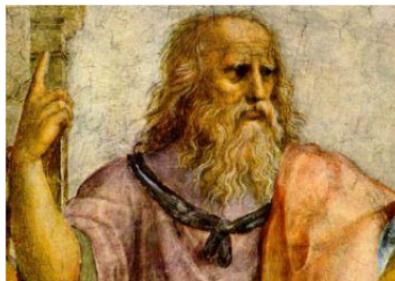


FÍSICA

FRENTE III

Professor Danilo



3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Turmas Platão e Sócrates

Acompanhe novas versões em:

<http://fisica.professordanilo.com/>

Envie erratas para

daniло@professordanilo.com

ÍNDICE

PRIMEIRO BIMESTRE.....	9
1. INTRODUÇÃO À FRENTE 3.....	9
a) AVALIAÇÃO	9
b) CONTEÚDO	9
2. INTRODUÇÃO À FÍSICA E À FRENTE 3.....	9
3. INTRODUÇÃO À ÓTICA	10
4. ARCO-ÍRIS, MEIOS, FENÔMENOS E CORES.....	12
a) AS CORES DO ARCO-ÍRIS	12
b) TIPOS DE MEIOS	13
c) FENÔMENOS ÓPTICOS.....	13
d) COR DE UM CORPO POR REFLEXÃO	14
5. PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA.....	18
a) SOMBRA E PENÚMBRA	18
b) CÂMARA ESCURA	19
c) A LUA	19
d) ÂNGULO VISUAL.....	20
6. LEIS DA REFLEXÃO (ESPELHOS PLANOS).....	22
PRIMEIRA LEI DA REFLEXÃO	22
SEGUNDA LEI DA REFLEXÃO.....	22
a) REFLEXÃO EM SUPERFÍCIE PLANA	22
b) REFLEXÃO EM SUPERFÍCIE CURVA	23
7. IMAGENS EM ESPELHOS PLANOS	23
a) IMAGENS DE OBJETOS PONTUAIS	23
b) IMAGENS DE OBJETOS EXTENSOS	26
8. TAMANHO MÍNIMO DE UM ESPELHO PARA SE VER POR COMPLETO 27	
9. CAMPO VISUAL.....	28
10. TRANSLAÇÃO DE UM ESPELHO PLANO	28
11. ROTAÇÃO DE UM ESPELHO PLANO.....	33
12. IMAGEM FORMADA POR DOIS ESPELHOS.....	33
13. OS ESPELHOS ESFÉRICOS.....	36
a) RAIOS NOTÁVEIS	37
RAIOS NOTÁVEIS NO ESPELHO CÔNCAVO	37

RAIOS NOTÁVEIS NO ESPELHO CONVEXO	38
b) LOCALIZANDO O FOCO SECUNDÁRIO	39
c) FORMAÇÃO DE IMAGENS: CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA	42
d) FORMAÇÃO DE IMAGENS: EQUAÇÃO DE GAUSS	45
i – O REFERENCIAL DE GAUSS.....	45
ii – PADRÕES IMPORTANTES.....	45
iii – EQUAÇÃO DE GAUSS:	46
iv – EQUAÇÃO DO AUMENTO LINEAR TRANSVERSAL.....	46
14. REFRAÇÃO E LEI DE SNELL-DESCARTES.....	48
a) VELOCIDADE DA LUZ.....	48
b) PRINCÍPIO DE FERMAT.....	49
c) LEI DE SNELL-DESCARTES	50
15. DIOPTRO PLANO E REFLEXÃO TOTAL	50
Dioptrô plano	50
Reflexão Total.....	51
16. LÂMINAS DE FACES PARALELAS	52
17. FIBRA ÓPTICA.....	53
18. POSIÇÃO APARENTE DOS ASTROS E MIRAGEM	55
(A) Posição aparente dos astros.....	55
(B) Miragem	55
19. DISPERSÃO CROMÁTICA	57
20. PRISMAS.....	58
(A) Prisma – introdução	58
(B) Dispersão.....	59
(C) Desvio mínimo	59
21. LENTES ESFÉRICAS.....	60
(A) DIOPTRO ESFÉRICO	60
(B) NOMENCLATURA.....	61
(C) COMPORTAMENTO ÓPTICO	63
(D) RAIOS NOTÁVEIS	64
(E) FORMAÇÃO DE IMAGENS.....	67
(F) FOCO SECUNDÁRIO	71
(G) REFERENCIAL DE GAUSS	71
(H) EQUAÇÃO DOS FABRICANTES DE LENTES	74

(I) ASSOCIAÇÃO DE LENTES.....	75
(J) ASSOCIAÇÃO DE LENTES COM ESPELHOS	75
22. ÓPTICA DA VISÃO.....	75
(A) INTRODUÇÃO.....	75
(B) AMETROPIAS (PROBLEMAS DA VISÃO).....	77
23. INSTRUMENTOS ÓPTICOS	80
TERMOMETRIA	84
24. ESCALAS TERMOMÉTRICAS	84
(A) PRINCIPAIS ESCALAS	84
(B) CONVERSÃO CÉLSIUS E FAHRENHEIT.....	85
(C) CONVERSÃO CÉLSIUS E KELVIN	88
(D) VARIAÇÃO DE TEMPERATURA	89
(E) TERMÔMETRO DE VALOR MÁXIMO.....	89
25. CALORIMETRIA.....	90
CALOR SENSÍVEL.....	90
CURVAS DE AQUECIMENTO	90
CAPACIDADE TÉRMICA	91
POTÊNCIA TÉRMICA	91
TROCAS DE CALOR	91
CALOR LATENTE	92
DIAGRAMAS DE FASE	94
26. TRANSMISSÃO DE CALOR	95
TIPOS DE TRANSMISSÃO DE CALOR.....	95
TRANSMISSÃO POR CONDUÇÃO	95
TRANSMISSÃO POR CONVEÇÃO	97
TRANSMISSÃO POR IRRADIAÇÃO.....	99
27. GASES IDEAIS.....	101
a) INTRODUÇÃO	101
b) GRANDEZAS IMPORTANTES	101
c) LEI DE BOYLE	104
d) LEI DE CHARLES/GAY LUSSAC	105
e) LEI GERAL DOS GASES IDEAIS	107
f) EQUAÇÃO DE CLAPEYRON.....	107
28. TEORIA CINÉTICA DOS GASES.....	108

a) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A PRESSÃO CONSTANTE	108
b) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A VOLUME CONSTANTE	109
c) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A TEMPERATURA CONSTANTE	109
d) VALOR QUADRÁTICO MÉDIO	112
e) ENERGIA CINÉTICA MÉDIA DAS MOLÉCULAS DO GÁS	115
29. APLICAÇÃO DA TEORIA CINÉTICA DOS GASES	116
EXERCÍCIOS.....	117
30. DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES	119
31. LIVRE CAMINHO MÉDIO.....	121
32. EQUIPARTIÇÃO DE ENERGIA.....	123
33. PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA.....	124
34. TRANSFORMAÇÕES, CALORES ESPECÍFICOS MOLARES E LEI DE JOULE	125
(A) TRANFORMAÇÃO ISOTÉRMICA	125
(B) TRANFORMAÇÃO ISOCÓRICA E CALOR ESPECÍFICO MOLAR A VOLUME CONSTANTE	125
(C) TRANFORMAÇÃO ISOBÁRICA E CALOR ESPECÍFICO MOLAR A PRESSÃO CONSTANTE	126
(D) RELAÇÃO ENTRE C_V E C_P	127
(E) A LEI DE JOULE E O CALOR MOLAR.....	127
35. TRANSFORMAÇÃO ADIABÁTICA.....	128
36. TRANSFORMAÇÕES CÍCLICAS	129
37. MÁQUINAS TÉRMICAS	129
38. CICLO DE CARNOT	134
39. REFRIGERADORES E CICLO DE CARNOT	134
40. SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA	137
41. MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES – INTRODUÇÃO	139
(A) SISTEMAS OSCILATÓRIOS	139
(B) GRANDEZAS EM SISTEMAS OSCILATÓRIOS	139
(C) SISTEMA MASSA MOLA	139
42. SISTEMA MASSA-MOLA	140
43. ENERGIA NO MHS	142
44. PÊNDULO SIMPLES	144
45. EQUAÇÃO DO MHS.....	145

(A) EQUAÇÃO DA POSIÇÃO $x(t)$	146
(B) EQUAÇÃO DA VELOCIDADE $v(t)$	148
(C) EQUAÇÃO DA ACELERAÇÃO $a(t)$	151
(D) VERIFICANDO AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS	153
(E) ENERGIA NO MHS	155
(F) OUTRAS RELAÇÕES NO MHS	158
46. CLASSIFICAÇÃO DAS ONDAS	163
(A) As ondas podem ser classificadas, quanto à sua natureza , em:.....	163
(B) Podemos classificar as ondas com relação à direção de propagação....	165
47. ELEMENTOS DAS ONDAS.....	167
48. FUNÇÃO DE ONDA	168
49. ONDAS MECÂNICAS.....	172
(A) O SOM	172
(B) VELOCIDADE DE ONDAS MECÂNICAS	173
(C) ONDAS UNI, BI E TRIDIMENSIONAIS	174
50. REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE ONDAS.....	175
REFLEXÃO E REFRAÇÃO EM FIOS.....	175
REFLEXÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS	176
51. FENÔMENOS ONDULATÓRIOS	180
(A) DIFRAÇÃO E ESPALHAMENTO.....	180
PRINCÍPIO DE HUYGENS	180
(B) POLARIZAÇÃO	182
(C) REFLETÂNCIA E TRANSMITÂNCIA	183
(D) RESSONÂNCIA.....	184
(E) BATIMENTO	186
52. ACÚSTICA.....	188
(A) INTENSIDADE DE UMA ONDA.....	188
(B) NÍVEL SONORO.....	190
(C) EFEITO DOPPLER DE UMA ONDA SONORA	191
(D) EFEITO DOPPLER DE ONDA ELETROMAGNÉTICA	192
(E) CONE DE MACH	193
53. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	194
54. INTERFERÊNCIA DE ONDAS	196

(A) INTRODUÇÃO	196
(B) INREFERÊNCIA EM DUAS DIMENSÕES.....	199
(C) INTERFERÊNCIA DA LUZ	200
55. ONDAS ESTACIONÁRIAS	200
TUBOS SONOROS	202
56. APÊNDICE	204
A. UNIDADES DE MEDIDAS	204
B. CONSTANTES FÍSICAS	206
C. CONSTANTES MATEMÁTICAS	207
D. FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA	207
E. COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME	208
F. TRIGONOMETRIA.....	210

NOTA DO AUTOR AOS LEITORES

Este material foi desenvolvido como notas de aula para o ensino médio do colégio Elite Col, Campinas, SP.

O conteúdo deste material é livre para ser utilizado por qualquer pessoa para fins educacionais. A cópia e divulgação é livre.

O presente arquivo é a quinta edição (primeira em 2018, sendo atualizada anualmente), que está sendo revisada, revista e reformulada ao longo de todo ano e você pode contribuir com isso enviando e-mail para o professor Danilo para:

danilo@professordanilo.com

Se você viu alguma figura com direitos autorais sem as devidas referências, por gentileza, envie e-mail para o endereço acima que providenciarei o quanto antes a adequação do material.

Se encontrou algum erro ou quer entrar em contato por qualquer outro motivo, fique a vontade para entrar em contato.

Por fim, ao longo do ano irei fazendo correções e sempre irei disponibilizar a última versão no meu site:

<http://fisica.professordanilo.com>

Campinas, 25 janeiro de 2024...

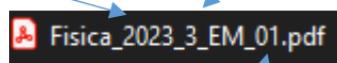
NOTA DO AUTOR AOS ALUNOS

O material de 2023 será o mesmo que o material de 2022, porém será melhorado ao longo do ano através de correções, organização de conteúdo, melhoria de desenhos etc.

Para identificar se você está com a versão mais atual, verifique o nome do arquivo:

Turma (3º ano do Ensino Médio)

Ano da edição do arquivo



Versão deste arquivo

Erratas e contato com o professor: danilo@professordanilo.com

Campinas, 25 janeiro de 2023.

PRIMEIRO BIMESTRE

1. INTRODUÇÃO À FRENTE 3

a) AVALIAÇÃO

↳ Prova

b) CONTEÚDO

↳ Parte 1: ótica

→ Lentes, espelhos, microscópio, lunetas, olhos humanos, problemas da visão etc.

↳ Parte 2: termologia, calorimetria e gases ideais

→ Escalas de temperaturas, como o calor altera a temperatura, fusão, ebulição, gases ideais, máquinas térmicas etc.

↳ Parte 3: ondulatória

→ Definição de ondas, fenômenos ondulatórios (como interferência, ondas estacionárias, efeito Doppler entre outros), nível sonoro etc.

2. INTRODUÇÃO À FÍSICA E À FRENTE 3

● Física

→ Do grego *physis*: natureza

→ A Física trata do mundo real

→ O descrevemos usando a Matemática

→ Modo de estudo

● Princípios

→ Assume-se como verdade sem poder ser demonstrado

● Teoremas

→ Podem ser demonstrados

● Leis

→ Podem ser Princípios ou Teoremas

↳ Ótica

→ Do grego *optiké*: visão

● O termo ótica (sem "p") está relacionado ao ouvido (exemplo: otite) mas a grafia ótica muitas vezes é empregada como sinônimo de óptica

→ Divisões

● Óptica geométrica

→ O que estudaremos neste semestre

→ Trata a luz como raio

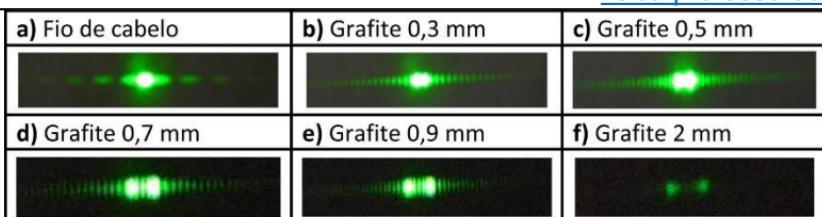
→ Ferramenta principal: Geometria

● Óptica ondulatória

→ Veremos no ano que vem

→ Trata a luz como uma onda

→ Explica a difração da luz (se você apontar um laser verde para um fio de cabelo irá obter as figuras a seguir)



Fonte: <http://www.scielo.br/img/revistas/rbef/v37n4//0102-4744-rbef-37-4-4311-gf04.jpg>

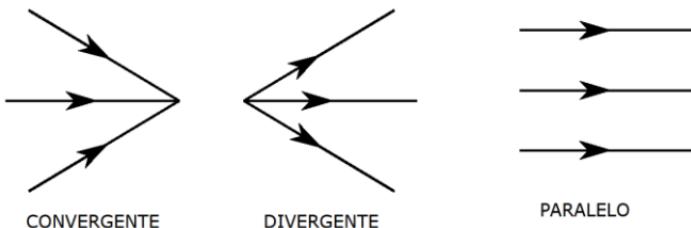
● Óptica física

- ➡ Vocês verão no ano que vem, mas com outro professor
- ➡ Trata a luz como partícula
- ➡ Explica por que quando a luz com determinada cor consegue retirar elétrons de alguns metais (efeito fotoelétrico)

3. INTRODUÇÃO À ÓTICA

Conceitos fundamentais

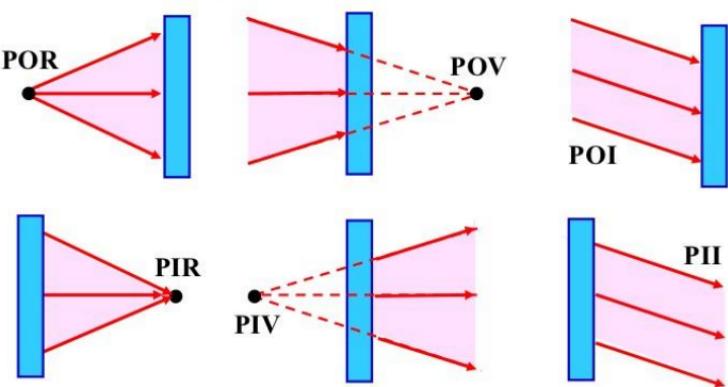
- Raios de luz:
- Linhas orientadas que representam o caminho percorrido pela luz, indicando também o sentido



→ Veja na figura a seguir diversos tipos de pontos que serão muito importantes para entendermos o que é imagem e objeto reais, virtuais ou impróprios. Siga a legenda abaixo para melhor entender o que está na figura:

- POR
 - Ponto objeto real
- POV
 - Ponto objeto virtual
- PIR
 - Ponto imagem real
- PIV
 - Ponto imagem virtual
- POI
 - Ponto objeto impróprio
- PII
 - Ponto imagem imprópria

Ponto Objeto e Ponto Imagem



→ Fontes de luz

- Primárias (emitem luz como o Sol, lâmpadas, estrelas etc.)
- Secundárias (que refletem luz como a Lua, o caderno, os planetas etc.)

→ A luz pode ser

- Simples ou Monocromática (uma só cor)
- Composta ou Policromática (duas ou mais cores superpostas – a luz do Sol é a mistura de todas as cores visíveis)

→ Velocidade da luz

- No vácuo é $3 \cdot 10^8$ m/s e representado pela letra *c*.
- Uma **ano-luz** é a distância percorrida pela luz em um ano. Isto é:

$$\text{sendo } v = c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta s = c \cdot \Delta t$$

Substituindo os dados:

$$1 \text{ a.l.} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) \cancel{\text{s}} \approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Ou

$$1 \text{ a.l.} \approx 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km} \approx 240.000.000 \text{ de voltas na Terra}$$

Você também pode pensar que ao dizer anos-luz (sem o artigo “por”, como em metros **por** segundo) então temos uma multiplicação:

$$1 \text{ a.l.} = 1 \text{ ano} \times c.$$

Mapa mental do que acabamos de ver

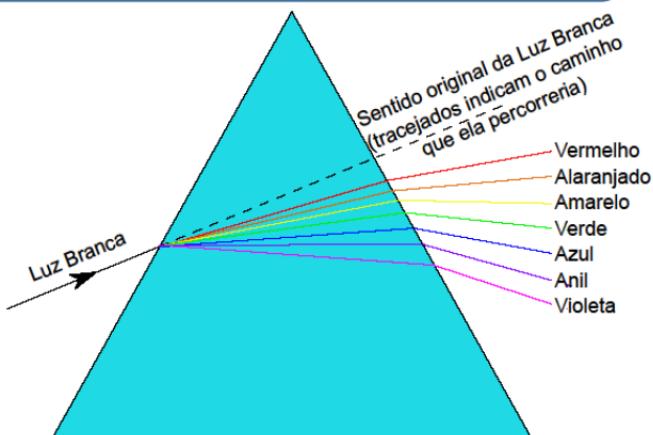


4. ARCO-ÍRIS, MEIOS, FENÔMENOS E CORES

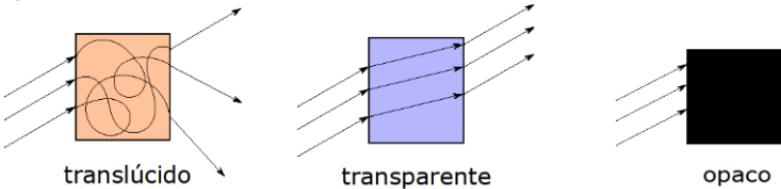
a) AS CORES DO ARCO-ÍRIS

→ DECORE:

Vermelho, alaranjado, Amarelo, Verde, Azul, Anil, Violeta
VAAVAAV



b) TIPOS DE MEIOS



Exemplos de meios

→ Translúcidos

- Vidro canelado, papel de seda etc.

→ Transparentes

- Lâmina de água limpa, vidro liso, ar etc.

→ Opacos

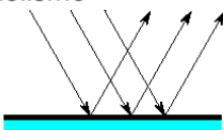
- Cimento, lousa, madeira etc.

c) FENÔMENOS ÓPTICOS

→ REFLEXÃO: quando a luz incide em um objeto e volta para o meio de propagação original, como quando incidimos uma luz laser no espelho.

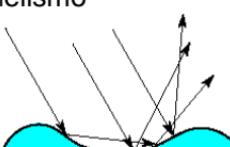
→ Reflexão regular

- Feixe paralelo incidente em uma superfície plana e polida mantém o paralelismo

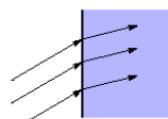


→ Reflexão difusa

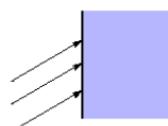
- Feixe de raios paralelos incidentes em uma superfície não mantém o paralelismo



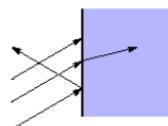
→REFRAÇÃO: quando a luz incide em um meio e o atravessa.



→ABSORÇÃO: quando a luz, ao incidir em um meio, não é refletida e não é refratada dizemos que o meio absorveu a luz.



→TODOS OS TRÊS FENÔMENOS ACIMA PODEM OCORRER SIMULTANEAMENTE



d) COR DE UM CORPO POR REFLEXÃO

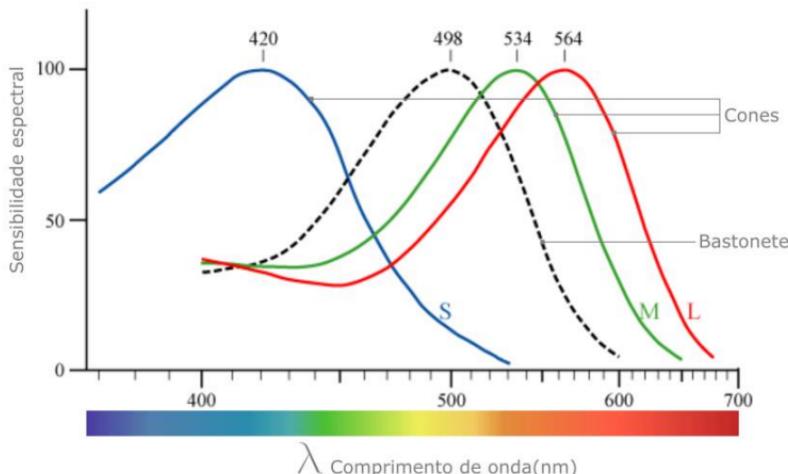
→Células da visão

→Bastonetes

- Células mais finas e responsáveis por detectar presença e ausência de luz, independentemente da cor
- Em ambientes mais escuros somente usamos estas células
- Por isso enxergamos branco e preto no escuro

→Cones

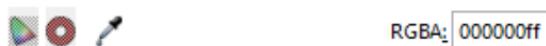
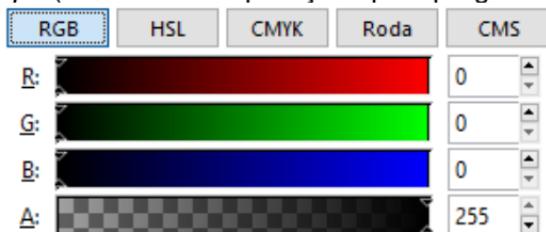
- Três tipos
- Responsáveis por vermos cores
- Menos sensíveis: por isso só enxergamos cores quando há maior intensidade luminosa (mais luz)
- Maior sensibilidade nas cores *Red* (Vermelho), *Green* (Verde) e *Blue* (Azul)
- Por isso televisores, celulares e projetores utilizam apenas estas três cores, cujo padrão é chamado de RGB (*Red*, *Green*, *Blue*)



Fonte: <https://muralcientifico.files.wordpress.com/2017/10/000.jpg>

→ Cores primárias aditivas

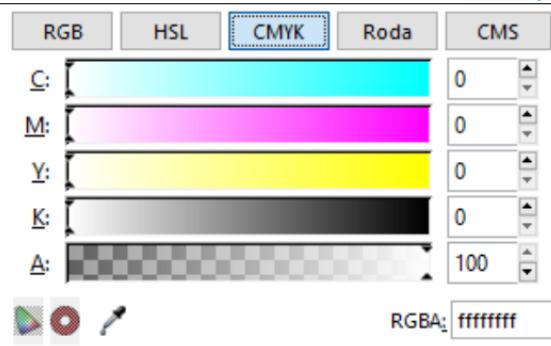
- São chamadas de aditivas por se tratar da soma das cores adicionando luz
- Chamamos de cores primárias aditivas estas três cores (RGB) que sensibilizam os cones
- Se misturarmos todas elas obtém o branco
- Disco de Newton ([vídeo YouTube](#))
- Inkscape (download e explicações pelo programa)



Acima vemos o print das opções de cores de um programa de desenho: Inkscape. Note a opção de escolha baseada nas cores RGB. A é o fator Alfa que representa a transparência do desenho.

→ Cores primárias subtrativas

- É chamada subtrativa porque a tinta absorve (subtrai) cores
- Consideraremos as cores da impressora
 - Cyan (Ciano)
 - Não absorve (reflete) somente as cores Azul e Verde
 - Magenta (Magenta)
 - Não absorve (reflete) somente as cores Azul e Vermelho
 - Yellow (Amarelo)
 - Não absorve (reflete) somente as cores Vermelho e Verde
 - black (Preto – Key)
 - Absorve Todas as cores
 - Abreviando: CMYK
- Note que se misturarmos:
 - CIANO e MAGENTA as cores Vermelho e Verde serão absorvidas, restando apenas o AZUL
 - MAGENTA e AMARELO as cores Verde e Azul serão absorvidas, restando apenas o VERMELHO
 - CIANO e AMARELO as cores Vermelho e Azul serão absorvidas, restando apenas o VERDE
 - Se misturarmos todas as cores, então o Vermelho, o Verde e o Azul serão absorvidos, resultando em preto.

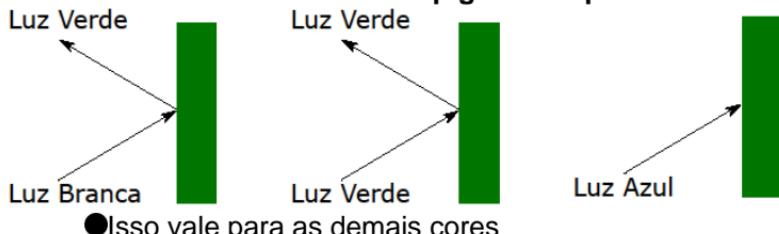


Acima vemos o print das opções de cores de um programa de desenho: Inkscape. Note a opção de escolha baseada nas cores CMYK. A é o fator Alfa que representa a transparência do desenho. Note também que é apresentado um número hexadecimal que se refere às cores escolhidas usando o padrão RGBA, sendo A o fator Alfa. Cada dois dígitos representa a intensidade da cor indo de 00 até ff. Os primeiros números hexadecimais são: 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 0a, 0b, 0c, 0d, 0e, 0f, 10, 11 etc.

→ Pigmentos Puros

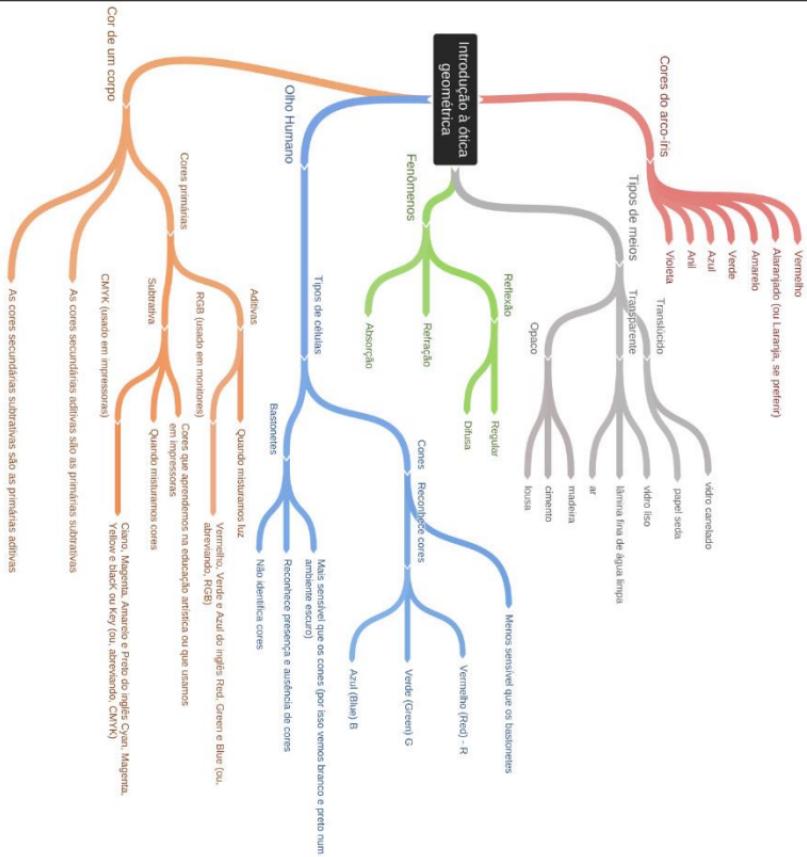
→ Pigmentos puros são pigmentos ideias que absorvem todas as cores, menos uma: a que ele reflete ou permite que atravesse o material

- Uma superfície é verde porque ela reflete somente a cor verde se a substância for feita de **pigmentos puros**



- Isso vale para as demais cores

Mapa mental do que acabamos de ver



Da lista, Introdução ao Estudo da
Ótica, comece fazendo os
exercícios
2 ao 8, 10 e 13 ao 22.

5. PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

→ Princípio da propagação retilínea da luz

Em meios homogêneos e transparentes, a luz se propaga em linha reta.

→ Princípio da reversibilidade dos raios de luz

Se a luz percorre um caminho ao ir de um ponto A para um ponto B, então ao ir do ponto B para o A ela fará o mesmo caminho.

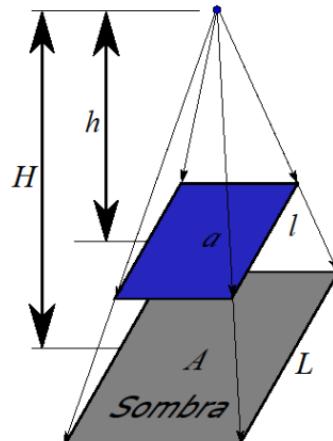
→ Princípio da independência dos raios luminosos

Quando raios de luz se cruzam, eles se interferem mutuamente apenas na região onde se cruzam, mas cada um segue seu caminho como se os demais não existissem.

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA PROPAGAÇÃO RETILÍNEA DA LUZ:

a) SOMBRA E PENÚMBRA

→ Fonte pontual



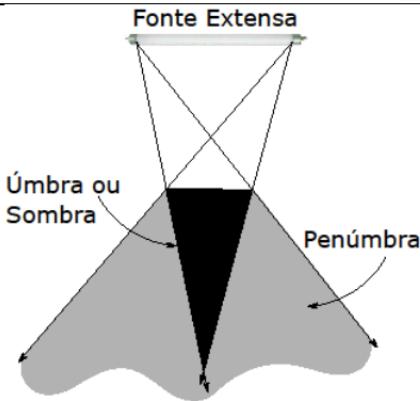
Semelhança de triângulos

$$\frac{l}{L} = \frac{h}{H} = k$$

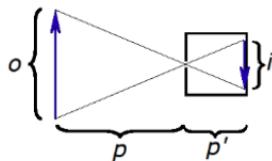
Há uma relação também para as áreas:

$$\frac{a}{A} = k^2$$

→ Fonte extensa



b) CÂMARA ESCURA



↳ Novamente semelhança de triângulo

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$

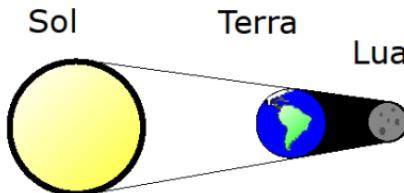
↳ Veja um vídeo sobre isso feito pelo professor Danilo:

<https://youtu.be/zIGH3LrsKMc>

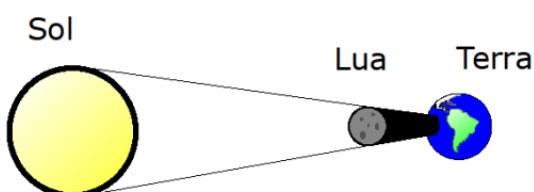
c) A LUA

↳ ECLIPSES

→ LUNAR



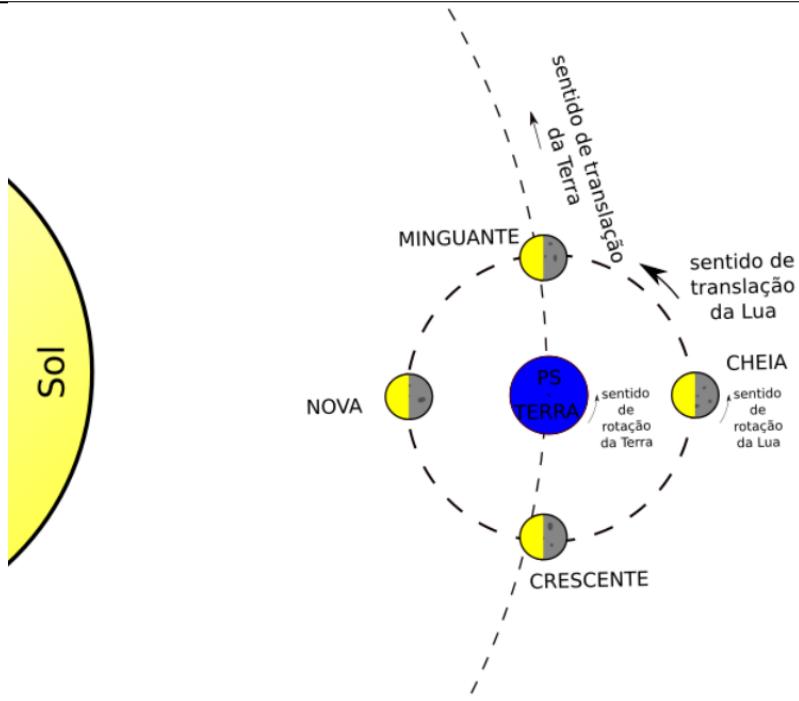
→ SOLAR



↳ FASES DA LUA

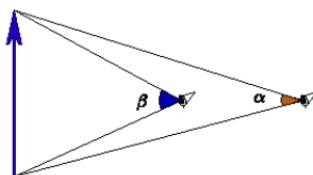
→ O sentido de rotação da Terra em torno do próprio eixo, da Lua em torno do próprio eixo, de translação da Terra em torno do Sol e de translação da Lua em torno da Terra são os mesmos

→ Usando a "regra da mão direita" você pode determinar este sentido de rotação apontando seu dedão para o norte geográfico



d) ÂNGULO VISUAL

→ Ângulo formado entre os raios que saem das extremidades do objeto e atingem o observador



No SisQ, toda a lista de nome
“Introdução ao estudo da
óptica” podem ser resolvidos

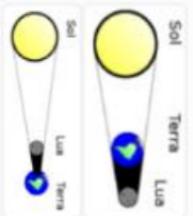
Princípios da ótica geométrica

Propagação retilínea da luz: em meios homogêneos e transparente, a luz se propaga em linha reta.

Se a luz percorre um caminho ao ir de um ponto A para um ponto B, então ao ir do ponto B para o A, ela fará o mesmo caminho.

Quando raios de luz se cruzam, eles se interferem mutuamente apenas na região onde se cruzam, mas cada um segue seu caminho como se os demais não existissem.

Eclipse



Princípios da ótica geométrica

Aplicações

Sombra e penumbra.

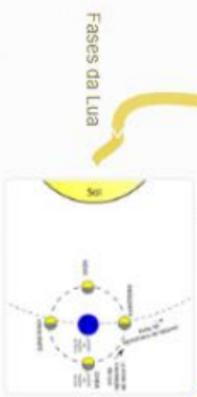
Sombra é a região do espaço a partir da qual não se pode ver a fonte de luz.
Penumbra é a região do espaço a partir da qual se pode ver parte da fonte. Por isso penumbras só podem ser produzidas se a fonte de luz for extensa.

