horizontale.

   b. Sa direction est verticale.

   c. Il va dans un sens puis dans l'autre.

   d. Sa norme vaut zéro.

Chapitre 5

Contenu 3

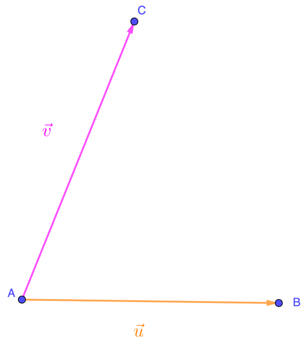
5.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 3.

- C_3 : Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.

5.2 Exercice 4

On reprend la figure de l'exercice 1 :



1. Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

   Indication : utiliser la relation de Chasles.

2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3. Soit O l'intersection entre les segments [AD] et [BC]. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AO}$ comme la somme de deux vecteurs.

4. Calculer $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$.

5.3 Programme 3

Écrire un programme Python qui rappelle la relation de Chasles.

5.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Ajouter deux vecteurs revient à :

a. enchaîner deux translations successives

b. faire une rotation

c. faire une symétrie

d. faire une homothétie

2. La relation de Chasles :

   a. augmente la norme d'un vecteur

   b. décompose un vecteur en sommes de vecteurs

   c. consiste à passer un coup de fil à Michel

   d. revient à faire une transformation géométrique sur un vecteur

Chapitre 6

Contenu 4

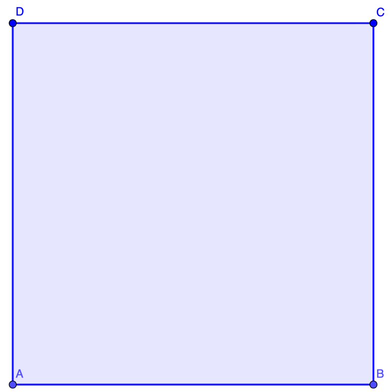
6.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 4.

- C_4 : Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.

6.2 Exercice 5

On considère le carré ABCD sur la figure :



1. Vérifier que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ forment bien une base orthonormée.

2. Déterminer les coordonnées des 4 points A, B, C, D dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

3. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

6.3 Exercice 5 bis

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculer les normes des vecteurs suivants :

1. $n_1 = ||\vec{i} + \vec{j}||$

2. $n_2 = ||\vec{i} - \vec{j}||$

3. $n_3 = ||3\vec{i}||$
4. $n_4 = ||3\vec{i} + 4\vec{j}||$
5. $n_5 = ||-5\vec{j}||$

6.4 Exercice 5 ter

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculer et comparer les normes ajoutées séparément

$$s = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

avec celles des vecteurs sommes

$$e = ||\vec{u} + \vec{v}||$$

1. $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{j})$
2. $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$
3. $(\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{i} + b\vec{j}, c\vec{i} + d\vec{j})$

6.5 Programme 4

Écrire un programme Python qui rappelle :

1. la définition d'une base orthonormée.
2. la relation vectorielle entre les cordonnées d'un vecteur et les vecteurs de la base.

3. la formule de calcul de la norme d'un vecteur et qui effectue le calcul.

6.6 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Une base orthonormée du plan est :

   a. une station de lancement de fusée

   b. un couple de vecteurs ayant des directions distinctes

   c. un couple de vecteurs ayant des directions orthogonales et la même norme

   d. un couple de vecteurs ayant la même direction et la même norme

2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$?

   a. Le couple de nombres $(a; b)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

   b. Les coordonnées du point M obtenu par la translation de vecteur $\vec{u}$ à partir du point O.

   c. La somme de celles des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   d. Les coefficients de toute combinaison linéaire des vecteurs de la base.

3. Considérons le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors l'expression de sa norme est :

   a. $||\vec{u}|| = a + b$

   b. $||\vec{u}|| = a^2 - b^2$

c. $||\vec{u}|| = a^2 + b^2$

d. $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Chapitre 7

Contenu 5

7.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 5.

- C_5 : Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.

7.2 Exercice 6

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Soient les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction des vecteurs de la base.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OB}$ en fonction des vecteurs de la base.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
4. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs de la base.
5. En déduire l'expression des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.

7.3 Programme 5

Écrire un programme Python qui rappelle l'expression des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et B et qui les calcule.

7.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant Chasles on peut écrire :
   a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$
   d. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
2. En utilisant les coordonnées des points A et B on a :

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A \times x_B \\ y_A \times y_B \end{pmatrix}$

Chapitre 8

Contenu 6

8.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 6.

- C_6 : Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.

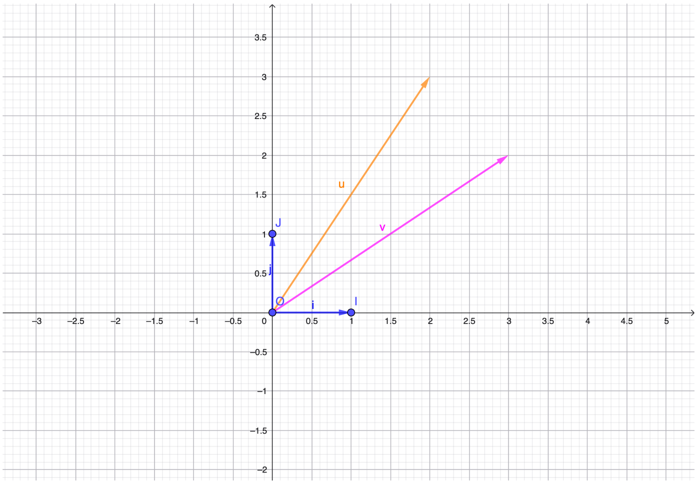
8.2 Exercice 7

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

Voir figure :



1. Construire les points A, B, C et D tels que :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} \qquad \overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} \qquad \overrightarrow{OD} = 3\vec{j}$$

2. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

3. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

4. Construire les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{OE} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{OF} = \vec{v}$$

5. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires.

8.3 Programme 6

Écrire un programme Python indique si deux vecteurs sont colinéaires ou pas.

8.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à 1 alors :

   a. Le vecteur change de direction.
   b. Le vecteur augmente sa norme.
   c. Le vecteur change de sens.
   d. Le vecteur reste identique.

2. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel inférieur à -1 alors :

   a. Le vecteur change de direction.
   b. Le vecteur augmente sa norme.
   c. Le vecteur change de sens.
   d. Le vecteur reste identique.

3. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel supérieur à -1 et inférieur à 1 alors :

   a. Le vecteur change de direction.
   b. Le vecteur diminue sa norme.
   c. Le vecteur change de sens.
   d. Le vecteur reste identique.

4. Si on multiplie un vecteur par un nombre réel alors :

   a. Le vecteur obtenu n'est pas colinéaire au vecteur initial.
   b. Le vecteur obtenu est colinéaire au vecteur initial.

Chapitre 9

Contenu 7

9.1 Objectifs pédagogiques

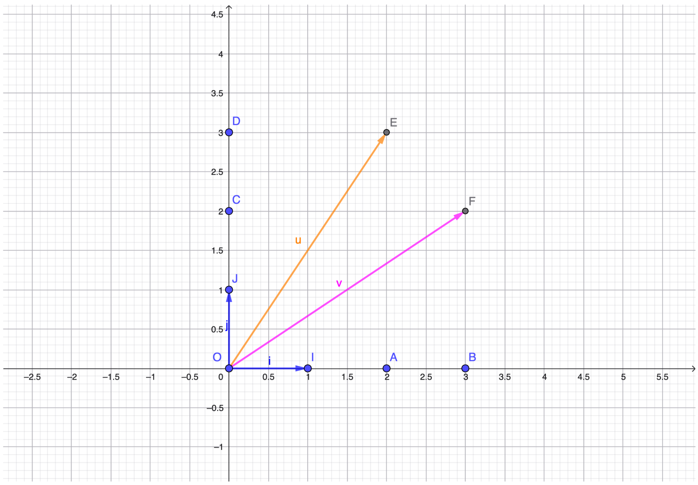
Dans cette partie les exercices ont pour but de mettre en application le contenu 7.

