Solución del examen de ingreso 2da. opción MATEMATICAS - Fila 2- 21/02/2017

1. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 30 Km. Si la velocidad hubiera sido 3 km/h más lenta que la que llevaba hubiera tardado 5 horas más en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 30 km?

(A)3h (B) 4h $\boxed{\text{(C) 5h}}$ (D) 6h (E) Ninguno

Solución:

Sea t y v el tiempo y la velocidad a la que viaja el tren entonces,

$$\frac{30}{v-3} - \frac{30}{v} = 5$$

resolviendo tenemos $v = -3$(se desecha) y $v = 6$, entonces el tiempo será $t = \frac{30}{6} = 5$. ♣

2. El producto de las tres soluciones o raíces de la ecuación: $6x^3 - 13x^2 - 9x + 10 = 0$, es igual a:

(A) -5/2 (B) -5/3 $\boxed{\text{(C) 5/3}}$ (D) 5/2 (E) Ninguno

Solución:

Factorizando, (por ejemplo por la regla de Ruffini): $6x^3-13x^2-9x+10 = (x-1)(6x^2 - 19x + 10) = (x-1)(3x-2)(2x-5)$, de donde las raices son: $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = \frac{5}{2}$ y su producto es $\frac{5}{3}$. ♣

3. Dada la progresión aritmética 4,13,22,... , la suma de todos los dígitos del término de esta progresión el cual este más cerca de 2017 es igual a:

(A) 11 (B) 7 (C) 5 $\boxed{\text{(D) 4}}$ (E) Ninguno

Solución:

El termino n-esimo es $a_n = 4 + (n-1)\,9 = 9n - 5 \simeq 2017$ para algún n. Resolviendo tenemos $n \simeq \frac{2022}{9} \simeq 224$, ensayemos algunos términos alrededor de $n = 224$

$$a_{223} = 2002, a_{224} = 2011, a_{225} = 2020, ...$$

es claro que el término de la P.A.más cercano a 2017 es 2020 y la suma de las cifras de este término es 4. ♣

4. La siguiente ecuación $\mathbf{6}^{6x+1} - 5 \cdot 6^{3x} + 1 = 0$, tiene dos soluciones, la suma de estas soluciones es igual a:

(A) -1/3 (B) -1/4 $\boxed{\text{(C) 1/3}}$ (D) 1/2 (E) Ninguno

Solución:

$$\mathbf{6}^{6x+1} - 5 \cdot 6^{3x} + 1 = 6\left(6^{3x}\right)^2 - 5 \cdot 6^{3x} + 1 = 0$$

si $6^{3x} = u$, entonces tenemos: $6u^2 - 5u + 1$, resolviendo tenemos: $u_1 = \frac{1}{2}$ y $u_2 = \frac{1}{3}$, volviendo a la variable x, tenemos:

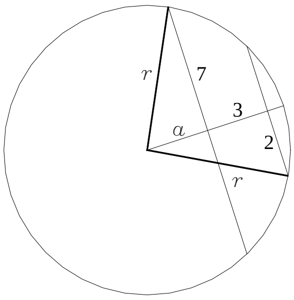
Si $u_1 = \frac{1}{2} = 6^{3x}$ tomando logaritmos $x_1 = -\dfrac{\log(2)}{3\log(6)}$, análogamente si $u_2 = \frac{1}{3} = 6^{3x}$, tenemos $x_2 = -\dfrac{\log(3)}{3\log(6)}$. Sumando estas soluciones tenemos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\log(2)}{3\log(6)} - \frac{\log(3)}{3\log(6)} = -\frac{\log(2) + \log(3)}{3\log(6)} = -\frac{\log(6)}{3\log(6)} = -\frac{1}{3}. \clubsuit$$

5. En una circunferencia se tienen dos cuerdas (paralelas) de longitud 14 y 4 respectivamente, estas cuerdas distan 3, entonces el radio de la circunferencia es igual a:

(A) $\sqrt{57}$ (B) $\sqrt{78}$ $\boxed{\text{(C) } \sqrt{85}}$ (D) $\sqrt{95}$ (E) Ninguno

Solución:



tenemos

$$r^2 = 7^2 + a^2 = (a+3)^2 + 2^2$$

resolviendo $7^2 + a^2 = (a+3)^2 + 2^2$, tenemos $a = 6$, de donde $r^2 = 7^2 + 6^2 = 85$, por tanto $r = \sqrt{85}$.
♣

6. En la figura 1, se tiene dos cuadrados idénticos, cada uno de lado 1cm, entonces el área del triángulo sombreado es igual a:

(A) 7/44 (B) 5/44 $\boxed{\text{(C) } 3/44}$ (D) 1/44 (E) Ninguno

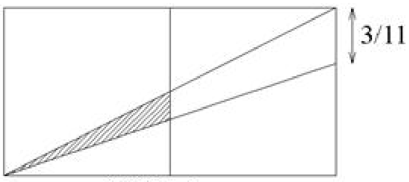


FIGURA 1

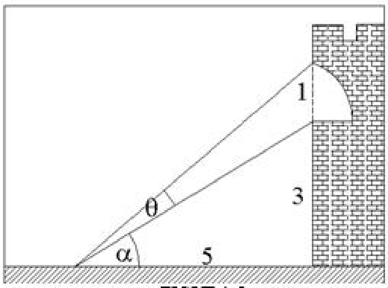
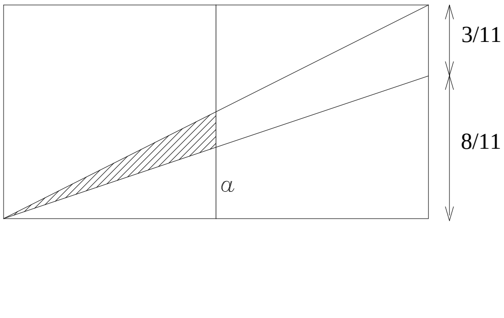


FIGURA 2

Solución:

En la figura se tienen triángulos semejantes, entonces:

$$\frac{\frac{8}{11}}{2} = \frac{a}{1}, \text{ de donde } a = \frac{4}{11}$$



así el área buscada es igual:

$$A = \frac{1}{2}(1)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(1)\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{3}{44}.♣$$

7. En valor de la $\tan(\theta)$ en la figura 2, es igual a:

$\boxed{\text{(A) } 5/37}$ (B) $4/37$ (C) $3/37$ (D) $1/37$ (E) Ninguno

Solución:

De la figura se tiene:

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{5} \text{ y } \tan(\alpha+\theta) = \frac{4}{5}$$

de esta última relación:

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\theta)} = \frac{\frac{3}{5} + \tan(\theta)}{1 - \frac{3}{5}\tan(\theta)} = \frac{4}{5}$$

resolviendo $\tan(\theta)$ encontramos $\tan(\theta) = \frac{5}{37}$. ♣

8. La suma de las soluciones (en grados sexagesimales) de la ecuación $\tan(x) + 2\sin(x) = 0$, comprendidas en el intervalo $[180^o, 360^o)$ es igual :

(A) 420^o (B) 540^o (C) 780^o (D) 900^o (E) Ninguno

Solución:

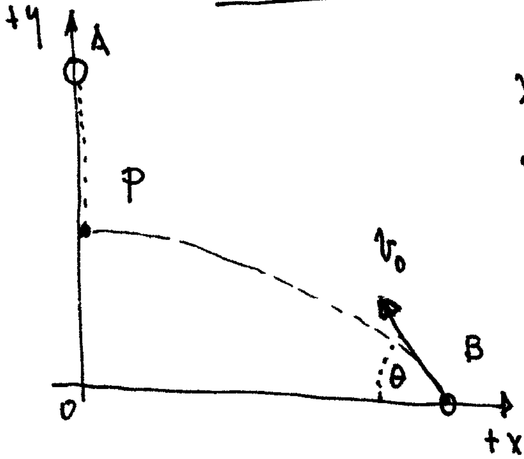
$$\tan(x) + 2\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 2\sin(x) = \frac{\sin(x)(1 + 2\cos(x))}{\cos(x)} = 0$$

Caso1: si $\sin(x) = 0$, entonces $x = 0^o, 180^o$ y 360^o

Caso2: si $1 + 2\cos(x) = 0$, $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, entonces $x = 120^o$ y 240^o. Las soluciones en el intervalo $[180^o, 360^o)$ son: 180^o y 240^o cuya suma es igual a: 420^o. ♣

#9

Fila 2



$$y_A = 40 - \frac{g}{2}t^2$$

$$x_B = 40 - 40\cos\theta\, t$$

$$y_B = 40\,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{g}{2}t^2$$

En P: $y_A = y_B \wedge x_B = 0$

$$40 - \cancel{\frac{g}{2}t^2} = 40\,\text{sen}\,\theta\, t - \cancel{\frac{g}{2}t^2}$$

$$0 = 40 - 4\cos\theta\, t$$

$$\text{sen}\,\theta\, t = 1$$

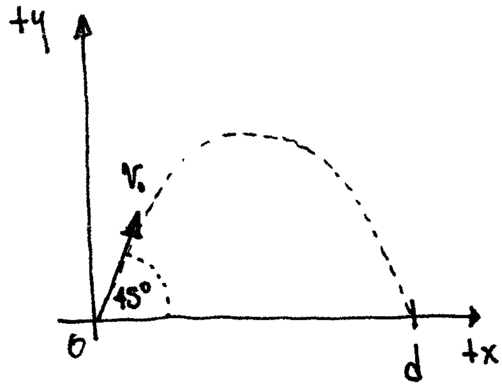
$$\cos\theta\, t = 1$$

$\div \Rightarrow \tan\theta =$

$\therefore$ $\boxed{\theta = 45°}$

(d)