Sombras: semelhança de triângulos



Câmara escura

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$



Fases da Lua

6. LEIS DA REFLEXÃO (ESPELHOS PLANOS)

O raio refletido, a normal e o raio incidente estão situados no mesmo plano.

PRIMEIRA LEI DA REFLEXÃO

O ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

→ Vamos ver alguns vídeos sobre o assunto.

→ Se você gosta de game, que tal dar uma olhada em como os espelhos são criados em jogos eletrônicos

<https://youtu.be/Vb7wFW4u7zs>

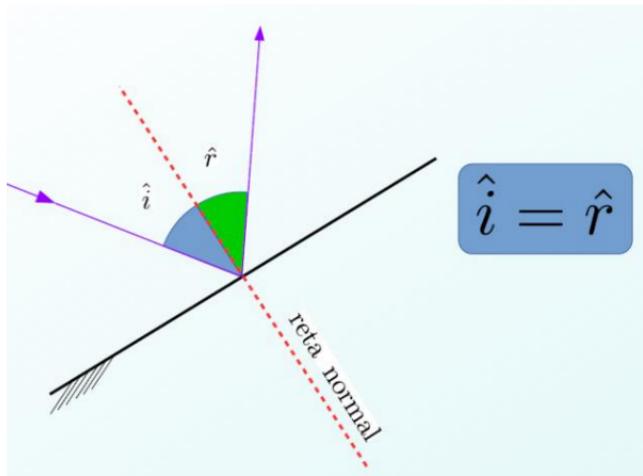
→ Ainda nesta linha de games, veja um pouco sobre *Ray Tracing*

<https://youtu.be/lGZaBwk-o0M>

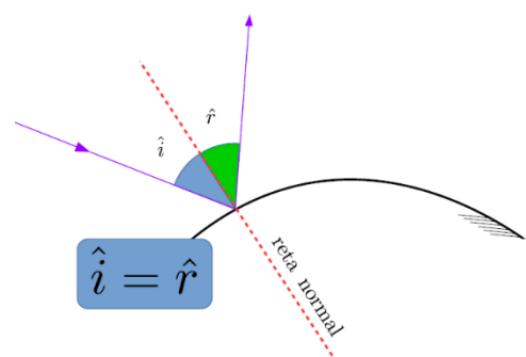
→ Veja agora um vídeo do professor Danilo onde ele mostra, na prática, as leis da reflexão

<https://youtu.be/8bgNJmZw5dE>

a) REFLEXÃO EM SUPERFÍCIE PLANA



b) REFLEXÃO EM SUPERFÍCIE CURVA



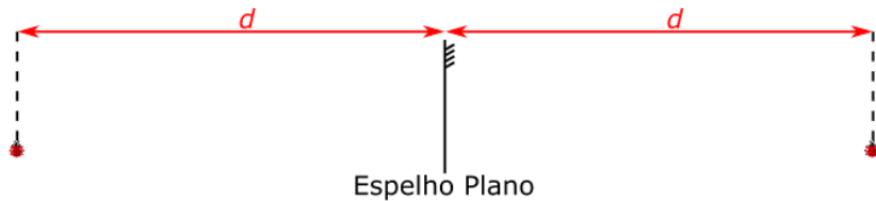
No SisQ, faça os exercícios de 1 à 27 da lista “Os Espelhos Planos”.

7. IMAGENS EM ESPELHOS PLANOS

a) IMAGENS DE OBJETOS PONTUAIS

→ Vamos aprender um método geométrico para obtermos a imagem de um objeto real e pontual à frente de um espelho plano

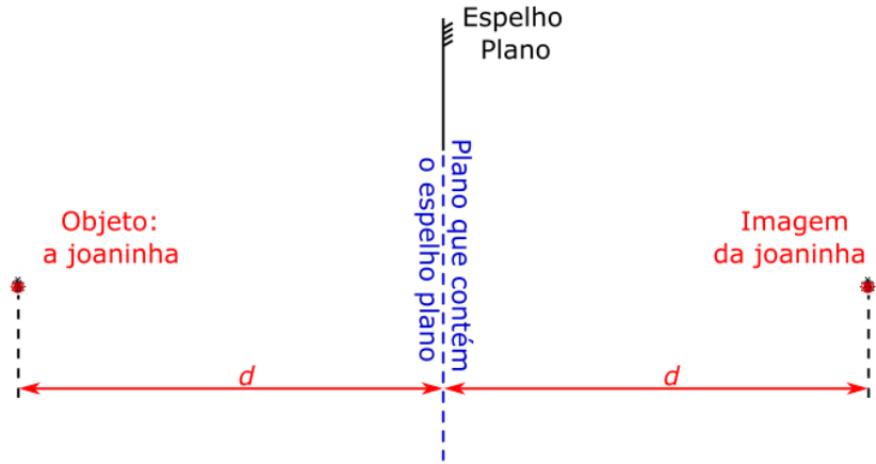
→ Como exemplo, imaginemos uma pequena joaninha à frente de um espelho plano



→ Basta medirmos a distância até o plano que contém o espelho e replicarmos esta distância atrás do plano: veja isso na figura acima.

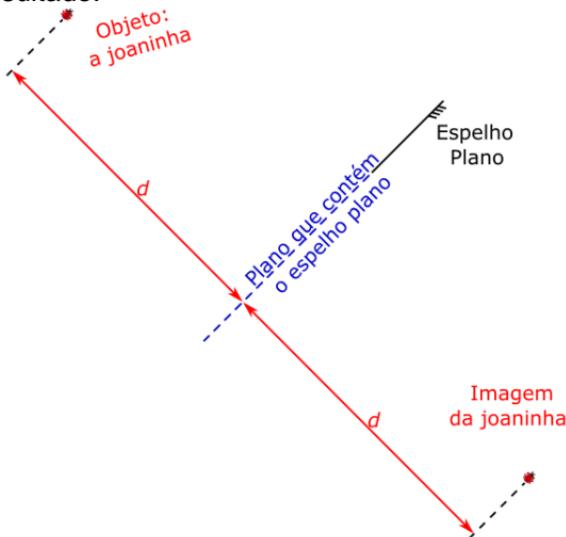
→ E se o objeto não estiver diante do espelho?

● Prolongue o espelho para encontrar o plano que contém o espelho e repita o método acima.



● Note que a imagem existe mesmo que o objeto, imagem e espelho não estejam todos alinhados.

- Observe também que o método é o mesmo no caso de inclinarmos o espelho. A figura a seguir apresenta este resultado.



→ Veja um vídeo onde o professor Danilo mostra a formação da imagem de um objeto e a sua simetria

<https://youtu.be/4-oKwSKkLMU>

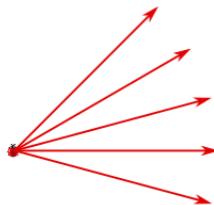
→ Vamos verificar que as duas leis da reflexão, vistas acima, levam à esta conclusão.

- Por simplicidade, começemos com o caso da joaninha não logo adiante do espelho, mas um pouco abaixo

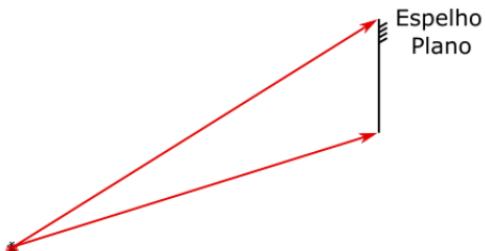


Objeto:
a joaninha

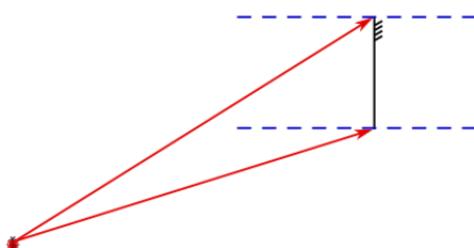
- A joaninha é um objeto real, portanto, vamos tratá-la assim, representando alguns raios de luz que partiram dela:



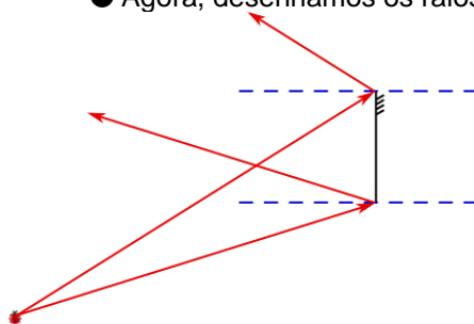
- Dentre estes raios, vamos escolher dois que atingem as extremidades do espelho:



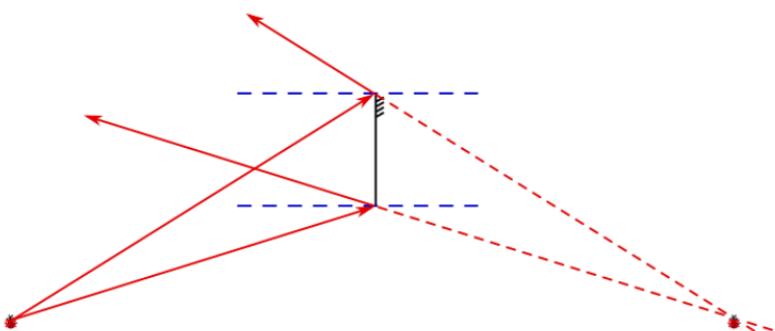
- Vamos desenhar as normais ao espelho nos pontos onde estes raios o atingem:



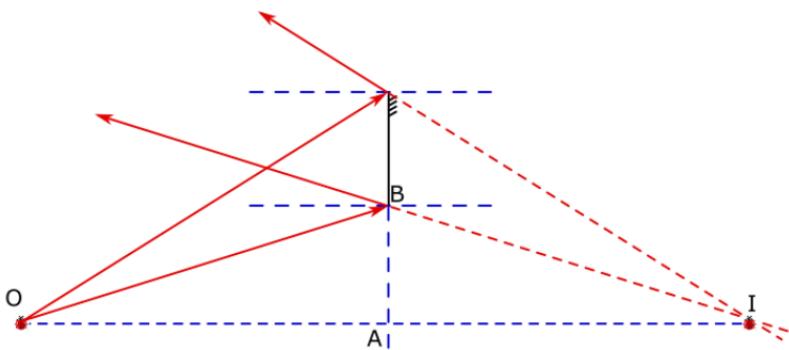
- Agora, desenhemos os raios refletidos:



- Observe que os raios refletidos não se encontram. Portanto, para encontrarmos a imagem formada por este espelho devemos prolongar os raios refletidos. O ponto de encontro destes prolongamentos é onde se encontra a imagem da joaninha.



- Por fim, observe que se prolongarmos o espelho e desenharmos um segmento de reta que liga objeto e imagem, teremos dois triângulos semelhantes: $\triangle OAB$ e $\triangle IAB$:



- Portanto, concluímos que:

$$\overline{OA} = \overline{IA} = d$$

sendo d a distância entre objeto e o plano que contém o espelho, como havíamos considerado no início deste item.

→ Agora você sabe: para encontrar a imagem de um objeto pontual, siga os seguintes passos:

- prolongue o espelho;
- meça a distância entre o objeto pontual e o plano que contém este espelho;
- replique esta distância outro lado do espelho;
- A imagem está contida na normal do plano do espelho que contém objeto e imagem (na figura acima, \overline{OI}).

b) IMAGENS DE OBJETOS EXTENSOS

→ Para determinar a imagem de um objeto extenso, podemos escolher um dos três métodos abaixo:

→ Método 1:

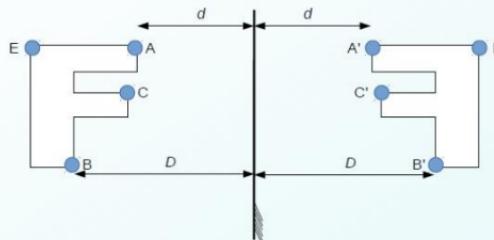
- desenhe diversos pontos no objeto;
- localize a imagem de cada ponto do objeto utilizando o método aprendido no item acima (imagens de objetos pontuais) e ligue-os.

→ Método 2:

- se o que você tem é um desenho numa folha de papel, você pode olhar no verso do papel para saber como fica a imagem.
- Uma alternativa é dobrar o papel exatamente ao longo do espelho e passar com a caneta por cima do desenho com força. Quando você abrir o papel novamente, o decalque que fica corresponde exatamente à imagem que você procura.

→ Método 3:

- Parece boba, mas que tal colocar o objeto diante do espelho e ver como ele fica?
- Você também pode verificar se o aplicativo da câmera de seu celular tem a funcionalidade “espelhar”. Normalmente a câmera frontal já vem com esta funcionalidade ativa.



→ A imagem fica com uma inversão estranha.

→ O nome disto é enantiomorfíssimo.

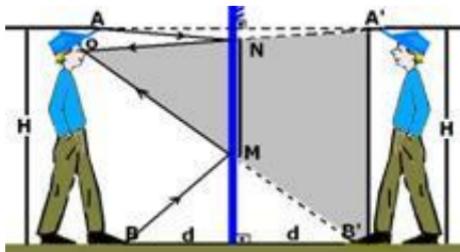
- Se um desenho é enantiomorfo em relação a outro, significa que você não pode recuperar o desenho original utilizando apenas simples rotações.

→ A exceção seria um desenho simétrico

Desenho original	Desenho enantiomorfo	Desenho enantiomorfo rotacionado
F	Ʒ	E
Z	Σ	Σ

→ A imagem de uma imagem (espelho plano) recupera a imagem original. Portanto, você pode olhar no espelho para saber se seu desenho está certo, pois ele, visto no espelho, deve voltar a ser como era.

8. TAMANHO MÍNIMO DE UM ESPELHO PARA SE VER POR COMPLETO



→ Sabe-se que você tem altura H e está a uma distância d do espelho.

→ Qual o tamanho mínimo de um espelho para que você possa se ver por completo? O tamanho do espelho depende da distância d ?

$$\frac{H}{MN} = \frac{2d}{d} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{H}{2}$$

- O tamanho mínimo do espelho é metade da sua altura
- O tamanho mínimo do espelho não depende da distância entre o observador e o espelho (d)

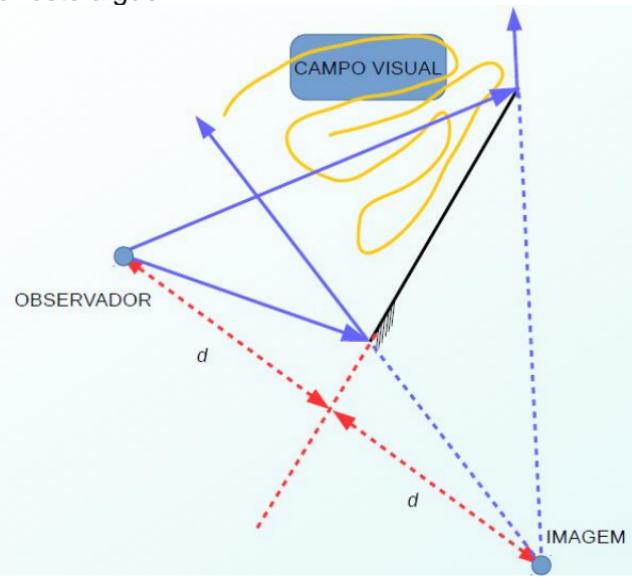
→ E qual a distância que o espelho deve ficar do chão? Sabe-se que a altura dos seus olhos é h .

$$\frac{h}{MC} = \frac{2d}{d} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{h}{2}$$

- O espelho deve ficar com sua base à uma distância do chão que corresponde à metade da altura dos seus olhos.

9. CAMPO VISUAL

→ É a região que um observador pode ver através de um espelho. Note que tudo o que está no campo visual é visto pelo observador e, devido ao princípio da reversibilidade dos raios luminosos, qualquer observador no campo visual de alguém pode ver este alguém.

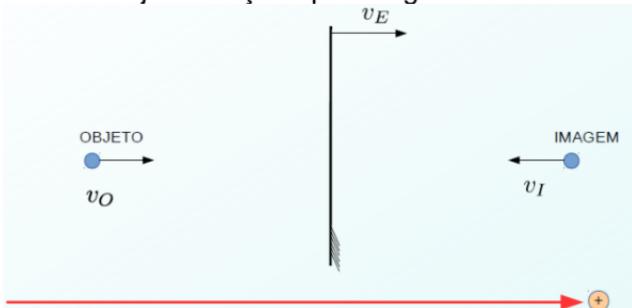


10. TRANSLAÇÃO DE UM ESPELHO PLANO

→ Seja um espelho e um observador que podem se mover APENAS NA DIREÇÃO NORMAL do espelho plano

- v_E é a velocidade do espelho medida num referencial perpendicular ao espelho, isto é, ela pode ser positiva (para direita, de acordo com o referencial da figura abaixo) ou negativa (para a esquerda, no mesmo referencial abaixo).
- v_o é a velocidade do objeto, medida no mesmo referencial utilizado para a velocidade do espelho.
- v_i é a velocidade da imagem, também medida neste referencial.
- Existe alguma relação matemática entre estas velocidades?

- Sim. Veja a relação após a figura abaixo.



$$V_E = \frac{V_O + V_I}{2}$$

→ Vamos aprofundar este assunto a seguir. Esta discussão não será feita em sala de aula.

APROFUNDANDO O ASSUNTO: TRANSLAÇÃO DE ESPELHOS PLANOS

Vamos estudar a relação da velocidade da imagem de um objeto com a velocidade do espelho e a velocidade do objeto. Para isso, podemos analisar o problema de duas maneiras: uma vetorial, tal como foi feito em sala de aula, e outra geométrica.

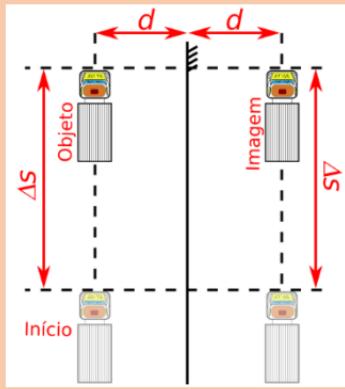
Para apresentar uma outra maneira, talvez mais simples, vamos apresentar aqui apenas a análise geométrica.

ANÁLISE GEOMÉTRICA

Vamos dividir o problema estudando o movimento somente do objeto e depois somente da imagem e por fim compor o movimento final que considera o movimento do objeto e do espelho.

OBJETO SE MOVENDO PARALELAMENTE AO ESPELHO

Imagine um caminhão de frente do espelho e se move ao longo do espelho. Nesse caso, a velocidade da imagem é igual à velocidade do objeto, pois a distância percorrida pelo objeto é igual à distância percorrida pela sua imagem. Veja isso em dois instantes diferentes:



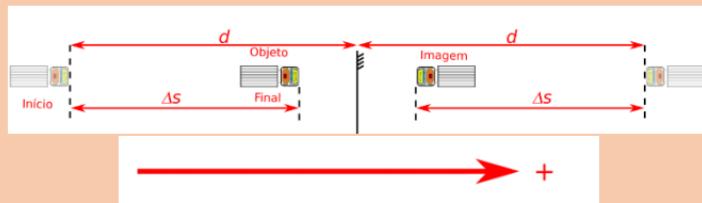
Observe que se o objeto se desloca ΔS , a imagem se desloca da mesma quantidade ΔS . Logo concluímos que:

$$V_{//\text{ objeto}} = V_{//\text{ imagem}} \quad (1)$$

O símbolo “//” representa “paralelo”, isto é, $V_{//\text{ objeto}}$ é a velocidade do objeto paralela ao espelho e $V_{//\text{ imagem}}$ é a velocidade da imagem paralela ao espelho.

OBJETO SE MOVENDO PERPENDICULARMENTE AO ESPELHO

Seja este mesmo caminhão agora se aproximando do espelho. Nesse caso, a velocidade da imagem é igual ao módulo da velocidade do objeto, pois a distância percorrida pelo objeto é igual à distância percorrida pela sua imagem. Veja isso em dois instantes diferentes:



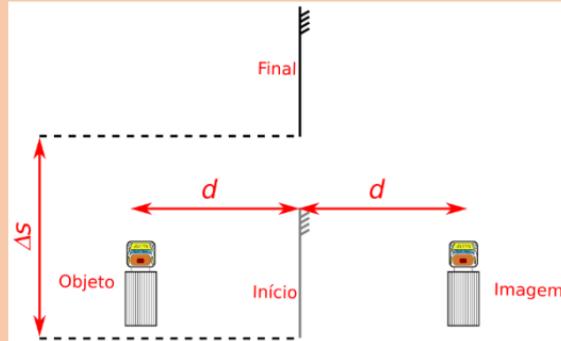
Observe que se a imagem se desloca Δs , a imagem se desloca da mesma quantidade Δs . Podemos dizer então que:

$$V_{\perp \text{objeto}} = -V_{\perp \text{imagem}} \quad (2)$$

Aqui, o símbolo “ \perp ” quer dizer “perpendicular ao espelho”, assim a velocidade do objeto na direção perpendicular ao espelho é $V_{\perp \text{objeto}}$ e a velocidade da imagem, na direção perpendicular ao espelho, é $V_{\perp \text{imagem}}$. Observe também que, em módulo, a velocidade da imagem é igual à do objeto, porém elas estão em sentidos opostos, por isso há um sinal negativo na equação (2).

ESPELHO SE MOVENDO PARALELAMENTE AO SEU PRÓPRIO PLANO

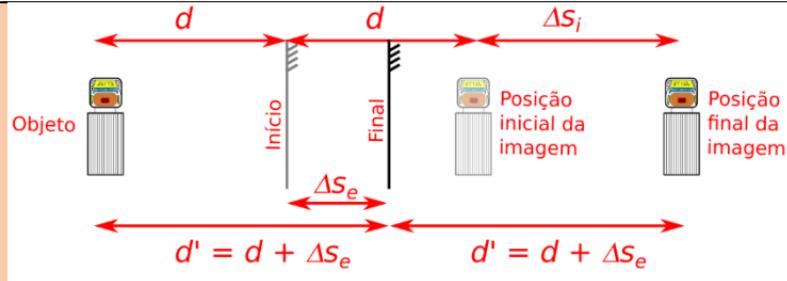
Ainda pensando no esquema anterior, pense no caminhão parado e o espelho se movendo com velocidade $V_{// \text{espelho}}$. O que acontece com a imagem do caminhão?



A resposta é: NADA. Ou seja, a imagem do caminhão não muda sua posição quando o espelho se move na direção indicada, assim o movimento do espelho ao longo de seu plano não influencia na posição da imagem.

ESPELHO SE MOVENDO PERPENDICULARMENTE AO SEU PRÓPRIO PLANO

Agora suponha que o espelho esteja indo para a direita $V_{\perp \text{espelho}}$. O que acontece com a imagem do caminhão?



Observe a imagem acima e note que:

$$d + d + \Delta s_i = d' + d' \Rightarrow$$

$$2d + \Delta s_i = 2d' \Rightarrow$$

$$2d + \Delta s_i = 2(d + \Delta s_e) \Rightarrow$$

$$\Delta s_i = 2\Delta s_e$$

Com isso podemos dizer que a velocidade da imagem é o dobro da velocidade do espelho, portanto:

$$V_{\perp \text{imagem}} = 2V_{\perp \text{espelho}} \quad (3)$$

Note que não há sinal negativo na relação, como na equação (2), isso porque a velocidade da imagem é na mesma direção e sentido que a velocidade do espelho.

SOBREPONDO TODOS OS EFEITOS

Agora, imagine que tanto objeto como espelho se movam. Podemos fazer uma composição de movimento:

1. Considere que o objeto possui velocidade $V_{// \text{objeto}}$ paralela ao espelho e $V_{\perp \text{objeto}}$ a velocidade perpendicular ao espelho. Isso implica que a velocidade da imagem é $V_{// \text{imagem}} = V_{// \text{objeto}}$ paralela ao espelho e $V_{\perp \text{imagem}} = -V_{\perp \text{objeto}}$.

2. Se o espelho se move com velocidade $V_{\perp \text{espelho}}$ na direção perpendicular ao seu plano, a velocidade da imagem será $V_{\perp \text{imagem}} = 2V_{\perp \text{espelho}}$.

3. Por superposição, a velocidade da imagem deve ser a soma das velocidades da imagem devido aos movimentos do espelho e do objeto, assim a velocidade da imagem será:

$$V_{\perp \text{imagem}} = V_{// \text{objeto}} \quad (4)$$

e

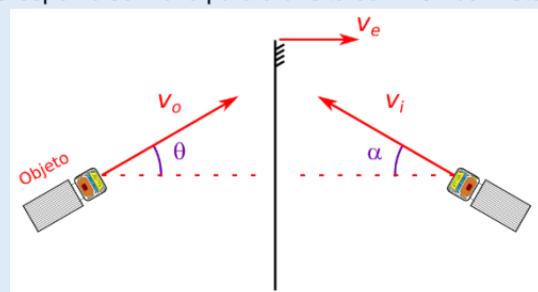
$$V_{\perp \text{imagem}} = 2V_{\perp \text{espelho}} - V_{\perp \text{objeto}} \Rightarrow$$

$$V_{\perp \text{espelho}} = \frac{V_{\perp \text{imagem}} + V_{\perp \text{objeto}}}{2} \quad (5)$$

Note que a velocidade do espelho ao longo se seu plano, isto é, $V_{// \text{espelho}}$, não é relevante neste caso.

Vamos para um exemplo:

Seja um caminhão se aproximando com velocidade de 30 m/s na direção indicada na figura abaixo com $\theta = 30^\circ$. O espelho se move para a direita com 10 m/s. Determine:



- a) $V_{//\text{objeto}}$ e $V_{\perp\text{objeto}}$.
- b) $V_{//\text{imagem}}$.
- c) $V_{\perp\text{imagem}}$.
- d) O ângulo α .
- e) o módulo da velocidade da imagem.

RESOLUÇÃO:

a) Decomponemos a velocidade do objeto:

$$V_{//\text{objeto}} = v_0 \sin \theta \Rightarrow V_{//\text{objeto}} = 30 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$V_{//\text{objeto}} = 15 \text{ m/s}$$

Agora para a outra direção:

$$V_{\perp\text{objeto}} = v_0 \cos \theta \Rightarrow V_{\perp\text{objeto}} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$V_{\perp\text{objeto}} = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$

b) A velocidade da imagem, paralela ao espelho, é igual à velocidade do objeto na direção paralela ao espelho:

$$V_{//\text{imagem}} = V_{//\text{objeto}} = 15 \text{ m/s}$$

c) Para calcular $V_{\perp\text{imagem}}$, usamos a equação (5):

$$V_{\perp\text{espelho}} = \frac{V_{\perp\text{imagem}} + V_{\perp\text{objeto}}}{2} \Rightarrow 10 = \frac{V_{\perp\text{imagem}} + 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$V_{\perp\text{imagem}} = 5(4 - 3\sqrt{3}) \text{ m/s}$$

d) Vamos usar a tangente de α :

$$\tan \alpha = \frac{V_{y\text{ imagem}}}{V_{x\text{ imagem}}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{|V_{//\text{imagem}}|}{|V_{\perp\text{imagem}}|} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{15}{5(3\sqrt{3} - 4)} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{3}{3\sqrt{3} - 4} \right)$$

Note que como $3\sqrt{3} > 4$, o módulo de $V_{\perp\text{imagem}}$ é $5(3\sqrt{3} - 4)$.

e) Por fim, para determinarmos a velocidade da imagem utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$v_i^2 = V_{//\text{imagem}}^2 + V_{\perp\text{imagem}}^2 \Rightarrow v_i^2 = 15^2 + (5(4 - 3\sqrt{3}))^2 \Rightarrow v_i^2 = 225 + 25(4 - 3\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$v_i^2 = 225 + 25(16 - 12\sqrt{3} + 27) \Rightarrow v_i^2 = 225 + 400 - 300\sqrt{3} + 675 \Rightarrow$$

$$v_i^2 = 1300 - 300\sqrt{3} \Rightarrow v_i = 10\sqrt{13 - 3\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

Não entendeu? Penguantaê: danilo@professordanilo.com

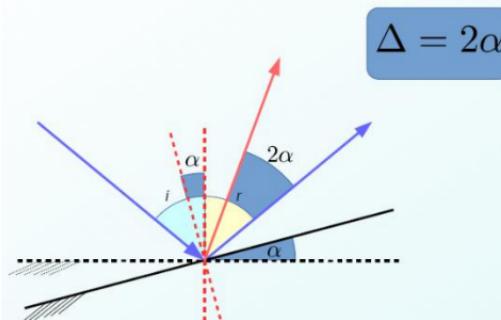
11. ROTAÇÃO DE UM ESPelho PLANO

→ Seja um raio de luz incidindo em um espelho plano.

→ Seja n a normal n a reta perpendicular ao espelho no ponto onde o raio atinge o espelho.

→ Seja r a reta perpendicular à esta normal, contida no plano deste espelho.

→ Se o espelho plano girar de um ângulo α em torno da reta r , o raio refletido girará 2α em torno da mesma reta r e no mesmo sentido de rotação do espelho (horário ou anti-horário).

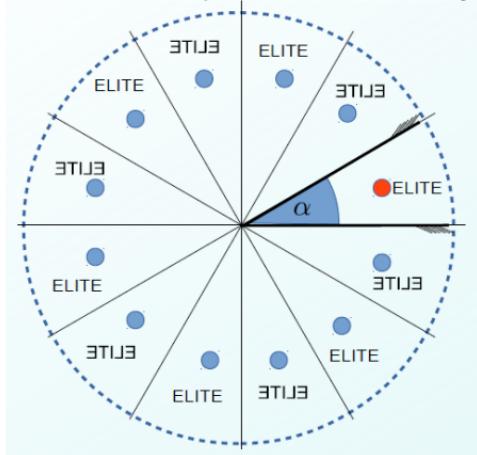


→ Veja mais um vídeo do professor Danilo sobre rotação de um espelho plano
<https://youtu.be/nIP4tjTyhjw>

12. IMAGEM FORMADA POR DOIS ESpelhos

→ Sejam dois espelhos planos que formam um setor circular α . Quantas imagens serão formadas?

→ Utilizaremos a figura a seguir. Portanto, a cada item lido, volte à esta figura para entender, aos poucos, sua construção.



→ Para responder à esta pergunta, vamos primeiramente determinar quantos setores circulares, como o formado pelos dois espelhos, serão necessários para formar uma circunferência inteira.

$$\text{número de setores circulares} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

→ Imagine um objeto colocado no setor circular formado por estes dois espelhos. Imagine um letreiro onde está escrita a palavra ELITE.

→ Note, na figura, que o número de setores corresponde à soma do número de imagens mais o objeto. Portanto, sendo n o número de imagens, este pode ser calculado por:

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$$

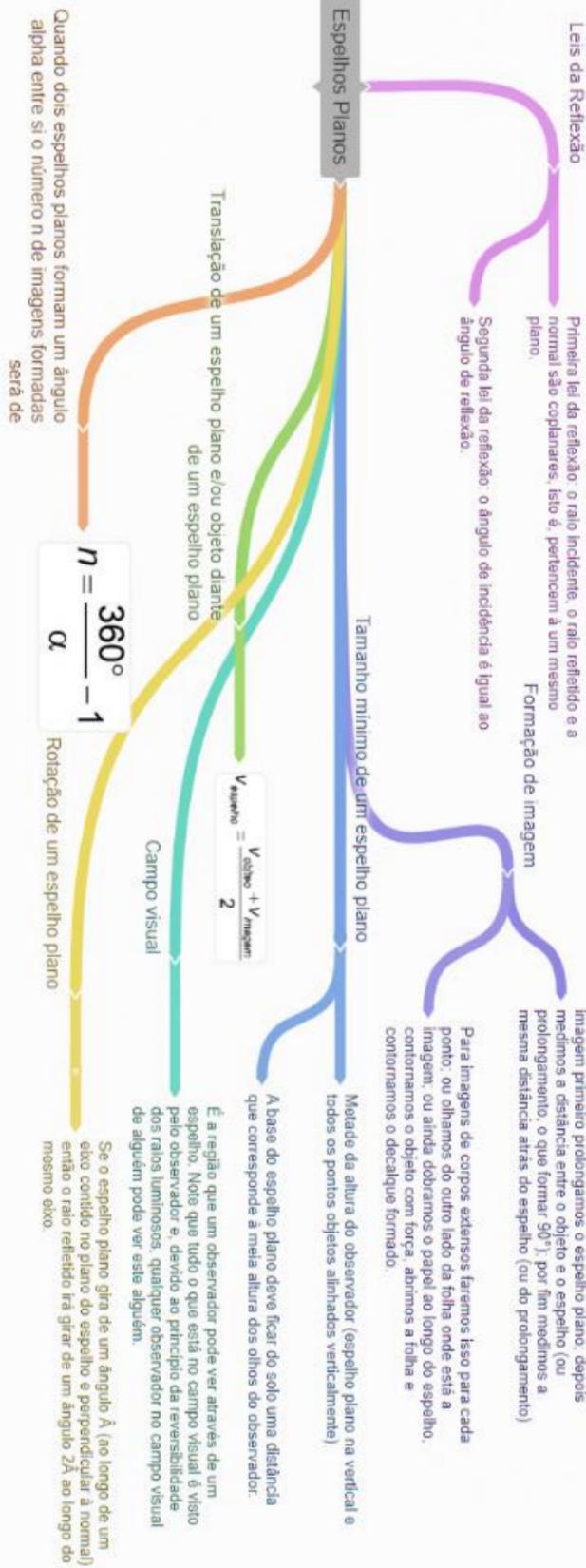
→ Neste sentido, quais imagens são enantiomorfas e quais não são?

- Observe a figura, novamente, e perceba que a palavra ELITE alterna com sua forma enantiomorfa ELITÉ. Veja que isso ocorre pois temos imagens de imagens, conforme visto em sala de aula.

→ Veja vídeo do professor Danilo sobre este assunto:

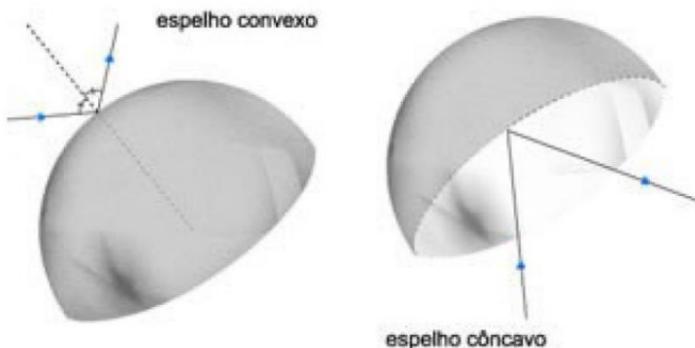
<https://youtu.be/u4yzLhi3ryk>

No SisQ, a lista “Os Espelhos Planos”, pode ser feita por completo.