- C_7 : Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

9.2 Exercice 8

On reprend la configuration finale de l'exercice 7.

Voir figure :



1. Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = det(\vec{i}, \vec{j}) \qquad d_2 = det(\vec{u}, \vec{v})$$
$$d_3 = det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \qquad d_4 = det(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$$
$$d_5 = det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \qquad d_6 = det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$$

2. En utilisant le déterminant montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires. En déduire la nature du quadrilatère DCEF.

3. Même question pour $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et le quadrilatère ABEF.

4. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{JE}$.

5. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$. En déduire la nature du quadrilatère IEFJ.

6. On nommera G l'intersection des segments [IF] et [JE]. Déterminer ses coordonnées. En déduire celle du point H tel que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$. En déduire la nature du quadrilatère OBHD.

7. Quelle est la nature du triangle OFE ?

8. Quelle est l'image du point G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$?

9. Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{BK} = \vec{j}$.

10. Déterminer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{DL} = \vec{i}$.

9.3 Programme 7

Écrire un programme Python qui indique si 3 points sont alignés ou pas.

9.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Considérons les vecteurs

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

alors :

a.

$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

b.

$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - y_1y_2$$

c.
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + y_1 x_2$$

d.
$$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

2. Considérons les mêmes vecteurs que précédemment.

   On dira que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si :

   a. $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$
   b. $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$
   c. il existe un réel k tel que $x_1 = kx_2$ et $y_1 = ky_2$
   d. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

Troisième partie

Capacités attendues

- Ca_1 : Représenter géométriquement des vecteurs.
- Ca_2 : Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Ca_3 : Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Ca_4 : Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Ca_5 : Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Ca_6 : Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Ca_7 : Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Chapitre 10

Capacité attendue 1

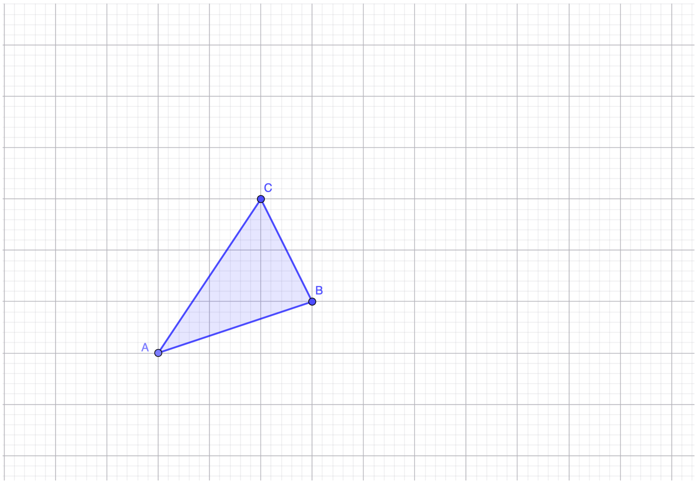
10.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 1.

- Ca_1 : Représenter géométriquement des vecteurs.

10.2 Exercice 9

On considère le triangle ABC représenté sur la figure avec le quadrillage :



1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.

2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.

3. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

10.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Un vecteur est caractérisé par :

   a. Sa longueur uniquement

   b. Sa direction et son sens uniquement

   c. Sa direction, son sens et sa norme

   d. Son origine et son extrémité

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

   a. A = C et B = D

b. ABDC est un parallélogramme

c. AB = CD (distances égales)

d. Les segments [AB] et [CD] sont parallèles

Chapitre 11

Capacité attendue 2

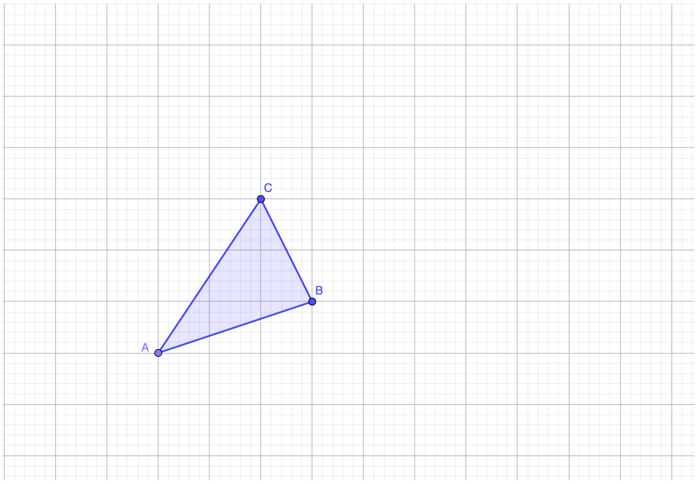
11.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 2.

- Ca_2 : Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

11.2 Exercice 10

On considère la configuration initiale de l'exercice 9 voir figure :



1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.
3. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
4. En déduire la nature du quadrilatère ABEC.

11.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Pour construire géométriquement la somme il faut :

   a. partir de l'origine du vecteur $\vec{u}$ puis, arrivé à son extrémité appliquer le vecteur $\vec{v}$

   b. partir de l'origine du vecteur $\vec{v}$ puis, arrivé à son extrémité appliquer le vecteur $\vec{u}$

c. les deux propositions précédentes aboutissent au même résultat

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$:

    a. est un vecteur ayant même direction que $\vec{u}$ et $\vec{v}$

    b. représente la diagonale du parallélogramme obtenu en faisant partir $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la même origine

Chapitre 12

Capacité attendue 3

12.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 3.

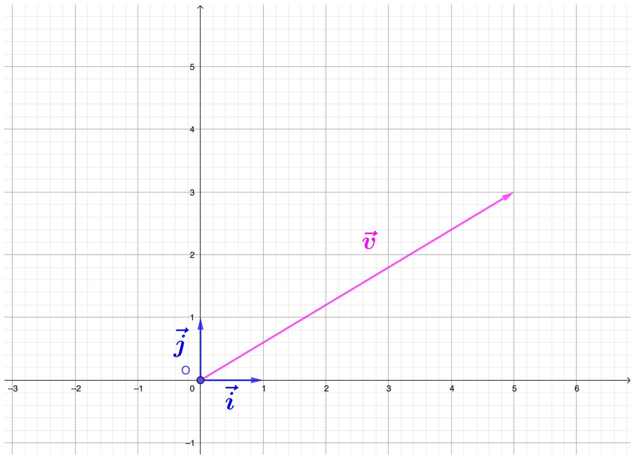
- Ca_3 : Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.

12.2 Exercice 11

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1. Représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.
2. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sur la figure :



12.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

Considérons le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors :

1. Pour le représenter dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

   a. on se place au point M de coordonnées (a ; b) et on trace le vecteur en se déplaçant de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical.

   b. partant de l'origine du repère on se déplace de a unités sur l'axe horizontal et b unités sur l'axe vertical.

2. Pour lire les cordonnées d'un vecteur $\vec{v}$:

   a. on se place à son origine et on reporte les coordonnées du point

b. on trace un représentant du vecteur en partant de l'origine du repère et on lit les coordonnées de son extrémité

Chapitre 13

Capacité attendue 4

13.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 4.

- Ca_4 : Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.

13.2 Exercice 12

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculer les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{p} = 3\vec{d} \qquad \vec{c} = 2\vec{s} - 5\vec{d}$$

13.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Soient
$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
et
$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
deux vecteurs alors
$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
a pour coordonnées :
   a. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$
   c. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
   d. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{y_1}{y_2} \end{pmatrix}$

2. Soient un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et un réel k alors $\vec{v} = ku$ vérifie :
   a. $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$

b. $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$

c. $\vec{v}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

d. $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{k}x \\ \frac{1}{k}y \end{pmatrix}$

Chapitre 14

Capacité attendue 5

14.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 5.

