Solucionario 2da Opción, examen ingreso FCyT

Aritmética-Algebra

A1) El polinomio de cuarto grado $f(x)$ cumple las siguientes condiciones: con raíz en 2, con raíz en 4, $f(1) = 24$ y $f(-2) = 840$. Finalmente hallar el valor de $f(8)$

a) 310 b) 314 c) 360 d) 311 e) NINGUNO

SOLUCIÓN:

ESTE EJERCICIO CORRESPONDE AL CAPITULO DE: RAICES DE POLINOMIOS

Sea el polinomio buscado $f(x) = (x-2)(x-4)(x-a)(x-b)$

Evaluando en $f(0)$: $f(1) = (1-2)(1-4)(1-a)(1-b) = 24$

Evaluando en $f(-2)$: $f(-2) = (-2-2)(-2-4)(-2-a)(-2-b) = 840$

El sistema que se forma es:

$$\begin{cases} 3ab - 3b - 3a + 3 = 24 \\ 48a + 48b + 24ab + 96 = 840 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$b = \frac{a+7}{a-1}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$48a + 48\left(\frac{a+7}{a-1}\right) + 24a\left(\frac{a+7}{a-1}\right) + 96 = 840$$

$$72a^2 + 264a + 240 - 840a + 840 = 0$$

$$72(a-3)(a-5) = 0$$

De donde:

$$\begin{array}{ll} a = 3 & b = 5 \\ a = 5 & b = 3 \end{array}$$

Entonces el polinomio es:

$$f(x) = (x-2)(x-4)(x-5)(x-3)$$

Finalmente:

$$f(8) = 360$$

Solución c)

A2) Hallar el quinto término del binomio $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^8$, al ordenarlo en orden decreciente en las potencias de x.

a) $70x^2$ b) $10\,x$ c) $-20\,x^2$ d) $\frac{35}{8}x^4$ e) Ninguno

SOLUCION:

$n = 8$ $\qquad t_i = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-i+2)}{(i-1)!}\cdot a^{n-i+1}\cdot b^{i-1}$

$i = 5$ $\qquad t_5 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot(-1)^4$

$i - 1 = 4$ $\qquad t_5 = 70\cdot\frac{x^4}{16}$

$n - i + 1 = 4$ $\qquad t_5 = \frac{35}{8}x^4$

$n - i + 2 = 5$ $\qquad \therefore$ Respuesta **(d)**

A3) El tercer término de una progresión geométrica es 144 y el sexto termino es 486. Hallar la suma de los cinco primeros términos.

a) S= 844 b) S= 484 c) S= 448 d) S= 848 e) Ninguno

Solucion:

$Datos:\ a_3 = 144\ ;\ a_6 = 486$ $\qquad a_n = a_1 * r^{n-1}$

$Asumiendo: a_1 = 144\ ;\ a_n = 486\ ; n = 4$ $\qquad 144 = a_1 * \left(\frac{3}{2}\right)^{3-1}$

$Tenemos: a_n = a_1 * r^{n-1}$ $\qquad 144 = a_1 * \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$486 = 64 * r^{6-1}$ $\qquad 144 = a_1 * \left(\frac{9}{4}\right)$

$\frac{27}{8} = r^3$ $\qquad 64 = a_1$

$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = r$ $\qquad S = \frac{a_{1*}(r^n-1)}{r-1}$

$\frac{3}{2} = r$ $\qquad S = \frac{64*\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right)}{\frac{3}{2}-1}$

$$S = \frac{64*\left(\frac{243}{32}-1\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{64*\frac{211}{32}}{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{422}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 844$$

A4) Determinar el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es $\frac{65}{4}$, si el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón es $\frac{1}{4}$

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) Ninguno

Resolución:

Las fórmulas de progresiones aritméticas son:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Reemplazando los datos:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} + (n-1)(\frac{1}{4}) \\ \frac{65}{4} = \frac{n}{2}(\frac{1}{2} + a_n) \end{cases}$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda ecuación:

$$\frac{65}{4} = \frac{n}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (n-1)(\frac{1}{4}))$$

$$\frac{65}{4} = \frac{n}{2}(\frac{3}{4} + \frac{n}{4})$$

$$130 = 3n + n^2$$

$$n^2 + 3n - 130 = 0$$

$$(n+13)(n-10) = 0$$

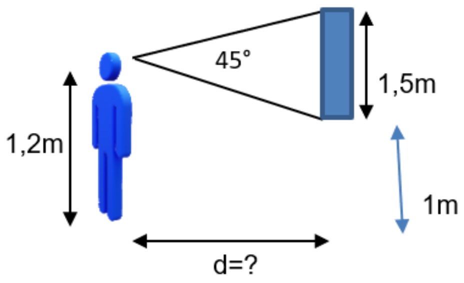
$$n = -13 \quad n = 10$$

SOLUCIÓN: 10

Solucionario 2da Opción, examen ingreso FCyT

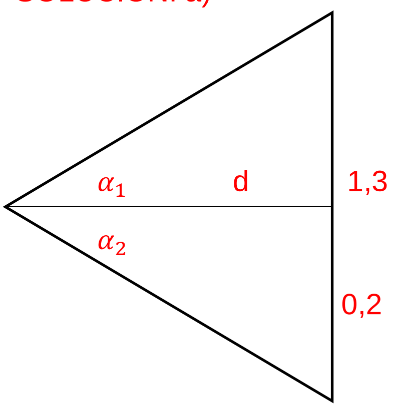
Geometría - Trigonometría

G1) Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de 45°?



a) $1{,}65m$ b) $2{,}50m$ c) $2{,}35m$ d) $3{,}85m$ e) Ninguno

SOLUCION: a)



Obtenemos 2 ecuaciones:

$$\tan\alpha_1 = \frac{1{,}3}{d} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{0{,}2}{d}$$

Al saber que el angulo $\theta = 45$, tenemos

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \tan 45$$

$$\frac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = 1$$

$$\frac{\frac{1,3}{d}+\frac{0,2}{d}}{1-\left(\frac{1,3}{d}\right)\left(\frac{0,2}{d}\right)}=1$$

Al desarrollar, se forma una ecuación cuadrática:

$$d^2-1,5d-0,26=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos dos soluciones:

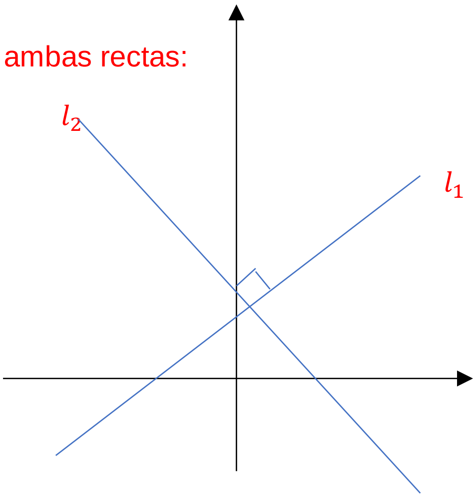
$d_1=1,65m$ y $d_2=-\frac{0.3}{2}$, se toma como solución el valor positivo.

G2) Una recta $l1$ pasa por los puntos (– 2, – 1) y (2, 3), y otra recta $l2$ pasa por el punto (– 1, 2) y el punto A, cuya ordenada es – 4. Determinar la abscisa del punto A cuando $l1$ es perpendicular a $l2$.

a) $x=5$ b) $x=0$ c) $x=3$ d) $x=15$ e) Ninguno

SOLUCION: a)

Primero hallemos las pendientes de ambas rectas:



Para l_1, la pendiente será:

$$m_1=\frac{3-(-1)}{2-(-2)}$$

$$m_1=1$$

Para l_2, la pendiente será:

$$m_2=\frac{-4-2}{x-(-1)}$$

$$m_2=-\frac{6}{x+1}$$

Al ser perpendiculares, debe cumplir la siguiente ecuación:

$$m_1=-\frac{1}{m_2}$$

Reemplazando los valores:

$$1=-\frac{1}{-\frac{6}{x+1}}$$

Resolviendo, obtenemos que: $x=5$.