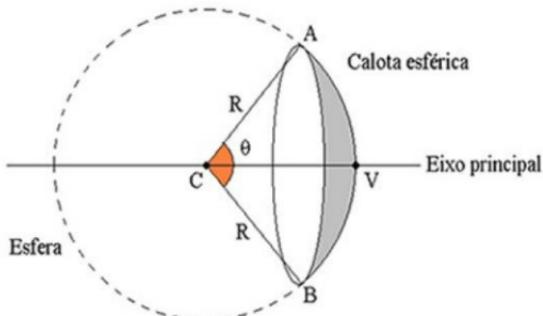


13. OS ESPERROS ESFÉRICOS

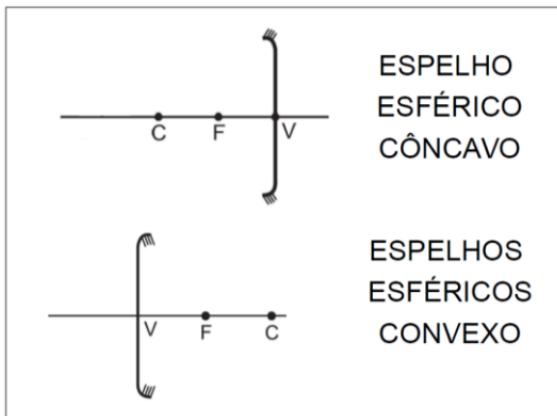
- Definição



- Elementos do espelho esférico



- Representação usual



- O ponto C é o centro do espelho
- O ponto V é a intersecção entre o eixo principal e o espelho (vértice)
- O foco (F) é o ponto médio entre o vértice (V) e o centro (C) do espelho
- Quando θ é muito pequeno ($\theta < 15$ graus) dizemos que o espelho é gaussiano

a) RAIOS NOTÁVEIS

RAIOS NOTÁVEIS NO ESPELHO CÔNCAVO

<https://youtu.be/4-MXnlosUtY> (vídeo mostrando os raios notáveis do espelho esférico côncavo)

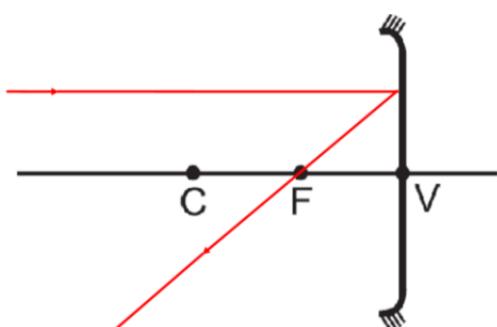


Figura 1: raio incidindo paralelamente ao eixo principal e saindo passando pelo foco

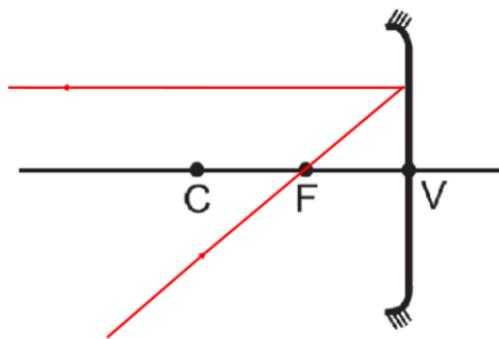


Figura 2: raio incidindo no foco e saindo paralelo ao eixo principal.

Note que se usarmos o princípio da reversibilidade dos raios de luz concluímos que o que é representado na figura 1 corresponde ao que é apresentado na figura 2.

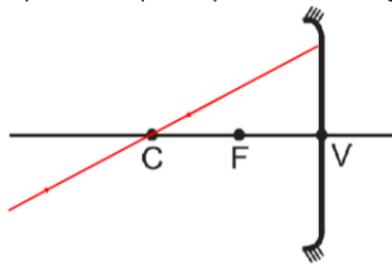


Figura 3: raio incidindo passando pelo centro do espelho e voltando pelo mesmo caminho

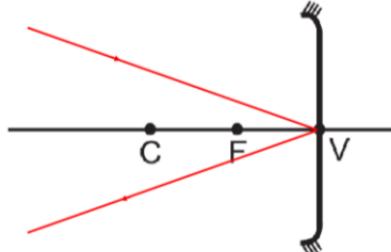


Figura 4:raio incidindo no vértice V do espelho. O ângulo entre o raio incidente e o eixo principal é igual ao ângulo entre o raio emergente (raio refletido) e o eixo principal

RAIOS NOTÁVEIS NO ESPELHO CONVEXO

<https://youtu.be/0kFHhT5ZFMk> (vídeo mostrando os raios notáveis do espelho esférico côncavo)

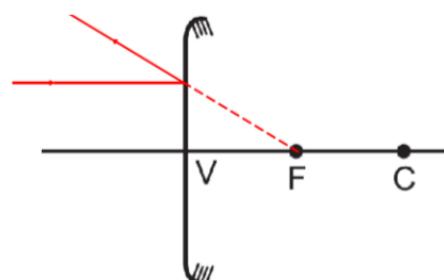


Figura 5: raio incidindo paralelamente ao eixo principal sairá na direção do foco. Note que o raio refletido não pode passar sobre o foco.

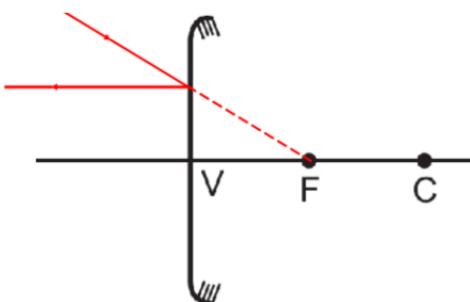


Figura 6: raio incidindo na direção do foco do espelho sai paralelamente ao eixo principal

Novamente, pelo princípio da reversibilidade dos raios de luz podemos concluir que a figura 5 e a figura 6 são equivalentes.

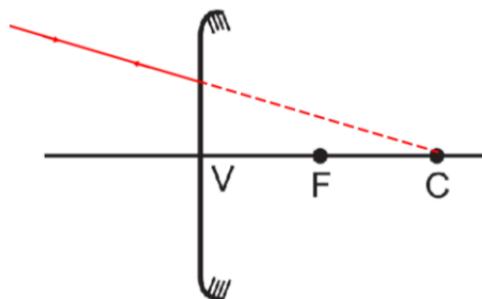


Figura 7: raio incidindo na direção do centro de curvatura volta pelo mesmo caminho que chegou

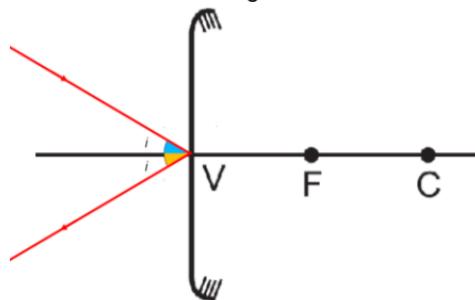


Figura 8: raio incidindo no vértice V do espelho. O ângulo entre o raio incidente e o eixo principal é igual ao ângulo entre o raio emergente (raio refletido) e o eixo principal

b) LOCALIZANDO O FOCO SECUNDÁRIO

ESPELHO CÔNCAVO

Seja um raio incidente num espelho esférico côncavo tal como na figura a seguir. Note que este raio, pelo que se pode perceber pela figura, não é um raio notável, assim não podemos saber, a priori, para onde o raio vai.

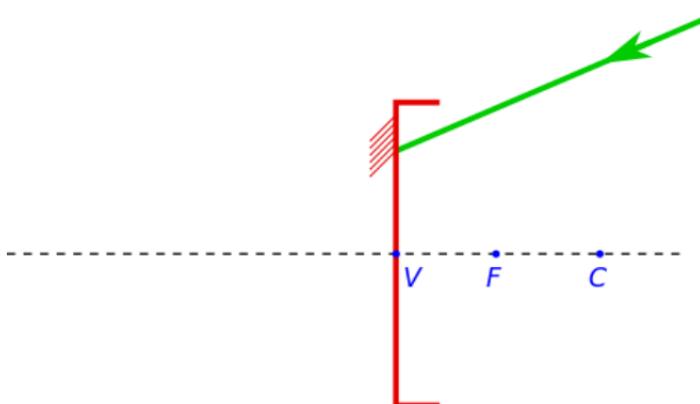


Figura 9: Raio incidindo em um espelho esférico côncavo. O raio não é nenhum dos casos de raio notável.

Para sabermos onde este raio vai utilizamos um eixo secundário e determinamos um foco secundário, assim o raio passará pelo foco secundário. Vamos ao método:

- Trace uma linha tracejada paralela ao raio incidente passando pelo centro C do espelho, conforme figura 10, assim você terá obtido o eixo secundário;
- Trace uma linha também tracejada perpendicular ao eixo principal passando pelo foco. O encontro das duas retas é o local onde se encontra o foco secundário, conforme figura 11.
- Por fim, o raio incidente irá passar pelo foco secundário assim obtido, conforme figura 12.

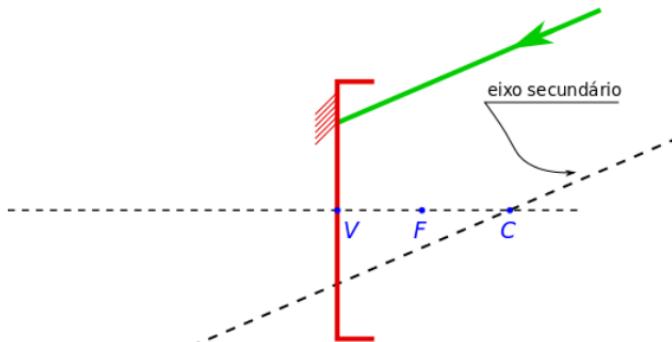


Figura 10: A linha tracejada passando pelo centro de curvatura do espelho e é paralela ao raio incidente corresponde ao eixo secundário.

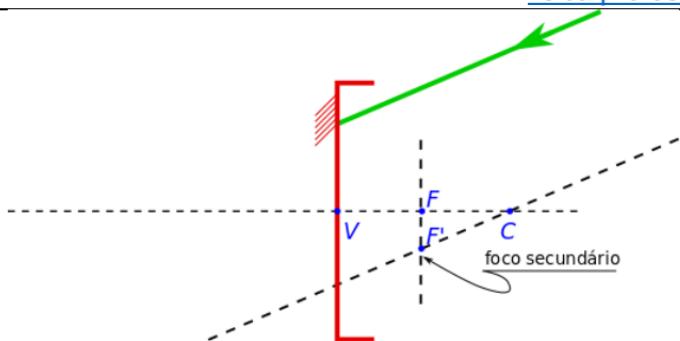


Figura 11: Ao traçarmos a linha vertical obtemos o foco secundário, pois este é a interseção entre o eixo secundário essa reta vertical.

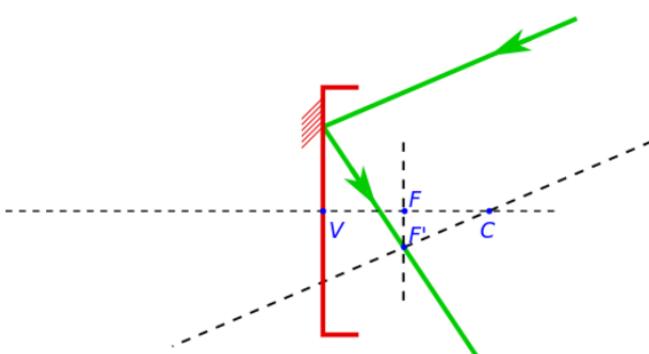


Figura 12: O raio incidente, que é paralelo ao eixo secundário, ao ser refletido irá passar pelo foco secundário.

Chamamos de F' o foco secundário localizado no eixo secundário do espelho esférico côncavo.

ESPELHO CONVEXO

O processo é praticamente o mesmo, mas vamos repeti-lo.

Seja um raio incidente num espelho esférico tal como na figura a seguir. Note que este raio, pelo que se pode perceber pela figura, não é um raio notável, assim não podemos saber a priori para onde o raio vai.

Seja um raio incidente num espelho esférico tal como na figura a seguir. Note que este raio, pelo que se pode perceber pela figura, não é um raio notável, assim não podemos saber a priori para onde o raio vai.

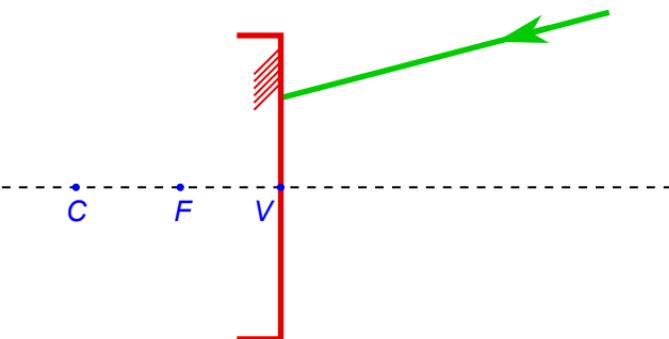


Figura 13: Raio incidindo em um espelho esférico côncavo. O raio não é nenhum dos casos de raios notáveis.

Para sabermos onde este raio vai utilizarmos um eixo secundário e determinamos um foco secundário, assim o raio passará pelo foco secundário. Vamos ao método:

- Trace uma linha tracejada paralela ao raio incidente passando pelo centro C do espelho, conforme figura 14, assim você terá obtido o eixo secundário;
- Trace uma linha também tracejada perpendicular ao eixo principal passando pelo foco. O encontro das duas retas é o local onde se encontra o foco secundário, conforme figura 15.
- Por fim, o raio incidente sairá na direção do foco secundário assim obtido, conforme figura 16.

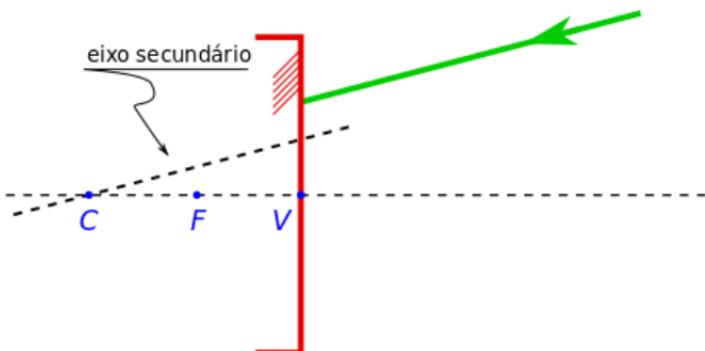


Figura 14: A linha tracejada passando pelo centro de curvatura do espelho e é paralela ao raio incidente corresponde ao eixo secundário.

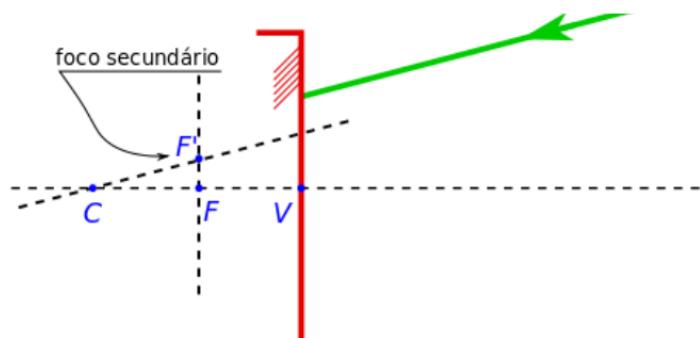


Figura 15: Ao traçarmos a linha vertical obtemos o foco secundário, pois este é a interseção entre o eixo secundário essa reta vertical.

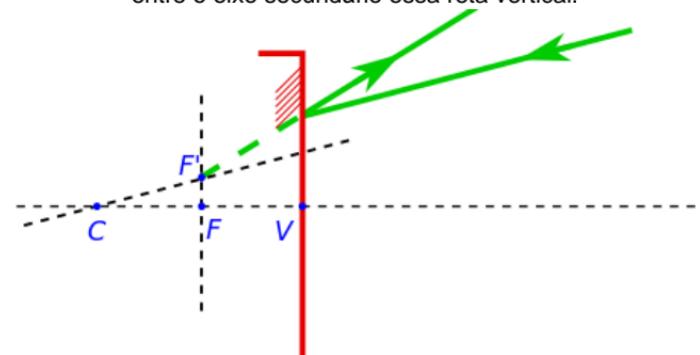


Figura 16: O raio incidente, que é paralelo ao eixo secundário, ao ser refletido irá sair na direção do foco secundário, uma vez que é um espelho esférico convexo.

Chamamos de F' o foco secundário localizado no eixo secundário do espelho esférico convexo.

RESUMINDO

Note que podemos ter novos raios notáveis. Resumindo para o caso dos espelhos côncavos:

- Um raio que incide paralelo ao eixo secundário, ao ser refletido, sai passando pelo foco secundário;
- Um raio que incide passando pelo foco secundário sai paralelo ao eixo secundário.

Agora para espelhos convexos:

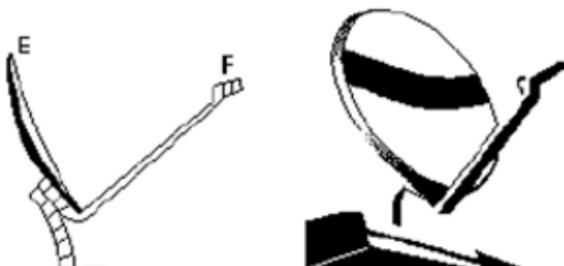
- Um raio que incide paralelo ao eixo secundário, ao ser refletido, sai na direção do foco secundário;
- Um raio que incide na direção do foco secundário, ao ser refletido, sai paralelo ao eixo secundário.

Note que o “centro de curvatura secundário” continua sendo no mesmo lugar, como tinha que ser.

Por fim, lembre-se que estamos falando de um espelho esférico gaussiano, ou seja, válido apenas para a aproximação paraxial (ângulos pequenos).

CAIU NO VESTIBULAR

(UFSCAR) Os refletores das antenas parabólicas funcionam como espelhos esféricos para a radiação eletromagnética emitida por satélites retransmissores, localizados em órbitas estacionárias, a cerca de 36.000 km de altitude. A figura à esquerda representa esquematicamente uma miniantena parabólica, cuja foto está à direita, onde E é o refletor e F é o receptor, localizado num foco secundário do refletor.



a) Copie o esquema da figura da esquerda e represente o traçado da radiação eletromagnética proveniente do satélite retransmissor que incide no refletor E e se reflete, convergindo para o foco secundário F (faça um traçado semelhante ao traçado de raios de luz). Coloque nessa figura uma seta apontando para a posição do satélite.

b) Nas miniantenas parabólicas o receptor é colocado no foco secundário e não no foco principal, localizado no eixo principal do refletor, como ocorre nas antenas normais. Por quê? (Sugestão: lembre-se que a energia captada pelo refletor da antena é diretamente proporcional à área atingida pela radiação proveniente do satélite.)

c) FORMAÇÃO DE IMAGENS: CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Figura 17: objeto além do centro de curvatura C no espelho esférico côncavo.

[Natureza: real; Orientação: invertida; Tamanho: menor.]

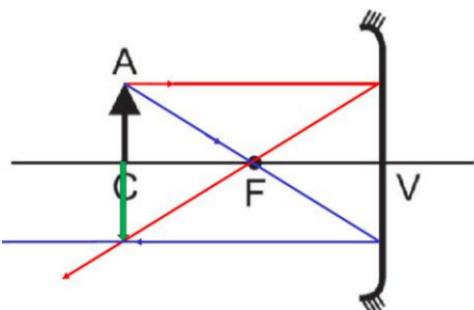
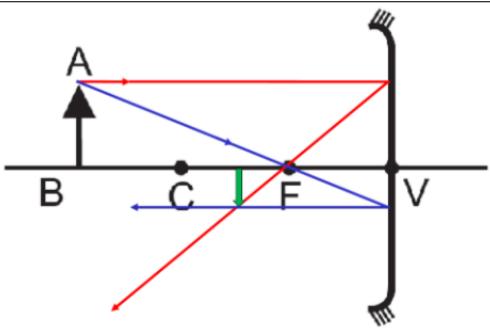


Figura 18: objeto localizado exatamente sobre o centro de curvatura C do espelho esférico côncavo. [Natureza: real; Orientação: invertida; Tamanho: igual]

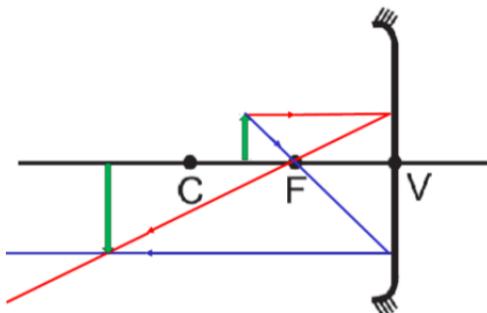


Figura 19: objeto entre o centro de curvatura C e o foco F de um espelho esférico côncavo. [Natureza: real; Orientação: invertida; Tamanho: maior.]

IMPORTANTE: se o objeto estiver sobre o foco, os raios que saírem de um ponto do objeto e atingirem o espelho sairão todos paralelos entre si, portanto não há encontro dos raios e, com isso, não haverá formação de imagem.

Com isso dizemos que a imagem é imprópria.

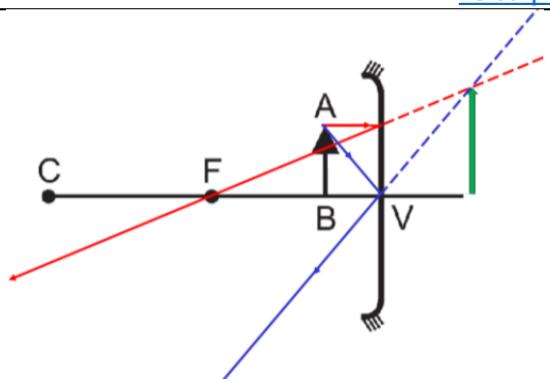


Figura 20: objeto entre o foco e o vértice V de um espelho esférico côncavo.
[Natureza: virtual; Orientação: direita; Tamanho: maior.]

Perceba que até o momento só vimos os casos de formação de imagem para espelhos esféricos côncavos.

A seguir, o único caso relevante, de formação e classificação de imagens, para o espelho esférico convexo.

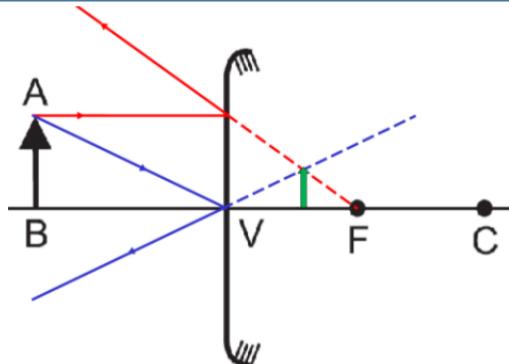


Figura 21: objeto diante de um espelho esférico convexo. Todos os casos de formação de imagem para um objeto em frente à um espelho esférico convexo serão iguais. [Natureza: virtual; Orientação: direita; Tamanho: menor.]

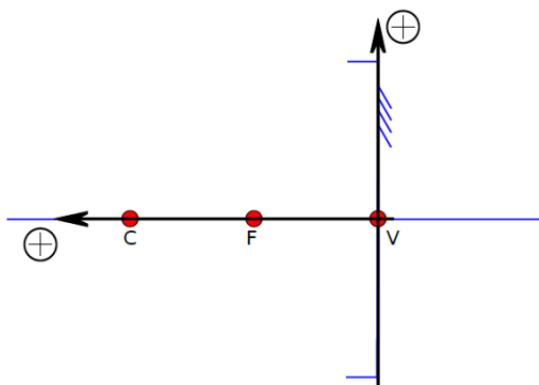
IMPORTANTE: perceba que toda imagem real é invertida e toda imagem virtual é direita

No SisQ, faça os exercícios
de 1 a 23 da lista “Os
Espelhos Esféricos”.

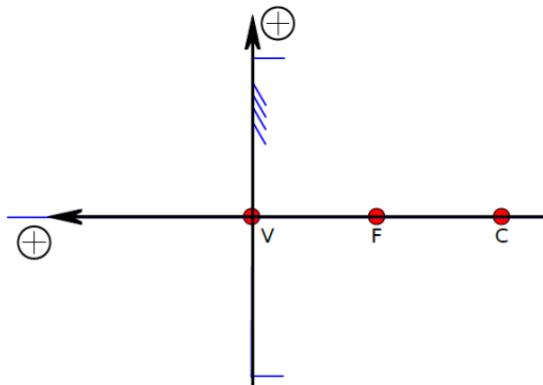
d) FORMAÇÃO DE IMAGENS: EQUAÇÃO DE GAUSS

i – O REFERENCIAL DE GAUSS

Espelho
côncavo:



Espelho
convexo



ii – PADRÕES IMPORTANTES

p : abscissa do objeto

p' : abscissa da imagem

$y = o$: ordenada do objeto

$y' = i$: ordenada da imagem

f : abscissa do foco

$2f$: abscissa do centro do espelho

$p > 0$: Objeto Real

$p' > 0$: Imagem Real

$p < 0$: Objeto Virtual

$p' < 0$: Imagem Virtual

Se i e o tiverem o mesmo sinal, então a imagem é direita, já se tiverem sinais opostos ela é invertida. Segue então que:

$i \cdot o > 0$: Imagem Direita

$i \cdot o < 0$: Imagem Invertida

Com relação ao tipo de espelho:

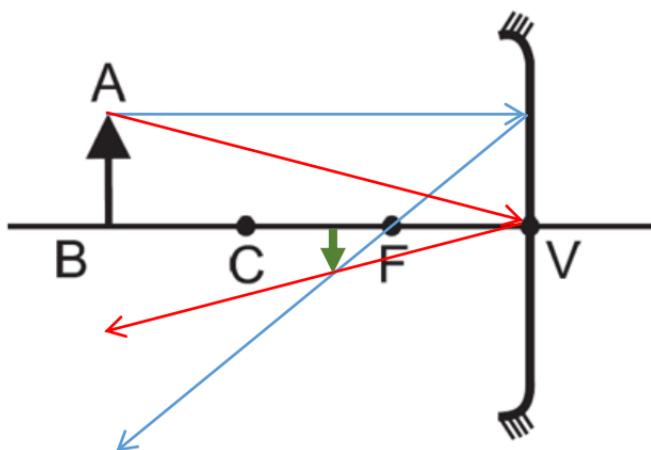
$f > 0$: Espelho Côncavo

$f < 0$: Espelho Convexo

iii – EQUAÇÃO DE GAUSS:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

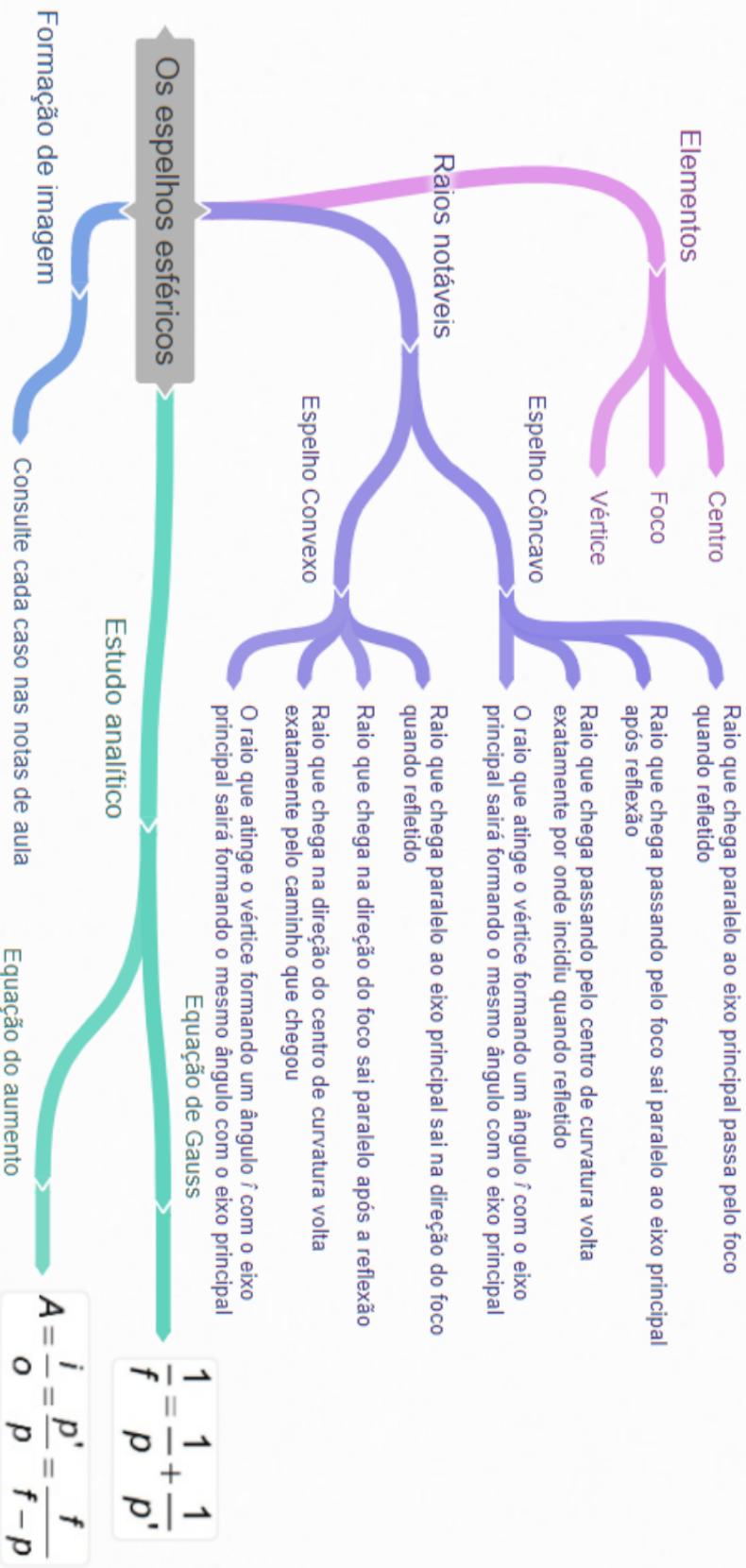
iv – EQUAÇÃO DO AUMENTO LINEAR TRANSVERSAL



$$\frac{|o|}{|p|} = \frac{|i|}{|p'|} \Rightarrow \frac{|i|}{|o|} = \frac{|p'|}{|p|} \Rightarrow \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} = \frac{f}{f-p}$$

No SisQ, faça os exercícios
de 24 a 52 da lista “Os
Espelhos Esféricos”.
O 51 é um bom desafio.



14. REFRAÇÃO E LEI DE SNELL-DESCARTES

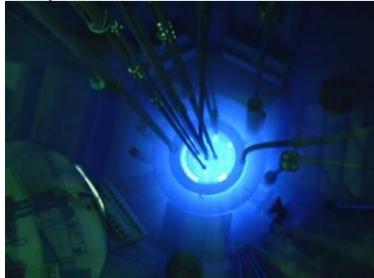
a) VELOCIDADE DA LUZ

- ÍNDICE DE REFRAÇÃO

- A luz é a entidade mais rápida na natureza apenas quando ela se propaga no vácuo
- A máxima velocidade que qualquer coisa (seja matéria, energia ou apenas informação) é a chamada velocidade da luz
- Seu valor é de $c = 3 \cdot 10^8$ m/s
- Quando a luz se propaga em meios materiais ela será mais lenta que este valor
- Chamamos de índice de refração n a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio em que estamos estudando a luz. Ou seja

$$n = \frac{c}{v}$$

Apenas por curiosidade, quando um elétron supera a velocidade da luz em um meio, o elétron emite radiação e esta radiação é chamada de radiação Cherenkov em homenagem ao cientista soviético Pavel Cherenkov (a coloração azul de reatores nucleares se deve à radiação Cherenkov, como na figura abaixo).



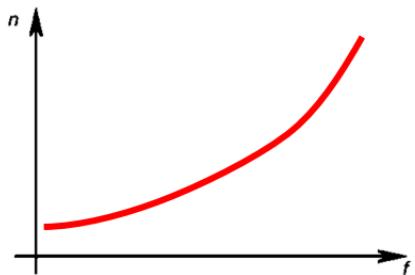
Fonte: <http://cienciasxreligiao.blogspot.com.br/2013/03/o-universo-dos-taquions-parte-3.html>

- Utilizamos a letra c para representar a velocidade da luz porque o fato da velocidade da luz ter um certo limite influencia a relação de causalidade entre fenômenos
- Lembre-se, no entanto, que a velocidade da luz é constante (c).

Na tabela a seguir vemos alguns valores de índices de refração

Meio material	Índice de refração (n)
ar	1,00
água	1,33
vidro	1,50
glicerina	1,90
álcool etílico	1,36
diamante	2,42
acrílico	1,49

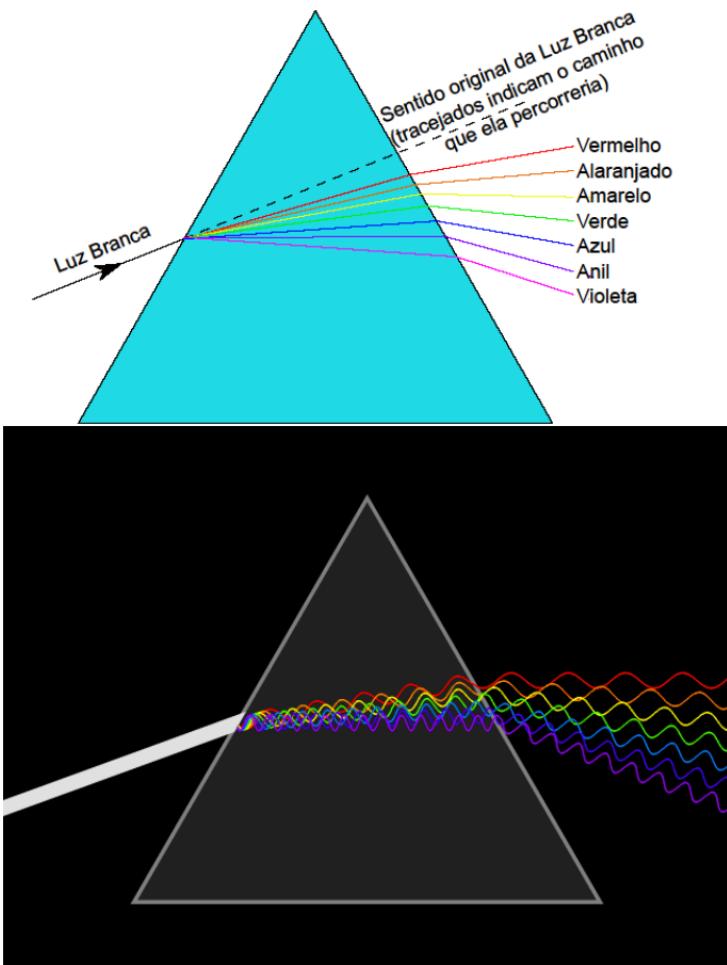
- Em breve estudaremos ondas e veremos que o índice de refração depende da frequência e que quanto maior a frequência da radiação, tanto maior será o índice de refração



Cor	Índice
Violeta	1,532
Azul	1,528
Verde	1,519
Amarelo	1,517
Alaranjado	1,514
Vermelho	1,513

- Observe que apesar de ter certa dependência, esta não é tão perceptível, porém isso que explica a dispersão da luz, como visto em aulas passadas.
- Dizemos que um meio B é mais refringente que um meio A quando $n_B > n_A$
- ÍNDICE DE REFRAÇÃO RELATIVO**
 - Podemos definir um índice de refração de um meio A em relação ao meio B como

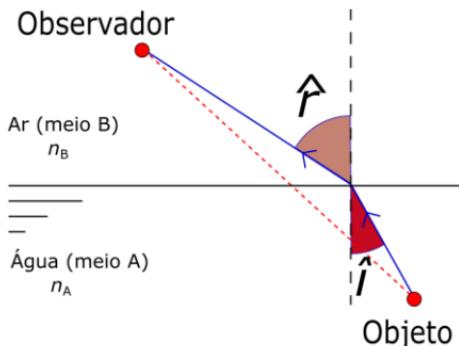
$$n_{AB} = \frac{n_A}{n_B}$$



b) PRINCÍPIO DE FERMAT

- Lembre-se que a luz procura não o menor caminho, mas o que leva o menor tempo

- Chamamos de dioptro à interface entre dois meios (A e B) homogêneos. Um exemplo disso é o sistema ar-água como a seguir



- Não faremos aqui, mas é possível demonstrar uma relação entre os índices de refração dos meios e os ângulos de incidência \hat{i} e de refração \hat{r} .
- Com isso podemos concluir que
 - Quando um raio vai de um meio menos refringente para um meio mais refringente o raio se aproxima da normal
 - Quando um raio vai de um meio mais refringente para um meio menos refringentes o raio se afasta da normal

c) LEI DE SNELL-DESCARTES

- O resultado da aplicação apresentada anteriormente para o Princípio de Fermat pode servir para provar a chamada lei de Snell-Descartes. A saber:

$$n_A \cdot \sin \hat{i} = n_B \cdot \sin \hat{r}$$

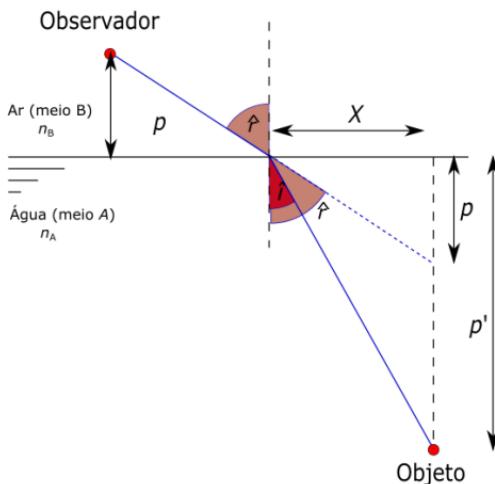
No SisQ, toda a lista de nome “Refração e lei de Snell-Descartes” podem ser resolvidos

15. DIOPTRO PLANO E REFLEXÃO TOTAL

Dioptro plano

- A interface entre dois meios com propriedades ópticas diferentes, como água e ar, é chamado de dioptro. Vamos estudar agora o caso em que essa interface é plana.
- Quando o observador em um meio A com índice de refração n_A olha um objeto dentro de um outro meio com índice de refração n_B de tal forma que o ângulo de incidência \hat{i} e de refração \hat{r} sejam pequenos, podemos encontrar uma equação que relaciona as posições do objeto p e imagem p' com os índices de refração. Vejamos como.
- Observe primeiramente a figura a seguir onde representamos além das variáveis já mencionadas, uma distância horizontal entre a normal do ponto onde o raio incide na interface e a vertical do objeto.
- Aqui é importante mencionar que isso só é certo se o objeto e observador estiverem na mesma vertical, ou seja, $\hat{i} = \hat{r} = 0$. Se, no

entanto, considerarmos os ângulos \hat{i} e \hat{r} muito pequenos podemos assumir que a imagem do objeto e o objeto estão na mesma vertical.