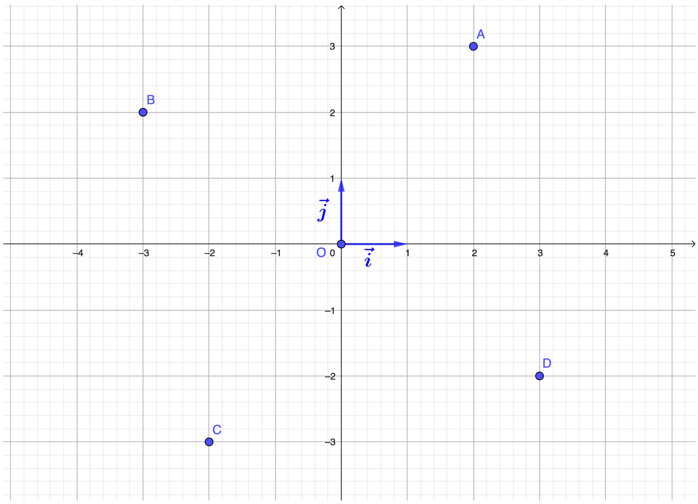
- Ca_5 : Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

14.2 Exercice 13

On se place dans le plan muni repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Avec :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

On considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) et D(3 ; -2) tels que sur la figure :



1. Calculer les distances AB, AC, AD, BC, BD, CD.
2. Calculer les coordonnées des milieux des segments [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD].

14.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. La distance entre $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ vaut :

   a. $AB = x_A x_B + y_A y_B$
   b. $AB = (x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2$
   c. $AB = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$
   d. $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

2. Le milieu $M(x_M; y_M)$ du segment [AB] vérifie :

   a. $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

b. $(x_M ; y_M) = \left(\dfrac{x_A - x_B}{2} ; \dfrac{y_A - y_B}{2}\right)$

c. $(x_M ; y_M) = \left(\dfrac{x_A \times x_B}{2} ; \dfrac{y_A \times y_B}{2}\right)$

d. $(x_M ; y_M) = \left(\dfrac{x_A \div x_B}{2} ; \dfrac{y_A \div y_B}{2}\right)$

Chapitre 15

Capacité attendue 6

15.1 Objectifs pédagogiques

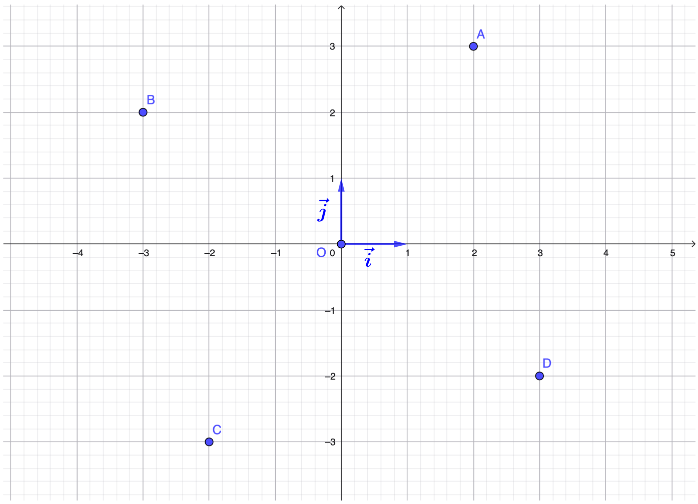
Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 6.

- Ca_6 : Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

15.2 Exercice 14

On reprend la configuration de l'exercice précédent.

Voir la figure :



1. Les points A, O et C sont-ils alignés ?
2. Calculer OA et OC. Qu'en déduisez-vous ?
3. Calculer le déterminant $det(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$. Quelle interprétation géométrique en déduisez-vous ?
4. Comparer OB et OD. Qu'en déduisez-vous ?
5. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?
6. Comparer AB et AD.
7. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

15.3 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Pour montrer que A, B et C sont alignés il faut :

   a. que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
   b. qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
   c. vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   d. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

2. Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles il faut :
   a. montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
   b. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$
   c. montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   d. vérifier que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$

Chapitre 16

Capacité attendue 7

16.1 Objectifs pédagogiques

Dans cette partie le but est de mettre en application la capacité attendue 7.

- Ca_7 : Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

16.2 Exercice 15

Pour chacune des situations suivantes, indiquez comment la résoudre selon la représentation vectorielle parmi :

- Analytique (coordonnées, calculs algébriques)
- Colinéarité (proportionnalité, déterminant)
- Géométrique (relation de Chasles, parallélogramme)

1. Démontrer que les points A, B, C sont alignés
2. Calculer la distance entre deux points A(2 ;3) et B(5 ;7)

3. Montrer que ABCD est un parallélogramme
4. Trouver les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

5. Vérifier si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles

16.3 Programme

Écrire un programme Python qui résout le problème

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

C'est-à-dire un programme qui permet d'exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres a et b et des coordonnées des points déjà existants A, B, et C.

16.4 QCM d'auto-évaluation

Parmi les réponses proposées au moins une est la bonne. Cela signifie qu'il peut y avoir *plusieurs* bonnes réponses.

1. Si ABC est un triangle et que D est un 4ème point qui vérifie l'égalité

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

alors on peut en déduire que :

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. ABCD est un parallélogramme

c. ABDC est un parallélogramme

d. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ les deux égalités sont vraies

e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ une seule des deux égalités est vraie

f. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ aucune des égalités n'est vraie

g. le point D est à l'intérieur du triangle ABC

h. le point D est l'image du point A par la symétrie de centre le milieu du segment [BC]

i. le point D est à l'extérieur du triangle ABC

j. le point D est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu du segment [BC]

2. Si ABCD est un carré alors :

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base orthornomée

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base orthornomée

c. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

d. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

e. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$

f. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

g. $AC^2 = AB^2 + BC^2$

h. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

i. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

j. Le centre O du carré vérifie

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

3. Si ABCD est un rectangle et O l'intersection des droites (AC) et (BD) alors :

   a. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
   b. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
   c. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$
   d. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$
   e. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 1$
   f. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
   g. $AC > AB + BC$
   h. $AC < AB + AD$
   i. $AC = BD$
   j. $AC \neq BD$

4. Soient A et B deux points distincts du plan. Si C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors :

   a. B est le milieu du segment [AC]
   b. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
   c. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$
   d. les coordonnées de C vérifient :

   $$x_C = 2x_B - x_A$$
   $$y_C = 2y_B - y_A$$

   e. les coordonnées de C vérifient :

   $$x_C = 2x_B + x_A$$
   $$y_C = 2y_B + y_A$$

f. C est l'image de A par la symétrie de centre B.

g. C est le milieu du segment [AB].

h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

i. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

j. $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

5. Si on a $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0$ alors :

   a. ABCD ou ABDC est un trapèze.

   b. Si AB = DC alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme.

   c. Si AB = AD = DC alors ABCD est un losange.

   d. Si AB = AC = CD alors ABDC est un losange.

   e. Si AB = DC et CA = BD alors ABDC est un rectangle.

   f. Si AB = DC et AD = BC alors ABDC est un rectangle.

   g. Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un rectangle.

   h. Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un rectangle.

   i. Si AB = DC et AC = BD alors ABCD est un losange.

   j. Si AB = DC et AD = BC alors ABCD est un losange.