#10



$$x = v_0 \cos 45°\, t$$

$$y = v_0\, \text{sen}\, 45°\, t - \frac{g}{2}t^2$$

En P: $y = 0 \wedge x = d$

$$0 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{t} - \frac{g}{2}t^{\cancel{2}} \quad ①$$

$$d = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t \quad ②$$

② $t = \dfrac{2d}{\sqrt{2}\, v_0} = \dfrac{\sqrt{2}\, d}{v_0}$

① $v_0 \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \dfrac{g}{\cancel{2}} \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\, d}{v_0}$

(a)

$v_0 = \sqrt{gd} \Rightarrow \boxed{v_0 = 2\,[m/s]}$

#11

$M_1(30) = M_1 v_1' + 2M_1 v_2' \rightarrow 30 = v_1' + 2v_2'$

$e(0-30) = v_1' - v_2' \qquad -30e = v_1' - v_2'$

$\Rightarrow \boxed{v_1' = -10\,[m/s]}$

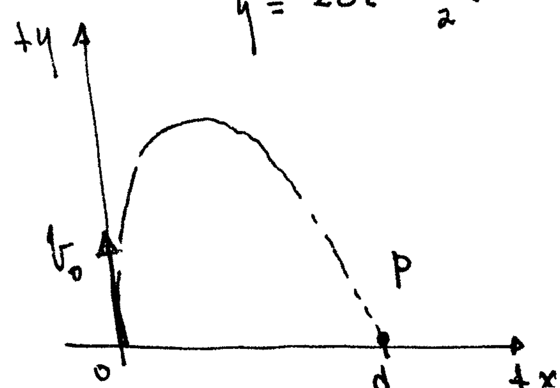
$\boxed{v_2' = 20\,[m/s]}$

(b)

#12

$$x = \frac{2}{2}t^2$$

$$y = 25t - \frac{g}{2}t^2$$



En P: $x = d \wedge y = 0$

$$d = t^2$$

$$0 = 25\cancel{t} - \frac{g}{2}t^{\cancel{2}} \rightarrow t = 5\,[s]$$

$\Rightarrow \boxed{d = 25\,[m]}$

(d)

Q 13 $\rho_{CH_4} = \rho_{O_2} \cdot \dfrac{\bar{M}_{CH_4}}{\bar{M}_{O_2}} = 1{,}874 \cdot \dfrac{\cancel{16}}{\cancel{32}\,2} = 0{,}937\ g/l \Rightarrow$ B

Q 14: A: $\cancel{20}\,g\ CaCO_3 \cdot \dfrac{3\,at\text{-}g\ O}{\cancel{100}\,5\ g\ CaCO_3} \cdot \dfrac{N_A}{1\,at\text{-}g\ O} = 0{,}6\ N_A \cdot$ átomos O

B: $\cancel{2{,}24}\,l\ CO_2 \cdot \dfrac{2\,N_A\,at\ O}{\cancel{22{,}4}\,10\ l\ CO_2} = 0{,}2\ N_A$

C: $\cancel{4{,}8}\,g\ O_3 \quad \dfrac{3 \cdot N_A\ at.\ O}{\cancel{48}\,10\ g\ O_3} = 0{,}3\ N_A$

D: $250\ mmol\ O_2 \cdot \dfrac{1\ mol\ O_2}{1000\ mmol\ O_2} \cdot \dfrac{2 \cdot N_A \cdot at\ O}{1\ mol\ O_2} = 0{,}5\ N_A$

$\Rightarrow$ A

$\boxed{N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} = Cte}$

Q15 $2KMnO_4 + 5K_2SO_3 + 3H_2SO_4 \longrightarrow 6K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 3H_2O$

$\Rightarrow$ C

Q16: $m_1 = 100 \cdot 0{,}1 = 10g\ C_6H_{12}O_6$

$18\% = \dfrac{10 + X}{100 + X} \cdot 100 \Rightarrow 0{,}18 \cdot 100 + 0{,}18X = 10 + X$

$8 = X \cdot 0{,}82$

$\boxed{X = 9{,}756\,g\ C_6H_{12}O_6}$

$\Downarrow$

A