PSC-PHY14

Simulation de marches aléatoires quantiques à l'aide de condensats d'atomes froids

Oumaima El Jaafari, Arina Ivanova, Paul Minodier, Marco Paina
et Jonas Wehrung-Montpezat

16 mai 2023

Sommaire

1. Introduction
2. Quelques marches aléatoires quantiques
3. Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique
4. Élaboration de notre algorithme
5. Conclusion

Sommaire

1. Introduction
2. Quelques marches aléatoires quantiques
3. Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique
4. Élaboration de notre algorithme
5. Conclusion

Étude des marches aléatoires quantiques

- Exemples importants
- Marches discrètes et continues
- Réalisations expérimentales aujourd'hui

Mesure de l'impulsion d'une particule

- mesure des trois composantes de l'impulsion de particules
- mesure résolue individuellement
- mesure d'un grand nombre de particules

Étude de la fonction d'onde d'une particule

- condensat d'atomes d'Hélium (environ 10^5 particules)
- évolution sous l'effet d'un hamiltonien
- mesure de la distribution dans l'espace des impulsions

Recherche d'algorithmes à implémenter

- Algorithme de Grover (recherche d'un sommet dans un graphe en $O(\sqrt{N})$)
- Création d'un algorithme adapté au dispositif de l'Institut d'Optique

Résultats

Création d'un algorithme qui trouve un sommet sur un réseau en :

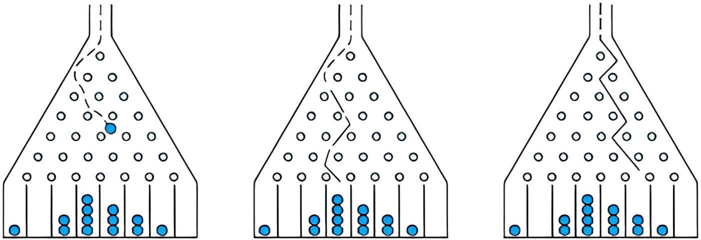
- $O(\sqrt{N})$ pour un réseau à 2 dimensions
- $O(\sqrt{N})$ pour un réseau à 3 dimensions, meilleure stabilité

Sommaire

1. Introduction
2. Quelques marches aléatoires quantiques
3. Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique
4. Élaboration de notre algorithme
5. Conclusion

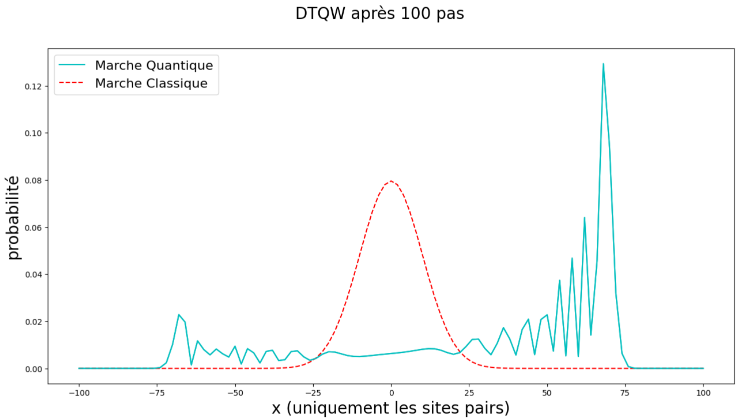
Marches aléatoires

Marche classique



Caractéristiques de la marche

- Distribution : gaussienne
- Écart type : $\sigma = O(\sqrt{N})$


DTQW après 100 pas
Marche Quantique
Marche Classique
probabilité
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100
x (uniquement les sites pairs)

Caractéristiques de la marche

- Écart type : $\sigma = O(N)$

$\Longrightarrow$ **accélération quadratique** de la marche

Technique du *Coin-Toss*

- *Coin* : mélange des spins
- *Shift* : déplacement de la particule

Coin : opérateur de mélange des spins

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\uparrow\rangle \longrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\downarrow\rangle \longrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

Fig. 1: Action de l'opérateur de *Coin*

Shift : opérateur de translation

$$\hat{T} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} |x-1, \downarrow\rangle\langle x, \downarrow| + |x+1, \uparrow\rangle\langle x, \uparrow|$$