G3) Determine todas las soluciones de la siguiente ecuación, tal que $0\le x\le 2\pi$.

$$cos^2x+\cos x=sen^2x$$

$$a)\ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \quad b)\ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{2} \quad c)\ \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \quad d)\ \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{5\pi}{6} \quad e)\ ninguno$$

Solución: Sabemos qué

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$

Luego $cos^2 x + \cos x = 1 - cos^2 x$

$2cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2cos\ x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ de ahí $x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° = 300°$

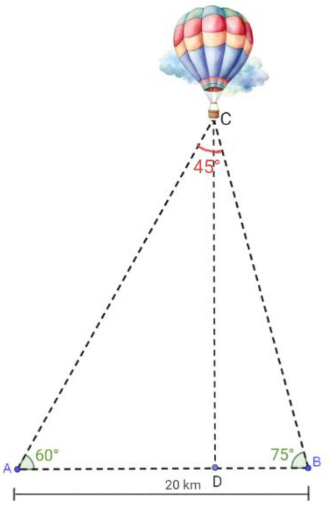
$\cos x = -1$ y $x = \cos^{-1} 1 = 180°$

$$60° = \frac{\pi}{3}; 180° = \pi; 300 = \frac{5}{3}\pi$$

G4) En el suelo, la distancia entre 2 puntos A y B es de 20 km. Desde dichos puntos A y B se miden los ángulos de elevación dirigidas a un globo, que son de $60°$ y $75°$ respectivamente. ¿A qué altura del suelo se encuentra el globo?

$a)$ 20.00 km $\quad b)$ 23.66 km $\quad c)$ 20.66 km $\quad d)$ 15.00 km $\quad e)$ ninguno

SOLUCIÓN:



En el triángulo ABC, tenemos que el ángulo $\measuredangle ACB = 180° - (60° - 75°) = 45°$. Entonces, tenemos los valores de los 3 ángulos internos y un lado del triángulo ABC. Aplicamos *Ley de senos* para calcular el lado $\overline{AC}$:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 75°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 45°}$$

de donde despejando $\overline{AC}$ tenemos:

$$\overline{AC} = \operatorname{sen} 75° \cdot \frac{20}{\operatorname{sen} 45°} = 27.32$$

Por otro lado, tenemos el triángulo ACD rectángulo, donde conocemos la hipotenusa (que es $\overline{AC}$) y queremos hallar la altura $\overline{CD}$, entonces:

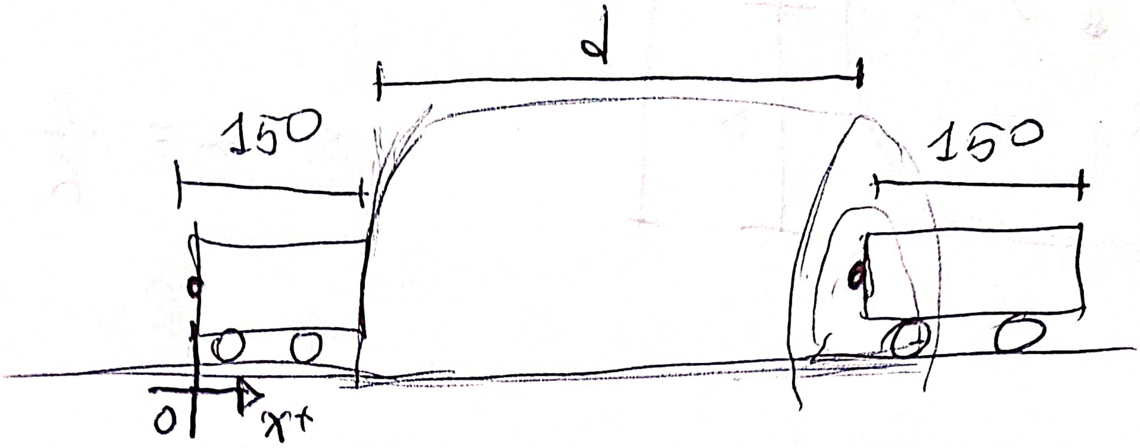
$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} 60° = 27.32(\operatorname{sen} 60°) = 23.66$$

Entonces la altura es 23.66 km.