6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

   a. Si $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{w}||$ alors les trois vecteurs sont colinéaires.

   b. Il est impossible que les trois vecteurs soient colinéaires.

   c. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors les trois vecteurs sont colinéaires.

   d. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors $det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

   e. Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

   f. $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| > ||\vec{w}||$
   g. $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| < ||\vec{w}||$
   h. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{u} = \vec{0}$ soit $\vec{v} = \vec{0}$
   i. Si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors soit $\vec{w} = \vec{u}$ soit $\vec{w} = \vec{v}$
   j. Si $det(\vec{w}, \vec{u}) = 0$ alors soit $\vec{u} = -\vec{v}$ soit $\vec{w} = \vec{0}$

7. Soit un vecteur $\vec{u}$ de norme $||\vec{u}|| = 5$.

   a. Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.
   b. Si $x_{\vec{u}} = 3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.
   c. Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = -4$.
   d. Si $x_{\vec{u}} = -3$ alors $y_{\vec{u}} = 4$.
   e. Si $x_{\vec{u}} = \pm 3$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 4$.
   f. Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
   g. Si $x_{\vec{u}} = -4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
   h. Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = -3$.
   i. Si $x_{\vec{u}} = 4$ alors $y_{\vec{u}} = 3$.
   j. Si $x_{\vec{u}} = \pm 4$ alors $y_{\vec{u}} = \pm 3$.

8. Dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(3 ; 2), B(3 ; -2), C(-3 ; -2), D(3 ; -1), E(-3 ; -1), F(-1 ; -1), G(1 ; 1), H(1 ; 2), I(-1 ; 2).

   a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car
   $$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$
   b. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car
   $$det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}) = 0$$

c. Les points A, B et C sont alignés.
d. Les points D, E et F sont alignés.
e. ABC est un triangle rectangle en B.
f. ABD est un triangle rectangle en B.
g. GDF est un triangle rectangle en G.
h. GDF est un triangle isocèle en G.
i. BCHA est un trapèze.
j. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

9. Dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(2 ; 3), B(-3 ; 2), C(-2 ; -3) ; D(3 ; -2).

   a. Le triangle BOA est isocèle en A.
   b. Le triangle BOA est isocèle en B.
   c. Le triangle BOA est isocèle en O.
   d. Le triangle BOA est rectangle en A.
   e. Le triangle BOA est rectangle en B.
   f. Le triangle BOA est rectangle en O.
   g. C est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
   h. D est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
   i. ABDC est un carré.
   j. ABCD est un carré.

Quatrième partie

Exercices complémentaires

Chapitre 17

Pour s'exercer davantage

17.1 Exercice 16

Soit ABC un triangle. On note I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

- Méthode 1 (Géométrique) : En utilisant la relation de Chasles, montrer que :
$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

- Méthode 2 (Analytique) : Placer A(0 ;0), B(4 ;0), C(2 ;3) dans un repère et calculer les coordonnées de I. Vérifier la relation.

- Question : Quelle méthode préférez-vous ? Pourquoi ?

17.2 Exercice 17

On considère un triangle ABC et un point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire les coordonées du point G en fonction de celles des points A, B et C.

17.3 Exercice 18

Soient A et B deux points distincts dans le plan.

Déterminer l'ensemble des points M tels que MA = MB.

17.4 Exercice 19

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, placer les points A(1 ; 2), B(4 ; 5) et C(7 ; 8).

2. A, B et C sont-ils alignés ? Conjecturer géométriquement (à l'oeil).

3. Démontrer votre conjecture par le calcul (en utilisant le déterminant).

17.5 Exercice 20

Dans le plan canonique on considère les points A(0 ; 0), B(3 ; 1), C(4 ; 4) et D(1 ; 3).

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

1. Utiliser uniquement le calcul de distance et le déterminant.

2. Utiliser une seule égalité vectorielle.

17.6 Exercice 21

On donne A(1 ;2), B(4 ;3), C(5 ;6), D(2 ;5).

1. Représentation analytique : Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$
2. Test d'égalité : Que constatez-vous ?
3. Interprétation géométrique : Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
4. Vérification alternative : Calculer les coordonnées des milieux de [AC] et [BD]. Conclusion ?

17.7 Exercice 22

Soit ABC un triangle. Le point G vérifie :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1. Pourquoi la représentation analytique est-elle préférable pour trouver les coordonnées de G ?
2. Sachant que A(-2 ;1), B(4 ;3), C(1 ;-2), déterminer les coordonnées de G.
3. Vérifier géométriquement que G est situé aux 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.

17.8 Exercice 23

On considère la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} + \vec{u}$$

où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Approche analytique : Si M(x ;y), exprimer les coordonnées de M'(x' ;y')

2. Cas particulier : Trouver le(s) point(s) invariant(s) par cette transformation

3. Interprétation géométrique : Décrire cette transformation en termes simples

17.9 Exercice 24

Dans le triangle ABC, on place :

- M sur [AB] tel que AM = (1/3)AB

- N sur [AC] tel que AN = (1/3)AC

- P intersection de (BN) et (CM)

Démontrer que P appartient à la droite (AP) et que AP = (2/3) de la médiane issue de A.

Conseil : Testez plusieurs approches et comparez leur efficacité.

17.10 Exercice 25

Un bateau situé en B doit rejoindre un port P. Le courant marin exerce une force représentée par le vecteur

$$\vec{c}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(en km/h).

Le capitaine peut diriger son bateau avec une vitesse propre de 18 km/h. Données : B(0 ;0), P(15 ;8) (distances en km)

1. Représentation : Quelle direction doit-il donner à son bateau pour atteindre exactement P en tenant compte du courant ?

2. Calcul : Combien de temps mettra-t-il ?

3. Justification : Expliquez votre choix de représentation vectorielle.

17.11 Exercice 26

Trois villes A(0 ;0), B(8 ;0), C(4 ;6) doivent être reliées par un réseau routier.

On cherche le point M qui minimise la somme des distances MA + MB + MC.

1. Approche géométrique : Pourquoi le centre de gravité G du triangle semble-t-il une bonne candidate ?

2. Approche analytique : Calculer les coordonnées de G

3. Vérification : Calculer GA + GB + GC

4. Question ouverte : G est-il vraiment le point optimal ?

   Note : Le point qui minimise la somme des distances s'appelle le **point de Fermat** (ou point de Torricelli). Pour le trouver, il faudrait des outils mathématiques que vous verrez en études supérieures. Ici, on vérifie simplement que le centre de gravité G donne déjà un bon résultat, sans être optimal.

Cinquième partie

Exercices de synthèse

Chapitre 18

Représentation par coordonnées (dans un repère)

18.1 Exercice 27

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points A(2,3), B(-1, 4), et C(5,−2).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés en utilisant les vecteurs.

3. Trouver les coordonnées du point D tel que

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Objectif : Utiliser les coordonnées pour calculer des vecteurs, vérifier l'alignement, et résoudre des équations vectorielles.

Chapitre 19

Représentation géométrique (sans repère)

19.1 Exercice 28

Soit un parallélogramme ABCD de centre O.

1. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

3. En déduire l'ensemble des points M tels que

$$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|| = 6$$

Objectif : Manipuler les vecteurs avec des relations géométriques (parallélogramme, milieu) et utiliser la norme pour caractériser un ensemble de points.

19.2 Exercice 29

Soit ABCD un carré de centre O.

Déterminer l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que OM = OA.

Chapitre 20

Colinéarité et alignement

20.1 Exercice 30

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Trouver tous les points M(x,y) tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.
3. Les points A(1,0), B(4,−2), et C(−2,1) sont-ils alignés ? Justifier avec les vecteurs.

Objectif : Utiliser la colinéarité pour caractériser l'alignement ou trouver des ensembles de points.