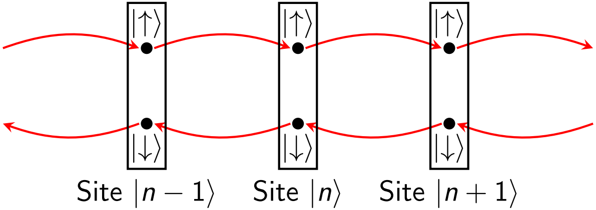
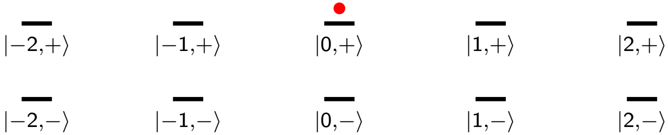
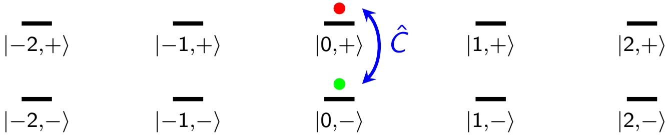


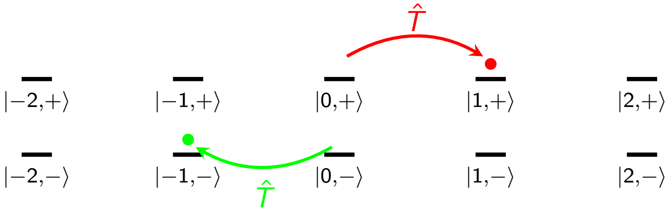
Fig. 2: Action de l'opérateur de *Shift*

Opérateur d'évolution

$$\hat{U} = \hat{T}\hat{C}$$
$$|\psi_n\rangle = \hat{U}^n |\psi_0\rangle$$

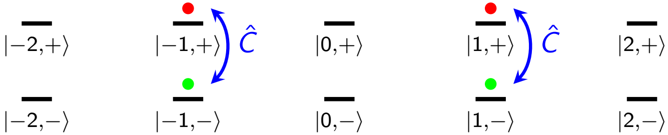

$|-2,+\rangle$ $|-1,+\rangle$ $|0,+\rangle$ $|1,+\rangle$ $|2,+\rangle$
$|-2,-\rangle$ $|-1,-\rangle$ $|0,-\rangle$ $|1,-\rangle$ $|2,-\rangle$

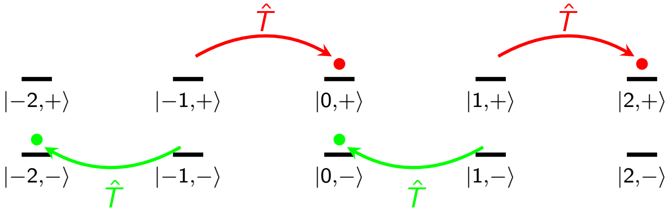

$|-2,+\rangle$
$|-1,+\rangle$
$|0,+\rangle$
$\hat{C}$
$|1,+\rangle$
$|2,+\rangle$
$|-2,-\rangle$
$|-1,-\rangle$
$|0,-\rangle$
$|1,-\rangle$
$|2,-\rangle$


$\hat{T}$
$|-2,+\rangle$
$|-1,+\rangle$
$|0,+\rangle$
$|1,+\rangle$
$|2,+\rangle$
$|-2,-\rangle$
$|-1,-\rangle$
$|0,-\rangle$
$|1,-\rangle$
$|2,-\rangle$
$\hat{T}$

Marches aléatoires quantiques

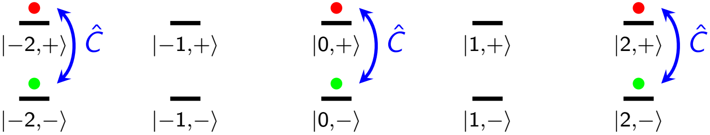
Marches discrètes (DTQW)