Respuesta correcta: b)

$\boxed{F1}$



$$x = \cancel{x_0}^{0} + v t$$

$$150 + d = 30t$$

$$150 + d = 30(20)$$

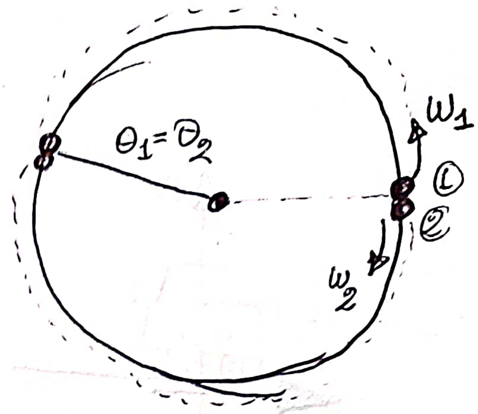
$$d = 600 - 150$$

$$\underline{d = 450\ [m]}$$

$\boxed{F2}$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 + 2\pi t \\ \theta_2 = 2\pi - 8\pi t \end{cases}$$



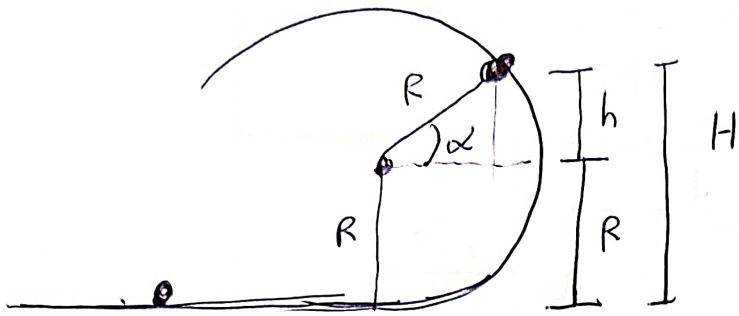
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$2\pi t = 2\pi - 8\pi t$$

$$10\cancel{\pi} t = 2\cancel{\pi}$$

$$t = \frac{2}{10} = \underline{0{,}2\ [s]}$$

$\boxed{F3}$



$H = h + R \Rightarrow H = R\,\text{sen}\,\alpha + R$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{h}{R}$

$\hookrightarrow h = R\,\text{sen}\,\alpha$

$E_i = E_f$

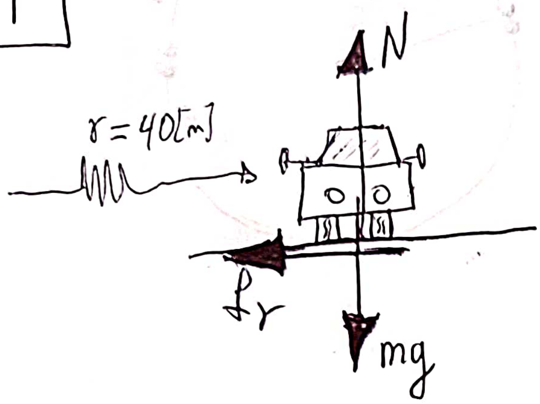
$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gH$

$\frac{v^2}{2} = gR(\text{sen}\,\alpha + 1)$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{v^2}{2gR} - 1$

$\alpha = 36{,}87 \approx 37^\circ$

F4



$$\sum F_x = ma_c$$

$$f_r = ma_c$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - mg = 0$$

$$\hookrightarrow N = mg$$

$$\mu N = ma_c$$

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\mu g r}$$

$$v = 14 \left[\frac{m}{s}\right]$$

SOLUCIÓN EXAMEN DE QUÍMICA

Q13.-Una solución acuosa cuyo porcentaje en peso en ácido nítrico, HNO_3, es del 50 %, tiene una gravedad especifica de 3/2. ¿Qué masa de ácido nítrico hay en 100 mL de solución?