20.2 Exercice 31

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1. Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = k\vec{j}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Posons $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

4. Posons $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

5. Posons $\vec{w} = -\vec{i} - \vec{j}$. Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = k\vec{w}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Sixième partie

Démonstrations

Chapitre 21

Démonstrations

21.1 Exercice 32

Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

21.2 Exercice 32bis

Démontrer que pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

21.3 Exercice 32ter

Démontrer que si I est le milieu de [AB], alors : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Septième partie

Exercices divers

Chapitre 22

Alphabet

22.1 Introduction

Dans cette section, vous allez apprendre à maîtriser les vecteurs en traçant toutes les lettres de l'alphabet latin. Chaque lettre est une construction géométrique précise utilisant les opérations vectorielles.

Objectifs :

- Renforcer la manipulation des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$
- Visualiser concrètement les combinaisons linéaires
- Développer la précision du tracé géométrique
- S'amuser avec les mathématiques !

Consignes générales :

1. Utilisez une règle et un compas pour les tracés
2. Respectez scrupuleusement l'échelle (1 carreau = 1 unité recommandé)

3. Vérifiez visuellement que vous obtenez bien la lettre attendue

4. Si nécessaire, recommencez le tracé pour gagner en précision

22.2 Exercice 33

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

2. Construire l'image A' du point A par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

3. Déterminer les coordonnées de milieux des segments [OA] et [AA'] qu'on nommera H et H' respectivement.

4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ en fonction des vecteurs de la base.

5. À quelle lettre de l'alphabet latin peut-on penser lorsqu'on relie O, A, A' puis H et H' ?

22.3 Exercice 34

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer les points I et J images de O par les translations de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ respectivement.

2. Placer J' image de O par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

3. Placer O' image de J par la translation de vecteur $\vec{j}$.

4. Placer J” image de J par la translation de vecteur $2\vec{j}$.
5. Placer I’ image de O’ par la translation de vecteur $\vec{i}$.
6. Tracer le demi-cercle de centre O passant par I et J (vérifier qu’il passe bien par J’).
7. Tracer le demi-cercle de centre O’ passant par J et I’ (vérifier qu’il passe bien par J”).
8. Tracer le segment J’J”.
9. Vérifier que vous avez bien obtenu la lettre B.

22.4 Exercice 35

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer le point C tel que $\overrightarrow{OC} = -\vec{i}$.
2. Placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
3. Placer le point J’ image de O par la translation de vecteur $-\vec{j}$.
4. Tracer le demi-cercle de centre O passant par J et J’.
5. Vérifier qu’il passe bien par C et qu’il forme le tracé de la lettre C.

22.5 Exercice 36

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer le point D image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$.

2. Placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

3. Placer le point J' tel que O soit le milieu du segment [JJ'].

4. Tracer le demi-cercle de centre O passant par J, I et J'.

5. Reconnaître la lettre D.

22.6 Exercice 37

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer les points I et J tels qu'ils soient les images respectives de O par les translations de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2. Tracer le vecteur $\vec{j}$ en partant de J, on nommera J' son extrémité.

3. Tracer le vecteur $\vec{i}$ en partant de J, on nommera I' son extrémité.

4. Tracer le vecteur $\vec{i}$ en partant de J', on nommera I" son extrémité.

5. Vérifier que vous avez bien obtenu la lettre E.

22.7 Exercice 38

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ avec I(1 ; 0) et J(0 ; 1). On veillera à NE PAS tracer le vecteur $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

1. Tracer le vecteur $2\overrightarrow{OJ}$ en partant de O, on nommera J' son extrémité.

2. Tracer le vecteur $\overrightarrow{OI}$ en partant de J, on nommera I' son extrémité.

3. Tracer le vecteur $\overrightarrow{OI}$ en partant de J', on nommera I" son extrémité.

4. Vérifier que les vecteurs tracés forment bien la lettre F.

22.8 Exercice 39

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1. Tracer le vecteur $\vec{j}$ avec pour origine I(1 ; 0) et extrémité I' dont vous déterminerez les coordonnées.

2. Construire le point I" image de I' par la translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i}$.

3. Placer le point J' tel que $\overrightarrow{OJ'} = 2\vec{j}$.

4. Construire le point J" image de J' par la translation de vecteur $\vec{i}$.

5. Vérifier que l'enchaînement $\overrightarrow{I''I'}$ puis $\overrightarrow{I'I}$ puis $\overrightarrow{IO}$ puis $\overrightarrow{OJ'}$ et enfin $\overrightarrow{J'J''}$ forme bien la lettre G.

22.9 Exercice 40

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1. Placer I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

2. Placer J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

3. Construire J’ tel que O soit le milieu de [JJ’] et donc tracer le vecteur $\overrightarrow{OJ'}$.

4. Construire I’ l’image de I par la translation de vecteur $\vec{j}$ et donc tracer le vecteur $\overrightarrow{II'}$.

5. Construire I” l’image de I par la translation de vecteur $-\vec{j}$ et donc tracer le vecteur $\overrightarrow{II''}$.

6. Vérifier que vous avez obtenu la lettre H.

22.10 Exercice 41

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer I image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$.

2. Placer J image de O par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

3. Construire I’ tel que O soit le milieu de [II’].

4. Construire I” tel que $\overrightarrow{O'I''} = \vec{i}$.

5. Placer J’ tel que J soit le milieu de [I”J].

6. Si vous faites l’enchaînement $\overrightarrow{OI}$ en partant de O, puis $\overrightarrow{OI'}$ toujours en partant de O, puis $\overrightarrow{OJ}$ toujours en partant de O, puis $\overrightarrow{JI''}$ en partant de J et enfin $\overrightarrow{JJ'}$ en partant de J vous obtenez la lettre I.

22.11 Exercice 42

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

2. Construire le point J tel que l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

3. Tracer le vecteur $2\vec{j}$ en partant de I et nommer I' son extrémité.

4. Vérifier qu'en faisant l'enchaînement $\overrightarrow{I'I}$ puis $\overrightarrow{IO}$ puis enfin $\overrightarrow{OJ}$ on obtient bien la lettre J.

22.12 Exercice 43

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J$. Avec I(1 ; 0) et J(0 ; 1).

1. Construire I' image de I par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OJ}$.

2. Construire J' image de J par la translation de vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

3. En partant de O tracer le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

4. En partant de J tracer le vecteur $\overrightarrow{JI}$.

5. En partant de J tracer le vecteur $\overrightarrow{JI'}$.

6. En partant de J tracer le vecteur $\overrightarrow{JJ'}$.

7. Vérifiez que vous avez bien obtenu la lettre K.

22.13 Exercice 44

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. En partant de O tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera I son extrémité.

2. En partant de O tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera J son extrémité.
3. Vérifier que l'enchaînement $\overrightarrow{JO}$ en partant de J puis $\overrightarrow{OI}$ en partant de O donne bien la lettre L.

22.14 Exercice 45

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Veiller à NE PAS tracer le vecteur $\vec{i}$.

1. Partir de O et tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera J son extrémité.
2. À partir de J tracer le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j})$, on nommera K son extrémité.
3. À partir de K tracer le vecteur $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, on nommera I' son extrémité.
4. À partir de I' tracer le vecteur $-\vec{j}$, on nommera I son extrémité.
5. Vérifier qu'on a bien obtenu la lettre M.

22.15 Exercice 46

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Veiller à NE PAS tracer le vecteur $\vec{i}$.

1. Partir de O et tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera J son extrémité.
2. À partir de J tracer le vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, on nommera I son extrémité.

3. À partir de I tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera I' son extrémité.

4. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre N.

22.16 Exercice 47

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J$. Avec I(1 ; 0) et J(0 ; 1).

1. Tracer le cercle de centre O passant par I et J.

2. Vérifier qu'on a bien obtenu la lettre O.

22.17 Exercice 48

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. En partant de O tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera I son extrémité.

2. À partir de I tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera I' son extrémité.