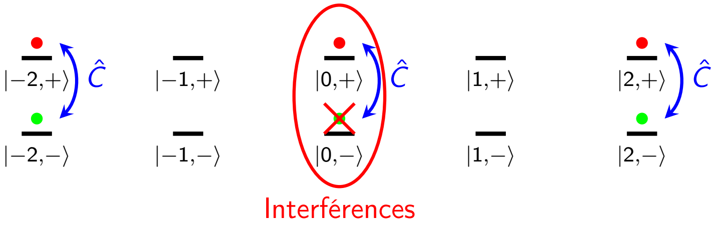



$\hat{T}$
$\hat{T}$
$|-2,+\rangle$
$|-1,+\rangle$
$|0,+\rangle$
$|1,+\rangle$
$|2,+\rangle$
$|-2,-\rangle$
$|-1,-\rangle$
$|0,-\rangle$
$|1,-\rangle$
$|2,-\rangle$
$\hat{T}$
$\hat{T}$

Marches aléatoires quantiques

Marches discrètes (DTQW)




$|-2,+\rangle$
$\hat{C}$
$|-2,-\rangle$
$|-1,+\rangle$
$|-1,-\rangle$
$|0,+\rangle$
$\hat{C}$
$|0,-\rangle$
$|1,+\rangle$
$|1,-\rangle$
$|2,+\rangle$
$\hat{C}$
$|2,-\rangle$
Interférences

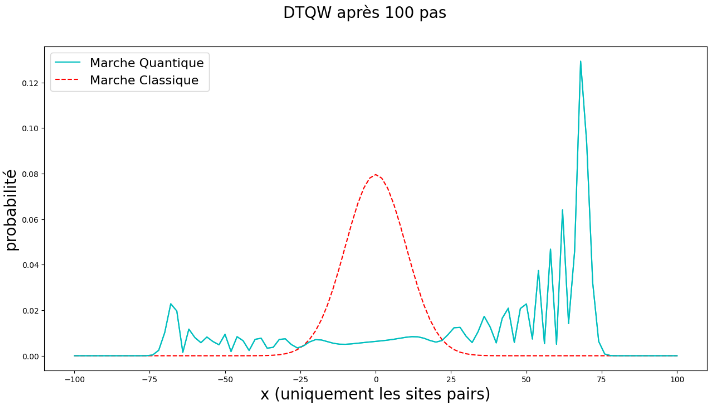


Fig. 3: Distribution de la marche pour $|\psi_0\rangle = |0, \uparrow\rangle$

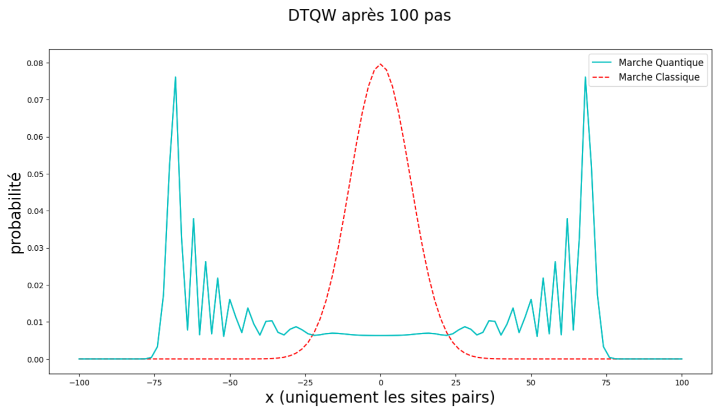


Fig. 4: Distribution de la marche pour $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,\uparrow\rangle + i\,|0,\downarrow\rangle)$

Equation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

Solution pour un hamiltonien indépendant du temps

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}} |\psi(0)\rangle$$

Les coefficients de l'hamiltonien définissent la dynamique de la marche !