Para aproximação para pequenos ângulos temos que

$$\begin{cases} \sin \hat{i} \approx \tan \hat{i} \approx \hat{i} \\ \sin \hat{r} \approx \tan \hat{r} \approx \hat{r} \end{cases}$$

desde que estejamos trabalhando com unidades de medidas de ângulos em radianos.

Com estas informações podemos substituir os senos que aparecem na lei de Snell por tangentes, isto é:

$$\begin{aligned} n_A \cdot \sin \hat{i} &= n_B \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \\ n_A \cdot \tan \hat{i} &\approx n_B \cdot \tan \hat{r} \end{aligned}$$

Mas pela figura anterior podemos encontrar as tangentes:

$$\begin{cases} \tan \hat{i} = \frac{x}{p'} \\ \tan \hat{r} = \frac{x}{p} \end{cases}$$

Substituindo as equações do sistema acima na equação da lei de Snell anterior ao sistema temos a relação do dióptro plano:

$$n_A \cdot \frac{x}{p'} \approx n_B \cdot \frac{x}{p} \Rightarrow \boxed{\frac{n_A}{n_B} \approx \frac{p'}{p}}$$

Esta é a equação do dióptro plano e você deve ter cuidado ao usá-la, pois ela é válida apenas quando objeto e observador estiverem numa mesma vertical.

É recomendável que memorize esta fórmula, embora você deva saber também como demonstrá-la.

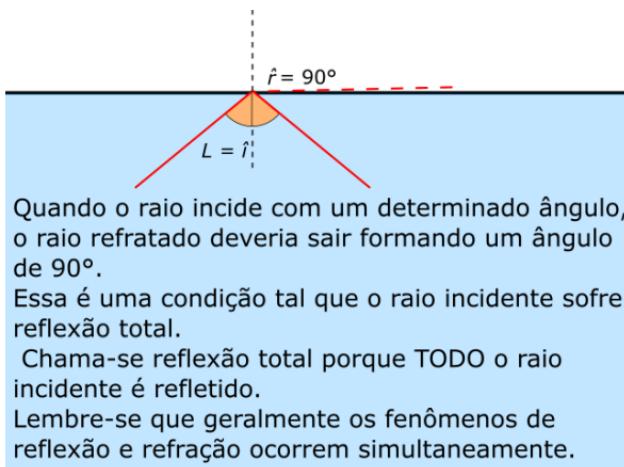
Reflexão Total

- Imagine um raio de luz indo do meio mais para o meio menos refringente.

- Aumentando-se o ângulo de incidência aumenta-se o ângulo de refração.
- Existe um ângulo chamado de ângulo limite \hat{L} tal que se o raio incidente refratar e sair formando um ângulo $\hat{r} = 90^\circ$. Assim, se $\hat{i} = \hat{L}$ temos:

$$\begin{aligned} n_A \cdot \operatorname{sen} \hat{i} &= n_B \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \\ n_A \cdot \operatorname{sen} \hat{L} &= n_B \cdot \operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow \\ \boxed{\operatorname{sen} \hat{L} = \frac{n_B}{n_A}} \end{aligned}$$

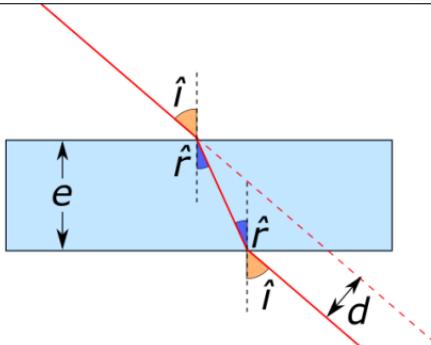
Observe a figura a seguir, isso deve lhe ajudar:



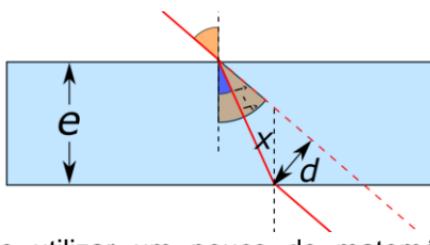
Falamos sobre lâminas de faces paralelas, mas não foi demonstrada a fórmula do desvio lateral.

16. LÂMINAS DE FACES PARALELAS

- Uma lâmina de material transparente, tais como vidros planos de carros, janelas etc. constituem lâminas de faces paralelas.
- Representamos da seguinte maneira um raio de luz atravessando uma lâmina de faces paralelas



- Observe que um raio incidente na lâmina sofre um desvio lateral d , ou seja, a direção e o sentido de propagação da luz não mudam quando ela atravessa uma lâmina de faces paralelas
- Se soubermos a espessura e da lâmina e o ângulo de incidência, podemos determinar o desvio lateral.
- Primeiramente vamos determinar x e y conforme a figura a seguir



- Vamos ter que utilizar um pouco de matemática. Observe que as seguintes relações são válidas:

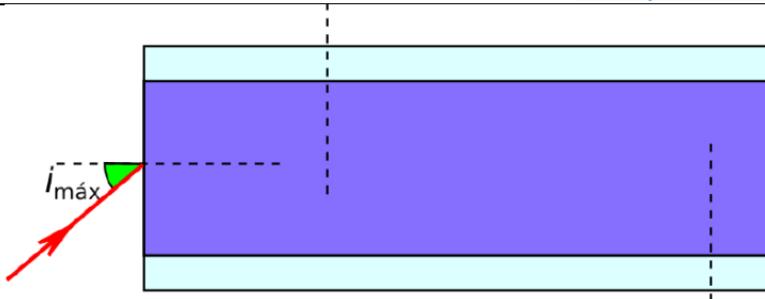
$$\begin{cases} \cos \hat{r} = \frac{e}{x} \\ \sin(\hat{i} - \hat{r}) = \frac{d}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{e}{\cos \hat{r}} \\ d = x \cdot \sin(\hat{i} - \hat{r}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$d = e \frac{\sin(\hat{i} - \hat{r})}{\cos(\hat{r})}$$

17. FIBRA ÓPTICA

- Atualmente estamos utilizando ondas eletromagnéticas com frequências tão altas que chegaram na frequência do visível
- Fibras ópticas são como “fios” que são capazes de direcionar a luz
- Para isso a luz deve ser “aprisionada” dentro de um meio óptico



- Seja uma fibra óptica imersa em um meio (geralmente o ar) cujo índice de refração é n_{ar} , com centro tendo índice de refração n_{in} e revestido por material de índice de refração n_{rev}
- Vamos determinar qual o maior ângulo de incidência que o raio pode ter.

$$n_{ar} \cdot \operatorname{sen}i_{\text{máx}} = n_{in} \cdot \operatorname{sen}r \Rightarrow$$

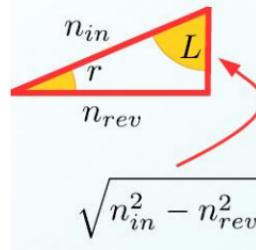
$$\operatorname{sen}r = \frac{n_{ar} \cdot \operatorname{sen}i_{\text{máx}}}{n_{in}}$$

$$\operatorname{sen}L = \frac{n_{rev}}{n_{in}}$$

$$\operatorname{sen}r = \frac{\sqrt{n_{in}^2 - n_{rev}^2}}{n_{in}}$$

$$\operatorname{sen}i_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{n_{in}^2 - n_{rev}^2}}{n_{ar}}$$

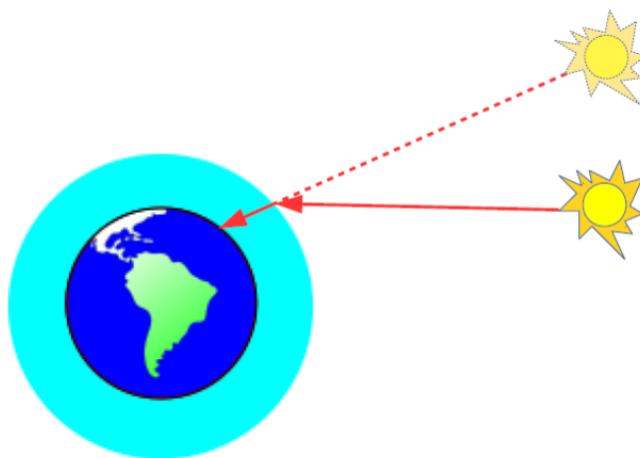
Usamos o triângulo a seguir para finalizar as contas:



- Utilizamos também a condição para reflexão total (necessário para que a luz se mantenha dentro da fibra).

18. POSIÇÃO APARENTE DOS ASTROS E MIRAGEM

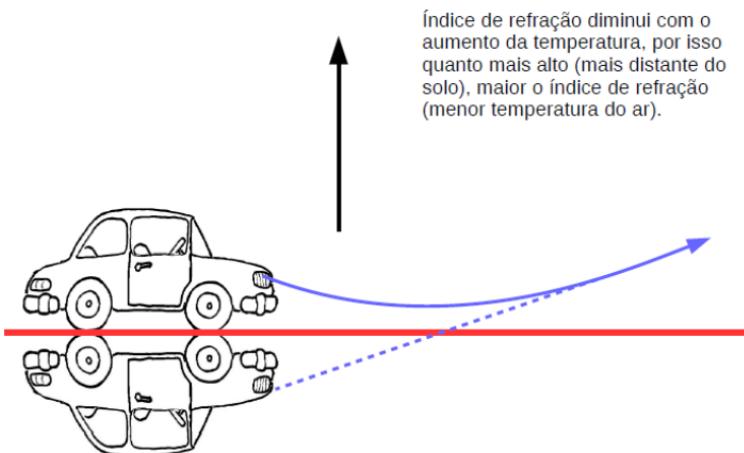
(A) Posição aparente dos astros



- Como o índice de refração do ar não é EXATAMENTE igual à 1, a luz proveniente dos astros sofre refração ao entrar na atmosfera, aproximando-se da normal.

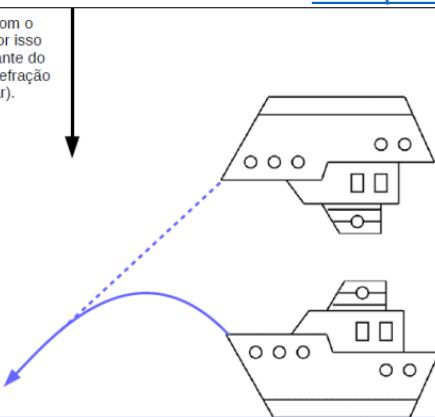
(B) Miragem

- Em dias quentes, temos a impressão que o asfalto à nossa frente é quase que como um lago



- Como o índice de refração do ar mais quente é menor, a luz é desviada
- É importante notar que não ocorre em momento algum a reflexão total tal como vemos anteriormente, já que a direção dos raios muda lentamente
- Podemos utilizar então o princípio da reversibilidade da luz para justificar que a luz deve “entortar” para cima, e não sair paralelamente ao solo
- Mas cuidado, pois já caiu em vestibular mais de uma vez em que a resposta certa associa o fenômeno à reflexão total
- Mas, e se o dia for frio, podemos ver miragens? Sim... Vejamos a Fata Morgana

índice de refração diminui com o aumento da temperatura, por isso quanto mais alto (mais distante do solo), MENOR o índice de refração (MAIOR a temperatura do ar).



- O professor está falando sério? Prove, mostre fotos...

MIRAGEM NO DESERTO (NÃO HÁ ÁGUA A FRENTE):



Disponível em: <https://thumbs.dreamstime.com/b/miragem-no-deserto-13581435.jpg>

Mais fotos? Mais uma então:



Disponível em: <https://www.fatosdesconhecidos.com.br/wp-content/uploads/2015/02/2113-600x450.jpg>

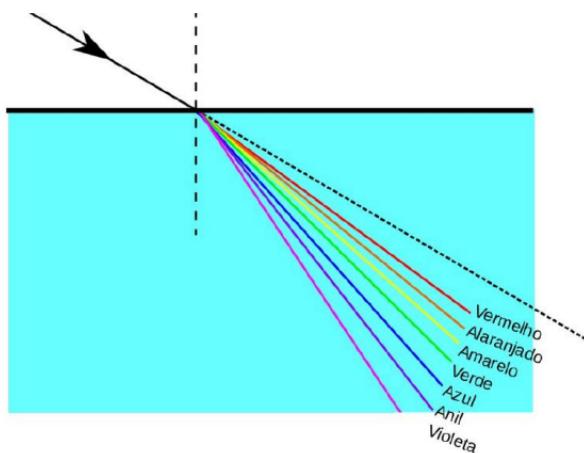
FATA MORGANA:



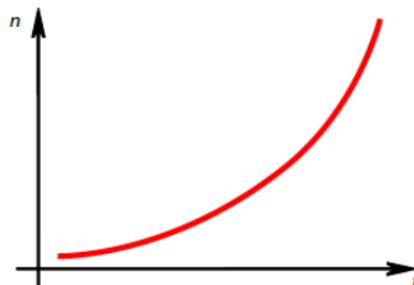
Disponível em <https://mgtvwhtm.files.wordpress.com/2015/05/mirage1.jpg?w=650>

19. DISPERSÃO CROMÁTICA

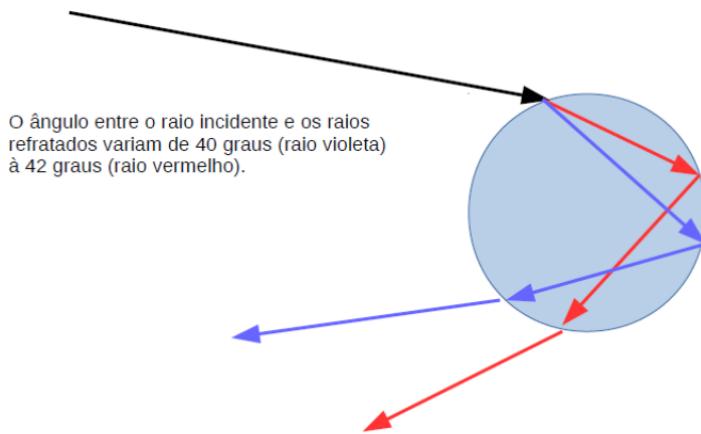
- Se a luz branca atravessar um dioptrômetro ela irá se dispersar, isto é, as cores serão separadas



- Lembre-se que a velocidade da luz para todas as frequências é a mesma no vácuo.
- Mas quando as ondas se propagam em meios materiais, quanto maior a frequência menor a velocidade. Então, segundo a Lei de Snell, podemos ver que a onda mais lenta sofre maior desvio.



- Por fim, isso explica os arco-íris



- Explique por que ao olhar o arco-íris vemos a parte vermelha acima e a azul em baixo. Isso não parece ser contraditório com o que foi apresentado aqui?
- Resposta parcial: não é contraditório. Tente entender por que...

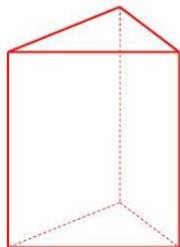
No SisQ, toda a lista, da apostila 1, de nome "Dioptrômetro e reflexão total" podem ser resolvidos

20. PRISMAS

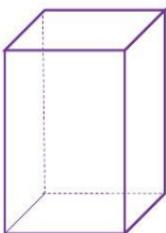
(A) Prisma – introdução

- O que é um prisma?

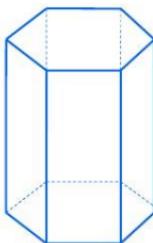
CLASSIFICAÇÃO



*Prisma
Triangular*



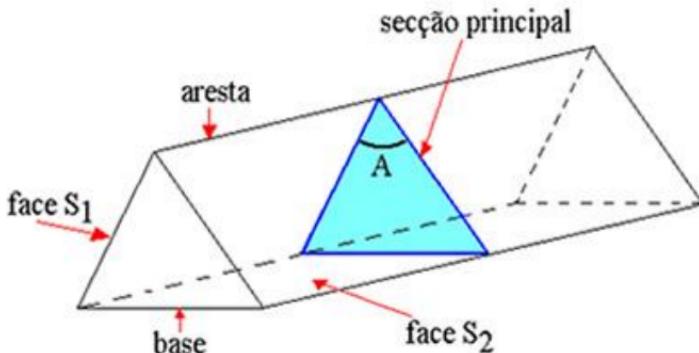
*Prisma
Quadrangular*



*Prisma
Hexagonal*

Disponível em: <https://3.bp.blogspot.com/-NdqnllPVzMU/V7XxILTS9wI/AAAAAAAAL8/r1rmj5EgbMMPoOrS6ffqgevGxrIr72mfQCLcB/s1600/prismas-3-728.jpg>

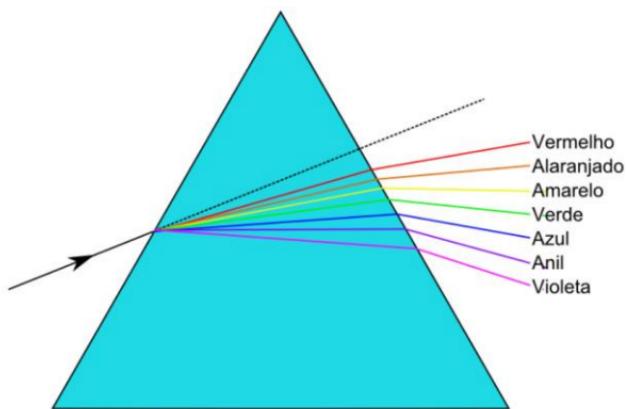
- Na física vamos trabalhar apenas com o prisma de base triangular e o representaremos por um simples triângulo



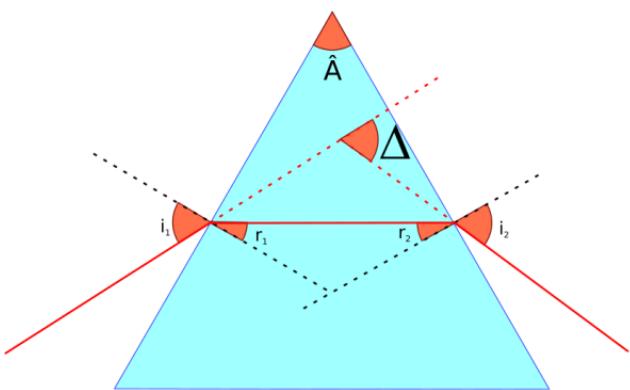
Disponível em: <http://alunosonline.uol.com.br/upload/conteudo/images/prisma-triangular.jpg>

- Chamaremos o ângulo de abertura \hat{A} do prisma de ângulo de refringência do prisma

(B) Dispersão



(C) Desvio mínimo



- Chamamos de desvio Δ o desvio angular sofrido pelo raio incidente ao atravessar o prisma

$$\boxed{\Delta = i_1 - r_1 + i_2 - r_2}$$

$$A + (90^\circ - r_1) + (90^\circ - r_2) = 180^\circ \Rightarrow \boxed{A = r_1 + r_2}$$

- Se variarmos o ângulo de incidência, Δ poderá ter um valor mínimo que chamaremos de δ

21. LENTES ESFÉRICAS

(A) DIOPTRO ESFÉRICO

- A figura abaixo apresenta uma ideia do que seria um dioptro esférico: imagine duas esferas de vidro. Agora imagine que fazemos uma interseccional a outra; por fim, selecionamos apenas a intersecção.

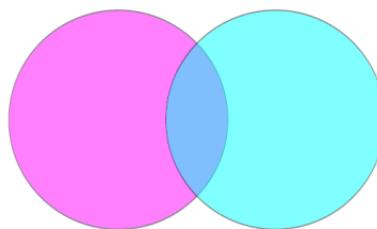


Figura 1: Interseção de duas esferas

- Com esta interseção podemos formar o que chamamos de dioptro esférico e então podemos definir o que seria raio de curvatura.



Figura 2: A interseção forma uma lente esférica

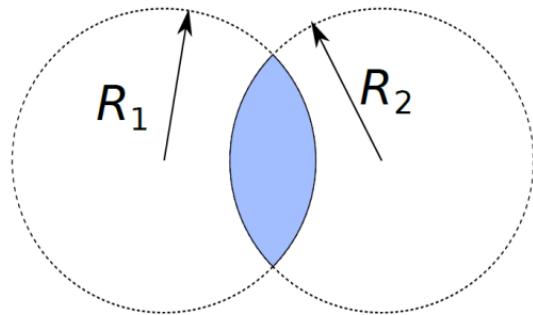


Figura 3: Raios de curvatura

- Vamos estudar lentes esféricas delgadas. Isso significa que a espessura da lente deve ser bem pequena comparada com os raios de curvatura das partes que formam as lentes.

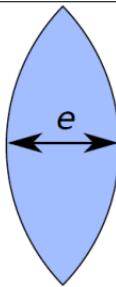
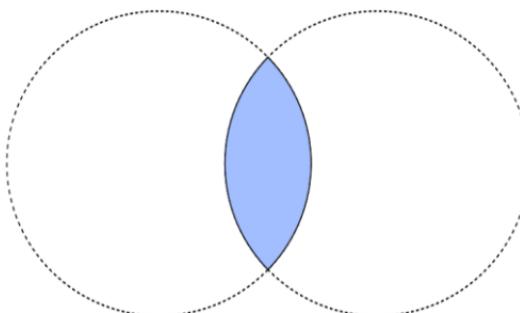


Figura 4: Lentes delgadas: $e \ll R$

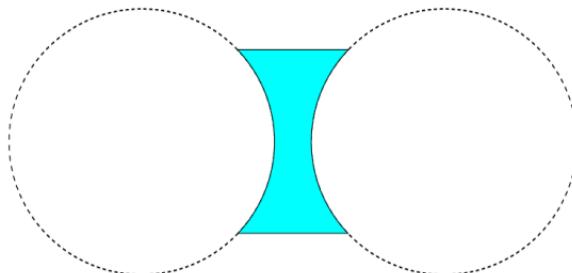
(B) NOMENCLATURA

- Para nomear, começamos com a face de raio maior primeiro

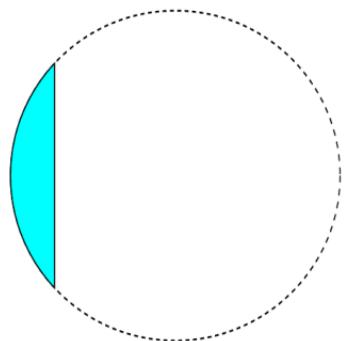
LENTE BICONVEXA



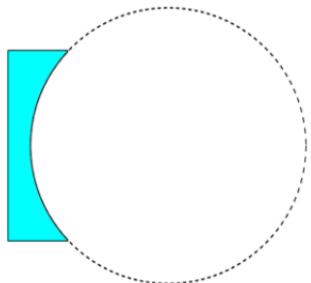
LENTE BICÔNCAVA



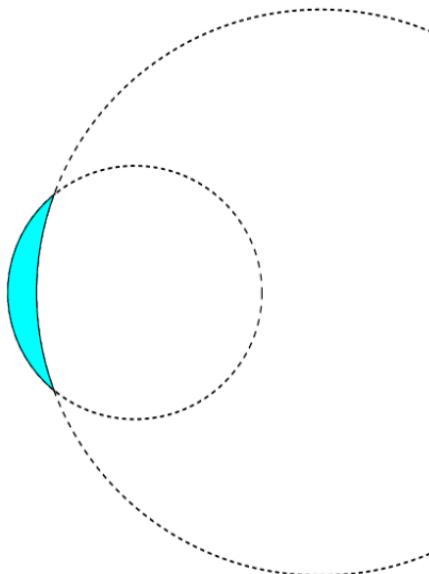
LENTE PLANO-CONVEXA



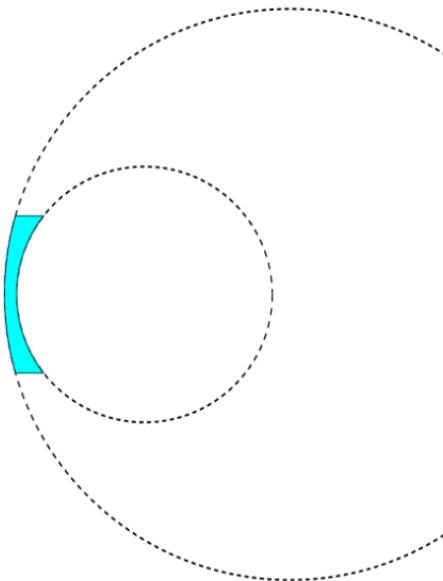
LENTE PLANO CÔNCAVA



LENTE CÔNCAVA-CONVEXA

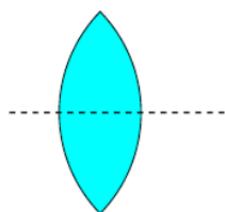


LENTE CONVEXA-CÔNCAVA

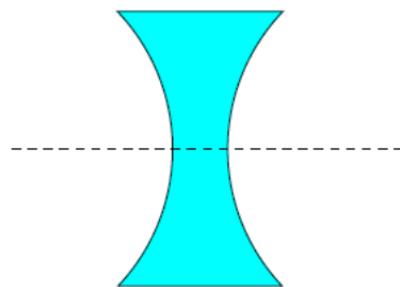


(C) COMPORTAMENTO ÓPTICO

LENTE DE BORDOS FINOS

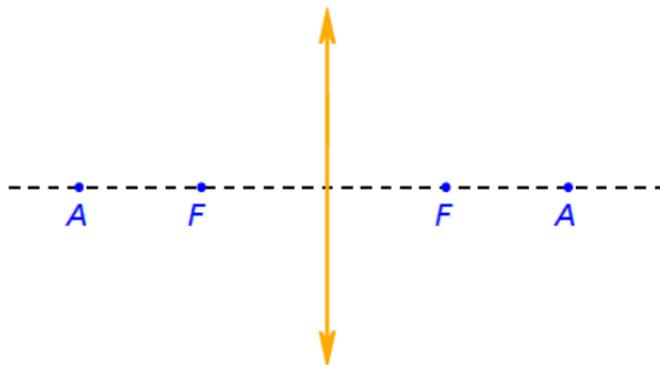


LENTE DE BORDOS GROSSOS



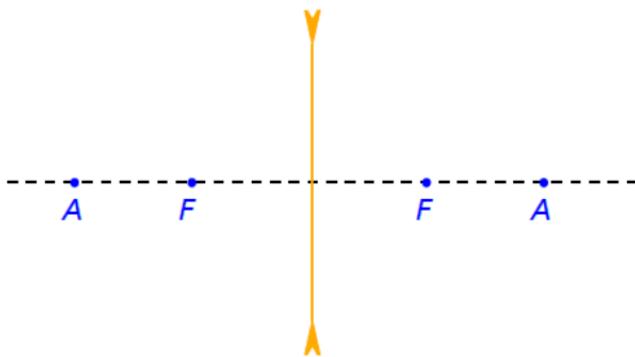
- Vamos estudar o comportamento óptico das lentes esféricas delgadas considerando que elas sejam feitas de material cujo índice de refração seja maior que o índice de refração do meio em que estejam inseridas
- Representaremos as lentes esféricas delgadas de forma mais simples. Vejamos a representação de uma lente de bordos finos (que diremos ser convergente, uma vez que em geral a lente terá índice de refração maior que do meio em que se encontra).

LENTE CONVERGENTE (BORDOS FINOS)



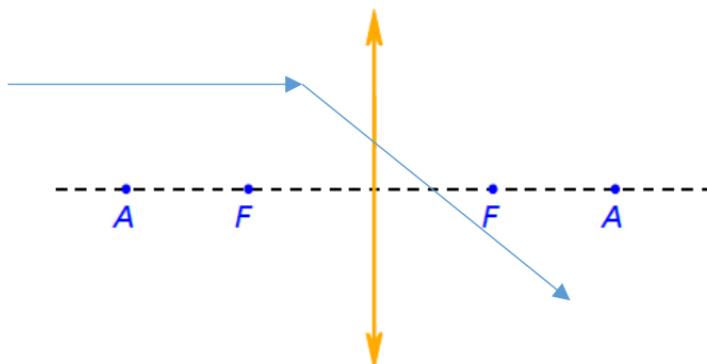
- Lentes de bordos grossos terá representação similar:

LENTE DIVERGENTE (BORDOS GROSSOS)

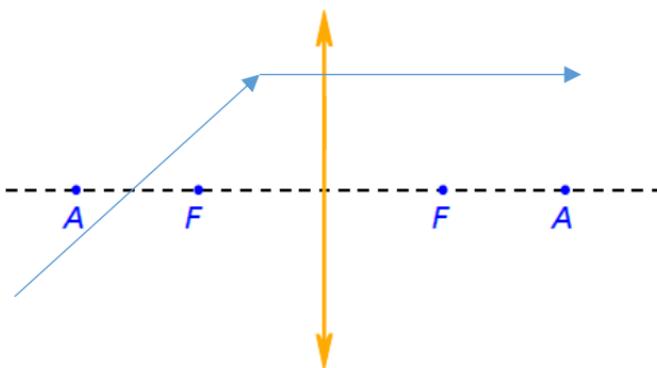


(D) RAIOS NOTÁVEIS

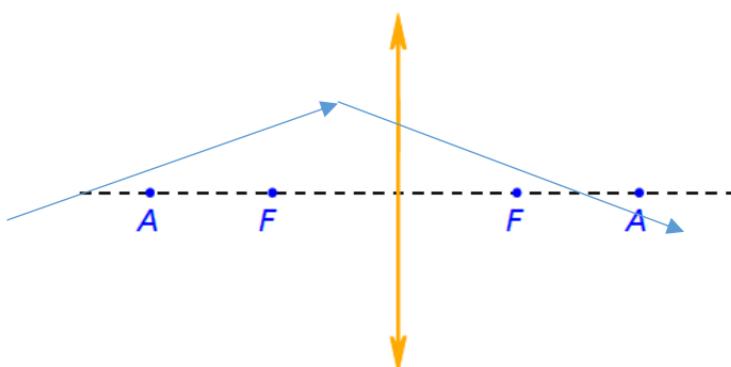
- Vamos começar com a lente convergente (bordos finos).
- Raio que chega paralelo ao eixo principal passa pelo foco



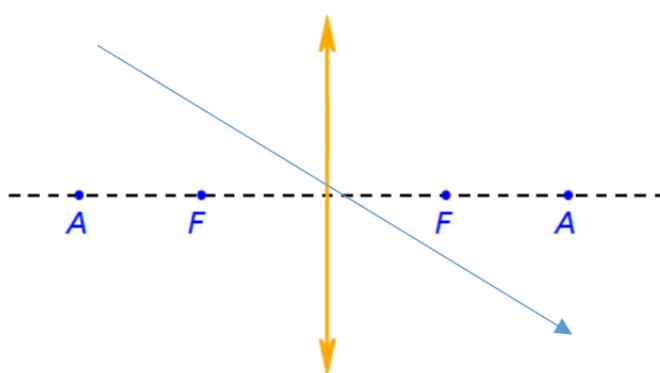
- Raio que chega passando pelo foco sai paralelo



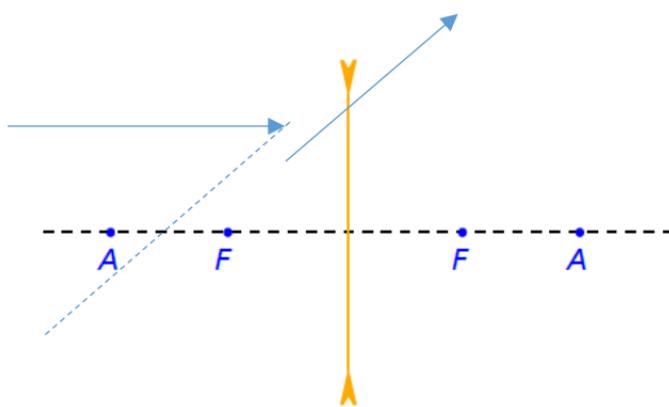
- Raio que chega passando pelo antiprincipal sai passando pelo outro antiprincipal



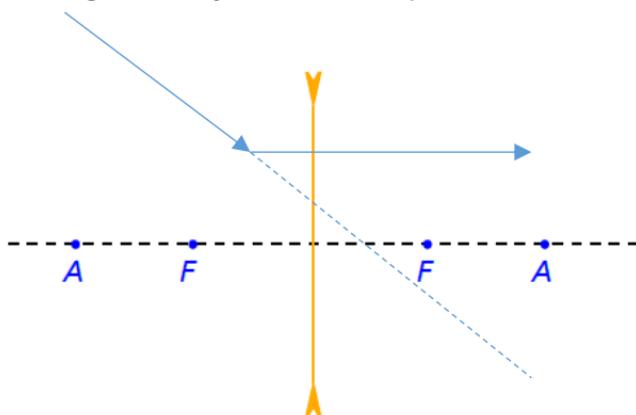
- Raio que chega passando pelo vértice não sofre desvio



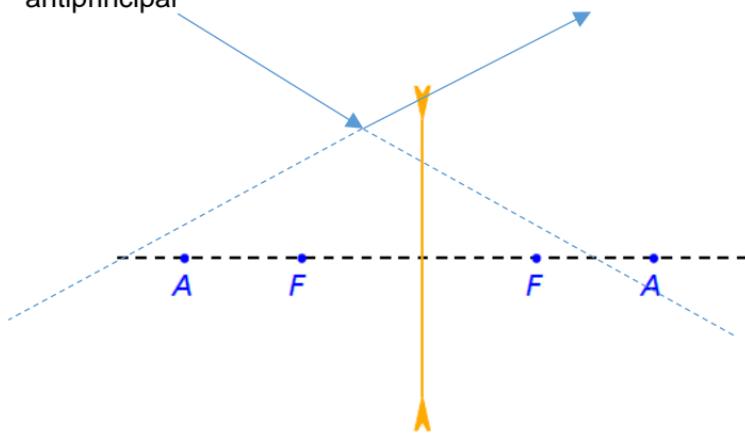
- Vamos ver agora os raios notáveis para a lente divergente (bordos grossos).
- Raio que chega paralelo ao eixo principal sai na direção do foco



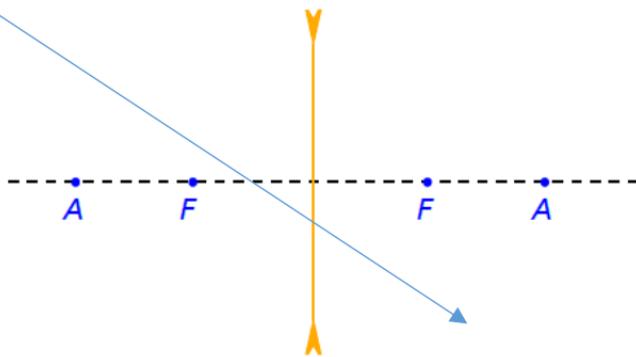
- Raio que chega na direção do foco sai paralelo



- Raio que chega na direção do antiprincipal sai na direção do outro antiprincipal



- Raio que chega passando pelo vértice não sofre desvio



(E) FORMAÇÃO DE IMAGENS

Para praticar, você pode imprimir um material quadriculado para fazer os raios, conforme feito em aula:

[CLIQUE AQUI](#)

Você também pode baixar uma apresentação de slides para te ajudar a preencher a folhinha.