3. À partir de I' tracer le vecteur $-\vec{i}$, on nommera J son extrémité.

4. À partir de J tracer le vecteur $-2\vec{j}$, on nommera J' son extrémité.

5. Vérifiez qu'on a bien tracé la lettre P.

22.18 Exercice 49

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. En partant de O tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera J son extrémité.
2. À partir de J tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera J' son extrémité.
3. À partir de J' tracer le vecteur $-2\vec{j}$, on nommera J" son extrémité.
4. En repartant de O tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera I son extrémité.
5. Vérifier qu'on a bien tracer la lettre Q.

22.19 Exercice 50

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer directement I et J aux extrémités respectives des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant de O.
2. Tracer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant respectivement de J et I et noter I' leur extrémité commune.
3. En partant de O tracer le vecteur $\vec{u} = -\vec{j}$, on nommera J' son extrémité.
4. Toujours en partant de O tracer le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, on nommera I" son extrémité.
5. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre R.

22.20 Exercice 51

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1. Placer directement I et J aux extrémités respectives des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant de O.

2. En partant de J tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera J' son extrémité.

3. En partant de I tracer le vecteur $\vec{u} = -\vec{j}$, on nommera I' son extrémité.

4. En partant de I' tracer le vecteur $\vec{v} = -\vec{i}$, on nommera I" son extrémité.

5. Vérifier qu'on a bien tracé la letre S.

22.21 Exercice 52

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Veiller à NE PAS tracer le vecteur $\vec{i}$.

1. Placer le point J à l'extrémité du vecteur $\vec{j}$ en partant de O.

2. En partant de J tracer le vecteur $\vec{i}$, on nommera J' son extrémité.

3. Toujours en partant de J tracer le vecteur $\vec{u} = -\vec{i}$, on nommera J" son extrémité.

4. Vérifier qu'on a bien obtenu la lettre T.

22.22 Exercice 53

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

1. Placer directement I et J aux extrémités respectives des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant de O.
2. À partir de I tracer le vecteur $\vec{j}$, on nommera I' son extrémité.
3. Vérifier qu'on a bien obtenu la lettre U.

22.23 Exercice 54

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ veillez à NE PAS tracer ni le vecteur $\vec{i}$ ni le vecteur $\vec{j}$:

1. En partant de O tracer le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on nommera A son extrémité.
2. En partant de O tracer le vecteur $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on nommera B son extrémité.
3. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre V.

22.24 Exercice 55

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ veillez à NE PAS tracer ni le vecteur $\vec{i}$ ni le vecteur $\vec{j}$:

1. En partant de O tracer le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on nommera A son extrémité.
2. En partant de O tracer le vecteur $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on nommera B son extrémité.

3. En partant du point A tracer le vecteur $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$, on nommera I son extrémité.

4. En partant de I tracer le vecteur $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on nommera C son extrémité.

5. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre W.

22.25 Exercice 56

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ veillez à NE PAS tracer ni le vecteur $\vec{i}$ ni le vecteur $\vec{j}$:

1. Placer directement I et J aux extrémités respectives des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant de O.

2. Construire I' tel que O milieu de [II'].

3. En partant de I' tracer le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

4. En partant du point I tracer le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{IJ}$ et donner son expression en fonction des vecteurs de la base.

5. En partant de J tracer le vecteur $\vec{v}$, on nommera J' son extrémité.

6. Toujours en partant de J tracer le vecteur $\vec{u}$, on nommera J" son extrémité.

7. Vérifier qu'on a bien obtenu la lettre X.

22.26 Exercice 57

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Veiller à NE PAS tracer le vecteur $\vec{i}$.

1. En partant du point O placer J à l'extrémité du vecteur $\vec{j}$.
2. À partir du point J tracer le vecteur $\vec{u} = \frac{3}{4}(\vec{i} + \vec{j})$, on nommera J' son extrémité.
3. Toujours à partir du point J tracer le vecteur $\vec{v} = \frac{3}{4}(\vec{j} - \vec{i})$, on nommera J" son extrémité.
4. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre Y.

22.27 Exercice 58

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Veiller à NE PAS tracer le vecteur $\vec{j}$.

1. Placer directement I et J aux extrémités respectives des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en partant de O.
2. En partant de O tracer le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, on nommera K son extrémité.
3. En partant de J tracer le vecteur $\vec{i}$ jusqu'à K.
4. Vérifier qu'on a bien tracé la lettre Z.

Chapitre 23

Applications des vecteurs dans la vie réelle

23.1 Exercice 59

Un drone se déplace selon les vecteurs successifs :

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -30 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_3 \begin{pmatrix} -20 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Calculer sa position finale et la distance parcourue au total.

23.2 Exercice 60

On considère un échiquier standard comme celui sur la figure ci-dessous :

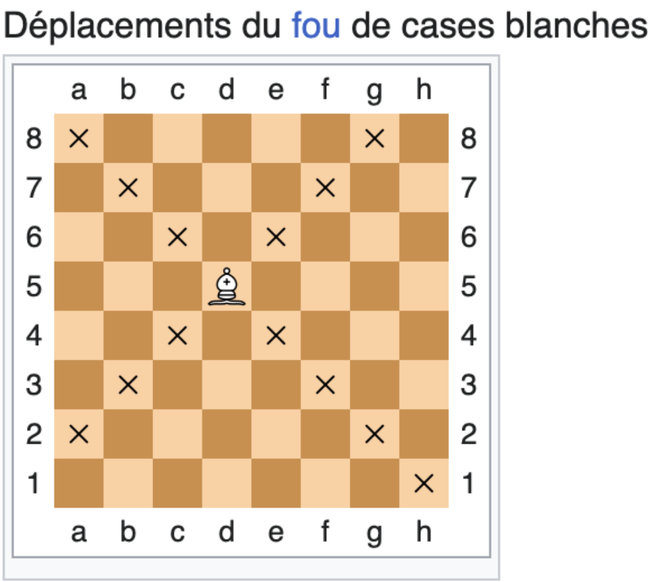
L'échiquier est traditionnellement codé avec les lettres de a à h pour indiquer la position horizontale et les nombres de 1 à 8 pour indiquer la position verticale.

De cette façon le codage a1 correspond à la case en bas à gauche et le codage h8 à la case en haut à droite.

Afin de rendre cette représentation utilisable dans le cadre vectorielle conforme à la classe de seconde on va considérer que l'origine du repère sera la case a1 qu'on identifiera à O.

De même, le vecteur $\vec{\imath}$ est identifié à la translation de a1 vers b1 et le vecteur $\vec{\jmath}$ à celle de a1 vers a2.

Considérons les déplacements possibles du fou blanc comme indiqué sur la photo ci-dessous :



1. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}_1$ indiquant le déplacement de la case h1 vers la case a8 (appelée aussi anti-diagonale ou seconde diagonale) ?

2. Calculer la norme de ce vecteur $||\vec{v}_1||$.

3. Mêmes questions pour le fou noir et la diagonale a1 vers h8 représentée par le vecteur $\vec{v}_2$.

4. Mêmes questions pour la sur-diagonale du fou blanc débutant à la case a2 et finissant à la case g8, on nommera le vecteur $\vec{v}_3$.

5. Mêmes questions pour la sur-diagonale du fou noir débutant à la case a3 et finissant à la case f8, on nommera le vecteur $\vec{v}_4$.

6. Idem pour $\vec{v}_5$ qui part de a4 et termine en e8.

7. Idem pour $\vec{v}_6$ qui part de a5 et termine en d8.

8. Idem pour $\vec{v}_7$ qui commence en a6 et finit en c8.

9. Idem pour $\vec{v}_8$ qui commence en a7 et finit en b8.

10. Idem pour $\vec{v}_9$ qui commence en a8 et finit en a8.

11. Si on souhaite généraliser les déplacements du fou en programmant un seul vecteur du type : $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ avec

$$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

et

$$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

les vecteurs de la base canonique, alors quelles sont les valeurs possibles pour les nombres a et b ?