Application d'hamiltoniens sur des durées bien choisies

- 1. mélange de l'état interne (*Coin*)
- 2. transitions (*Shift*)

Regroupement de sites pairs et impairs pour encoder l'état interne discret

$$|n,+\rangle = |2n\rangle$$
$$|n,-\rangle = |2n+1\rangle$$

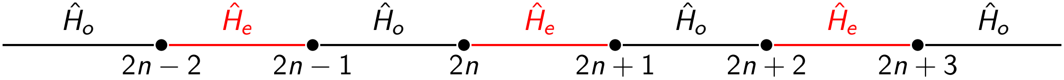


Fig. 5: Schéma de la discrétisation à 1D

Sommaire

1 Introduction

2 Quelques marches aléatoires quantiques

3 Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique

4 Élaboration de notre algorithme

5 Conclusion

Réseau d'impulsions

- Site $|n\rangle \Leftrightarrow$ Impulsion $\hat{p} = 2n\hbar k$
- Marcheur $\Leftrightarrow$ Particule
- Distribution de la marche $\Leftrightarrow$ Fonction d'onde de la particule

Transitions à deux photons

- absorption d'un photon du champ $\vec{E}^+$
- réémission stimulée d'un photon du champ $\vec{E}_n^-$

$\Longrightarrow$ modification aléatoire de l'impulsion de la particule

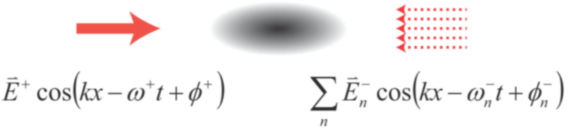


Fig. 6: Disposition des lasers (Gadway 2015)

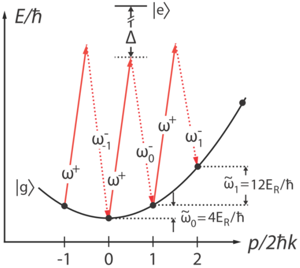


Fig. 7: Niveaux d'énergie de l'atome

Hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t_n \left(e^{i\phi_n} |n+1\rangle\langle n| + e^{-i\phi_n} |n\rangle\langle n+1| \right)$$

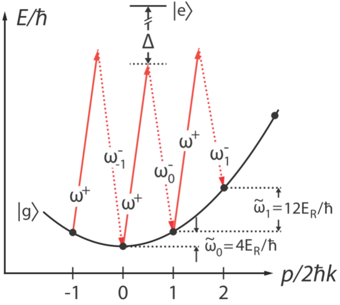


Fig. 8: Niveaux d'énergie de l'atome

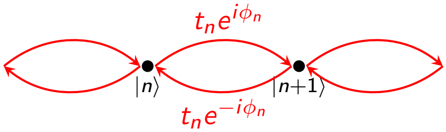
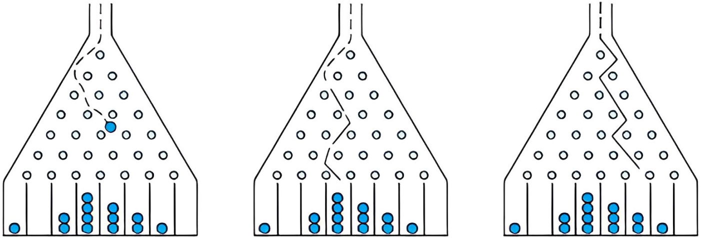


Fig. 9: Action de l'hamiltonien effectif

Condensat d'atomes d'Hélium

- grand nombre d'atomes
- tous dans l'état d'**impulsion nulle** $|0\rangle$



Sommaire

1. Introduction
2. Quelques marches aléatoires quantiques
3. Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique
4. Élaboration de notre algorithme
5. Conclusion

Algorithme de Grover

État initial de la particule

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle$$

À cette particule sont appliqués successivement les opérateurs suivants.

Oracle & Inversion par la moyenne

$$\hat{O} = 1 - 2\,|w\rangle\,\langle w|$$

$$\hat{U} = 2\,|\psi_0\rangle\,\langle\psi_0| - 1$$

Résultat

Au bout de $\lfloor \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \rfloor$ étapes, la mesure de la particule renvoie $|w\rangle$ avec une probabilité 1.