A) 98 g B) 75 g C) 90 g D) 150 g E) Ninguno

Solución:

50% HNO_3 en peso

$g_{e\ HNO3} = 3/2 \rightarrow \rho_{HNO3} = 3/2\ g/mL$

$V_{sol} = 100\ mL \quad m_{sol} = ?$

$$100\ mL\,sol \left(\frac{3}{2}\frac{g\ sol}{mL\ \ sol}\right) * \left(\frac{50g\ \ HNO_3}{100g\ \ sol.}\right) = 75\,g\ HNO_3$$

Q14.- El aluminio reacciona con el ácido sulfúrico, H_2SO_4, para formar sulfato de aluminio, $Al_2(SO_4)_3$ y gas hidrógeno. ¿Qué masa de aluminio, en gramos, se necesita para formar 3 moles de gas hidrógeno?. El rendimiento de la reacción es del 54 %.

A) 100 g B) 200 g C) 300 g D) 400 g E) Ninguno

Solución:

$$2Al + 3H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3\ H_2$$

$$3\text{moles } H_2 * \frac{2\ moles\ Al}{3\ moles\ H_2} * \frac{27\ g\ Al}{1\ mol\ Al} * \frac{100\%}{54\%} = \mathbf{100\ g\ Al}$$

Q15.- Un volumen determinado de oxígeno gaseoso se difunde a través de un capilar en 95 segundos. Luego en las mismas condiciones de presión y temperatura, un mismo volumen de una mezcla de H_2 y N_2 emplea 70 segundos para difundirse por el mismo capilar. Determine la composición volumétrica de la mezcla.

A) 50% y 50% B) 84% y 16% C) 41% y 59% D) 38% y 62% E) Ninguno

Solución:

$$\frac{Velocidad_{O_2}}{Velocidad_{Mezcla}} = \sqrt{\frac{PM_{Mezcla}}{PM_{O_2}}}$$

$$\frac{(\cancel{Volumen}/tiempo)_{O_2}}{(\cancel{Volumen}/tiempo)_{Mezcla}} = \sqrt{\frac{PM_{Mezcla}}{PM_{O_2}}}$$

$$\left(\frac{t_{mezcla}}{t_{O_2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{PM\ \ mezcla}{32}}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{70}{95}\right)^2 = \frac{PM\ \ mezcla}{32} \rightarrow PM\ \ mezcla = 17{,}37\ g/mol$$

$$PMmezcla = PM_{H_2} * x_{H_2} + PM_{N_2} * x_{N_2}$$

$$x_{H_2} + x_{N_2} = 1$$

$$17{,}37 = 2 * x_{H_2} + 28 * x_{N_2} \Rightarrow 17{,}37 = 2 * x_{H2} + 28 * (1 - x_{H_2}) \Rightarrow x_{H2} = \mathit{0{,}41} \rightarrow \boldsymbol{41\%}$$

$$x_{N_2} = \mathit{0{,}59} \rightarrow \boldsymbol{59\ \%}$$

Q16.- Cuántos gramos de hidróxido de sodio estarían presentes en 200 ml de solución de hidróxido de sodio de concentración 2 M.

A) 13 B) 16 C) 19 D) 20 E) Ninguno

Solución:

$$200\ ml\ NaOH\left(\frac{2\ moles\ NaOH}{1000\ ml\ NaOH}\right)\left(\frac{40\ g\ NaOH}{1\ mol\ NaOH}\right) = 16\ g\ NaOH$$