Solución del examen de ingreso 3ra. opción MATEMATICAS - Fila 2- 03/03/2017

1. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 35 Km. Si la velocidad hubiera sido 2 km/h más rápida que la que llevaba hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 35 km?
(A) 7h (B) 8h (C) 9h (D) 10h (E) Ninguno

Solución:
Sea t y v el tiempo y la velocidad a la que viaja el tren entonces,

$$\frac{35}{v} - \frac{35}{v+2} = 2$$

resolviendo tenemos $v = -7$(se desecha) y $v = 5$, entonces el tiempo será $t = \frac{35}{5} = 7$. ♣

2. El producto de las tres soluciones o raíces de la ecuación: $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = 0$, es igual a:
(A) -3/8 (B) -5/8 (C) 3/8 (D) 5/8 (E) Ninguno

Solución:
Factorizando, (por ejemplo por la regla de Ruffini): $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = (2x-5)(2x+1)(2x-1)$ de donde las raices son: $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = \frac{5}{2}$ y su producto es $-\frac{5}{8}$. ♣

3. Dada la progresión aritmética 2,6,10,... , la suma de todos los dígitos del primer término de esta progresión el cual sea mayor que 2017 es igual a:
(A) 11 (B) 7 (C) 5 (D) 4 (E) Ninguno

Solución:
El termino n-esimo es $a_n = 2 + (n-1)4 = 4n - 2 \simeq 2017$ para algún n. Resolviendo tenemos $n \simeq \frac{2019}{4} \simeq 504$, ensayemos algunos términos alrededor de $n = 504$

$$a_{504} = 2014, a_{505} = 2018, ...$$

y el primer término mayor que 2017 en la progresión es 2018 y la suma de las cifras de este término es 11. ♣

4. La siguiente ecuación $8^{6x} - 3 \cdot 2^{9x+1} + 8 = 0$, tiene dos soluciones, el producto de estas soluciones es igual a:
(A) 2/81 (B) 1/81 (C) 1/27 (D) 4/81 (E) Ninguno

Solución:

$$8^{6x} - 3 \cdot 2^{9x+1} + 8 = \left(2^3\right)^{6x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{9x} + 8 = \left(2^{9x}\right)^2 - 6 \cdot 2^{9x} + 8 = 0$$

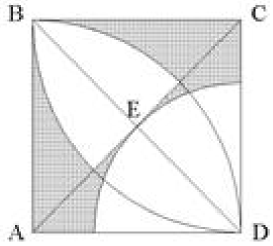
si $2^{9x} = u$, entonces tenemos: $u^2 - 6u + 8$, resolviendo tenemos: $u_1 = 4$ y $u_2 = 2$, volviendo a la variable x, tenemos:

Si $u_1 = 4 = 2^{9x}$, $2^2 = 2^{9x}$ entonces $x_1 = \frac{2}{9}$, análogamente si $u_2 = 2 = 2^{9x}$, tenemos $x_2 = \frac{1}{9}$. Multiplicando estas soluciones tenemos:

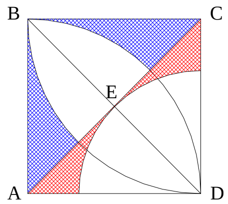
$$x_1 x_2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{81}. \clubsuit$$

5. Se tiene un cuadrado ABCD, el punto de intersección de las diagonales es E y los arcos son cuartos de circunferencia, sabiendo que el lado del cuadrado es 4, entonces el área sombreada es igual a:

(A) $24-6\pi$ (B) $24-5\pi$ (C) $23-6\pi$
(D) $24-4\pi$ (E) Ninguno



Solución:



El área azul es igual: $4^2 - \frac{1}{4}\pi 4^2$, el área roja es igual a $\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{4}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, sumando tenemos

$$A = 24 - 6\pi. \clubsuit$$

6. En la figura 1, se tiene dos cuadrados idénticos, cada uno de lado 1cm, entonces el área sombreada es igual a:

(A) 9/44 (B) 7/44 (C) 3/44 (D) 1/44 (E) Ninguno

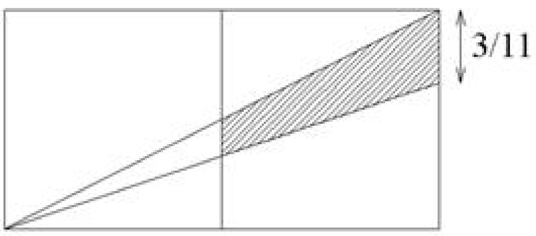


FIGURA 1

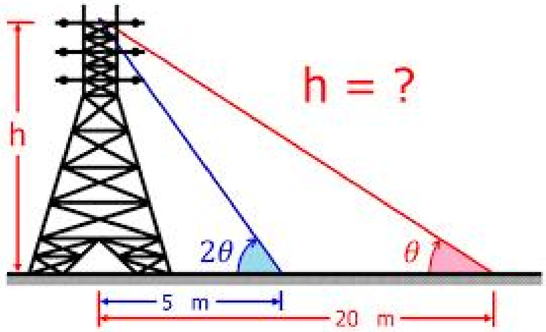
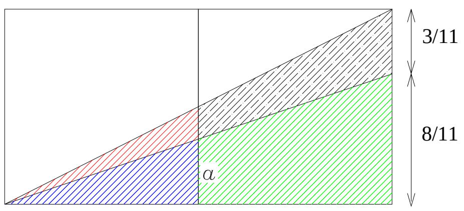


FIGURA 2

Solución:



En la figura se tienen triángulos semejantes, entonces:

$$\frac{\frac{8}{11}}{2} = \frac{a}{1}, \text{ de donde } a = \frac{4}{11}$$

así el área roja es igual a:$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{11} = \frac{3}{44}$ El área azul y verde es $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{11}$, entonces el área buscada es_