Élaboration d'un algorithme adapté

Contraintes liées à l'expérience

Avantages

- marche quantique continue
- contrôle total des couplages entre sites voisins sur le réseau
- excellente résolution lors de la mesure

Contraintes

- pas d'autres couplages qu'entre sites voisins sur le réseau
- état initial localisé sur un unique site
- amélioration par rapport au cas classique

Principe de notre approche

- recherche d'un site marqué $|w\rangle$
- couplage différent avec ce site marqué $|w\rangle$
- mesure de l'impulsion au bout d'un temps bien choisi

Il s'agit alors de déterminer l'**état initial** de la particule, l'**hamiltonien** qui va définir la dynamique de la marche ainsi que la **durée** de la marche.

Dans tous les algorithmes de recherche que nous avons pu rencontrer, l'état initial était systématiquement **uniformément distribué** sur l'ensemble des sites.

État initial retenu

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle$$

État initial avec le dispositif

$$|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$$

Hamiltonien appliqué dans un premier temps

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \hbar\Omega \, |j\rangle \langle 0| + \text{h.c.}$$

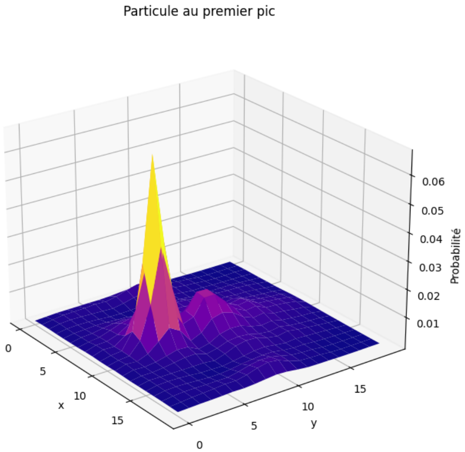
Il est possible de se contenter d'une distribution **gaussienne**.

Hamiltonien retenu

$$\hat{H}(\gamma) = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & {\color{blue}0} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

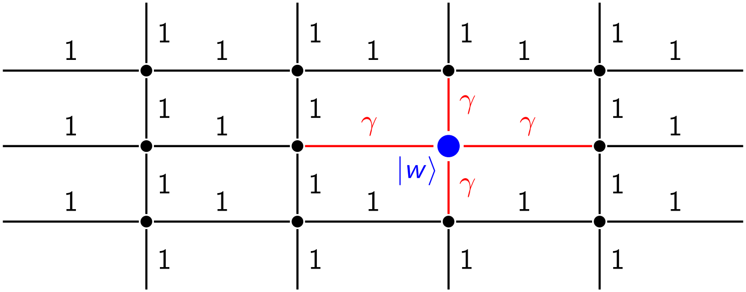
avec γ un paramètre à **optimiser**. Le **temps d'application** de cet hamiltonien devra aussi être bien choisi.

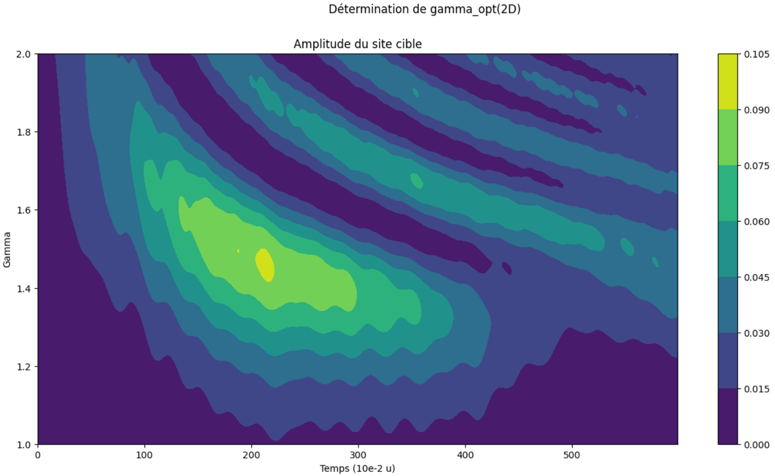
Élaboration d'un algorithme adapté
Résultat



