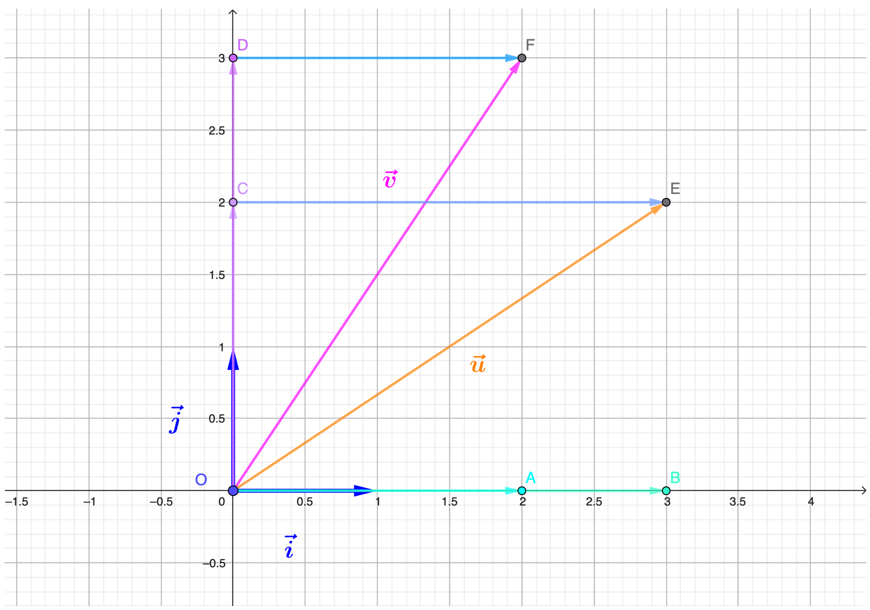
Contents

1 Solution de l'exercice 8

On reprend la configuration finale de l'exercice 7.

Voir figure :



1. Calculs de déterminants :

$$d_1 = det(\vec{i},\vec{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$
$$d_2 = det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$$
$$d_3 = det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 0 \times 3 = 0$$
$$d_4 = det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times 3 - 2 \times 0 = 0$$
$$d_5 = det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4$$
$$d_6 = det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 0 \times 0 = 9$$

2. En utilisant le déterminant montrons que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires :

$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = 2 \times 0 - 0 \times 3$$
$$det(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CE}) = 0$$

   Or $||\overrightarrow{DF}|| = 2$ et $||\overrightarrow{CE}|| = 3$.

   On en déduit que le quadrilatère DCEF est un trapèze.

3. Faisons de même pour $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et le quadrilatère ABEF.

$$det(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BE}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$det(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BE}) = 0 \times 2 - 3 \times 0$$
$$det(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BE}) = 0$$

   Or $||\overrightarrow{AF}|| = 3$ et $||\overrightarrow{BE}|| = 2$.

   On en déduit que le quadrilatère ABFE est un trapèze.

4. Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{JE}$:

$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2}$$
$$||\overrightarrow{IF}|| = \sqrt{10}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(x_E - x_J)^2 + (y_E - y_J)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2}$$
$$||\overrightarrow{JE}|| = \sqrt{10}$$

5. Comparons les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \vec{j} - \vec{i}$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\overrightarrow{EF} = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\overrightarrow{EF} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$\overrightarrow{EF} = \vec{j} - \vec{i}$$

Ainsi
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF}$$

Le quadrilatère IEFJ est donc un parallélogramme. Or d'après la question précédente ses diagonales [IF] et [JE] sont égales. Par conséquent IEFJ est un rectangle.

6. Puisque G l'intersection des segments [IF] et [JE] et que ce sont les diagonales d'un rectangle alors G est leur milieu. Déterminons ses coordonnées :

$$G\begin{pmatrix}\frac{x_I+x_F}{2}\\ \frac{y_I+y_F}{2}\end{pmatrix}$$
$$G\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Le point H est tel que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$ alors en appliquant la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$$

Ainsi on obtient les coordonnées de H en doublant celles de G, H(3 ; 3). Étudions la nature du quadrilatère OBHD :

$$\overrightarrow{OH} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OD} = 3\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

On vient de prouver que OBHD est un carré. Pourquoi ? Parce que $\overrightarrow{OH}$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux de même norme.