[Slides](#)

Vamos aqui apenas colar os slides finais da apresentação.

LENTES CONVERGENTES

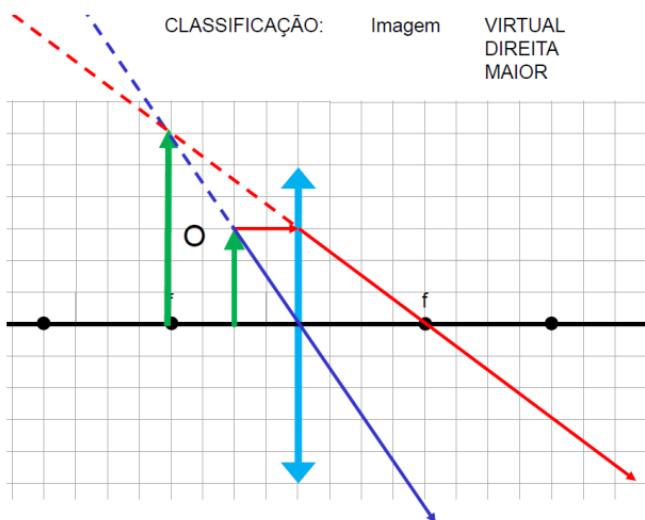


Figura 1: Objeto entre o vértice e o foco

IMAGEM IMPRÓPRIA

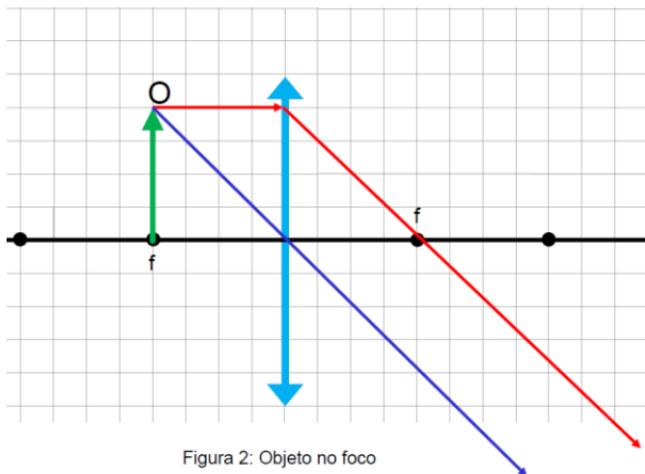


Figura 2: Objeto no foco

CLASSIFICAÇÃO: Imagem

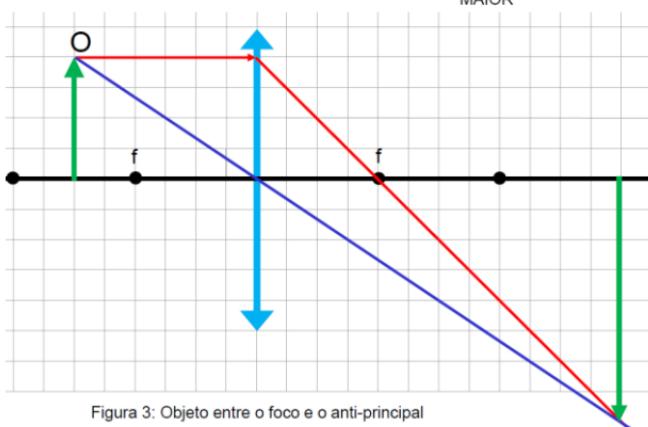
REAL
INVERTIDA
MAIOR

Figura 3: Objeto entre o foco e o anti-principal

CLASSIFICAÇÃO: Imagem

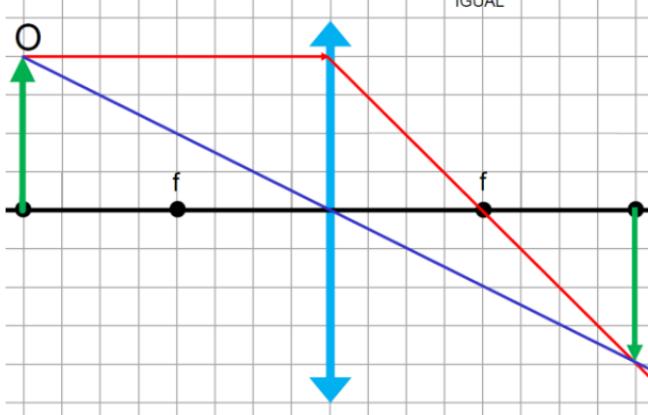
REAL
INVERTIDA
IGUAL

Figura 4: Objeto no anti-principal

CLASSIFICAÇÃO: Imagem

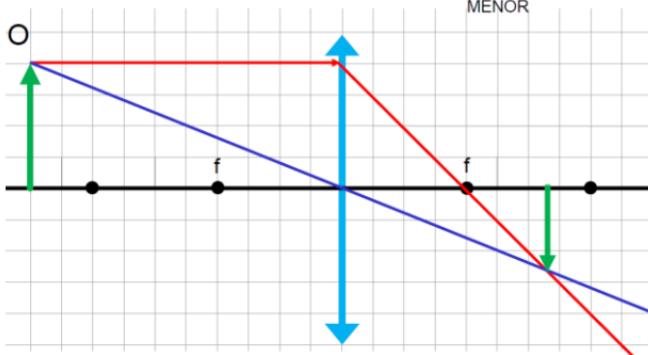
REAL
INVERTIDA
MENOR

Figura 5: Objeto além do anti-principal

CLASSIFICAÇÃO: Imagem PONTUAL, REAL
E LOCALIZADA NO FOCO
IMAGEM

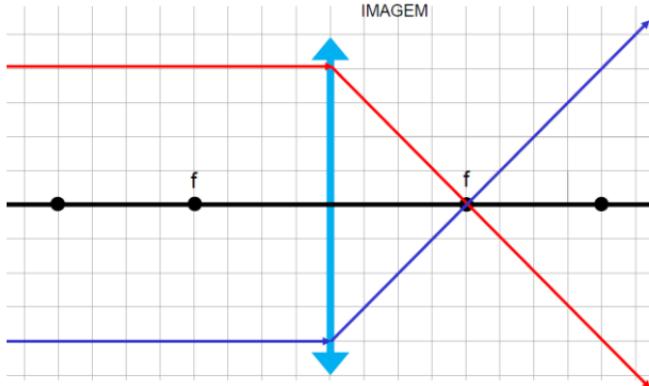


Figura 6: Objeto no “infinito”

LENTE DIVERGENTE

CLASSIFICAÇÃO: Imagem VIRTUAL
DIREITA
MENOR

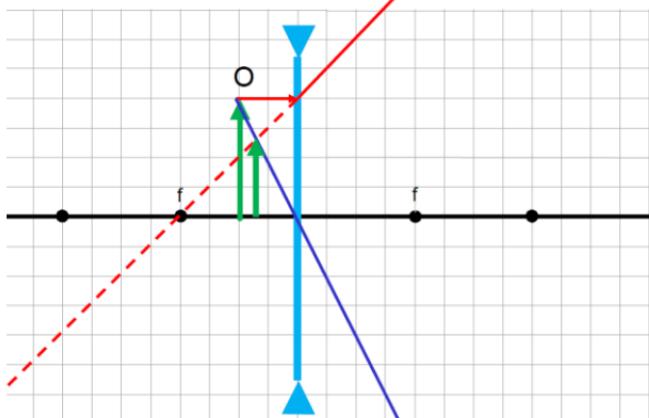


Figura 7: Objeto entre o vértice e o foco

CLASSIFICAÇÃO: Imagem

VIRTUAL
DIREITA
MENOR

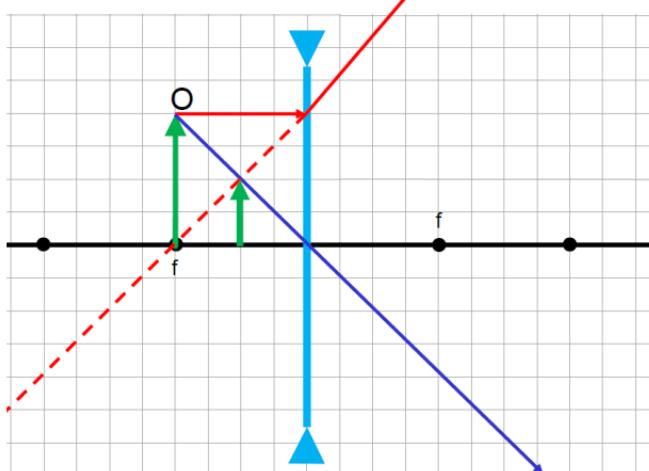


Figura 8: Objeto no foco

CLASSIFICAÇÃO:

Imagem

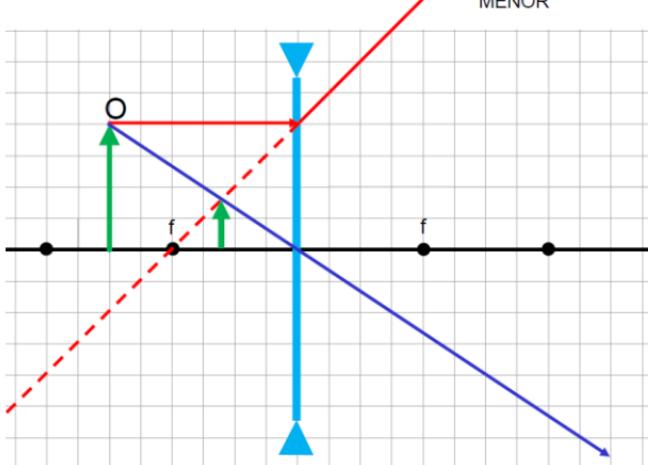
VIRTUAL
DIREITA
MENOR

Figura 9: Objeto entre o foco e o anti-principal

CLASSIFICAÇÃO:

Imagem

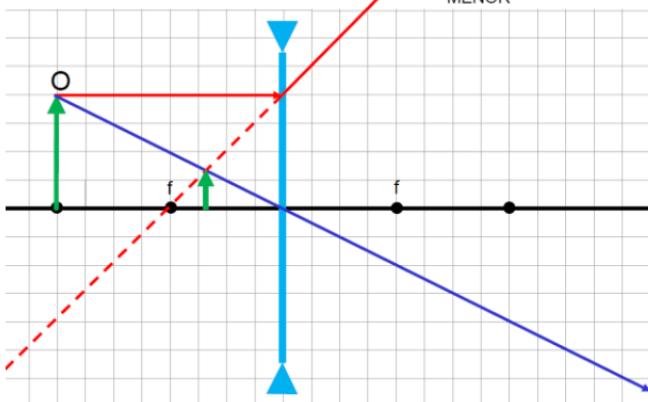
VIRTUAL
DIREITA
MENOR

Figura 10: Objeto no anti-principal

CLASSIFICAÇÃO:

Imagem

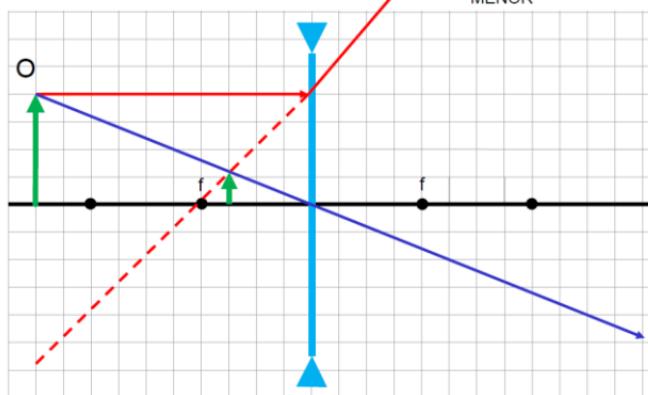
VIRTUAL
DIREITA
MENOR

Figura 11: Objeto além do anti-principal

CLASSIFICAÇÃO:

Imagen PONTUAL E
LOCALIZADA NO FOCO
IMAGEM DA LENTE

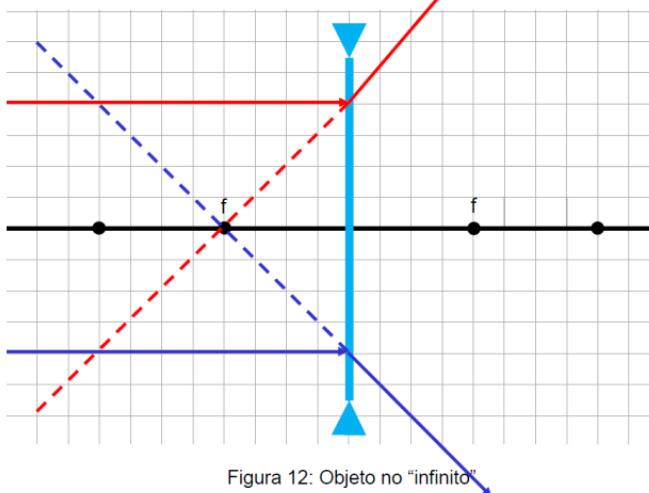
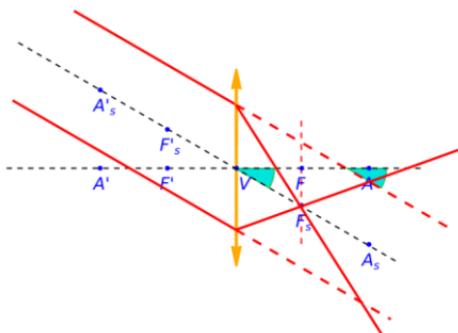


Figura 12: Objeto no "infinito"

(F) FOCO SECUNDÁRIO

- Se raios chegarem paralelos entre si, mas não paralelos ao eixo principal, como proceder?
- Primeiro desenhe um eixo que passe pelo vértice da lente e que seja paralelo aos raios incidentes (chamaremos este eixo de eixo secundário)
- Segundo, trace retas perpendiculares ao eixo principal que passa pelos pontos notáveis. Esta reta cruzará o eixo secundário nos focos e antiprincipais secundários
- Os raios se cruzam no foco imagem secundário



(G) REFERENCIAL DE GAUSS

- Para um estudo analítico devemos primeiro escolher um referencial.
- Esse referencial é chamado de referencial de Gauss e associa coordenadas reais (onde realmente passam os raios) com sinal positivo, enquanto as coordenadas virtuais (por onde representamos apenas os prolongamentos) associa-se a sinal negativo.
- No caso das lentes, as convenções de sinais são as mesmas que para os espelhos:
 - p : abscissa do objeto

- p' : abscissa da imagem
- $y = o$: ordenada do objeto
- $y' = i'$ ordenada da imagem
- f : abscissa do foco
- Para objetos reais:
 - $p > 0$
- Para objetos virtuais:
 - $p < 0$
- Geralmente, consideramos a abscissa dos Objetos positivas:
 - $o > 0$
- Se a imagem for direita, em geral temos
 - $i > 0$
- Se a imagem for invertida, em geral temos
 - $i < 0$
- A rigor, a imagem é invertida quando o e i possuem sinais opostos e direita quando possuem mesmo sinal
- Para imagens reais:
 - $p' > 0$
- Para objetos virtuais:
 - $p' < 0$
- Lente convergente:
 - $f > 0$
- Lente divergente:
 - $f < 0$
- Diferente dos espelhos, as imagens reais estarão do lado oposto em relação aos objetos reais, então devemos adotar dois referenciais de Gauss para cada tipo de lente: um para objetos e outro para imagens.

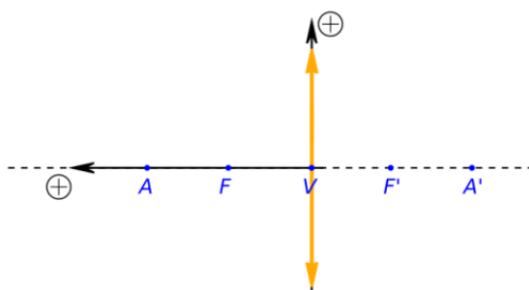


Figura 1: Referencial de Gauss para objeto real à esquerda: Lente Convergente

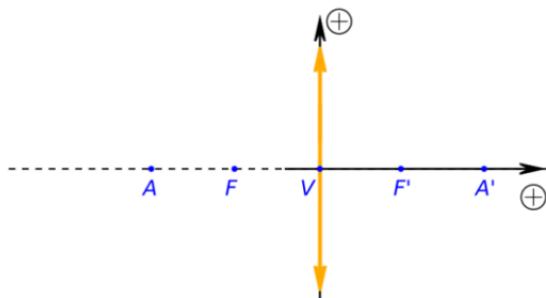


Figura 2: Referencial de Gauss para imagem real à direita: Lente Convergente

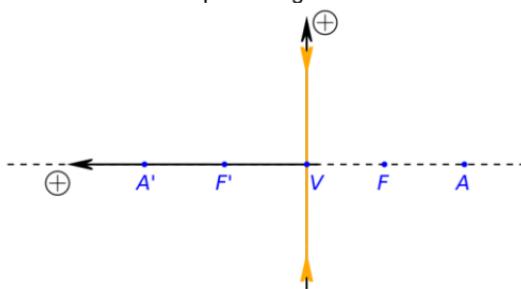


Figura 3: Referencial de Gauss para objeto real à esquerda: Lente Divergente

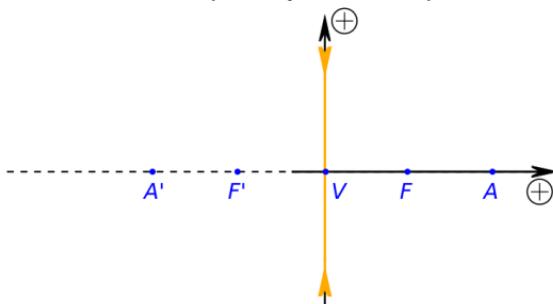


Figura 4: Referencial de Gauss para imagem real à direita: Lente Divergente

- Tendo esta convenção de sinais em mente, podemos usar a dita Equação de Gauss

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

- Vamos agora ver a equação do aumento.

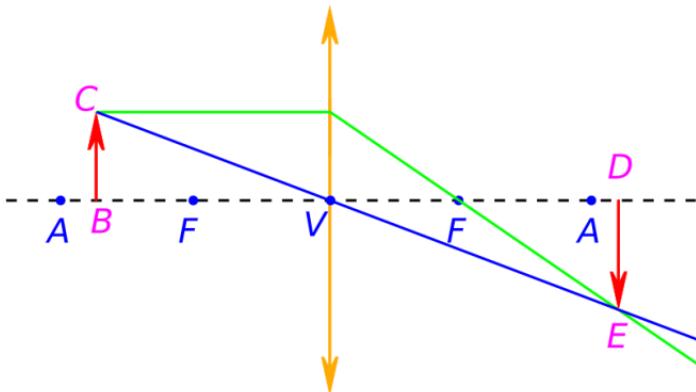


Figura 5: Cálculo do Aumento Linear Transversal

- Por semelhança de triângulo entre os triângulos ΔBCV e ΔDEV :
- $$\frac{|o|}{p} = \frac{|i|}{p'} \Rightarrow \frac{|i|}{|o|} = \frac{p'}{p}$$

- Como a imagem é invertida, temos:

$$\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

- Por definição, o aumento linear é

$$A = \frac{i}{o}$$

Assim:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Nota: Se você isolar o p' na equação de Gauss e substituir na equação do aumento você obtém mais uma relação que pode ser bem útil:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} = \frac{f}{f-p}$$

Esta equação condensa as equações de aumento e de Gauss.

IMPORTANTE!!!!!!!

Agora podemos falar em vergência de uma lente, ou “grau” de uma lente.

A unidade de medida, quando tudo do SI, é a dioptria:

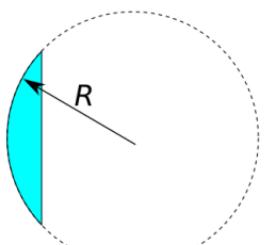
$$V = \frac{1}{f}$$

(H) EQUAÇÃO DOS FABRICANTES DE LENTES

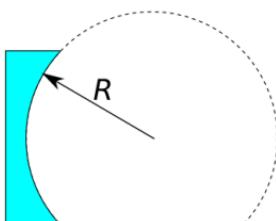
Equação dos fabricantes:

$$V = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Os raios são determinados pelas esferas imaginárias que definiram as lentes e seu valor pode ser positivo ou negativo.



Face convexa: $R > 0$



Face côncava: $R < 0$

Faremos um exercício para melhor entender.

Isso significa, portanto, que uma lente é divergente ou convergente dependendo do meio em que se encontra.

(I) ASSOCIAÇÃO DE LENTES

LENTES DELGADAS JUSTAPOSTAS

Quando justapostas, a vergência total é a soma das vergências de cada lente da associação:

$$V_{eq} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Nota: isso é válido quando falamos de lentes delgadas justapostas apenas. Assim, após a associação de diversas lentes, a lente equivalente deixa de ser delgada e esta equação deixa de valer.



Em geral, isso vale para algumas poucas lentes apenas.

LENTES NÃO JUSTAPOSTAS

Faremos um exercício sobre isso.

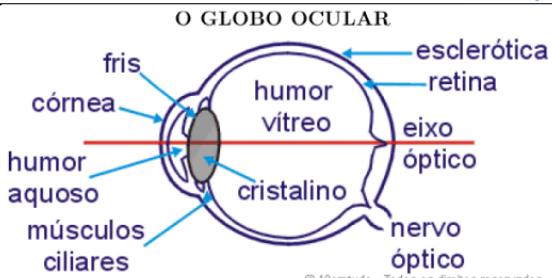
(J) ASSOCIAÇÃO DE LENTES COM ESPELHOS

Faremos um exercício sobre isso e teremos maiores aplicações quando estudarmos instrumentos óticos.

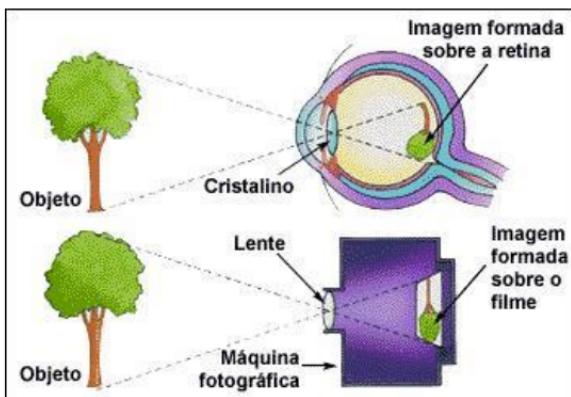
No SisQ, toda a lista, da apostila 2, de nome "Lentes Esféricas" podem ser resolvidos

22. ÓPTICA DA VISÃO

(A) INTRODUÇÃO

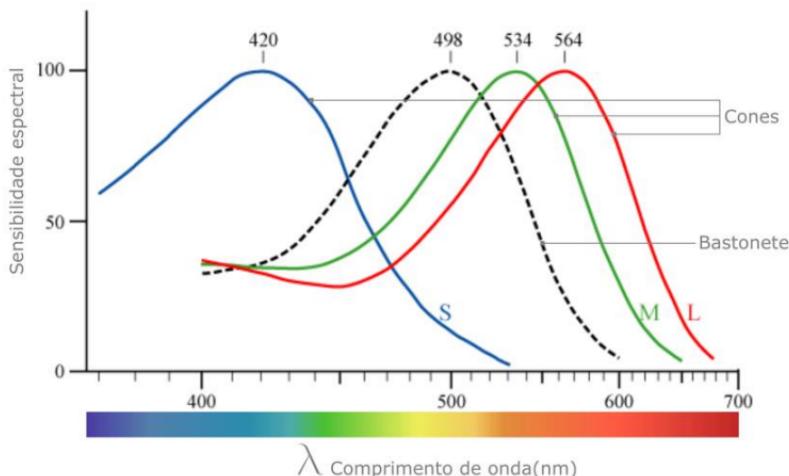


- Característica da imagem



Fonte: <http://professorhonda.blog.br/index.php/2014/03/07/como-se-forma-a-imagem-no-olho/>

- Note que a imagem é real, invertida e menor
- A retina possui dois tipos de células: os cones e os bastonetes
- Os bastonetes são mais sensíveis e não diferenciam as cores
- Os cones se subdividem em três tipos cada um mais sensível em determinada cor, o que possibilita que vejamos diversas cores



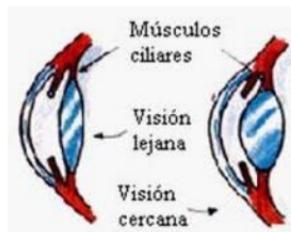
Fonte: <https://muralcientifico.files.wordpress.com/2017/10/000.jpg>

- Acomodação visual
 - Um olho humano dito normal tem uma profundidade entorno de 17 mm
 - Ou seja, $p' = 17 \text{ mm}$

- Para que a imagem seja sempre formada na retina é necessário que o foco da lente seja modificado

$$\frac{1}{\uparrow f} = \frac{1}{\uparrow p} + \frac{1}{17} \text{ (em mm)}$$

- Note que quanto maior a distância do objeto, maior deve ser a distância focal



Fonte:

http://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1291095162365_1862553055_19093/MUSCULO%20CILIAR%20Y%20CRISTALINO.jpg

- Note que quando o cristalino é comprimido, o raio de curvatura diminui. Quando isso ocorre, podemos ver pela equação dos fabricantes de lentes que a o foco diminui
- Podemos portanto concluir que quanto menor a distância do objeto ao olho, mais os músculos devem comprimir o cristalino
- Isso justifica porque há certo incômodo quando tentamos observar um objeto muito perto

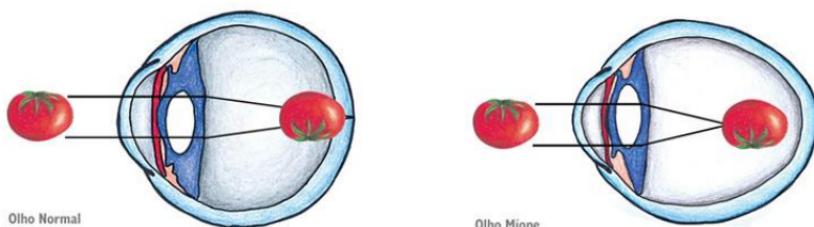
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\downarrow f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\downarrow R_1} + \frac{1}{\downarrow R_2} \right) \\ \frac{1}{\downarrow f} = \frac{1}{\downarrow p} + \frac{1}{17} \end{array} \right.$$

- Quando um objeto está à mínima distância que se pode ver com nitidez, dizemos que o objeto está no ponto próximo
 - Para uma visão dita normal essa distância varia de 7 cm (aos 10 anos) à 40 cm (aos 50 anos)
- Quando o objeto está na máxima distância, dizemos que o objeto está no ponto remoto
 - Para uma visão normal dizemos que o ponto remoto está no infinito ($p \rightarrow \infty$)

(B) AMETROPIAS (PROBLEMAS DA VISÃO)

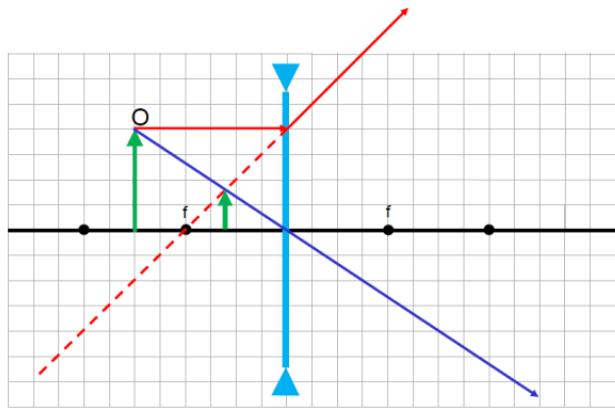
- Miopia
 - Dificuldade de se enxergar de longe

- O raio de curvatura do cristalino é pequeno e/ou o olho é alongado
- Vê melhor de perto tendo seu ponto próximo mais próximo que o "normal"
- A imagem de um objeto distante é formada antes de chegar na retina



Fonte: <http://www.aptomed.com.br/canal/Oftalmologia/Erros-Refracionais/Miopia>

- A lente necessária para correção visual é a divergente pois ela aproxima a imagem



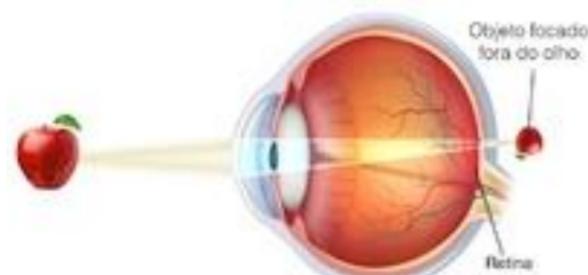
- Se a distância máxima que um míope pode ver é D , então temos que produzir a imagem de um objeto "no infinito" pelo menos nessa distância.
- Com isso podemos dizer que $p \rightarrow \infty$ e $p' = -D$ pois a imagem é virtual.
- Por Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-D} \Rightarrow V = \frac{1}{f} = \frac{1}{-D}$$
 ("grau da lente" no S.I.)

• Hipermetropia

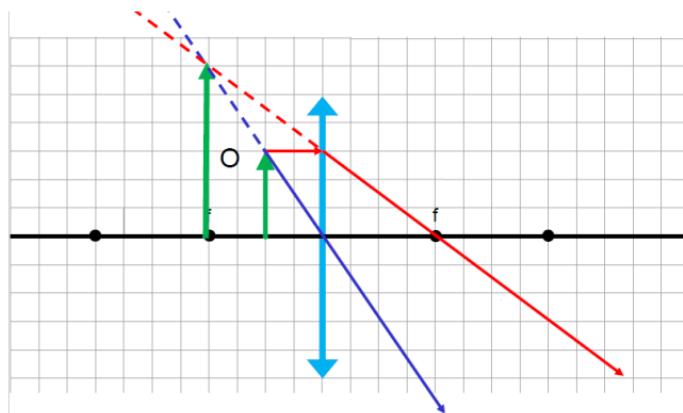
- Dificuldade de se enxergar de perto
- O raio de curvatura do cristalino não se reduz o suficiente para ver objetos próximos – olho mais curto que o normal
- A imagem de um objeto distante é formada depois da retina

Hipermetropia



Fonte: https://static.tuasaude.com/media/article/r5/ps/hipermetropia_4696_s.jpg

- A lente necessária para correção visual é a convergente pois ela afasta a imagem de um objeto próximo
- Considera-se que uma pessoa com visão normal vê com nitidez objetos localizados à 25 cm ou mais



- Digamos que um hipermetrope possa ver no mínimo um objeto à uma distância $d > 25$ cm
- Com isso podemos dizer que $p = 25$ cm e $p' = -d$ para que um hipermetrope possa ver um objeto localizado a 25 cm, pois sua imagem formará a um ponto mais distante, localizado no ponto próximo do hipermetrope
- Assim, pela equação de Gauss, o “grau da lente” e dioptrias será:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-d} \Rightarrow V = \frac{1}{f} = \frac{4d-1}{d} \quad (\text{di})$$

• Presbiopia

- Conhecida como vista cansada
- Tanto a visão para curta distância (no início) como a visão para longas distâncias são prejudicadas
- Deve-se usar lentes convergentes (base) e divergente (topo)

BIFOCAL



PROGRESSIVA



Figura: <http://lentes-hoya.com.br//optico/wp-content/uploads/2015/04/Bifocal-Progressiva.png>

- Outras anomalias
 - Astigmatismo
 - Estrabismo
 - Daltonismo

No SisQ, toda a lista, da apostila 2, de nome “Ótica da visão” podem ser resolvidos

23. INSTRUMENTOS ÓPTICOS

Material a parte: usaremos slides em aula.

Vídeo:

<https://youtu.be/G3Ttl3o0Mtk>

Considere estudar apenas os quatro primeiros instrumentos:

Lupa

Luneta Astronômica

Luneta Terrestre

Microscópio

Os demais itens (telescópios refletores) não abordaremos em sala, mas você pode consultar no vídeo.