γ optimal

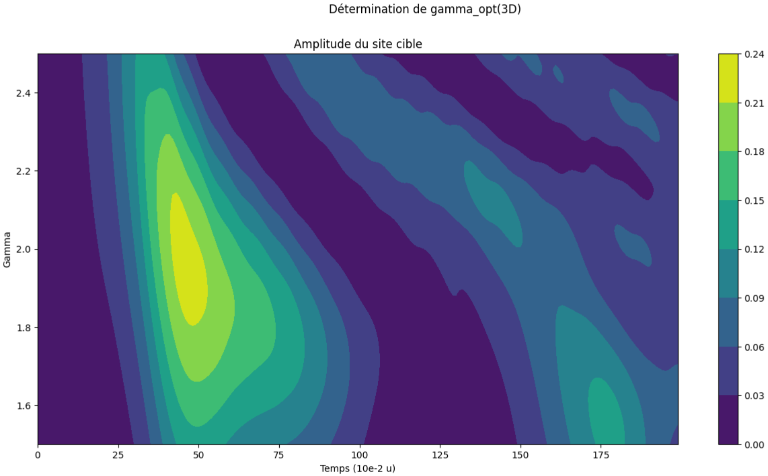
- γ_{opt} dépend de la dimension de la marche (1D,2D,3D)
- γ_{opt} est **indépendant du nombre de sites**




Détermination de gamma_opt(2D)
Amplitude du site cible
Gamma
Temps (10e-2 u)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0
100
200
300
400
500
0.105
0.090
0.075
0.060
0.045
0.030
0.015
0.000