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{3}{44} - \frac{8}{11} = \frac{9}{44}.\clubsuit$$

7. En la figura 2, la altura h, de la torre es igual a:
(A) $8\sqrt{2}$ (B) $9\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{2}$ (D) $11\sqrt{2}$ (E) Ninguno

Solución:
De la figura se tiene:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{20} \text{ y } \tan(2\theta) = \frac{h}{5} = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$$

de esta última relación:

$$\frac{h}{5} = \frac{2\left(\frac{h}{20}\right)}{1-\left(\frac{h}{20}\right)^2}$$

resolviendo $h = 10\sqrt{2}$. $\clubsuit$

8. La suma de las soluciones (en grados sexagesimales) de la ecuación $\tan(x) - \sqrt{2}\sin(x) = 0$ comprendidas en el intervalo [90º,360º) es igual :
(A) 855º (B) 780º (C) 540º (D) 495º (E) Ninguno

Solución:

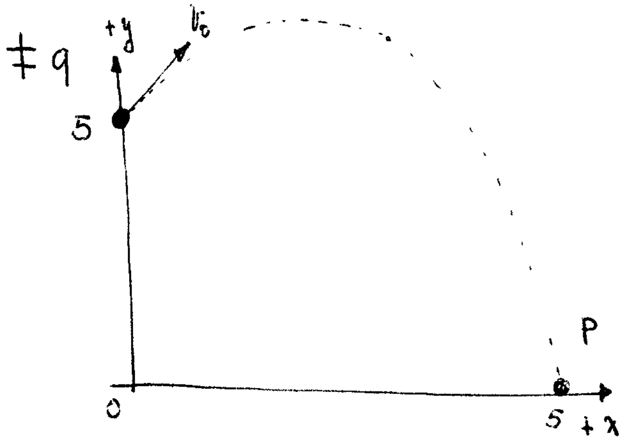
$$\tan(x) - \sqrt{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sqrt{2}\sin(x) = \frac{\sin(x)\left(1-\sqrt{2}\cos(x)\right)}{\cos(x)} = 0$$

Caso1: si $\sin(x) = 0$, entonces $x = 0^o, 180^o$ y 360^o

Caso2: si $1-\sqrt{2}\cos(x) = 0$, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = 45^o$ y 315^o. Las soluciones en el intervalo [90^o,360^o) son: 180^o y 315^o cuya suma es igual a: 495^o. $\clubsuit$

Fila 2

#9



$x = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t$

$y = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t - \frac{10}{2} t^2$

En P: $x = 5 \wedge y = 0$

(1) $5 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t$

(2) $0 = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t - 5t^2$

En (2) $0 = 5 + 5 - 5t^2 \to t = \sqrt{\;}$

En (1) $v_0 = \frac{10}{\sqrt{2}\, t} = \frac{10}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 5[m/s$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = 5\,[m/s]}$

(d)

#10

$x_M = 25 + \frac{5}{2} t^2$

$x_A = \frac{7}{2} t^2$

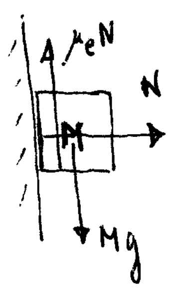
En el punto de encuentro

$x_A = x_M \Rightarrow \frac{7}{2} t^2 = 25 + \frac{5}{2} t^2$

$2t^2 = 50 \to \boxed{t = 5\,[s]}$

(c)

#11



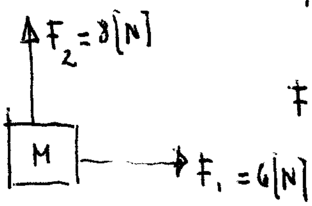
$\mu_e N - Mg = 0 \Rightarrow \mu_e M \frac{v^2}{r} = Mg$

$N = M \frac{v^2}{r}$

$v = \sqrt{\frac{rg}{\mu_e}} = \boxed{20\,[m/s]}$

(c)

#12



$\vec{F} = M\vec{a} \to |\vec{F}| = M|\vec{a}| \to F = Ma$

$F = |\vec{F}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10[N] \to a = \frac{F}{M} = \frac{10}{2} = 5[m/s^2]$

$v = \cancel{v_0}^{\,0} + at \Rightarrow \boxed{v = 5(3) = 15\,[m/s]}$

(c)

Fila 2

Q13 - $V_1 = (10\,cm)^3 = 1000\,cm^3$ $\quad V_{Vazio} = V_L = V_1 - V_2 = 875\,cm^3$

$V_2 = (5\,cm)^3 = 125\,cm^3$ $\quad \left[\rho_L = \frac{m_L}{V_L} = \frac{2625\,g}{875\,cm^3} = 3\,g/cm^3\right] \Rightarrow$ C

Q14 - $3CuS + 8HNO_3 \longrightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 3S + 2NO + 4H_2O$

Agente oxidante $\Rightarrow$ D

Q15 - $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

$$\begin{array}{ccc} 2H_2 & O_2 & 2H_2O \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4g & 32g & 36g \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6g & 48g & 54g \end{array} \Rightarrow \text{A}$$

Q16 - $\bar{M}_{Glicose} = 180\,g/mol$ $\quad m_0 = \frac{n_{Glicose}}{Kg_{H_2O}} \Rightarrow n_{Glicose} = 0{,}5\,\cancel{mol/Kg} \cdot 1\,\frac{mol}{Kg}$

$n_{Glicose} = 0{,}5\,mol\,C_6H_{12}O_6\,\frac{180\,g}{1\,mol} = 90\,g\,C_6H_{12}O_6 \Rightarrow$ B