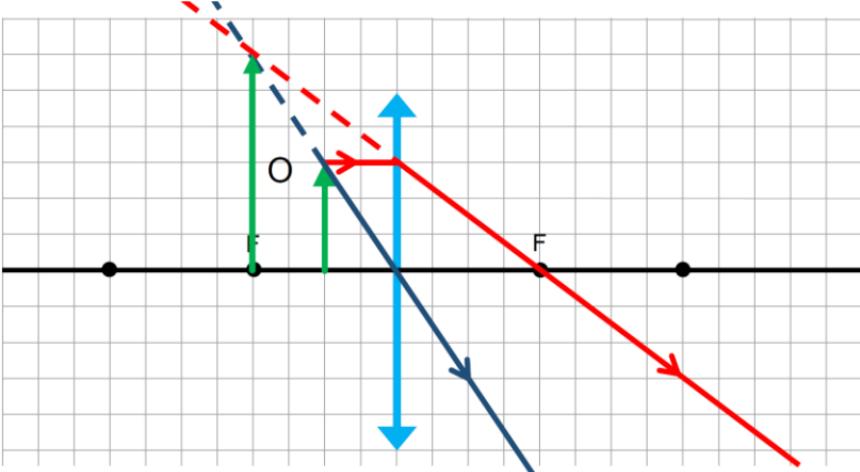
Caso você queira praticar com material quadriculado, você pode imprimir o material clicando no botão abaixo:

[CLIQUE AQUI](#)

LUPA

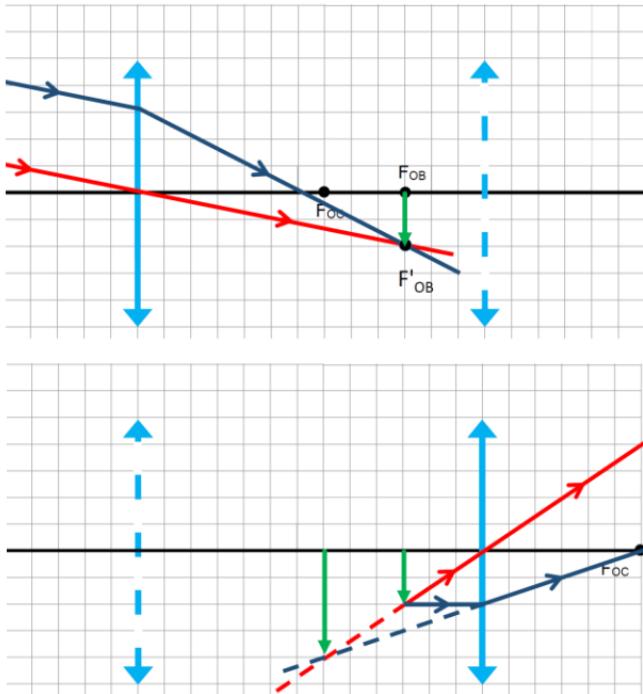


- IMAGEM:
 - VIRTUAL
 - DIREITA
 - MAIOR
 - Mais distante da lente que o objeto
- Qualquer lente convergente pode servir como lupa



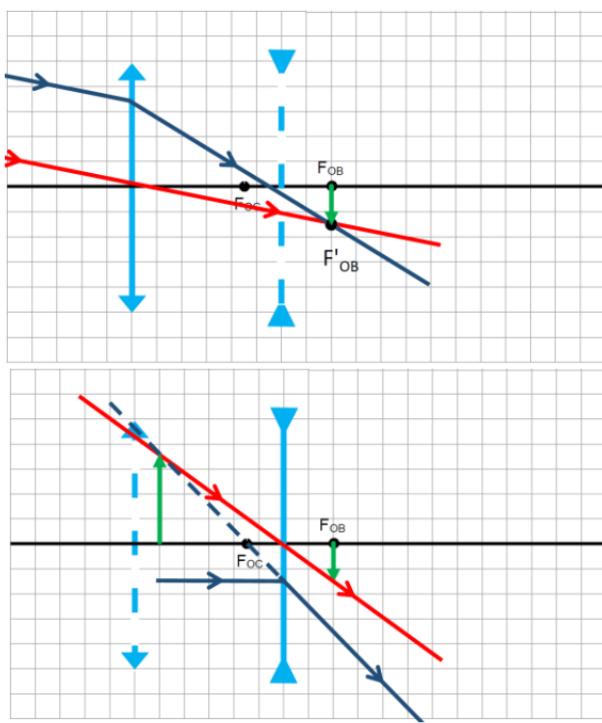
LUNETA ASTRONÔMICA

- IMAGEM:
 - VIRTUAL
 - INVERTIDA
 - MAIOR



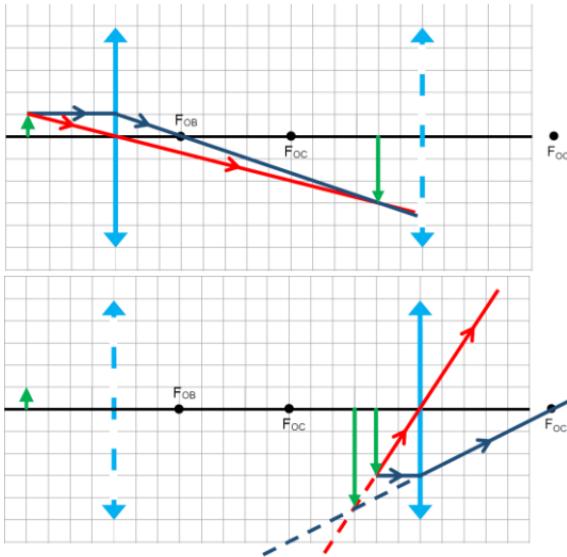
LUNETA TERRESTRE

- IMAGEM:
 - VIRTUAL
 - DIREITA
 - MAIOR



MICROSCÓPIO

- IMAGEM:
 - VIRTUAL
 - INVERTIDA
 - MAIOR
- AUMENTO: $A = A_{OB} \cdot A_{OC}$



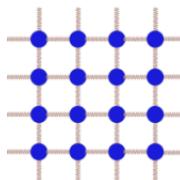
ENCERRAMOS ÓTICA
VAMOS AO SEGUNDO ASSUNTO:
TERMOMETRIA/CALORIMETRIA/TERMODINÂMICA

TERMOMETRIA

24. ESCALAS TERMOMÉTRICAS

FONTE: http://professordanilo.com-teoria/aula301_ESCALAS.html

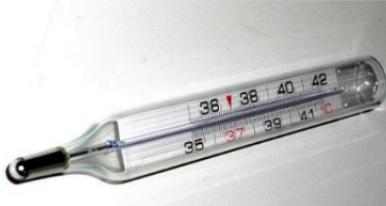
- Calor
 - Energia em trânsito
- Temperatura
 - Associado à energia interna (agitação) das moléculas



- Equilíbrio térmico
 - Dois corpos estão em equilíbrio térmico quando estão à uma mesma temperatura
- Imagine agora que um corpo A está em equilíbrio térmico com um corpo B (ou seja, estão numa mesma temperatura). Um terceiro corpo C também está em equilíbrio térmico com o corpo B. Então podemos afirmar com certeza que o corpo A está também em equilíbrio térmico com o corpo C. À esse fato damos o nome de **Princípio Zero da Termodinâmica** ou **Lei Zero da Termodinâmica**.

Como medir temperatura?

- Sabemos que a temperatura expande a matéria
- Então medimos comprimento de algo dilatável
- Normalmente, utiliza-se o termômetro de mercúrio



(A) PRINCIPAIS ESCALAS

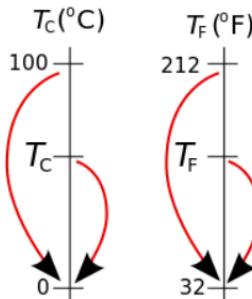
- Um cientista escolheu dizer que quando a água se congela ela está à zero graus e quando entra em ebulição está à 100 graus. Este cientista chamava-se Célsius e por isso dizemos que a água congela a 0°C e entra em ebulição à 100°C
- Outro cientista chamado Fahrenheit escolheu como 0°F a menor temperatura registrada em determinado lugar no planeta e 100°F a temperatura de sua esposa
- Outro cientista preferiu escolher como zero a temperatura em que as partículas na matéria parariam de vibrar. Escolheu que a cada 100 unidades de sua medida corresponderia à 100°C . Esta escala ficou

conhecida como escala Kelvin e é absoluta (ou seja, sempre positiva), por isso não usamos o símbolo “grau” ($^{\circ}$).

- Podemos relacionar estas grandezas da seguinte maneira

(B) CONVERSÃO CÉLSIUS E FAHRENHEIT

(i) Primeiro método

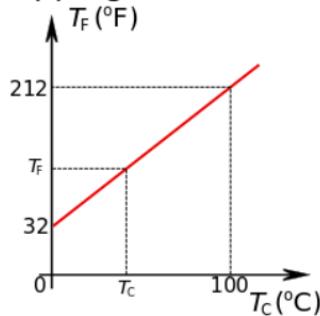


$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_F - 32}{212 - 32} \Leftrightarrow \frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180} \Leftrightarrow$$

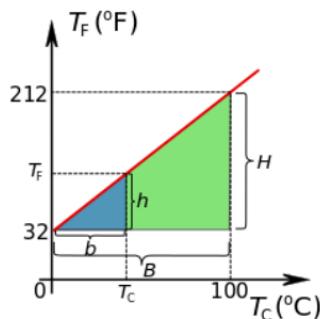
$$\frac{T_C}{5} = \frac{T_F - 32}{9}$$

eq(1)

(ii) segundo método



Por semelhança de triângulos:



$$\frac{H}{h} = \frac{B}{b} \Leftrightarrow \frac{H}{B} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{b}{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_F - 32}{212 - 32} = \frac{T_C - 0}{100 - 0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{T_F - 32}{180} = \frac{T_C}{100} \Leftrightarrow$$

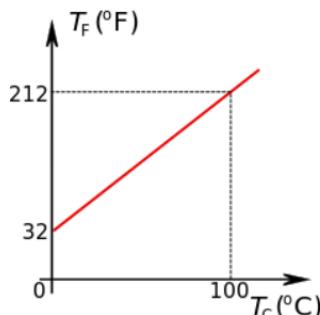
$$20 \cdot \frac{T_F - 32}{180} = 20 \cdot \frac{T_C}{100} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{T_F - 32}{9} = \frac{T_C}{5}}$$

eq(2)

(iii) terceiro método

Seja o gráfico novamente



Lembremos da equação da reta:

$$y = ax + b$$

Sendo x a temperatura em graus célsius e y corresponde à temperatura em graus fahrenheit.

Calculemos o coeficiente angular:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta T_F}{\Delta T_C} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{212 - 32}{100} = \frac{180}{100} = 1,8$$

Obtemos o coeficiente linear:

$$m = 32$$

Assim:

$$y = 1,8x + 32$$

Ou melhor ainda

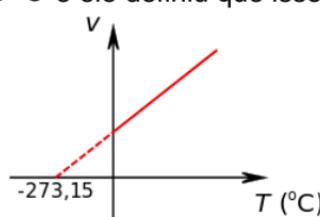
$$T_F = 1,8T_C + 32$$

eq(3)

Fica como exercício verificar que as equações (1), (2) e (3) são as mesmas.

(C) CONVERSÃO CÉLSIUS E KELVIN

Estudando gases, por extrapolação, Kelvin concluiu que a temperatura para que as moléculas de um gás parassem de vibrar e consequentemente tivesse volume nulo seria $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ e ele definiu que isso corresponderia a 0 K.



Sabendo que a variação de $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ corresponde à variação de 1 K , fica como exercício encontrar a seguinte relação:

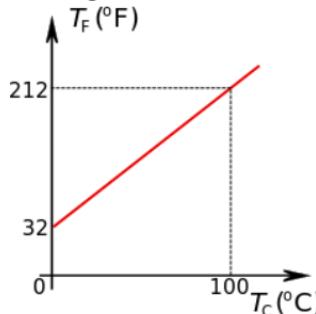
$$T_C = T_K + 273,15$$

Faça isso pelos três métodos apresentados anteriormente.

Depois verifique que a relação geral entre as três temperaturas é:

$$\frac{T_F - 32}{9} = \frac{T_C}{5} = \frac{T_K + 273,15}{5}$$

Se julgar útil utilize o gráfico a seguir:



(D) VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

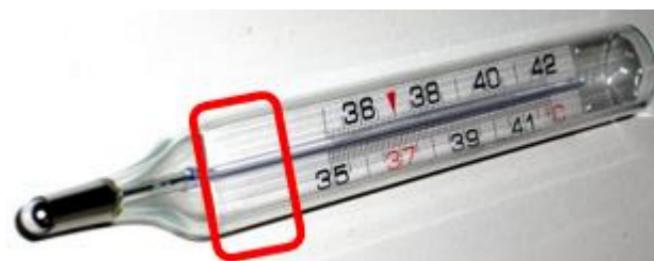
Em termos de variação de temperatura, temos:

$$1^{\circ}\text{C} = 1\text{K} = 1,8^{\circ}\text{F}$$

Ou seja, uma variação de 100 °F corresponde à uma variação de 180 °C e 100 K.

(E) TERMÔMETRO DE VALOR MÁXIMO

Observe que um termômetro de mercúrio possui um estrangulamento próximo ao bulbo.



Isso faz com que a indicação de temperatura fique “travada” em seu valor máximo.

Por isso é necessário chacoalhar (“abaixar”) o termômetro.

A partir de agora a lista
TERMOMETRIA da apostila
pode ser feita por completo

25. CALORIMETRIA

- Calor é a energia em trânsito
- Algumas substâncias requerem mais calor que outras para variar da mesma temperatura, mesmo que tenham a mesma massa.

CALOR SENSÍVEL

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Q : quantidade de calor transmitida para o (ou a partir do) corpo

m : massa do corpo em estudo

c : constante de proporcionalidade chamada de calor específico. Varia de material para material.

ΔT : variação da temperatura.

- Normalmente não trabalhamos no Sistema Internacional de Unidades
 - Em geral, o calor é medido em calorias
 - A massa em grama
 - A variação de temperatura em °C
 - O calor específico, portanto, em

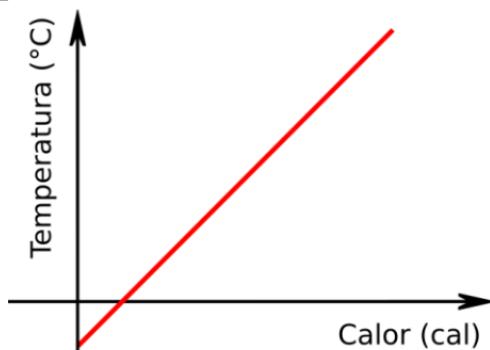
$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} \Rightarrow [c] = \frac{[Q]}{[m] \cdot [\Delta T]} \Rightarrow$$

$$[c] = \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$$

- Calor é uma forma de energia
 - Por isso, a quantidade de calores trocados em um sistema é sempre nulo
 - Aqui é importante lembrar que quando se recebe calor ele é considerado positivo e quando ele é perdido, ele será negativo
- Nem sempre quando um corpo recebe calor ele aumenta a temperatura.
 - Nesse caso, quando há variação da temperatura, dizemos que o calor é sensível.

CURVAS DE AQUECIMENTO

- Podemos representar em um gráfico a temperatura de uma substância em função da energia térmica (Calor Q) dado à substância
- Esta representação é chamada de curva de aquecimento
- Apesar do nome, pode ser usado para representar um corpo sendo resfriado



CAPACIDADE TÉRMICA

- Capacidade térmica é a quantidade de calor por variação de temperatura

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

- Note que a capacidade térmica pode ser escrita como

$$C = m \cdot c$$

POTÊNCIA TÉRMICA

- Potência é a taxa com que uma energia é transmitida
- Potência térmica é a taxa com que um calor é transferido

$$P = \frac{Q}{\Delta t}$$

Sendo:

Δt : o tempo que leva para transmitir o calor Q

TROCAS DE CALOR

- Calor, como vimos, é a quantidade de energia térmica que um corpo ganhou ou perdeu
- Dizemos que um sistema isolado é um sistema que não ganha nem perde calor
- Em um sistema isolado a soma de todos os calores trocados é zero

$$\sum Q_{trocados} = 0$$

- Além disso, dizemos que um sistema está em equilíbrio térmico quando todos os corpos que compõem o sistema atingem a mesma temperatura
 - Assim, a temperatura final de um sistema será a temperatura de equilíbrio térmico T_{eq}
- Por fim, sabemos que o calor sempre flui do corpo mais quente para o corpo mais frio

A lista CALORIMETRIA, da apostila de exercício, está completamente liberada

CALOR LATENTE

- Algumas vezes o calor que uma substância recebe é utilizado para alterar o estado físico desta substância.

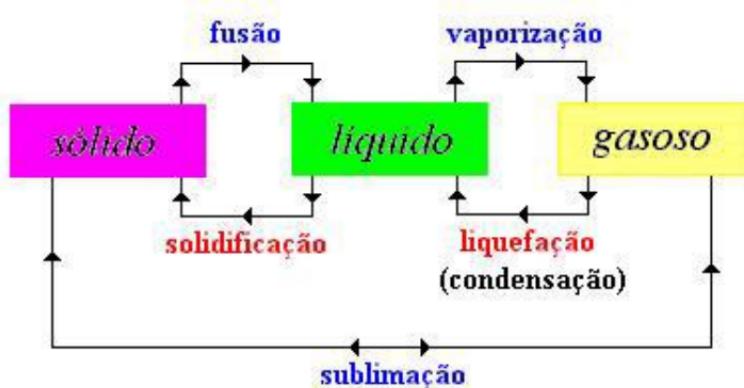
$$Q = m \cdot L$$

Q: quantidade de calor transmitida para o (ou a partir do) corpo

m: massa do corpo QUE SOFREU MUDANÇA DE ESTADO FÍSICO

L: calor específico latente.

- Para entendermos melhor o que é calor latente devemos estudar as mudanças de fase das substâncias.

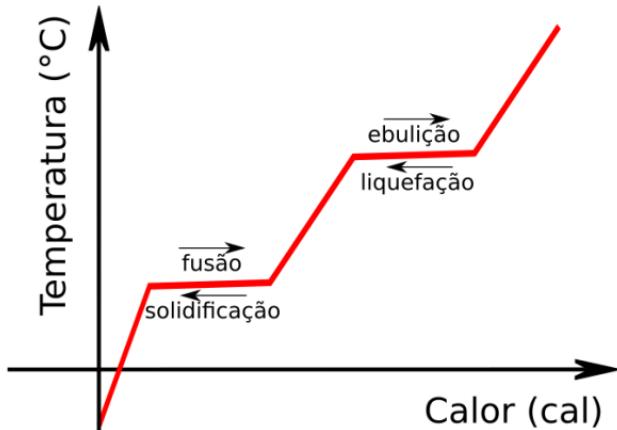


Durante a mudança de estado, a sua temperatura permanece constante, desde que estejamos trabalhando com substância pura à pressão constante.

Todas as substâncias possuem uma temperatura de fusão e uma de ebulação cujos valores dependem da pressão e da substância.

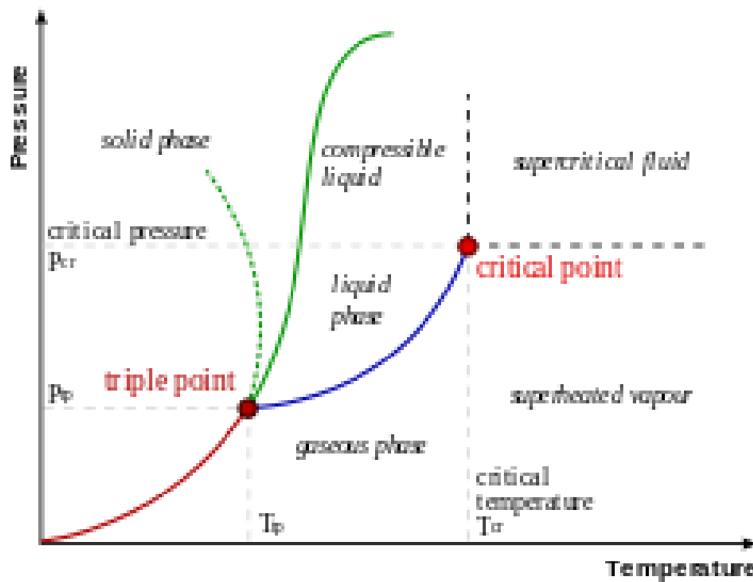
As temperaturas de fusão e ebulação coincidem, respectivamente, com as temperaturas de solidificação e liquefação

Podemos falar em novas curvas de aquecimento:



DIAGRAMAS DE FASE

- MATERIAIS DE PRIMEIRA CATEGORIA



- MATERIAIS DE SEGUNDA CATEGORIA



A lista MUDANÇA DE ESTADO
DE AGREGAÇÃO, da apostila
de exercício, está
completamente liberada

26. TRANSMISSÃO DE CALOR

TIPOS DE TRANSMISSÃO DE CALOR

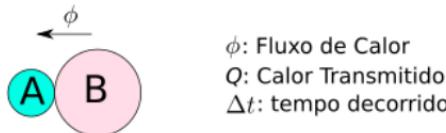
- Condução
 - Necessita de meio sólido para transmitir.
- Convecção
 - Precisa de meio fluido (líquido ou gasoso) para ocorrer.
 - Ocorre devido à diferença de densidade.
- Irradiação
 - Não precisa de um meio para ocorrer.
 - Ocorre tanto no vácuo como em meio material.
 - É transmitido por meio de ondas eletromagnéticas.

TRANSMISSÃO POR CONDUÇÃO

- O calor flui do meio mais quente para o meio mais frio.
- Para ter condução os meios devem estar em contato térmico.
- A lei de Fourier estabelece uma relação matemática entre fluxo de calor (calor por unidade de tempo) e as dimensões do material, bem como o material.

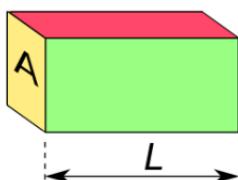
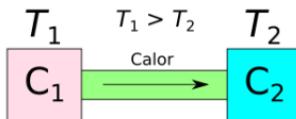
FLUXO DE CALOR:

$$\phi = \frac{Q}{\Delta t}$$



As unidades de fluxo pode ser cal/s, cal/min, etc. No sistema internacional usamos J/s que é o mesmo que watt (W).

LEI DE FOURIER



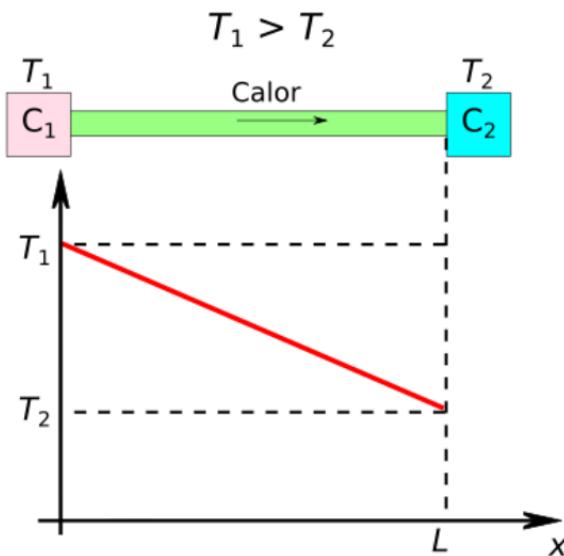
$$\phi = k \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{L}$$

Sendo A a área da secção transversal do meio que irá conduzir calor; L o comprimento do material condutor; $\Delta T = T_1 - T_2$ a diferença de temperatura dos dois corpos cujas temperaturas são diferentes.

k é chamado de condutibilidade térmica que varia de material para material.

Como exemplo, imagine um dia quente onde a temperatura externa T_1 é maior que a interna da sala de aula T_2 , devido ao ar-condicionado; L é a espessura de um dos vidros e A é a área do vidro da janela.

Vejamos a variação da temperatura de uma barra sob duas temperaturas diferentes:



Alguns exemplos de condutibilidade térmica:

Material	k em $\text{W}/(\text{m.K})$
Aço	40
Prata	420
Cobre	380
Ouro	310
Alumínio	200
Gelo	2
Vidro	0,84
Água	0,6
Tecido Humano	0,2
Amianto	0,16
Madeira	0,08 a 0,16
Lã	0,04
Ar	0,023
Isopor®	0,01

O gelo é um mal condutor, por isso o iglu é de gelo e por isso um *freezer*, quando acumula muito gelo, deve ser descongelado.

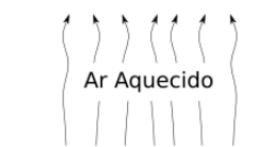
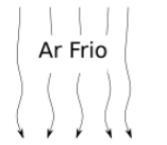
Uma panela é boa condutora, mas o cabo da panela é mal condutor.

TRANSMISSÃO POR CONVEÇÃO

- Em geral, quanto menor a temperatura de um fluido, maior a densidade do fluido mais frio tende a afundar e o mais quente sobe.
 - Por isso o *freezer* da geladeira é em cima;
 - ar-condicionado é colocado na parte superior da sala;
 - aquecedor na parte inferior;
 - algumas aves e planadores usam a convecção para manter-se voando (planando).



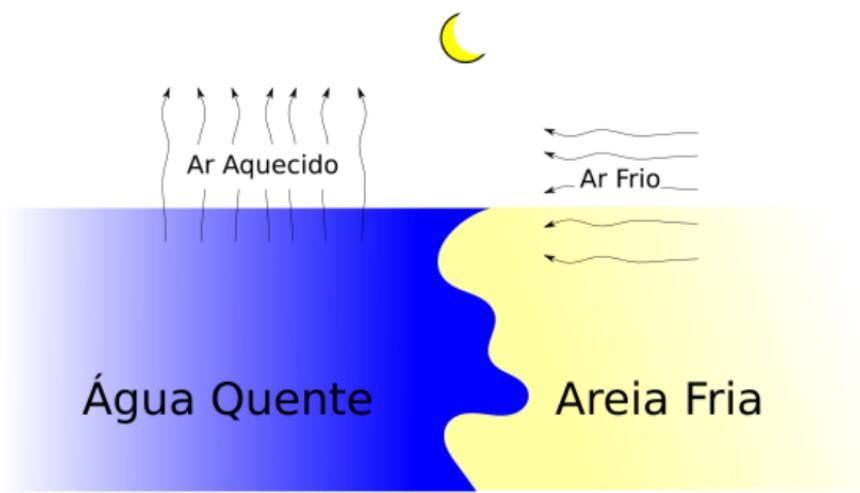
AQUECEDOR



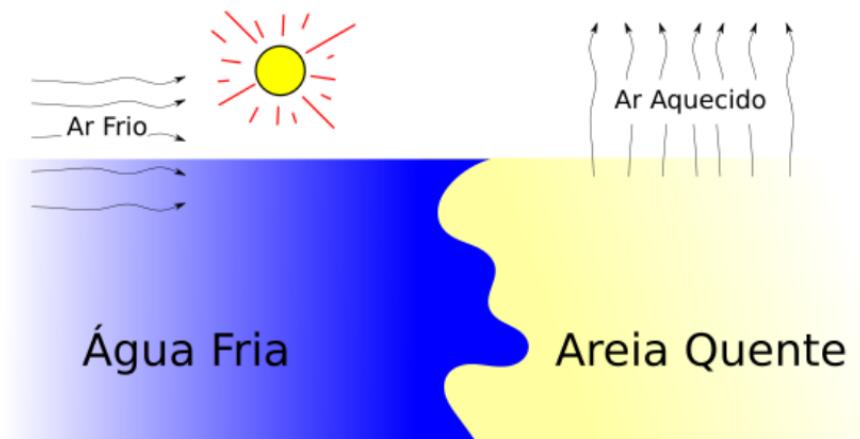
AR-CONDICIONADO

- Inversão térmica ocorre quando o ar de um grande centro urbano está frio e acima há uma camada de ar quente. Assim toda a poluição não sai da cidade, mantendo a poluição no local de origem.

- Brisa Marítima ocorre devido à diferença de temperatura entre água e terra: à noite a terra é mais fria que a água e por isso ocorre uma brisa da terra para o mar; durante o dia, a terra é mais quente e por isso ocorre uma brisa da água para a terra.



BRISA TERRESTRE

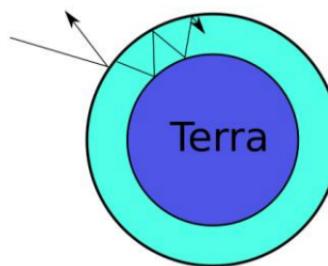


BRISA MARÍTIMA

Cuidado: os nomes das figuras estão na parte de baixo.

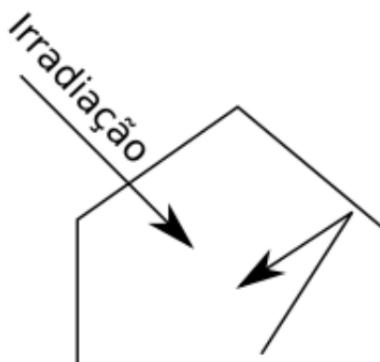
TRANSMISSÃO POR IRRADIAÇÃO

- O Sol transmite calor para a Terra por meio da irradiação.
- A potência irradiada depende da temperatura do corpo que está emitindo.
- A irradiação pode atravessar o vácuo e meios materiais como o ar e a água.
- Isso explica o efeito estufa.

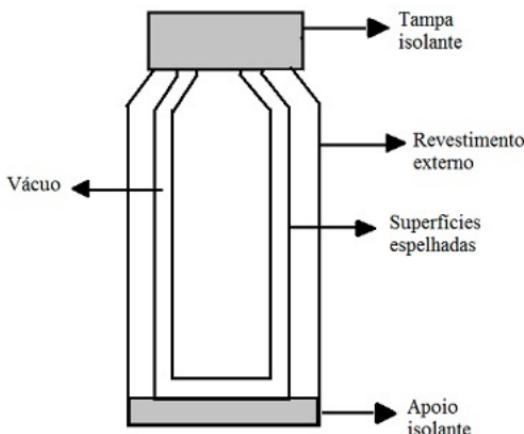


EFEITO ESTUFA NA TERRA

- No efeito estufa, a radiação atravessa a atmosfera por esta ser transparente para a radiação emitida pelo Sol.
- A radiação atinge a superfície da Terra e é absorvida por ela.
- Após ser absorvida, a radiação é reemitida na forma de infravermelho. Os gases chamados gases de efeito estufa – como dióxido de carbono, vapor de água e metano – absorvem esta radiação.
- Como resultado, os gases de efeito estufa fazem a temperatura média do planeta aumentar.



O NOME EFEITO ESTUFA VEM DEVIDO AO QUE OCORRE COM ESTUFAS:
MANTENDO A PARTE INTERNA MAIS QUENTE QUE A EXTERNA



GARRAFA TÉRMICA

- Lei da irradiação: Stefan-Boltzmann

$$P = e \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

P: potência emitida;

e: emissividade;

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$: constante de Boltzmann;

T: temperatura em kelvin.

A potência absorvida pelo meio que possui uma temperatura *T'* é:

$$P' = e \cdot \sigma \cdot A \cdot {T'}^4$$

Por fim, a potência líquida emitida pelo corpo é $P_{líq} = P - P'$:

$$P_{líq} = e \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - {T'}^4)$$

Desafio: use *e* = 1; estime a área superficial de um adulto; considere 36 °C como a temperatura de um ser humano; use 20 °C como a temperatura ambiente e determine qual a ingestão mínima, em calorias, que uma pessoa deve ingerir diariamente.

A lista TRANSMISSÃO DE CALOR, da apostila de exercício, está completamente liberada

27. GASES IDEAIS

a) INTRODUÇÃO

Nós vamos estudar a teoria dos gases ideais, na qual devemos levar em conta algumas propriedades e será importante você saber a validade das equações que veremos.

É também importante prestar atenção em palavras chaves, tais como variáveis de estado, energia interna etc.

Irei seguir a sequência do livro texto, apresentando exemplos diferentes e textos complementares, entretanto o livro será complementar, ou seja, será uma ferramenta auxiliar importante. Além disso, o *layout* desta página foi modificado para facilitar no uso em aula à distância.

b) GRANDEZAS IMPORTANTES

Você já deve ter ouvido falar que para medirmos massas minúsculas, na escala atômica, é conveniente utilizarmos a chamada **unidade de massa atômica** ou simplesmente u . Lembremos que esta unidade corresponde à aproximadamente a massa de um próton (ou nêutron). Na verdade, utilizamos o isótopo 12 do carbono (^{12}C) que possui 6 prótons e 6 nêutrons.

Assim, podemos dizer que um átomo de carbono possui massa que corresponde à 12 u .

Podemos também dizer que:

$$1u \approx 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{Eq. (1)}$$

Vamos nomear as equações, bem como os valores de certas constantes para facilitar a organização deste material. Agora continuando, também podemos dizer que:

$$\text{massa do próton} \approx \text{massa do nêutron} \approx u \quad \text{Eq. (2)}$$

Chamemos de **massa atômica** a massa de um átomo em unidades de massa atômica, sendo que o valor apresentado na tabela periódica corresponde ao valor médio da massa atômica do elemento. Consulte a tabela periódica na página a seguir sempre que julgar necessário.

Massa molecular (MM) é a massa de uma molécula que, em geral, também é medida em unidade de massa atômica.

Um **mol** é definido como a quantidade de unidades de massa atômica necessária para se obter um grama. Vejamos o seu valor:

$$1 \text{ mol} = 6,023 \cdot 10^{23} \quad \text{Eq. (3)}$$

Um outro valor importante é o **número de Avogadro** (N_A), que nos será também bastante útil:

$$N_A = 6,023 \cdot 10^3 \text{ mol}^{-1} \quad \text{Eq. (4)}$$

Definimos como massa molar (M) à massa de um mol de um certo elemento.

Assim, sendo n o número de mols (*plural* de mol) desse elemento, a massa m da amostra será:

$$m = n \cdot M \quad \text{Eq. (5)}$$

Tabela periódica

1 H hidrogênio 1.008 1.008	2
3 Li lítio 6.94	4 Be berílio 9.0122
11 Na sódio 22.990	12 Mg magnésio 24.315
19 K potássio 39.098	20 Ca cálcio 40.078(4)
37 Rb rubidio 85.465	38 Sr estroncio 87.62
55 Cs céssio 122.91	56 Ba bártio 137.33
87 Fr frâncio	88 Ra rádio

3 número atómico
Li símbolo químico
lítio nome
8.94 peso atómico (massa atómica relativa)



13 B boro 10.81	14 C carbono 12.011	15 N nitrogênio 14.007	16 O oxigênio 15.999	17 F flúor 18.998
13 Al alumínio 26.982	14 Si silício 28.085	15 P fósforo 30.974	16 S enxofre 32.06	17 Cl cloro 30.45
31 Ga gálio 69.723	32 Ge germânio 72.030(8)	33 As arséno 74.322	34 Se selênio 78.971(8)	35 Br bromo 79.994
49 In indígio 114.82	50 Sn estanho 118.71	51 Sb antimônio 121.76	52 Te telúrio 127.49(1)	53 I iodo 126.90
81 Tl tálio 204.38	82 Pb chumbo 208.38	83 Bi bismuto 208.98	84 Po polônio 208.98	85 At astato 210.00
113 Nh níhonio 144.93	114 Fl fleróvio 145.93	115 Mc moscovio 146.93	116 Lv livermório 147.93	117 Ts tennesso 148.93
193 Fm fermio 174.93	194 Md mendelevio 175.93	195 No nobelio 196.93	196 Lr laurencio 197.93	197 Lu lutécio 197.93

57 a 71	72 Hf háfnio 178.49(2)	73 Ta tântalo 186.05	74 W tungsténio 183.84	75 Re rémonio 186.21	76 Os ósmanio 190.23(2)	77 Ir íridio 192.22	78 Pt platina 191.08	79 Au ouro 196.97	80 Hg mercurio 201.99	81 Tl tálio 204.38	82 Pb chumbo 208.38	83 Bi bismuto 208.98	84 Po polônio 208.98	85 At astato 210.00	86 Rn radônio 222.00
89 a 103:	104 Rf rutherfordio 232.04	105 Db dúbrnio 231.04	106 Sg seaborgio 230.04	107 Bh bôtrio 229.04	108 Hs hásio 228.03	109 Mt meitnério 227.03	110 Ds darmstadtio 226.03	111 Rg roentgenio 225.03	112 Cn copernicio 224.03	113 Nh níhonio 223.03	114 Fl fleróvio 223.03	115 Mc moscovio 223.03	116 Lv livermório 223.03	117 Ts tennesso 223.03	118 Og oganessonio 223.03

www.tabelperiodica.org

Licença de uso Creative Commons By-NC-SA 4.0 - Use somente para fins educacionais

Caso encontre algum erro favor avisar pelo e-mail luisbradu@gmail.com

Versão IUPAC/SBQ (pt-br) com 5 algarismos significativos, baseada em DOI:10.1515/pac-2015-0365 - atualizada em 19 de março de 2019

Figura 1: Tabela periódica, versão 2019.

Lembremos que a **temperatura** de uma substância está relacionada à vibração das moleculas. Veja uma concepção desta ideia no link abaixo da figura 2. Tome cuidado, no entanto, para não pensar que as moléculas (ou átomos) estão ligadas por molas, pois na verdade estas molas representam apenas a interação à distância (força) entre as moléculas (ou átomos).

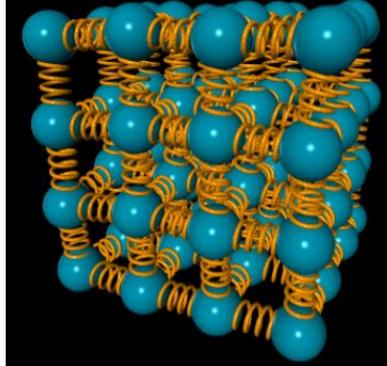


Figura 2: Animação das moléculas se agitando em um cristal. Acesse esta animação em

<https://www.glowscript.org/#/user/GlowScriptDemos/folder/Examples/program/AtomicSolid-VPython>

Porém vamos estudar o comportamento de gases ideais, sendo assim, você pode acessar uma animação com a possibilidade de diversos controles na figura 3, acessando o link logo abaixo da figura.

Faça o seguinte teste: coloque moléculas de dois tamanhos distintos e repare qual delas serão mais rápidas!