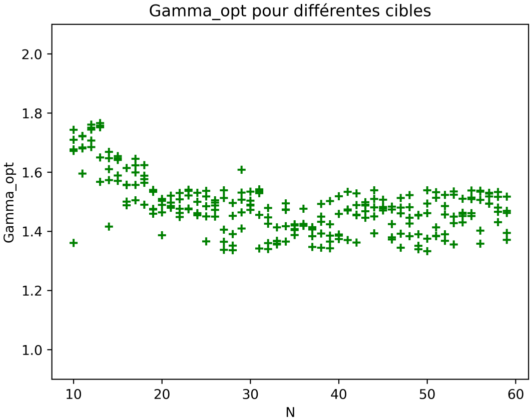
Élaboration d'un algorithme adapté

Optimisation des paramètres



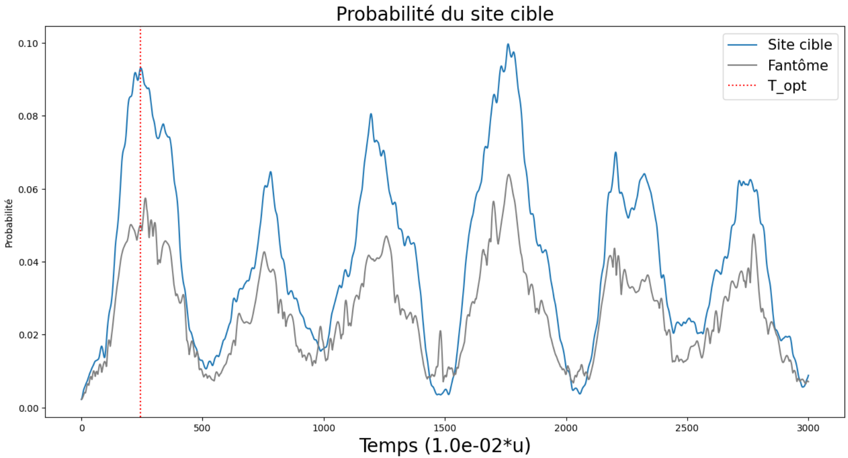
Élaboration d'un algorithme adapté

Optimisation des paramètres



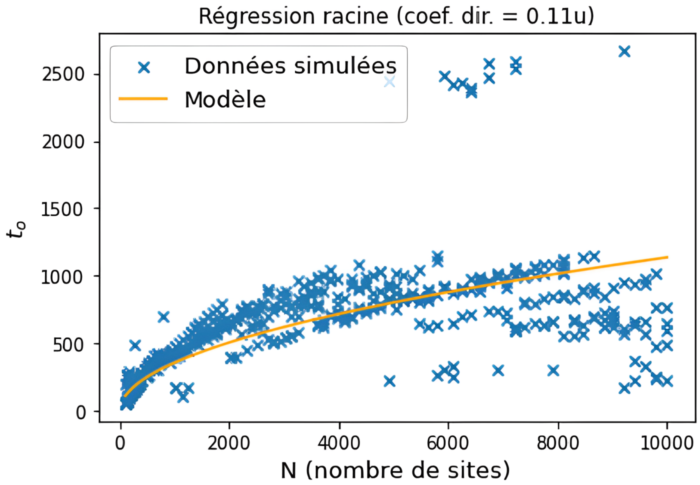
τ optimal

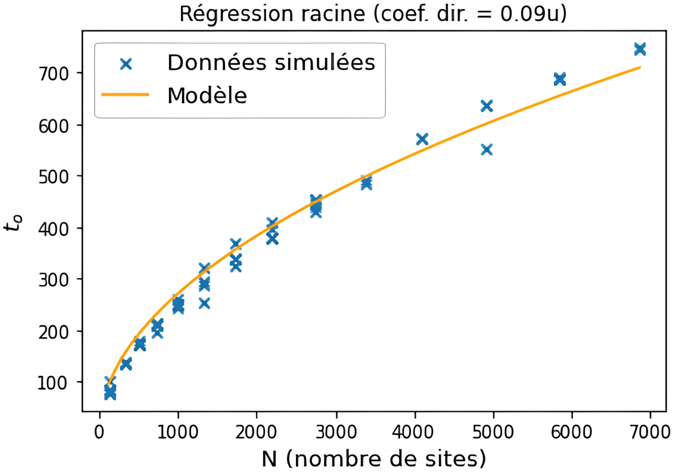
- τ_{opt} dépend de la **dimension** (1D,2D,3D) du réseau
- τ_{opt} dépend du **nombre de sites** du réseau


Probabilité du site cible
Site cible
Fantôme
T_opt
Probabilité
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
Temps (1.0e-02*u)

Élaboration d'un algorithme adapté

Optimisation des paramètres




Régression racine (coef. dir. = 0.09u)
Données simulées
Modèle
t_o
700
600
500
400
300
200
100
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
N (nombre de sites)

Résultats à 2 dimensions

$$\gamma_{opt} = 1.4$$

$$\tau_{opt} \sim 0.11 \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{N}$$

Résultats à 3 dimensions

$$\gamma_{opt} = 2.0$$

$$\tau_{opt} \sim 0.09 \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{N}$$

$\Longrightarrow$ meilleure résolution à 3D qu'à 2D ou 1D

Analyse de l'algorithme

Propriétés de l'algorithme

- compatible avec dispositif de l'Institut d'Optique
- complexité meilleure que linéaire
- parvient à tirer parti des trois dimensions

Limites de l'analyse

- difficultés de simuler un processus quantique avec un ordinateur classique
- difficultés à dégager un comportement asymptotique
- difficultés à la construction de l'état initial de la particule

Sommaire

1. Introduction
2. Quelques marches aléatoires quantiques
3. Dispositif expérimental de l'Institut d'Optique
4. Élaboration de notre algorithme
5. Conclusion

Conclusion

Dispositif de l'Institut d'Optique

Opportunité unique de faire une **marche aléatoire quantique continue à 3 dimensions dans l'espace des moments**.
Quelle application ?

Un algorithme compatible

Possibilité de trouver un sommet sur un réseau en $O(\sqrt{N})$. Meilleurs résultats en 3D.

Condensat de Bose-Einstein

Nombre de particules : 10^5
État initial d'impulsions envisageable : $\sigma = 4 - 5$

Réalisation de la marche

Fréquence de $H(\gamma)$: $\Omega \sim 20$ kHz
Temps d'application de l'hamiltonien : $\tau \sim 300\mu s$
Temps maximal permis par le dispositif : $t_{\mathrm{max}} = 15$ ms

Problème

Couplages entre non-voisins impossibles, comment étaler uniformément la particule ?

Solution

Isolant de Mott : particules localisées dans l'espace des positions $\Longrightarrow$ distribution gaussienne dans l'espace des impulsions.