23.3 Exercice 61

Un projectile est lancé depuis O(0 ;0) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de coordonnées $\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}$ m/s.

La gravité exerce une accélération constante $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$ m/s².

Après 1 seconde, la vitesse devient $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{v}_1$

2. Calculer la norme de $\vec{v}_1$ (vitesse en m/s)

3. La position après 1s est $\vec{p}_1 = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}$. Calculer les coordonnées du point P_1.

4. Après combien de temps le projectile retombe-t-il au sol (y=0) ?

Note : Cet exercice anticipe la physique de première/terminale.

23.4 Exercice 62 : Images vectorielles vs images bitmap

Image Bitmap (PNG) **Image Vectorielle (SVG)**

40 000 pixels pour 200×200 3 points + 2 vecteurs

FIG. 23.1 : Différence entre image bitmap et image vectorielle

Les images numériques peuvent être de deux types : **bitmap** (aussi appelées matricielles ou raster) ou **vectorielles**.

- Une image bitmap (JPEG, PNG, GIF) est constituée d'une grille de pixels. Chaque pixel a une couleur définie. Si on agrandit l'image, elle devient floue et pixelisée.
- Une image vectorielle (SVG, PDF vectoriel) est constituée de formules mathématiques décrivant des formes géométriques (lignes, courbes, polygones). On peut l'agrandir infiniment sans perte de qualité.

Questions :

1. Dans un logiciel de dessin vectoriel, on trace un segment de A(100 ; 150) à B(300 ; 450). Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?
2. Pour afficher ce segment à l'écran, l'ordinateur calcule sa longueur. Quelle est-elle (en pixels) ?
3. L'utilisateur applique un zoom ×2 (homothétie de rapport 2 centrée à l'origine). Quelles sont les nouvelles coordonnées de A' et B' ?
4. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB}$? Justifier.
5. Quelle est la longueur du segment [A'B'] après le zoom ?
6. **Question de réflexion** : Pourquoi dit-on qu'une image vectorielle peut être agrandie "infiniment" sans perte de qualité, contrairement à une image bitmap ?

Note : Les formats SVG (Scalable Vector Graphics) et PDF utilisent exactement ces principes mathématiques. C'est pourquoi les logos d'entreprises, icônes d'applications, et schémas techniques sont toujours créés en vectoriel !

23.5 Exercice 63 : Décoder un fichier SVG

Le format SVG (Scalable Vector Graphics) est un format d'image vectorielle basé sur du code XML. Voici un extrait simplifié d'un fichier SVG :

```
<svg width="500" height="400">
  <line x1="50" y1="100" x2="200" y2="250" stroke="blue
```

```
  <line x1="200" y2="250" x2="350" y2="100" stroke="red
  <circle cx="200" cy="175" r="80" fill="none" stroke="
</svg>
```

Ce code décrit :

- Une ligne bleue du point A(50 ; 100) au point B(200 ; 250)
- Une ligne rouge du point B(200 ; 250) au point C(350 ; 100)
- Un cercle vert de centre O(200 ; 175) et de rayon 80 pixels

Attention : En SVG, l'axe des ordonnées est **inversé** par rapport au repère mathématique classique (l'origine est en haut à gauche, y augmente vers le bas).

Questions :

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère SVG.
2. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier avec le déterminant.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Le centre O du cercle appartient-il au segment [AC] ? Justifier.
5. **Défi** : Écrire le code SVG d'un carré DEFG de côté 100 pixels avec D(100 ; 100) comme sommet en haut à gauche.

Pour aller plus loin : Ouvrez un fichier .svg avec un éditeur de texte (Bloc-notes, TextEdit) et observez le code. Vous verrez des vecteurs partout !

23.6 Exercice 64 : Pourquoi les PDF sont-ils vectoriels ?

Un fichier PDF peut contenir du texte, des images et des graphiques. Le texte et les graphiques sont généralement stockés sous forme **vectorielle**.

Prenons l'exemple de la lettre ”A” :

- Dans une image bitmap (photo), le ”A” est une grille de pixels noirs et blancs
- Dans un PDF vectoriel, le ”A” est décrit par ses contours : deux segments obliques et un segment horizontal

Situation : Un designer crée un logo avec la lettre ”V” formée par deux segments :

- Segment 1 : de O(0 ; 100) à M(50 ; 0)
- Segment 2 : de M(50 ; 0) à N(100 ; 100)

Questions :

1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MN}$?
2. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Que peut-on en déduire sur la forme de la lettre ”V” ?
3. Calculer les normes $\|\overrightarrow{OM}\|$ et $\|\overrightarrow{MN}\|$. La lettre ”V” est-elle symétrique ?
4. Le designer applique une transformation : tous les points sont multipliés par 2. Quelles sont les nouvelles coordonnées de O', M', N' ?
5. Les segments [O'M'] et [M'N'] conservent-ils les mêmes angles que [OM] et [MN] ? Pourquoi ?

6. **Application** : Expliquez pourquoi un PDF contenant du texte reste net même quand on zoom à 400%, alors qu'une photo devient floue.

À retenir : Quand vous convertissez un document Word en PDF, tout le texte est transformé en vecteurs. C'est pour ça qu'on peut zoomer sans pixelisation !

23.7 Exercice 65 : Bitmap vs Vectoriel - Étude comparative

On souhaite créer un logo carré de 200×200 pixels pour une application mobile.

Méthode 1 : Image bitmap (PNG)

- Le logo est une grille de 200×200 = 40 000 pixels
- Chaque pixel stocke sa couleur (3 octets RGB)
- Taille du fichier : ≈ 120 Ko (avec compression)
- Si on agrandit à 400×400, il faut recalculer 160 000 pixels par interpolation ⟶ image floue

Méthode 2 : Image vectorielle (SVG)

- Le logo est décrit par 4 segments formant un carré
- Stockage : 4 vecteurs avec leurs coordonnées
- Taille du fichier : ≈ 1 Ko
- Si on agrandit, on multiplie simplement les coordonnées par 2 ⟶ image parfaitement nette

Questions :

1. Un carré vectoriel a pour sommets A(0 ;0), B(200 ;0), C(200 ;200), D(0 ;200). Donner les coordonnées des 4 vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

2. On applique un zoom ×3. Quelles sont les nouvelles coordonnées des 4 sommets ?

3. Calculer le périmètre du carré initial et du carré agrandi. Vérifier que le rapport est bien 3.

4. **Calcul de taille** : a) Bitmap : Combien de pixels dans l'image agrandie (600×600) ? b) Vectoriel : Combien de vecteurs dans l'image agrandie ?

5. Quel format choisiriez-vous pour : a) Une photo de vacances ? b) Le logo d'une entreprise ? c) Un schéma mathématique ? Justifier chaque choix.

Conclusion : Les vecteurs que vous apprenez en seconde sont utilisés quotidiennement par des millions d'ordinateurs, smartphones et imprimantes pour afficher des textes, logos, icônes et graphiques !

23.8 Exercice 66 : Créer une icône vectorielle (Projet)

Les icônes d'applications sur smartphone sont toujours créées en vectoriel pour s'adapter aux différentes tailles d'écran (iPhone, iPad, etc.).

Projet : Créer l'icône ⊠ (éclair) en utilisant uniquement des vecteurs.