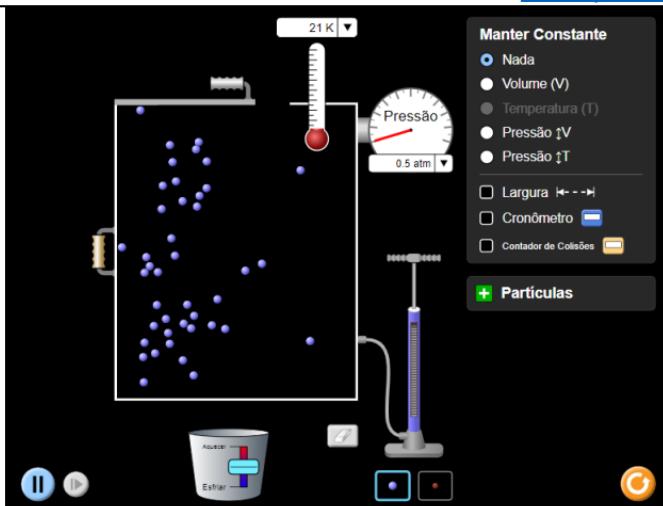


Figura 3: Animação interativa do comportamento clássico de gases ideais.

Acesse em https://phet.colorado.edu/sims/html/gases-intro/latest/gases-intro_pt_BR.html

Você irá concluir que as moléculas menores serão mais rápidas. O conceito de temperatura nos é, até certa medida, intuitivo, assim podemos supor que as moléculas devem possuir a mesma temperatura, logo o que seria igual entre as moléculas não deve ser a velocidade, mas alguma outra grandeza.

Respondendo à pergunta: a temperatura das moléculas está relacionada à energia cinética das moléculas. Lembremos que a energia cinética de uma molécula será:

$$E_{cin} = \frac{MM \cdot v^2}{2} \quad \text{Eq. (6)}$$

Veremos isso com mais detalhes em breve. Por hora, vamos à mais uma grandeza importante e mais intuitiva para vocês: a **pressão**.

Repare novamente na animação da [figura 3](#) e observe que quanto mais colisões correm nas paredes do reservatório maior será a pressão do gás. Assim, a pressão de um gás está relacionada ao número médio de colisões que ocorrem entre as partículas e a parede.

Vamos à última grandeza importante antes de iniciarmos o estudo dos gases: o **volume**.

Aqui é importante que você se lembre de como calcular o volume de alguns objetos tridimensionais, sendo o mais importante deles o cilindro. Vamos relembrar algumas dessas fórmulas.

Cálculo do volume de um cilindro de altura h e base de raio r . A área da base deste cilindro será $A = \pi \cdot r^2$ e o volume será dado por:

$$V = A \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{Eq. (7)}$$

O volume de um cone de altura h e raio da base r :

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{Eq. (8)}$$

Por fim, o volume de uma esfera de raio r será:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad \text{Eq. (9)}$$

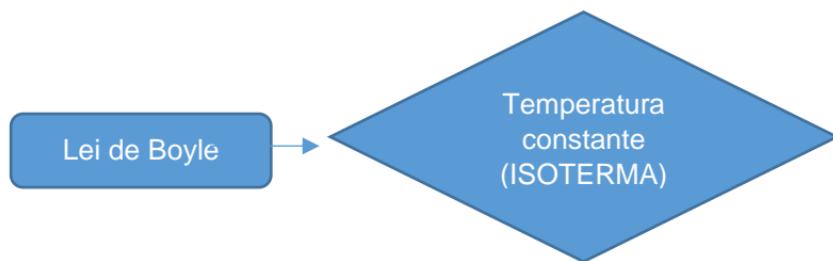
Agora vamos entender o que chamaremos de gás ideal:

- A quantidade de molécula no volume estudado é muito grande (da ordem de 10^{15} ou mais moléculas);
- Em cada instante, o número de colisões com a parede é imenso;
- As moléculas não interagem entre si à distância e a colisão com as paredes são sempre elásticas.

c) LEI DE BOYLE

Em 1660, Robert Boyle, um físico e químico irlandês, estabeleceu uma relação entre o **volume** e **pressão** para o caso de uma transformação gasosa à **temperatura constante**.

Verifique na [figura 4](#) o verbete em inglês sobre o assunto. Clique ali para ver a animação, ou procure na *internet* por *Lei de Boyle* que você encontrará facilmente.



A relação que Boyle descobriu é que o produto entre pressão e volume é sempre uma constante. Assim:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \dots = \text{constante} \quad \text{Eq. (10)}$$

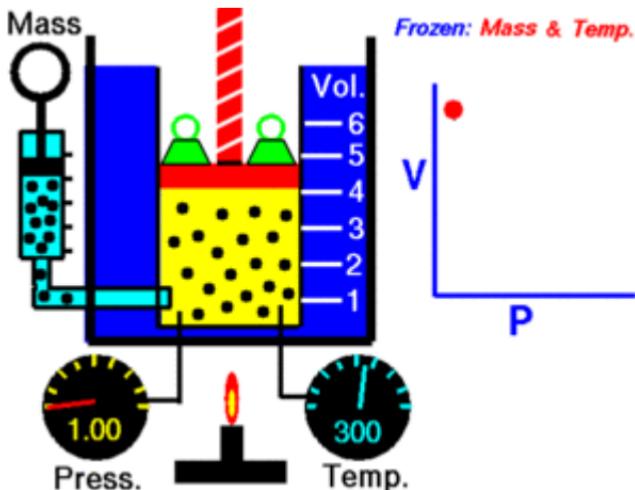


Figura 4: Verifique esta animação da *Wikipedia* sobre a Lei de Boyle:
https://en.wikipedia.org/wiki/Boyle%27s_law

Na figura a seguir ([figura 5](#)) está representada graficamente a relação entre a pressão e o volume: a figura apresentada é uma hipérbole.

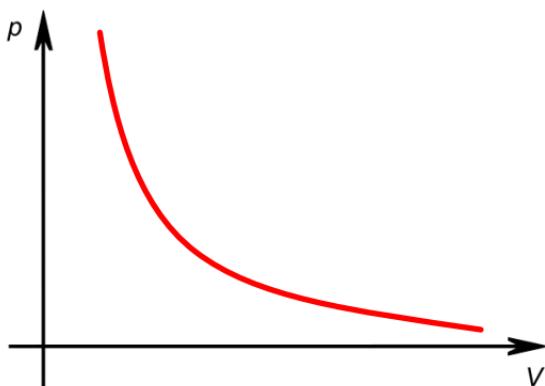


Figura 5: Representação gráfica da lei de Boyle: **isoterma**.

Podemos enunciar a Lei de Boyle da seguinte forma:

Para uma transformação isotérmica, o produto entre a pressão e o volume é sempre uma constante.

De forma equivalente, podemos dizer que numa transformação isotérmica, a pressão e o volume são grandezas inversamente proporcionais.

d) LEI DE CHARLES/GAY LUSSAC

Apenas 127 anos depois de Boyle, o francês Jacques Alexandre César Charles estudou quais seriam as relações entre as grandezas quando matemos o volume e a pressão constante. No entanto, o trabalho de Charles não foi publicado, tendo isso sido feito 15 anos depois por Gay-Lussac, que chegou aos mesmos resultados.

Quando a **pressão** for constante, isto é, quando o processo for **isobárico**, a razão entre o volume e a temperatura do gás será constante.

ISOBÁRICA:

Razão entre o volume e a temperatura é constante.

Podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \dots = \text{constante} \quad \text{Eq. (11)}$$

Na [figura 6](#) vamos representar o gráfico de V por T .

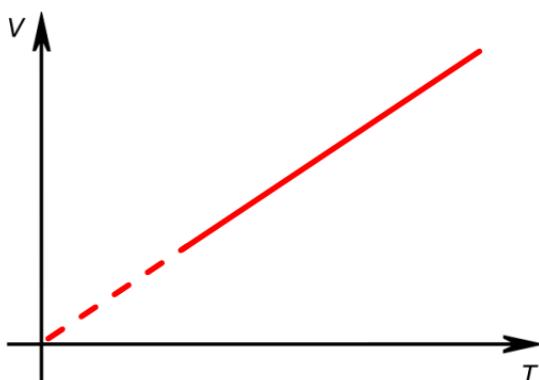


Figura 6: Uma das leis de Charles/Gay-Lussac: **isobárica**.

Quando o **volume** for constante chamamos o processo de **isométrico** ou **isocórico** ou isovolumétrico. Neste caso, a razão entre a pressão e a temperatura do gás será constante.

ISOCÓRICA:

Razão entre a pressão e a temperatura é constante.

Podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \dots = \text{constante} \quad \text{Eq. (12)}$$

Na [figura 7](#) vamos representar o gráfico de V por T .

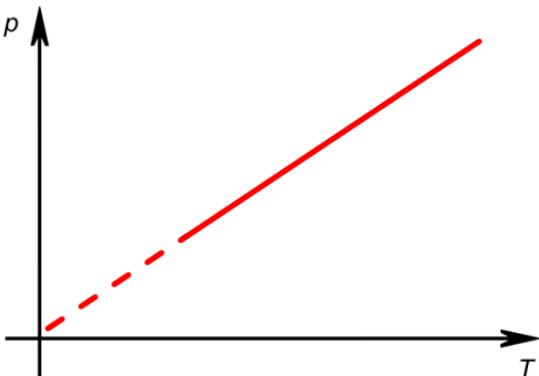


Figura 7: Outra lei de Charles/Gay-Lussac: **isocórica**.

e) LEI GERAL DOS GASES IDEAIS

Repare que podemos unificar as três relações anteriores em uma só, que chamaremos de Lei Geral dos Gases:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \dots = \frac{p \cdot V}{T} = \text{constante} \quad \text{Eq. (13)}$$

Repare que podemos recuperar as relações anteriores imponto alguma grandeza como sendo constante.

$$\text{ISOTÉRMICA: } \left. \begin{aligned} \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} &= \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \\ \text{se } T_1 &= T_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 ;$$

$$\text{ISOBÁRICA: } \left. \begin{aligned} \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} &= \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \\ \text{se } p_1 &= p_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} ;$$

$$\text{ISOCÓRICA: } \left. \begin{aligned} \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} &= \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \\ \text{se } V_1 &= V_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

f) EQUAÇÃO DE CLAPEYRON

Falamos até agora que certas relações entre algumas grandezas nos da uma constante, mas que constante é essa? Vamos agora responder esta pergunta, adicionando uma grandeza: o número de mols n .

A razão apresentada na [equação 13](#) é função do número de mols, da constante universal dos gases ideais R e da temperatura. Geralmente, escrevemos a equação na forma a seguir:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{Eq. (14)}$$

O valor da constante universal dos gases ideais, que iremos utilizar com frequência, no Sistema Internacional, é:

$$R \approx 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,31 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad \text{Eq. (15)}$$

Em outros sistemas de unidades, temos:

$$R \approx 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \approx 2,0 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

A Teoria cinética dos gases ideais é um assunto que será abordado no futuro.

A lista “Gases Ideais” do SisQ pode ser feita por completo.

28. TEORIA CINÉTICA DOS GASES

Estamos ainda no capítulo 6, no item 8. Entretanto vamos abordar três assuntos do capítulo 7: trabalho de um gás, transformação adiabática e calores específicos. Voltaremos a estes assuntos de forma mais aprofundada em momento oportuno.

a) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A PRESSÃO CONSTANTE

Para vermos como calcular o trabalho de um gás a pressão constante, vamos primeiramente supor um gás dentro de um cilindro com êmbolo de área A .

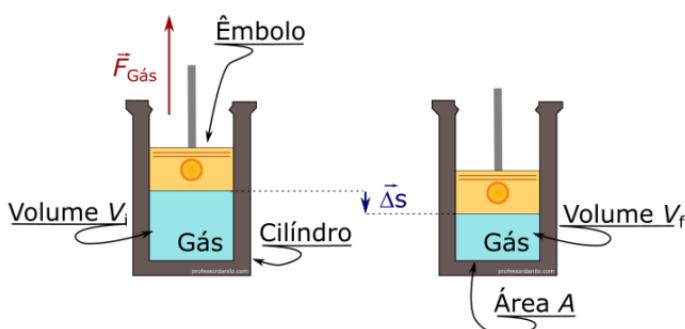


Figura 1: Cilindro de área A , gás com volume inicial V_i , êmbolo, força do gás e deslocamento do êmbolo.

Observe a figura 1 na qual apresentamos um gás que é comprimido. Vamos supor que a temperatura do gás é controlada de tal forma que a pressão do gás se mantenha constante. Com isso podemos determinar o trabalho que o gás realiza.

Primeiramente, suponhamos que o ângulo entre a força que o gás faz e o deslocamento do êmbolo seja θ . Observe que se o gás sofre expansão, então $\theta=0^\circ$ e, portanto, $\cos\theta=1$; quando o gás sofre compressão, então $\theta=180^\circ$ e $\cos\theta=-1$.



Figura 2: Se o gás sofre uma expansão, o cálculo do trabalho retorna um valor positivo; se o gás sofre uma compressão, o trabalho retorna um valor negativo.

Calculemos o trabalho:

$$\tau = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} \tau = F \cdot \Delta s & \text{se } \theta = 0^\circ \\ \tau = -F \cdot \Delta s & \text{se } \theta = 180^\circ \end{cases} \quad \text{Eq. (01).}$$

Lembremos que a força que o gás faz é o produto da pressão do gás pela área A do cilindro/êmbolo:

$$F_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot A \quad \text{Eq. (02).}$$

Assim, substituindo na equação do trabalho, obtemos de forma genérica sem considerar os sinais, que:

$$\tau_{\text{gás}} = F_{\text{gás}} \cdot \Delta s \Rightarrow \tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot \underbrace{(A \cdot \Delta s)}_{\text{variação do volume do gás}} \Rightarrow$$

$$\tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot \Delta V \quad \text{Eq. (03).}$$

Sendo ΔV a variação do volume do gás. Note que a variação do volume do gás pode ser positiva ou negativa:

$$\Delta V = V_f - V_i \Rightarrow \begin{cases} \Delta V > 0 \text{ se } V_f > V_i & (\cos \theta = 1) \\ \Delta V < 0 \text{ se } V_f < V_i & (\cos \theta = -1), \end{cases}$$

com isso podemos ver que a equação 03 é geral, pois se o gás expandir, $\Delta V > 0$, o trabalho também será positivo; se, por outro lado, o gás sofrer compressão, $\Delta V < 0$, então o trabalho também será negativo.

Podemos então resumir nosso resultado da seguinte maneira:

Em um processo isobárico, o trabalho de um gás é determinado por

$$\tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot \Delta V.$$

b) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A VOLUME CONSTANTE

Se o volume do gás não varia então não há deslocamento, portanto pela equação (01) o trabalho do gás é nulo.

Em um processo isocórico (ou isométrico ou isovolumétrico), o trabalho de um gás é NULO

c) TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS A TEMPERATURA CONSTANTE

O trabalho é calculado pela equação (03), caso a pressão for constante, no entanto se a pressão variar, temos que calcular a área da figura plana definida entre o eixo horizontal até a função que representa a pressão *versus* volume. Como uma imagem vale mais que mil palavras, abaixo representamos esta figura:

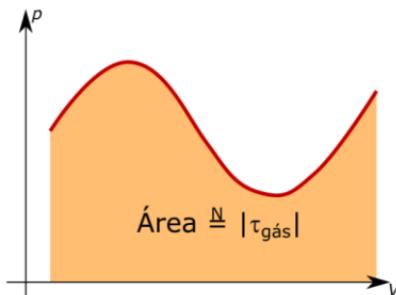


Figura 3: Caso a pressão não seja constante, o trabalho é definido pela área da figura abaixo da curva definida pelo diagrama p versus V .

Temos, no entanto, que orientar este processo, pois como vimos anteriormente se o gás sofre uma expansão então o trabalho é positivo e se o gás sofre compressão então o trabalho realizado pelo gás é negativo¹.

Veja nas figuras 4 e 5 a seguir os diagramas de pressão versus volume no caso do gás sofrendo expansão e no caso do gás sofrendo compressão. Você pode simplificar dizendo que o trabalho é positivo se o diagrama é da esquerda para a direita e negativo se o diagrama é da direita para a esquerda.

Em todo nosso material, se quiser saber sobre o trabalho realizado sobre o gás, basta substituir o trabalho do gás em todas as equações que ele aparecer por menos trabalho sobre o gás:

$$\tau_{\text{gás}} = \tau_{\text{PELO gás}} = -\tau_{\text{sobre o gás}}$$

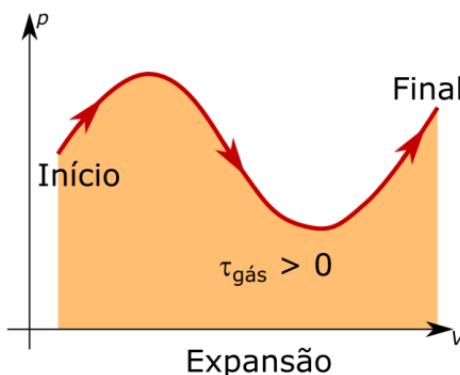


Figura 4: Na expansão, o volume do gás aumenta, portanto o trabalho do gás é positivo.

¹ É comum utilizar os termos “trabalho realizado pelo gás” e “trabalho realizado sobre o gás”. Para evitar qualquer tipo de confusão, sempre que falarmos de trabalho sempre estaremos nos referindo ao gás, nunca à algum operador que realiza trabalho sobre o gás.

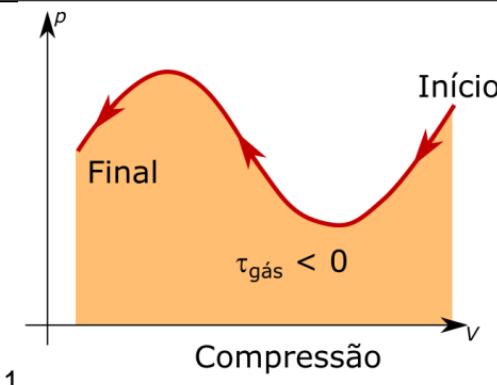


Figura 5: Na compressão, o volume do gás diminui, portanto o trabalho do gás é negativo.

No caso de uma transformação isotérmica a curva obtida é tal que não sabemos como calcular a sua área (pelo menos não aprendemos como fazer isso no ensino médio). Por esta razão, normalmente não se vê a fórmula de se determinar o trabalho, mas como o céu é o limite, vamos ver isso aqui! Veja a figura a seguir, onde apresentamos a pressão em função do volume no caso de uma transformação isotérmica:

$$p = \frac{nRT}{V}.$$

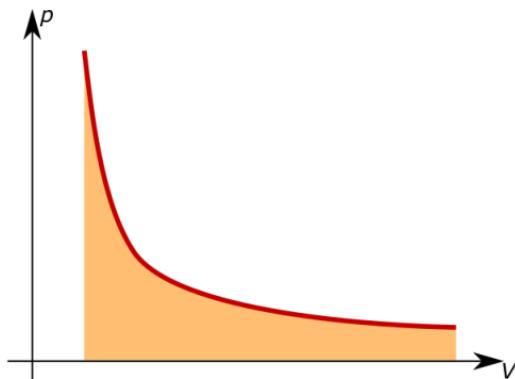


Figura 6: Uma transformação isotérmica. Não indicamos a direção do processo (compressão ou expansão) pois isso é determinado numericamente pelos valores dos volumes final e inicial.

Utilizando-se cálculo integral (vocês terão uma noção sobre isso no final do ano) pode-se demonstrar que o trabalho do gás é dado por:

$$\tau_{\text{gás}} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \text{Eq. (04).}$$

Em um processo isotérmico, o trabalho de um gás é determinado por

$$\tau_{\text{gás}} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

Note aqui que \ln é o logaritmo neperiano, isto é, é o logaritmo na base e , que é o número neperiano:

$$\ln k = \log_e k.$$

Lembre-se também de como mudar a base:

$$\ln k = \log_e k = \frac{\log k}{\log e}$$

Lembre-se também de como trabalhamos com funções logarítmicas:

$$\log_{10} k = a \Leftrightarrow 10^a = k.$$

Lembremos também que

$$e = 2,718281828\dots$$

A lista “Termodinâmica”, da apostila pode ser feita até o número 5.

d) VALOR QUADRÁTICO MÉDIO

Nos próximos materiais, vamos falar sobre valor quadrático médio da velocidade. Como velocidade é um vetor, ou seja, precisamos de mais informações do que somente o módulo, se fará necessário falar em velocidade quadrática média. Porém, antes de fazermos algumas demonstrações, vamos falar de valor quadrático médio.

01. Para começar, sejam os números:

$$5, 4, 9, 7, 9, 3, 2, 5, 8 \text{ e } 1.$$

Considerando três casas após a vírgula, calcule:

a) A média destes números. Chame-os de x_1, x_2, \dots, x_{10} respectivamente.

Chamamos o valor médio de \bar{x} ou $\langle x \rangle$ ou ainda $x_{\text{méd}}$.

Resposta: 5,300

b) Calcule a média dos quadrados destes termos.

Resposta: 35,500

c) Calcule o quadrado da média.

Resposta: 28,090

d) Calcule a raiz quadrada da média dos quadrados dos termos.

Resposta: 5,958

e) Compare os valores obtidos nos itens (A) e (D).

Concluímos que o valor médio de uma grandeza não corresponde à raiz quadrática média (*root mean square*, em inglês). A situação fica ainda pior se estamos trabalhando com valores positivos e negativos.

02. Como exemplo, seja a seguinte sequência de valores:

$$x_i = \{5, 4, 9, -5, -9, 3, -8, -4, 8, -3, 0\}$$

Considerando três casas após a vírgula, calcule:

a) Calcule o valor médio destas grandezas. Calcule também o quadrado da média destas grandezas.

Respostas: zero e zero

b) Calcule a média dos valores quadráticos destes valores. Calcule também a raiz quadrada destes valores, isto é, o valor quadrático médio de x . Também representamos o valor quadrático médio de x por \bar{x}_{rms} .

Respostas: 39,000 e 6,245

Em breve, vamos falar de velocidade das moléculas e devemos diferenciar o que é média das velocidades, velocidade quadrática média e velocidade mais

frequente das moléculas. Isso será importante para entendermos efeitos que parecem violar a lei zero da termodinâmica², como ocorre em vasos de barro: nossos antepassados costumavam guardar água em vasos de barro pois esta fica mais fria que se armazenada em vasos de vidro. Isso parece violar a lei do equilíbrio térmico: como pode a água em um vaso de barro ficar mais fria que a temperatura ambiente? A física está errada? Bom, fingiremos que nossa aula é um seriado e deixemos a resposta para o próximo capítulo.

Vamos entender como o micro (velocidade das moléculas) pode afetar o macro (pressão, temperatura etc.). Comecemos com algo muito simples: uma caixa cúbica de lado L contendo um gás.

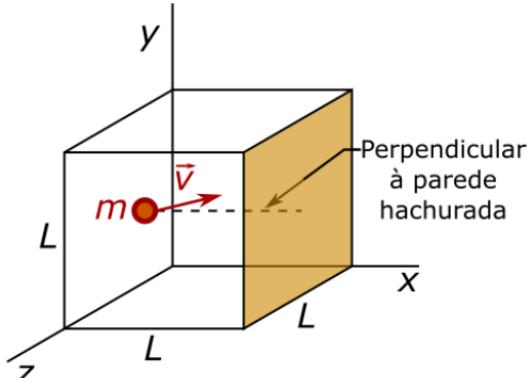


Figura 7: Uma caixa de lado L , contendo n mols de um gás ideal. Uma molécula de massa m e velocidade \vec{v} está a caminho de colidir com a parede hachurada de lado L^2 . É representada uma linha perpendicular à esta parede.

Seguindo o descrito na figura 7 (acima), suponha que a molécula de gás colida com a parede de forma elástica, podemos determinar a variação da quantidade de movimento em x .

$$\begin{aligned}\Delta \vec{Q}_x &= m(-\vec{v}_x) - m\vec{v}_x \Rightarrow \\ \Delta \vec{Q}_x &= -2m\vec{v}_x \quad \text{Eq. (05).}\end{aligned}$$

Lembremos da segunda lei de Newton em função da variação da quantidade de movimento:

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} \quad \text{Eq. (06).}$$

Com isso, podemos calcular a força que a parede faz na molécula do gás, que é nosso objeto de estudo:

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \frac{-2m\vec{v}_x}{\Delta t} \quad \text{Eq. (07).}$$

Em média, esta molécula irá colidir na parede uma vez apenas, enquanto a molécula atravessa duas vezes a aresta da caixa, de comprimento L . Assim, o Δt que aparece na equação 07 pode ser obtido considerando a componente horizontal da velocidade da molécula.

² A lei zero da termodinâmica afirma que dois corpos estão em equilíbrio térmico se ambos estiverem à mesma temperatura. Quando colocamos um objeto qualquer em um ambiente isolado termicamente, basta esperar tempo suficiente para que o objeto tenha a mesma temperatura que o ambiente.

$$v_x = \frac{2L}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \quad \text{Eq. (08).}$$

Substituindo na equação 07, obtemos a força média que cada molécula faz na parede, que é sempre do interior para o exterior do gás.

$$|\vec{F}_{\text{Res}}| = \frac{2m(v_x)^2}{2L} \Rightarrow$$

$$F_{\text{Res}} = \frac{m(v_x)^2}{L} \quad \text{Eq. (09).}$$

Lembremos da equação que relaciona a pressão com a força (equação 02) e calculemos a pressão média que apenas uma molécula faz na parede apresentada na figura 7.

$$p_{\text{média 1 molécula}} = \frac{F_{\text{Res}}}{L^2} = \frac{m(v_x)^2}{L^3} \Rightarrow$$

$$p_{\text{média 1 molécula}} = \frac{m(v_x)^2}{V} \quad \text{Eq. (10).}$$

Agora somemos a contribuição de cada uma das moléculas que existem neste gás e determinemos a pressão total nesta parede:

$$p = \frac{mv_{x1}^2 + mv_{x2}^2 + \dots + mv_{xN}^2}{V} \Rightarrow$$

$$p = \frac{m}{V}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2) \quad \text{Eq. (11).}$$

Sendo $N = n \cdot N_A$ o número total de moléculas no gás, n o número de mols e N_A o número de Avogadro. Podemos utilizarmos aqui nosso conhecimento de raiz quadrática média e escrever:

$$(v_x^2)_{\text{méd}} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N} \Rightarrow$$

$$v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2 = N(v_x^2)_{\text{méd}} \Rightarrow$$

$$v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2 = n \cdot N_A \cdot (v_x^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (12).}$$

Portanto, podemos reescrever a equação 11 com o resultado obtido na equação 12:

$$p = \frac{m}{V} \cdot n \cdot N_A \cdot (v_x^2)_{\text{méd}} \Rightarrow \quad p = \frac{n \cdot m \cdot N_A}{V} (v_x^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (13).}$$

Lembremos que $m \cdot N_A = M$, que é a massa molar do gás (massa de 1 mol do gás). Assim:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} (v_x^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (14).}$$

Sabemos que para qualquer molécula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como há muitas moléculas (1 milésimo de um mililitro de gás a 0°C e 1 atm de pressão possui mais de 26 trilhões de moléculas³, isto é, quase 3500 moléculas por habitante no

³ Em condições normais de pressão e temperatura, isto é, a 1 atm de pressão e a 0°C , um mol de gás ideal ocupa 22,4 litros de volume.

plane Terra no final de 2019 [7,7 bilhões de pessoas]), podemos supor que a velocidade quadrática média em qualquer direção é sempre igual⁴, assim:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_x^2 + v_x^2 \Rightarrow v^2 = 3v_x^2 \Rightarrow$$

$$v_x^2 = \frac{v^2}{3} \quad \text{Eq. (15).}$$

Podemos então reescrever a equação 14 de posse da equação 15:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} \frac{1}{3} (v^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (16).}$$

Lembrando do que discutimos na seção anterior sobre valor quadrático médio:

$$\sqrt{(v^2)_{\text{méd}}} = v_{rms} \Rightarrow v_{rms}^2 = (v^2)_{\text{méd}},$$

portanto descobrimos que:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} \frac{1}{3} v_{rms}^2 \quad \text{Eq. (17).}$$

Da equação dos gases ideais, sabemos que $p = \frac{nRT}{V}$, logo:

$$\frac{\cancel{n} \cdot R \cdot T}{\cancel{V}} = \frac{\cancel{n} \cdot M}{\cancel{V}} \frac{1}{3} v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$
Eq. (18).

e) ENERGIA CINÉTICA MÉDIA DAS MOLÉCULAS DO GÁS

A equação 18 é simplesmente a equação mais importante que obtemos na seção anterior pois ela nos permite calcular a energia cinética média das moléculas de um gás. Vamos calcular isso a partir da equação da energia cinética de apenas uma molécula, como a apresentada na figura 7:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} mv^2$$

Mas isso não é novidade. Então, vamos calcular a energia cinética média das moléculas, pois como mencionado anteriormente, a velocidade de uma única molécula pode ser diferente das demais.

$$(E_{cin})_{\text{méd}} = \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)_{\text{méd}} = \frac{1}{2} m (v^2)_{\text{méd}}$$

Sendo $m \cdot N_A = M \Rightarrow m = M / N_A$ e do resultado obtido na equação 18, temos

$$(E_{cin})_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \frac{M}{N_A} v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$$(E_{cin})_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \frac{M}{N_A} \frac{3RT}{M} \Rightarrow$$

⁴ Você pode estar se perguntando por que a velocidade quadrática média é que é constante para as moléculas e não a média dos módulos das velocidades, por exemplo, ou o módulo da média dos vetores velocidade ou mesmo qualquer outra média mais complicada ainda. A resposta está relacionada com a distribuição de energia: a energia cinética das moléculas se distribui de modo uniforme associando-se em quantidade parecidas em todas as direções. Note que não podemos dizer que a energia cinética na direção de x é igual à energia cinética na direção de y e é igual à energia cinética na direção de z , pois a energia cinética é uma grandeza escalar, e não vetorial, muito embora estamos falando de energia cinética associada ao movimento de translação na direção de x , y e z .

$$(E_{cin})_{média} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} \quad \text{Eq. (19).}$$

Por fim, vamos adicionar uma nova grandeza, chamada de constante de Boltzmann k_B e que está relacionada à duas outras constantes conhecidas:

$$k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow$$

$$k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad \text{Eq. (20).}$$

Por fim, chegamos então em uma nova equação que certamente é mais fácil de ser memorizada que a equação 18, porém é tão útil quanto. Utilizando as equações 19 e 20 obtemos:

$$(E_{cin})_{média} = \frac{3}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (21).}$$

A equação 21 é muito importante, uma vez que ela permite relacionarmos a temperatura com a energia cinética média, ou seja, é uma estimativa para a energia cinética de uma única partícula. Para se ter ideia, podemos criar um forno capaz de emitir moléculas com velocidade determinada, basta selecionarmos a temperatura do forno.

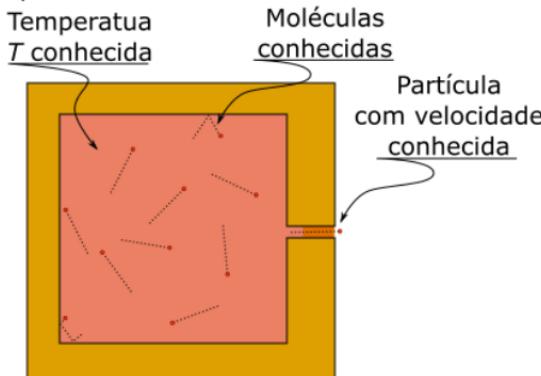


Figura 8: Um forno aquecido capaz de produzir feixes de moléculas com velocidade conhecida.

29. APLICAÇÃO DA TEORIA CINÉTICA DOS GASES

Vamos iniciar a aplicação da teoria cinética dos gases no estudo da gravitação iniciando com a seguinte questão: a temperatura da atmosfera pode influenciar qual o gás fica aprisionado no planeta?

Primeiramente vamos supor que uma molécula esteja com sua velocidade apontada para cima e que ela não colida com nenhuma outra molécula com a atmosfera: esta molécula escaparia do planeta? Considere a constante gravitacional igual à G , a massa do planeta igual à $M_{planeta}$, a massa da molécula deste gás igual à m e o raio do planeta igual à r . Considerem também que esta molécula está na superfície deste planeta.

Vamos calcular a velocidade de escape:

$$E_{\text{Mec superfície}} = E_{\text{Mec infinito}} \Rightarrow E_{\text{Pot superfície}} + E_{\text{Cin superfície}} = E_{\text{Pot infinito}} + E_{\text{Cin infinito}} \Rightarrow$$

$$-\frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m}{r} + \frac{m \cdot v_{\text{escape}}^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{v_{\text{escape}}^2}{2} = \frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r} \Rightarrow \\ v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}.$$

Lembremos da equação 18:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

note, porém, que mudamos de nome a massa da molécula para não A velocidade do gás para que ele escape da atmosfera do planeta deverá ser maior que a velocidade de escape calculada anteriormente, assim temos que:

$$v_{\text{rms}} \geq v_{\text{escape}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3RT}{M}} \geq \sqrt{\frac{2GM_{\text{planeta}}}{r}} \Rightarrow \\ \frac{3RT}{M} \geq \frac{2GM_{\text{planeta}}}{r} \Rightarrow \\ T \geq \frac{2}{3} \frac{G \cdot M \cdot M_{\text{planeta}}}{R \cdot r}.$$

Ou seja, a temperatura mínima de um planeta não depende somente do planeta, mas da massa da molécula.

Como exemplo, vamos calcular a velocidade de escape do nosso planeta, comparar com a velocidade da molécula de oxigênio a temperatura ambiente.

Vamos comparar estas duas velocidades e verificarmos se são da mesma ordem de grandeza.

Antes de continuarmos, vamos multiplicarmos por r e dividirmos por r (dentro da raiz) o lado direito da equação da velocidade de escape, assim vamos simplificar muito o nosso cálculo:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \left(\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r^2} \right)} r \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{2rg}.$$

Note que g é o campo gravitacional que aproximaremos para 10 m/s^2 e r é o raio da Terra que consideraremos igual à $6,4 \cdot 10^6$ metros.

EXERCÍCIOS

01. Calcule a velocidade de escape na superfície da Terra.

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2rg} \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \cdot 10} \Rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot 64 \cdot 10^6} \Rightarrow \\ v_{\text{escape}} = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ m/s. OU } v_{\text{escape}} \approx 11,313 \text{ km/s.}$$

02. Sabendo que a massa de um mol do gás oxigênio é de 16 g por mol, sendo a temperatura ambiente de 27°C e a constante dos gases ideais $R \approx 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, determine a velocidade da molécula de O_2 .

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot (27 + 273)}{16 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow v_{rms} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-1}} \sqrt{\frac{7439}{10^{-1}}} \Rightarrow$$

$$v_{rms} = 2,5\sqrt{74390} \Rightarrow v_{rms} \approx 682 \text{ m/s OU } v_{rms} \approx 0,682 \text{ km/s.}$$

03. Sabendo que a massa de um mol do gás hidrogênio é de 2 g por mol, calcule a velocidade quadrática média mínima desta molécula no espaço sideral sabendo que a mínima temperatura conhecida é de 2,7 K. Use os dados dos exercícios anteriores para efetuar este cálculo.

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 2,7}{2 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow$$

$$v_{rms} = \sqrt{33.655} \Rightarrow v_{rms} \approx 183 \text{ m/s.}$$

04. Por fim, calcule a velocidade de uma molécula do gás nobre hélio, de massa molar 4 gramas por mol à temperatura ambiente.