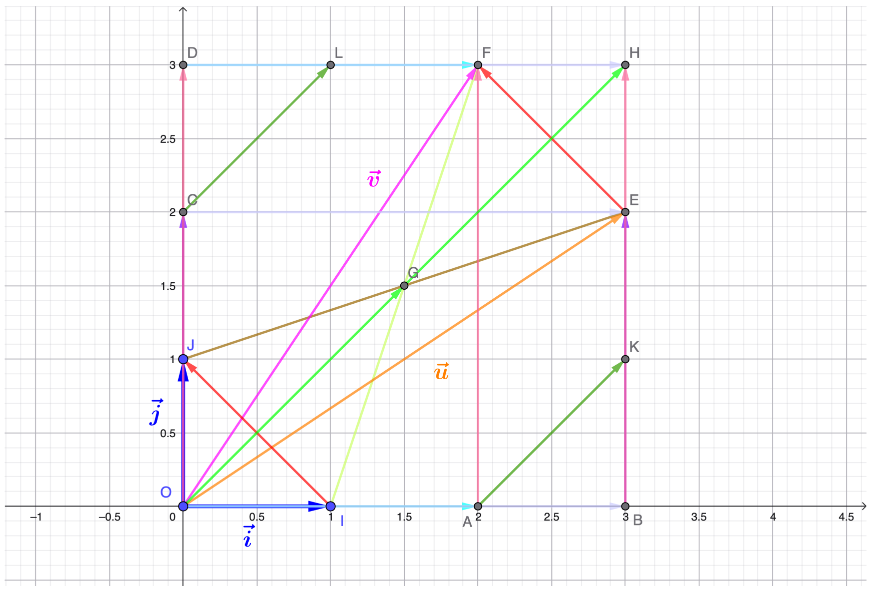
7. Le triangle OFE est isocèle en O car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

8. D'après la question 6 on sait que OBHD est un carré et que G est le milieu de la diagonale OH. Par conséquent G est aussi le milieu de la diagonale BD. Ainsi l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$ est D.

9. Le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \vec{j}$ a pour coordonnées K(3 ; 1).

10. Le point L tel que $\overrightarrow{DL} = \vec{i}$ a pour coordonnées L(1 ; 3).



2 Solution du programme 7

```
def abc_aligned():
    points = []

    for i in range(3):
        x = float(input(f"Abscisse du {i + 1}e point = "))
        y = float(input(f"Ordonnée du {i + 1}e point = "))
        points.append((x, y))

    x_p1p2 = points[1][0] - points[0][0]
    y_p1p2 = points[1][1] - points[0][1]
    x_p1p3 = points[2][0] - points[0][0]
    y_p1p3 = points[2][1] - points[0][1]

    det = x_p1p2 * y_p1p3 - x_p1p3 * y_p1p2

    if det == 0:
        return True
    else:
        return False
```

```python
# Test
if abc_aligned():
    print("Les points sont alignés.")
else:
    print("Les points ne sont pas alignés.")
```

3 Solution du QCM d'auto-évaluation

1. Considérons les vecteurs
$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
et
$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
alors :

   (a)
   $$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

   (b)
   $$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - y_1y_2$$

   (c)
   $$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 + y_1x_2$$

   (d)
   $$det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

   (Bonne réponse)

2. Considérons les mêmes vecteurs que précédemment.

   On dira que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si :

   (a) $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1$

   (b) $det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$ **(Bonne réponse)**

(c) **il existe un réel** k **tel que** $x_1 = kx_2$ **et** $y_1 = ky_2$ **(Bonne réponse)**

(d) $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ **(Bonne réponse)**