Étape 1 : Conception On dessine l'éclair avec 7 points :

- A(100 ; 0) [sommet haut]
- B(60 ; 80)
- C(80 ; 80)
- D(40 ; 200) [sommet bas]
- E(80 ; 120)
- F(60 ; 120)
- G(100 ; 0) [retour au début]

Questions :

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$.
2. Vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$. Que signifie ce résultat ?
3. L'icône doit être affichée en 3 tailles : 32×32, 64×64, 128×128 pixels. Pour chaque taille, donner le facteur d'homothétie à appliquer sachant que le dessin initial fait 200×200.
4. **Défi** : Proposer les coordonnées de 4-6 points pour créer votre propre icône simple (maison, cœur, étoile, etc.).

Pour aller plus loin : Les designers utilisent des logiciels comme Adobe Illustrator, Inkscape (gratuit), ou Figma pour créer des images vectorielles. Tous ces outils manipulent des vecteurs mathématiques en arrière-plan !

Chapitre 24

Chiffres

24.1 Introduction

Dans cette section, vous allez apprendre à maîtriser les vecteurs en traçant tous les chiffres indo-arabes du système décimal. Chaque chiffre est une construction géométrique précise utilisant les opérations vectorielles.

Objectifs :

- Renforcer la manipulation des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$
- Visualiser concrètement les combinaisons linéaires
- Développer la précision du tracé géométrique
- S'amuser avec les mathématiques !

Consignes générales :

1. Utilisez une règle et un compas pour les tracés
2. Respectez scrupuleusement l'échelle (1 carreau = 1 unité recommandé)

3. Vérifiez visuellement que vous obtenez bien la lettre attendue

4. Si nécessaire, recommencez le tracé pour gagner en précision

24.2 Exercice 67

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

1. Construire O, construire $\vec{i}$, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, veillez à ne pas construire $\vec{j}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction des vecteurs de la base.

3. Placer le point B tel que $\overrightarrow{OB} = 2\vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

4. Placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$.

5. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.3 Exercice 68

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

1. Construire O, construire $\vec{i}$, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, construire $\vec{j}$, placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{JA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JA}$ en fonction des vecteurs de la base.
3. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = -\vec{i}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.4 Exercice 69

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1. Construire O, construire $\vec{i}$, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, veillez à ne pas construire $\vec{j}$.
2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction des vecteurs de la base.
3. Placer le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\vec{i}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.
4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = -\vec{i}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
6. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.5 Exercice 70

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1. Placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, veillez à ne pas construire ni $\vec{i}$ ni $\vec{j}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction des vecteurs de la base.

3. Placer le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\vec{i}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{JC} = \vec{j}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{JC}$.

6. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.6 Exercice 71

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1. Construire O, construire $\vec{i}$, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et tracer le vecteur $\vec{i}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction des vecteurs de la base.

3. Placer le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{JB} = \vec{j}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{JB}$.

5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

6. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.7 Exercice 72

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1. Construire O, construire $\vec{i}$, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, tracer le vecteur $\vec{i}$, placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction des vecteurs de la base.

3. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{JB} = \vec{j}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{JB}$.

5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

6. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.8 Exercice 73

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

1. Placer le point O, placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et tracer $\overrightarrow{OA}$.

2. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = -\vec{i}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.9 Exercice 74

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

1. Placer le point O, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, tracer $\overrightarrow{OI}$, placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$.
3. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.
4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = -\vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
6. Tracer le vecteur $\overrightarrow{JC}$.
7. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.10 Exercice 75

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

1. Placer le point O, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, tracer $\overrightarrow{OI}$, placer le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$.
3. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$.
4. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Placer le point C tel que $\overrightarrow{BC} = -\vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

6. Tracer le vecteur $\overrightarrow{JC}$.

7. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

24.11 Exercice 76

Dans le plan muni du repère orthonormé canonique

$$(O;\vec{i};\vec{j})$$

1. Placer le point O, placer le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et tracer $\overrightarrow{OI}$.

2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{IA} = 2\vec{j}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{IA}$.

3. Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = -\vec{i}$ et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4. Tracer le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

5. Quel est le symbole que vous avez obtenu ?

Chapitre 25

Paradoxe de Simpson

25.1 Exercice 77

1. Placer les points O(0 ; 0) et A(1 ; 0) et tracer le vecteur

   $$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$$

   en bleu.

2. Placer le point B(3 ; 1) et tracer le vecteur

   $$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB}$$

   en rouge.

3. Placer les points C(0 ; 3) et D(2 ; 7) et tracer le vecteur

   $$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD}$$

   en bleu.

4. Placer le point E(0 ; 4) et tracer le vecteur

   $$\vec{v}_2 = \overrightarrow{CE}$$

   en rouge.

5. Vérifier que le pente de $\vec{u}_1$ est inférieure à celle de $\vec{v}_1$.

6. Vérifier que le pente de $\vec{u}_2$ est inférieure à celle de $\vec{v}_2$.

7. Placer les points F(4 ; 2) et G(7 ; 4) et tracer le vecteur

   $$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{FG}$$

   en rouge.

8. Placer le point H(7 ; 6) et tracer le vecteur

   $$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{FH}$$

   en bleu.

9. Comparer les pentes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Que remarquez-vous ?

Chapitre 26

Arithmétique

26.1 Exercice 78

On se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique.

1. Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tracer les 6 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Calculer leurs pentes respectives p_n.

3. Lesquelles sont des nombres entiers ?

4. Qu'en déduisez-vous pour les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier ?

5. Tracer les 6 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 6 \\ n \end{pmatrix}$$

Que remarquez-vous pour $\vec{v}_6$?

6. Calculer les pentes respectives q_n.
7. Avez-vous eu besoin de les calculer à partir de zéro ou alors y avait-il un moyen de les obtenir à partir des p_n ?
8. Quelle est la relation entre les p_n et les q_n ?
9. Combien y a-t-il de vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de coordonnées entières tels que leur produit vaut 6 ?
10. Tracer tous les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente.

26.2 Exercice 79

On se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique.

1. Pour $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$ tracer les 12 vecteurs

$$\vec{u}_n \begin{pmatrix} n \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Calculer leurs pentes respectives p_n.
3. Lesquelles sont des nombres entiers ?
4. Qu'en déduisez-vous pour les abscisses des vecteurs dont la pente est un entier ?
5. Tracer les 12 vecteurs

$$\vec{v}_n \begin{pmatrix} 12 \\ n \end{pmatrix}$$

Que remarquez-vous pour $\vec{v}_1 2$?

6. Calculer les pentes respectives q_n.

7. Avez-vous eu besoin de les calculer à partir de zéro ou alors y avait-il un moyen de les obtenir à partir des p_n ?

8. Quelle est la relation entre les p_n et les q_n ?

9. Combien y a-t-il de vecteurs du plan dans le cadrant supérieur droit de coordonnées entières tels que leur produit vaut 12 ?

10. Tracer tous les vecteurs à coordonnées entières vérifiant les conditions de la question précédente.

Huitième partie

Erreurs fréquentes à éviter

Chapitre 27

Erreur 1 : Confondre vecteur et longueur

☒ $\overrightarrow{AB} = 5$ ☒ $||\overrightarrow{AB}|| = 5$ ou $AB = 5$

Chapitre 28

Erreur 2 : Oublier le sens dans la relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Chapitre 29

Erreur 3 : Confondre coordonnées de point et de vecteur

Si A(2 ;3) et B(5 ;7), alors : ⊠ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ ⊠ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Neuvième partie

Comment obtenir les solutions ?

Les solutions détaillées de tous les exercices sont disponibles en téléchargement sur notre site web :

https://votresite.com/solutions-vecteurs

Indiquez simplement votre adresse email pour recevoir le PDF complet des corrigés.

Dixième partie

Remerciements et feedback

Merci d'avoir choisi ce livre ! Vos retours sont précieux pour améliorer les prochaines éditions.

Contactez-moi : laurent.garnier@votreemail.com Site web : www.votresite.com

Si ce livre vous a aidé, n'hésitez pas à le recommander !