Solución del examen de ingreso 3ra. opción MATEMATICAS - Fila 1- 03/03/2017

1. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 30 Km. Si la velocidad hubiera sido 2 km/h más rápida que la que llevaba hubiera tardado 4 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 30 km?
(A) 8h (B) 9h (C) 10h (D) 12h (E) Ninguno

Solución:
Sea t y v el tiempo y la velocidad a la que viaja el tren entonces,

$$\frac{30}{v} - \frac{30}{v+2} = 4$$

resolviendo tenemos $v = -5$(se desecha) y $v = 3$, entonces el tiempo será $t = \frac{30}{3} = 10$. ♣

2. El producto de las tres soluciones o raíces de la ecuación: $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = 0$, es igual a:
(A) -3/8 (B) 5/8 (C) -5/8 (D) 3/8 (E) Ninguno

Solución:
Factorizando, (por ejemplo por la regla de Ruffini): $8x^3+12x^2-2x-3 = (2x+3)(2x+1)(2x-1)$ de donde las raices son: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x_3 = -\frac{3}{2}$ y su producto es $\frac{3}{8}$. ♣

3. Dada la progresión aritmética 3,7,11,... , la suma de todos los dígitos del primer término de esta progresión el cual sea mayor que 2017 es igual a:
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) Ninguno

Solución:
El termino n-esimo es $a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1 \simeq 2017$ para algún n. Resolviendo tenemos $n \simeq \frac{2018}{4} \simeq 504, 5$, ensayemos algunos términos alrededor de $n = 504$

$$a_{504} = 2015, a_{505} = 2019, ...$$

y el primer término mayor que 2017 en la progresión es 2019 y la suma de las cifras de este término es 12. ♣

4. La siguiente ecuación $8^{6x} - 3 \cdot 2^{9x+1} + 8 = 0$, tiene dos soluciones, la suma de estas soluciones es igual a:
(A) -1/2 (B) -1/3 (C) 1/2 (D) 1/3 (E) Ninguno

Solución:

$$8^{6x} - 3 \cdot 2^{9x+1} + 8 = \left(2^3\right)^{6x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{9x} + 8 = \left(2^{9x}\right)^2 - 6 \cdot 2^{9x} + 8 = 0$$

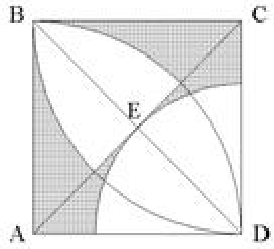
si $2^{9x} = u$, entonces tenemos: $u^2 - 6u + 8$, resolviendo tenemos: $u_1 = 4$ y $u_2 = 2$, volviendo a la variable x, tenemos:

Si $u_1 = 4 = 2^{9x}$, $2^2 = 2^{9x}$ entonces $x_1 = \frac{2}{9}$, análogamente si $u_2 = 2 = 2^{9x}$, tenemos $x_2 = \frac{1}{9}$. Sumando estas soluciones tenemos:

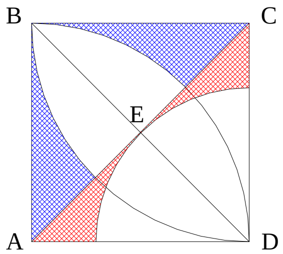
$$x_1 + x_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}. \clubsuit$$

5. Se tiene un cuadrado ABCD, el punto de intersección de las diagonales es E y los arcos con cuartos de circunferencia, sabiendo que el lado del cuadrado es 4, entonces el área sombreada es igual a:

(A) $23-6\pi$ (B) $24-4\pi$ (C) $24-5\pi$
(D) $24-6\pi$ (E) Ninguno



Solución:



El área azul es igual: $4^2 - \frac{1}{4}\pi 4^2$, el área roja es igual a $\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{4}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, sumando tenemos

$$A = 24 - 6\pi. \clubsuit$$

6. En la figura 1, se tienen dos cuadrados idénticos, cada uno de lado 1cm, entonces el área sombreada es igual a:

(A) 1/13 (B) 2/13 (C) 3/13 (D) 4/13 (E) Ninguno

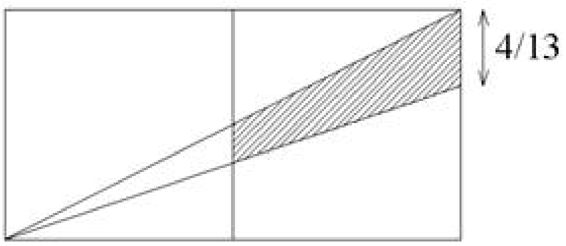


FIGURA 1

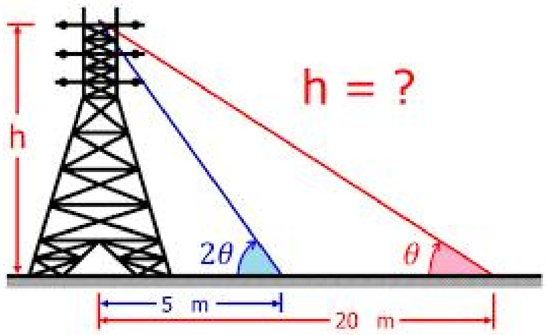
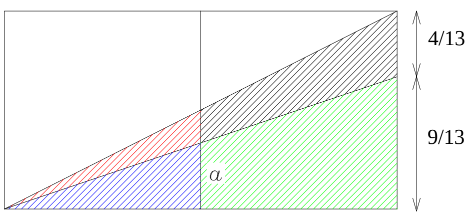


FIGURA 2

Solución:



En la figura se tienen triángulos semejantes, entonces:

$$\frac{\frac{9}{13}}{2} = \frac{a}{1}, \text{ de donde } a = \frac{9}{26}$$

así el área roja es igual a:$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{26} = \frac{1}{13}$. El área azul y verde es $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{13} = \frac{9}{13}$, entonces el área buscada es_

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{13} - \frac{9}{13} = \frac{3}{13}.\clubsuit$$

7. En la figura 2, la altura h, de la torre es igual a:
(A) $11\sqrt{2}$ (B) $10\sqrt{2}$ (C) $9\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{2}$ (E) Ninguno

Solución:
De la figura se tiene:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{20} \text{ y } \tan(2\theta) = \frac{h}{5} = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$$

de esta última relación:

$$\frac{h}{5} = \frac{2\left(\frac{h}{20}\right)}{1-\left(\frac{h}{20}\right)^2}$$

resolviendo $h = 10\sqrt{2}$. $\clubsuit$

8. La suma de las soluciones (en grados sexagesimales) de la ecuación $\tan(x) + \sqrt{2}\sin(x) = 0$ comprendidas en el intervalo (90°,360°] es igual :
(A) 855° (B) 780° (C) 540° (D) 495° (E) Ninguno

Solución:

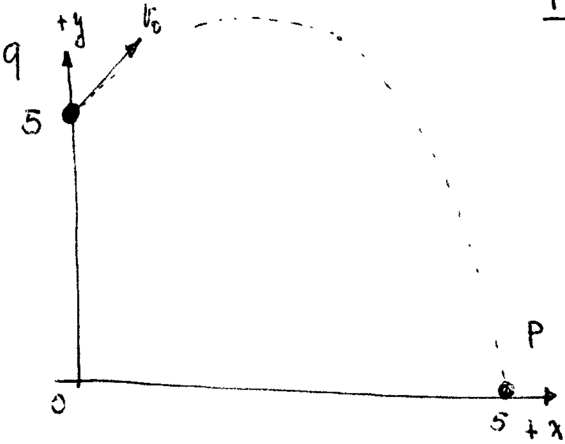
$$\tan(x) + \sqrt{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \sqrt{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)\left(1+\sqrt{2}\cos(x)\right)}{\cos(x)} = 0$$

Caso1: si $\sin(x) = 0$, entonces $x = 0^o, 180^o$ y 360^o

Caso2: si $1 + \sqrt{2}\cos(x) = 0$, $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = 135^o$ y 225^o. Las soluciones en el intervalo (90^o,360^o] son: 135^o, 225^o, 180^o y 360^o cuya suma es igual a: 900^o. $\clubsuit$

Fila 1

#9



$x = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t$

$y = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t - \frac{10}{2} t^2$

En P: $x = 5 \wedge y = 0$

(1) $5 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t$

(2) $0 = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t - 5t^2$

En (2) $0 = 5 + 5 - 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{2}$

En (1) $v_0 = \frac{10}{\sqrt{2}\,t} = \frac{10}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 5$ [m/s

$\Rightarrow \boxed{v_0 = 5 \text{ [m/s]}}$

(a)

#10

$x_M = 25 + \frac{5}{2} t^2$

$x_A = \frac{7}{2} t^2$

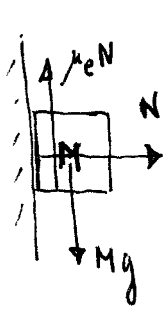
En el punto de encuentro

$x_A = x_M \Rightarrow \frac{7}{2} t^2 = 25 + \frac{5}{2} t^2$

$2t^2 = 50 \rightarrow \boxed{t = 5 \text{ [s]}}$

(d)

#11



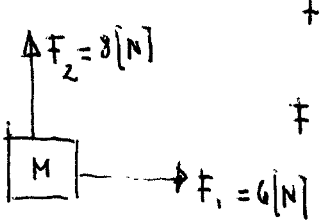
$\mu_e N - Mg = 0 \Rightarrow \mu_e \cancel{M} \frac{v^2}{r} = \cancel{M} g$

$N = M \frac{v^2}{r}$

$v = \sqrt{\frac{rg}{\mu_e}} = \boxed{20 \text{ [m/s]}}$

(b)

#12



$\vec{F} = M\vec{a} \rightarrow |\vec{F}| = M|\vec{a}| \rightarrow F = Ma$

$F = |\vec{F}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ [N]} \rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{10}{2} = 5 \text{ [m/s}^2\text{]}$

$v = \cancel{v_0}^{\,0} + at \Rightarrow \boxed{v = 5(3) = 15 \text{ [m/s]}}$

(a)

Fila 1

Q13 $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$

$4g \quad 32g \quad 36g$ $\Rightarrow$ B

$12g \quad 96g \quad \boxed{108g}$

R.L.

Q14: $V_1 = a^3 = (10\,cm)^3 = 1000\,cm^3$

$V_2 = (3\,cm)^3 = 27\,cm^3$ $\Rightarrow V_{vacio} = V_1 - V_2 = 973\,cm^3 = V_x$

$$\rho_x = \frac{m_x}{V_x} = \frac{1946g}{973cm^3} = 2\ g/cm^3$$ $\Rightarrow$ A

Q15: $\bar{M}_{Glucosa} = 180\ g/mol$ $\quad m_o = \frac{n_{soluto}}{Kg\ H_2O}$ $\Rightarrow n_{Gl} = 0{,}5\,\frac{mol}{\cancel{Kg}} \cdot 0{,}5\,\cancel{Kg}$

$$n_{Gl} = 0{,}25\,mol \cdot \frac{180g}{1\,mol} = 45g\ C_6H_{12}O_6$$ $\Rightarrow$ D

Q16: $3CuS + 8HNO_3 \longrightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 3S + 2NO + 4H_2O$

Agente reductor

$\Rightarrow$ C