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot (27 + 273)}{4 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow$$

$$v_{rms} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-1}} \sqrt{\frac{7439}{10^{-1}}} \Rightarrow v_{rms} = 5\sqrt{74390} \Rightarrow$$

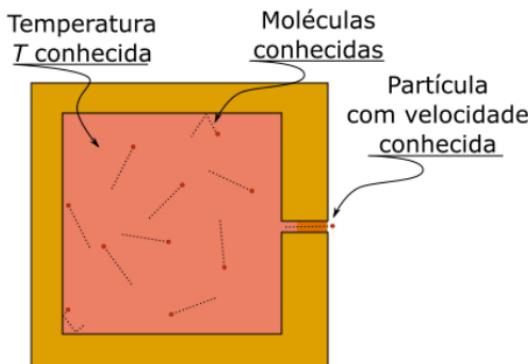
$$v_{rms} \approx 1364 \text{ m/s OU } v_{rms} \approx 1,364 \text{ km/s.}$$

Voltemos à teoria para focarmos no que será de maior importância neste assunto: a relação entre energia cinética e a constante de Boltzmann. Como vimos, a energia cinética média de uma molécula de um gás depende da temperatura do gás e da constante de Boltzmann ($k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$):

$$(E_{cin})_{med} = \frac{3}{2} k_B \cdot T.$$

Com isso, fazemos um último exercício:

05. Utilizando dados anteriores e sabendo que a massa da prata é $1,79 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$, determine a velocidade com que um forno emite átomos de prata estando este forno a 1727°C ?



$$\frac{3}{2} k_B \cdot T = \frac{m \cdot v_{rms}^2}{2} \Rightarrow 3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (1727 + 273) = 1,79 \cdot 10^{-25} \cdot v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$$8,28 \cdot 10^{-20} = 1,79 \cdot 10^{-25} \cdot v_{rms}^2 \Rightarrow 462.570 = v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$$v_{rms} \approx 680 \text{ m/s OU } v_{rms} \approx 0,680 \text{ km/s.}$$

Com isso, você pode ter uma ideia de como se conseguem certas partículas com determinadas velocidades para experimentos, por exemplo, em eletromagnetismo.

06. Compare com a velocidade do som (340 m/s) e com as velocidades anteriores. Note que todas elas são inferiores à velocidade de escape do planeta Terra. Por fim, compare este valor com a velocidade de escape da Lua:

Dados:

$$\text{massa da Lua} = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg};$$

$$\text{constante da gravitação universal} = 3,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2};$$

$$\text{raio da Lua} = 1,7371 \times 10^6 \text{ m.}$$

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}} \Rightarrow$$

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{1,7371 \cdot 10^6}} \Rightarrow v_{\text{escape}} \approx \sqrt{3.109.919} \Rightarrow$$

$$v_{\text{escape}} \approx 1763 \text{ m/s ou } v_{\text{escape}} \approx 1,763 \text{ km/s.}$$

Isso pode nos ajudar a entender o motivo de não termos uma atmosfera na Lua, porém isso não é suficiente, pois a velocidade dos gases ainda é menor que a velocidade de escape.

Vamos então falar de distribuição de velocidades em um gás: não podemos afirmar que todas as moléculas de um gás possuem exatamente a mesma velocidade, então temos que falar de distribuição de velocidades.

30. DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

Vamos falar em distribuição de velocidades.

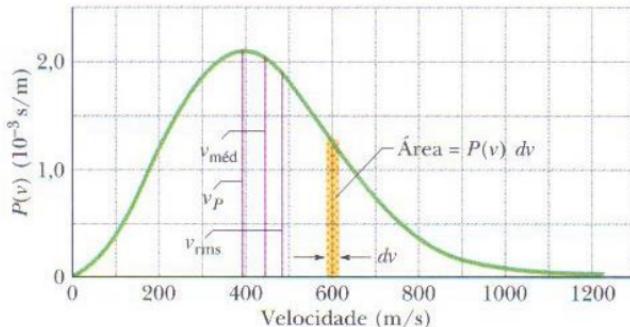


Figura 1: Distribuição de velocidades sendo representado a média das velocidades, a velocidade quadrática média e a velocidade mais provável.

Já falamos sobre velocidade quadrática média e que ela sempre será maior ou igual que a média das velocidades. Quando estudamos gases, as moléculas dos gases não possuem apenas uma velocidade, isto é, as partículas não possuem todas a mesma velocidade e o gráfico acima nos ajuda a entender como se distribui as velocidades.

Seja a área de uma região estreita sob o gráfico da figura 1: a área representa quantas partículas possuem velocidade entre os extremos da base deste triângulo

O valor da velocidade quadrática média (v_{rms}) está representado na figura 1 e é sempre maior que a média das velocidades ($v_{média}$).

Note que a curva possui um pico e este pico representa a velocidade mais provável.

Note que mesmo para um gás onde a $v_{rms} \approx 500$ m/s teremos algumas poucas partículas com velocidade muitos altas, tal como 1200 m/s.

Observe agora a figura 2, no qual está representado as distribuições de velocidades para duas temperaturas do gás oxigênio.

Vejamos agora aquela pergunta da primeira parte sobre teoria cinética dos gases: como podemos manter a água em um vaso de barro e a temperatura da água ficar menor que a temperatura ambiente?

A resposta tem a ver com o fato de que a distribuição de velocidades também deve ser considerada para líquidos e a parede do vaso, por ser de barro, permite que algumas partículas, mais energéticas, atravesse o barro levando consigo uma quantidade significativa de energia, alterando a distribuição de velocidades e diminuindo a temperatura da água.

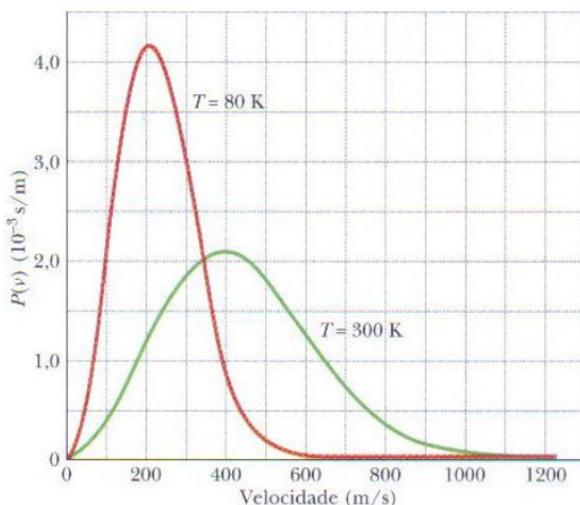


Figura 2: As curvas de distribuição de velocidade para as temperaturas de 300 e 80 K. Note como a distribuição das velocidades fica menos distribuída quando a temperatura é menor.

COMO É POSSÍVEL UM VASO DE BARRO MANTER ÁGUA A UMA TEMPERATURA MENOR QUE A AMBIENTE?

A distribuição de velocidade acima nos ajuda a entender por que apesar da velocidade de escape na lua ser maior que a velocidade média de um gás, ainda assim não observamos uma atmosfera na lua.

Além disso podemos entender aquele velho conhecimento de que uma água armazenada em um recipiente de barro mantém a água gelada: isso se deve ao fato de o barro ser poroso e permitir que as moléculas mais rápidas consigam atravessar o barro, diminuindo a média das velocidades das moléculas no líquido (geralmente água) em seu interior. Por isso, pintar um jarro de barro elimina este efeito.

O fenômeno acima descrito também explica como é possível a água de um lago evaporar mesmo à uma temperatura bem menor que a temperatura de ebulição

Para encerrar, vamos às equações das velocidades. Não precisa decorar nenhuma fórmula.

Velocidade quadrática média:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

sendo M a massa da partícula.

A média das velocidades é:

$$v_{média} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

A velocidade mais provável é:

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

31. LIVRE CAMINHO MÉDIO

Responda mentalmente as seguintes perguntas:

- Se a velocidade das moléculas é tão grande, como pode o som no ar (340 m/s) ter velocidade menos que o das moléculas?
- Se abrirmos um vidro de perfume no interior de uma sala em um canto desta sala, demorará alguns minutos até que uma pessoa no canto oposto sinta este cheiro. Explique como pode demorar tanto para as moléculas do perfume atravessarem a sala se a velocidade destas moléculas deve ser superior a 100 m/s?

A resposta tem a ver com o que chamamos de livre caminho médio.

Vamos falar sobre isso.

Uma molécula em movimento no interior de um gás pode colidir com outra molécula deste gás tendo um caminho aleatório. Veja um esquema sobre isso na figura 1.

A equação 08 a seguir apresentamos uma fórmula que permite determinar o livre caminho médio de uma molécula: O livre caminho médio é a distância média que uma molécula percorre entre duas colisões.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V}.$$

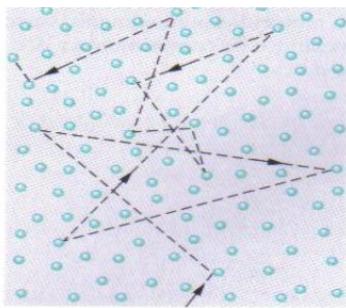


Figura 1: Caminho percorrido por uma molécula de um gás no interior deste gás.

Note que o livre caminho médio depende do inverso da concentração de moléculas por unidade de volume (N/V) e do diâmetro d da molécula.

Vamos a mais um exercício:

06. Sabendo que o diâmetro da molécula de oxigênio é de $2,9 \cdot 10^{-10}$ m, determine o livre caminho médio de uma molécula de oxigênio sob pressão de 1 atm e temperatura de 27 °C. Compare com o diâmetro da molécula de oxigênio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \\ PV = nRT \\ N = n \cdot N_A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \\ n = \frac{PV}{RT} \\ N = n \cdot N_A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \\ N = \frac{PV}{RT} \cdot N_A \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \frac{PV}{RT} \cdot N_A} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi (2,9 \cdot 10^{-10})^2 \frac{1 \cdot 10^5}{8,31 \cdot (27 + 273)} \cdot 6 \cdot 10^{23}} \Rightarrow$$

$$\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{2} \pi 2,024 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{8,961 \cdot 10^6} \Rightarrow$$

$\lambda \approx 1,12 \cdot 10^{-7}$ m ≈ 385 vezes o diâmetro da molécula de oxigênio.

A lista “Termodinâmica”, da apostila pode ser feita até o número 14.

32. EQUIPARTIÇÃO DE ENERGIA

Lembremos da fórmula de energia cinética de uma molécula de um gás ideal monoatômico:

$$(E_{cin})_{méd} = \frac{3}{2} k_B \cdot T.$$

Vamos agora falar de um assunto importante e finalmente voltarmos a trabalhar com gases, tal como você estava mais familiarizado. De forma simplificada, podemos associar a quantidade de energia correspondente à $\frac{1}{2} k_B \cdot T$ a uma direção de movimento (lembremos que temos três possíveis direções de movimento), com isso podemos supor que, em média, temos associado à cada direção de movimento uma quantidade de energia correspondente à $\frac{1}{2} k_B \cdot T$.

Quando falamos de um gás monoatômico, podemos ignorar a energia associada à rotação. Podemos também enunciar o teorema da equipartição da energia da seguinte maneira:

“Associado à cada grau de liberdade de um gás, temos uma quantidade de energia igual à $\frac{1}{2} k_B \cdot T$.

Ou seja, para um gás monoatômico temos 3 graus de liberdade, pois temos três direções independentes às quais podemos associar a energia cinética de translação de uma molécula. Com isso, podemos escrever que:

$$[(E_{inética})_{méd}]_{monoatômico} = [(E_{translação})_{méd}]_{monoatômico} = \frac{3}{2} k_B \cdot T.$$

Para gases diatônicos, temos dois novos graus de liberdades associados à rotação da molécula.

Eu tal vermos este movimento?

<https://www.glowscript.org/#/user/dikcond/folder/Elite2021/program/MoleculaDiatomica>

Assim, usando a ideia de graus de liberdade e o teorema da equipartição, podemos dizer que o gás ideal diatônico possui $\frac{1}{2} k_B \cdot T$ associado à cada grau de liberdade de translação e $\frac{1}{2} k_B \cdot T$ a cada grau de liberdade associado à rotação. Como temos três graus de liberdade de translação, podemos dizer que

$$[(E_{translação})_{méd}]_{diatônico} = [(E_{translação})_{méd}]_{monoatômico} = \frac{3}{2} k_B \cdot T$$

porém este gás também possui energia de rotação. Como são dois graus de liberdade, então:

$$[(E_{rotação})_{méd}]_{diatônico} = \frac{2}{2} k_B \cdot T$$

A soma das energias de translação e de rotação é chamada de energia interna do gás (no caso, ainda estamos pensando em uma única molécula):

$$[(E_{inética})_{méd}]_{diatônico} = \frac{5}{2} k_B \cdot T.$$

Podemos estender esta ideia, agora sem detalhamento, para gases triatônicos dizendo que estes possuem três graus de liberdade:

$$[(E_{inética})_{méd}]_{triatônico} = \frac{7}{2} k_B \cdot T.$$

Sendo f o número de graus de liberdade, podemos dizer que a energia interna associada à uma única molécula, em média, será:

$$[(E_{\text{intern}})_{\text{med}}]_{f-\text{atômico}} = \frac{(2f+1)}{2} k_B \cdot T.$$

A energia interna total de um gás (soma das energias de cada molécula) é a energia interna média vezes o número de moléculas. Sendo n o número de mols da amostra estudada, basta multiplicarmos a energia anterior por $n \cdot N_A$, que seria a quantidade de moléculas.

Agora, sabendo que a constante ideal dos gases ideais se relaciona com a constante de Boltzmann pela relação:

$$R = k_B \cdot N_A$$

em que R é a constante dos gases ideais e N_A é o número de Avogadro.

Chamemos a energia interna de U , então a energia interna total de um gás f -atômico é dada por:

$$\begin{aligned} U &= n \cdot N_A \cdot [(E_{\text{intern}})_{\text{med}}]_{f-\text{atômico}} \Rightarrow U = n \cdot N_A \cdot \frac{(2f+1)}{2} k_B \cdot T \\ U &= n \cdot \frac{(2f+1)}{2} (k_B \cdot N_A) \cdot T \Rightarrow U = n \cdot \frac{(2f+1)}{2} R \cdot T \Rightarrow \\ U &= \frac{(2f+1)}{2} n \cdot R \cdot T. \end{aligned}$$

E esta é a fórmula mais importante vista desde o item 24. Podemos então resumir o que importa na tabela a seguir:

NÚMERO DE ÁTOMOS	GRAUS DE LIBERDADE (f)	ENERGIA INTERNA
1	3	$U = \frac{3}{2} nRT$
2	5	$U = \frac{5}{2} nRT$
3	7	$U = \frac{7}{2} nRT$

A linha em destaque é a mais importante.

Finalmente chegamos no final da teoria cinética dos gases.

Esse conteúdo servirá de base para darmos continuidade ao nosso estudo em termodinâmica.

33. PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A primeira lei da termodinâmica é, na verdade, uma aplicação do princípio da conservação da energia:

Quando fornecemos calor a um gás, este calor pode ser usado pelo gás para realizar trabalho ou para aquecer o gás

Basicamente:

$$Q = \tau + \Delta U.$$

Agora, estamos prontos para alguns exercícios mais avançados.

A lista “Termodinâmica”, da apostila pode ser feita até o número 20.

34. TRANSFORMAÇÕES, CALORES ESPECÍFICOS MOLARES E LEI DE JOULE

(A) TRANFORMAÇÃO ISOTÉRMICA

Como bem sabemos, numa transformação isotérmica, a energia interna do gás fica inalterada e a primeira lei da termodinâmica nos fornece:

$$Q = \tau + \Delta U \Rightarrow$$

$$Q = \tau .$$

Ou seja, todo o calor fornecido para um gás é transformado em trabalho ou, de outra forma, todo trabalho que o gás recebe corresponde ao calor perdido pelo gás.

(B) TRANFORMAÇÃO ISOCÓRICA E CALOR ESPECÍFICO MOLAR A VOLUME CONSTANTE

Como bem sabemos, numa transformação isocórica (ou isométrica ou isovolumétrica), o trabalho realizado pelo gás é zero, assim, pela primeira lei da termodinâmica nos fornece:

$$Q = \tau + \Delta U \Rightarrow Q = \Delta U .$$

Considerando que f seja o número de graus de liberdade do gás, a variação da energia interna do gás é dada por

$$U = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow \Delta U = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot \Delta T .$$

Com isso podemos escrever a primeira lei da termodinâmica da seguinte forma:

$$Q = \left(\frac{f}{2} \right) n \cdot R \cdot \Delta T .$$

Agora podemos considerar uma nova grandeza: o calor específico molar a volume constante C_V .

$$Q = n \cdot C_V \cdot \Delta T .$$

Igualando à equação anterior, temos:

$$n \cdot C_V \cdot \Delta T = \left(\frac{f}{2} \right) n \cdot R \cdot \Delta T \Rightarrow C_V = \frac{f}{2} \cdot R .$$

Vamos montar uma tabela com os valores correspondentes para o calor específico molar para gases mono, di e tri atômicos. Consideraremos, no Sistema Internacional, que $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{C}}$.

Número de átomos na molécula	Número de graus de liberdade	Calor específico, em $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, a volume constante
1	3	12,471
2	5	20,785
3	7	29,099

Comparando com valores reais, vejamos que não diferem muito da realidade:

Molar Specific Heats at Constant Volume		
Ideal Gas vs. Real Gases		
Monatomic Gas	Ideal	$3/2R = 12.5$
	Real	Helium 12.5 Argon 12.6
Diatomeric Gas	Ideal	$5/2R = 20.8$
	Real	Nitrogen 20.7 Oxygen 20.8
Polyatomic Gas	Ideal	$3R = 24.9$
	Real	Ammonium 29.1 Carbon Dioxide 29.7

Fonte: <https://www.thermal-engineering.org/pt-br/o-que-e-calor-especifico-a-volume-e-pressao-constantes-definicao/>

(C) TRANSFORMAÇÃO ISOBÁRICA E CALOR ESPECÍFICO MOLAR A PRESSÃO CONSTANTE

Como bem sabemos, numa transformação isobárica, o trabalho pode ser determinado por:

$$\tau = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$$

e a energia interna, considerando que f seja o número de graus de liberdade do gás, é dada por

$$U = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow \Delta U = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot \Delta T.$$

Com isso podemos escrever a primeira lei da termodinâmica da seguinte forma:

$$Q = n \cdot R \cdot \Delta T + \frac{f}{2} n \cdot R \cdot \Delta T \Rightarrow Q = \left(\frac{f+2}{2} \right) n \cdot R \cdot \Delta T.$$

Continuando com a ideia de calor específico, agora considerando a pressão constante, isto é, C_p , temos

$$Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T.$$

E

$$n \cdot C_p \cdot \Delta T = \left(\frac{f+2}{2} \right) n \cdot R \cdot \Delta T \Rightarrow C_p = \frac{f+2}{2} \cdot R.$$

Criemos novamente uma tabela:

Número de átomos na molécula	Número de graus de liberdade	Calor específico, em $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, a pressão constante
1	3	20,785
2	5	29,099
3	7	37,413

Note que o calor específico a volume constante é menor que o calor específico a pressão constante e podemos entender isso da seguinte maneira:

- A volume constante, todo calor transferido ao gás é transformado em energia interna;
- A pressão constante, portanto, variando o volume, parte do calor fornecido ao gás é usado para realizar trabalho.

(D) RELAÇÃO ENTRE C_V E C_P

Note que a diferença entre os calores específicos é constante e igual à R :

$$C_P - C_V = \frac{f+2}{2} \cdot R - \frac{f}{2} \cdot R \Rightarrow$$

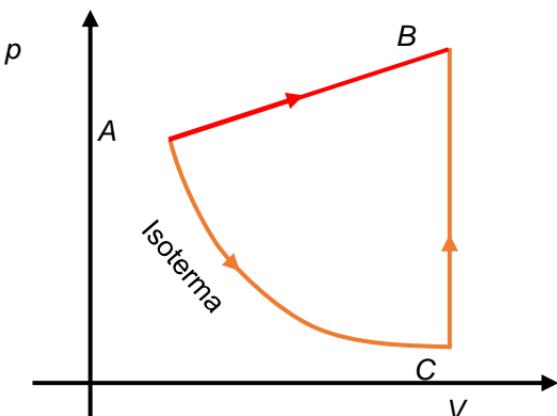
$$C_P - C_V = R.$$

Esta relação é chamada de relação de Mayer.

(E) A LEI DE JOULE E O CALOR MOLAR

Numa transformação qualquer $A \rightarrow B$, podemos determinar a variação da energia interna utilizando apenas o C_V da seguinte maneira:

- Primeiro consideremos uma transformação isoterma até que o volume do gás seja igual ao volume no estado B;
- Depois consideremos uma transformação isocórica $C \rightarrow D$



$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = 0 + (Q_{CV} - \tau_{CV}) \Rightarrow$$

$$\Delta U_{AB} = (n \cdot C_V \cdot \Delta T - 0) \Rightarrow \Delta U_{AB} = n \cdot C_V \cdot \Delta T.$$

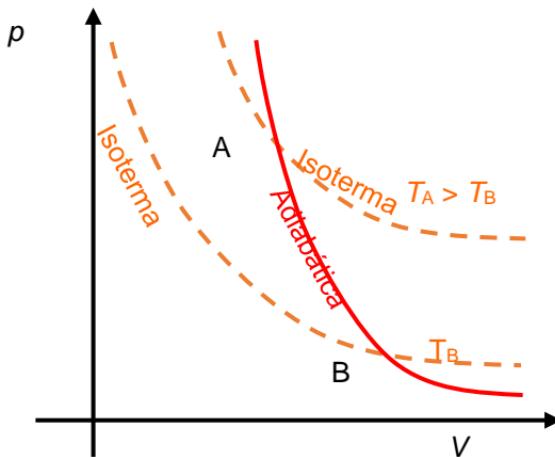
35. TRANSFORMAÇÃO ADIABÁTICA

Seja uma transformação adiabática A → B, além da relação entre as grandezas p , V , n e T estudada na lei geral dos gases ideais, quando temos uma transformação adiabática temos uma nova relação:

$$p_A \cdot V_A^\gamma = p_B \cdot V_B^\gamma .$$

sendo γ uma constante conhecida como coeficiente de Poisson ou constante de Poisson dada por:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$



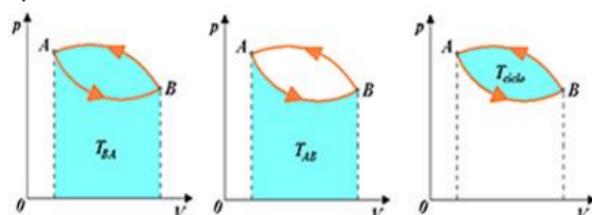
Vamos determinar o coeficiente de Poisson para casos mono, di e tri atômicos considerando f como sendo o número de graus de liberdade.

$$\begin{cases} C_p = \frac{f+2}{2} \cdot R \\ C_V = \frac{f}{2} \cdot R \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{f+2}{2} \cdot R}{\frac{f}{2} \cdot R} = \frac{f+2}{f}$$

Número de átomos na molécula	Número de graus de liberdade	Coeficiente de Poisson $\gamma = \frac{f+2}{f}$
1	3	$5/3 = 1,66667$
2	5	$7/5 = 1,40000$
3	7	$9/7 = 1,28571$

36. TRANSFORMAÇÕES CÍCLICAS

Numa transformação cíclica o trabalho é determinado pela área no interior do ciclo no diagrama p vs V .



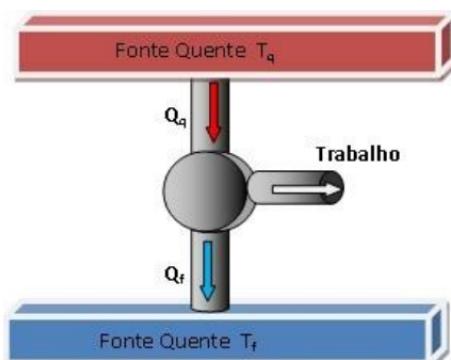
Assim, obtemos a seguinte “regra” quando temos uma transformação cíclica representada no diagrama p vs V :

- Numa transformação cíclica no sentido horário o trabalho será positivo;
- Numa transformação cíclica no sentido anti-horário o trabalho será negativo;
- Numa transformação cíclica, o trabalho tem módulo igual à área interna do ciclo e o sinal (positivo ou negativo) é determinado segundo as duas regras anteriores.

A lista “Termodinâmica”, da apostila pode ser feita até o número 27.

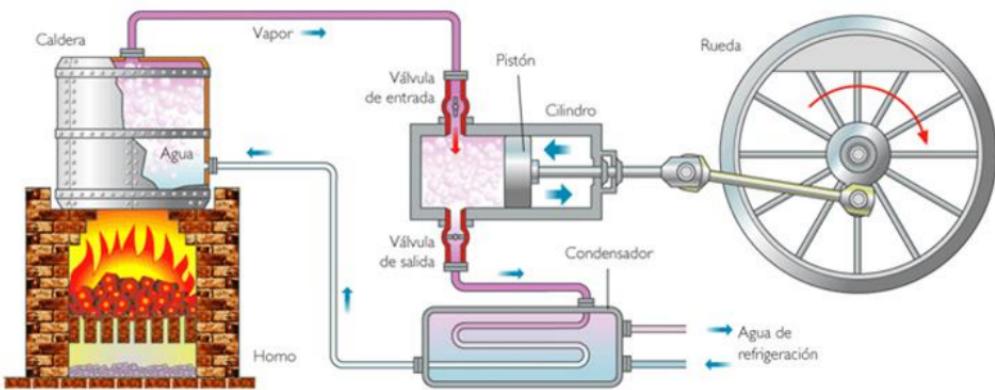
37. MÁQUINAS TÉRMICAS

Representação

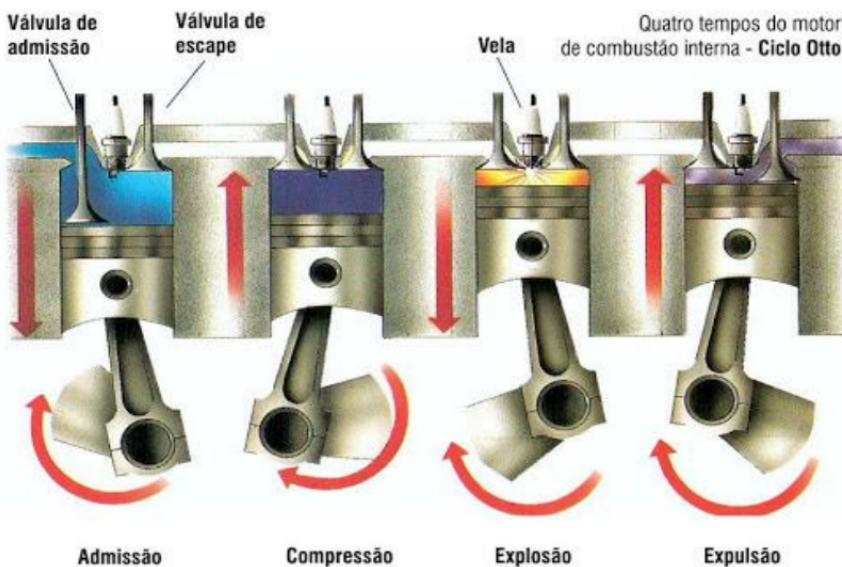
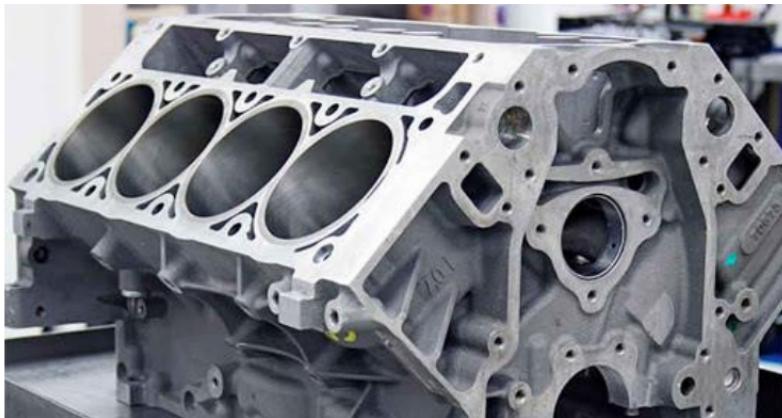


Exemplos de máquinas térmicas:

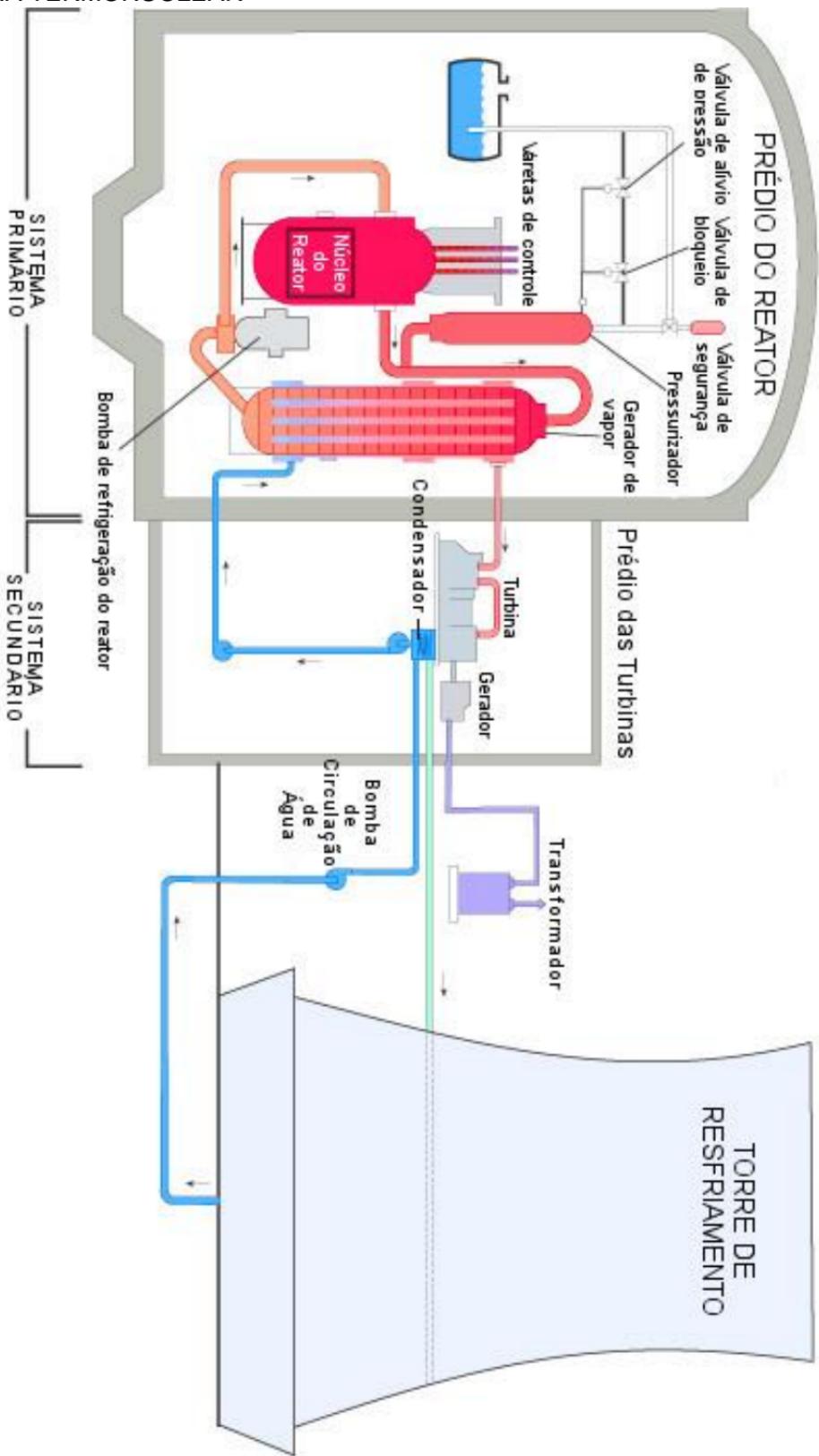
MÁQUINA A VAPOR



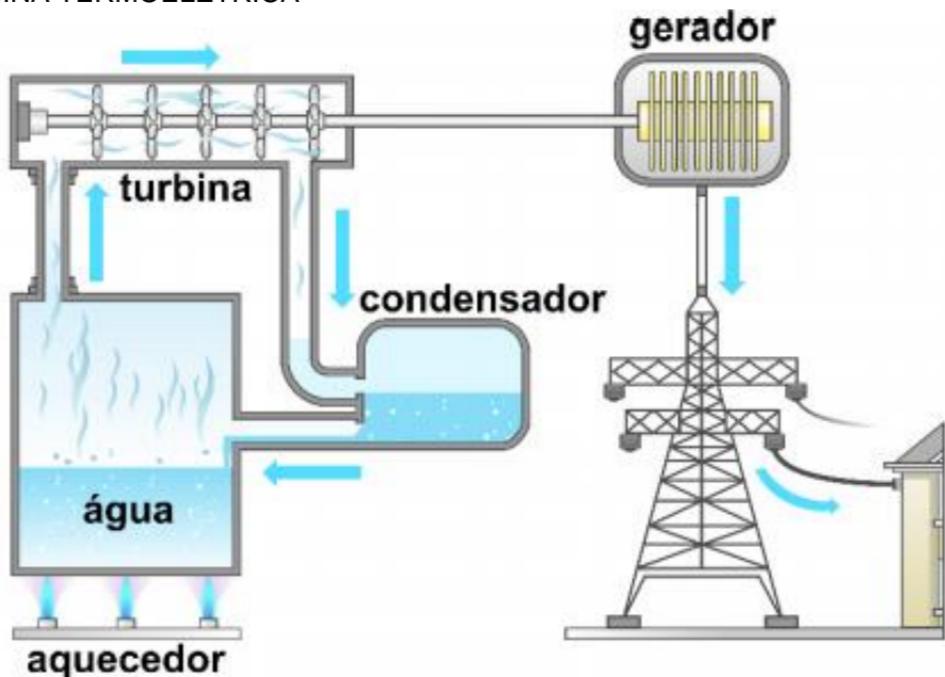
MOTOR A COMBUSTÃO INTERNA



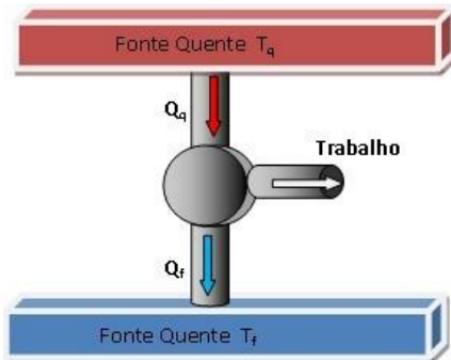
USINA TERMONUCLEAR



USINA TERMOELÉTRICA



Voltemos ao esquema inicial de uma máquina térmica. Note que precisamos sempre rejeitar uma certa quantia de calor. Dizemos que há sempre uma fonte quente e uma fria e que o calor recebido da fonte quente é chamado de Q_q e o rejeitado à fonte fria é chamaremos de Q_f .



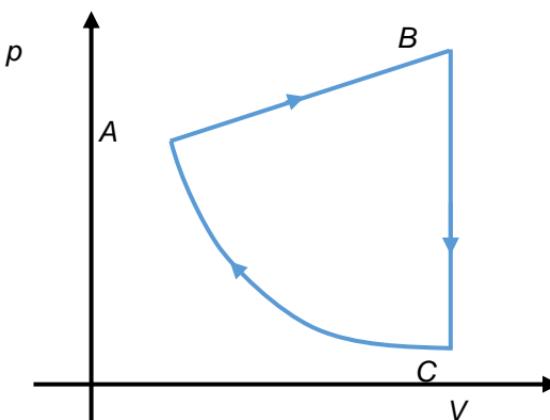
Levando em conta a conservação de energia, a parte de calor não rejeitada é transformada em trabalho, ou seja:

$$Q_q = \tau + Q_f \Rightarrow \tau = Q_q - Q_f.$$

Chamaremos de rendimento a razão entre o trabalho realizado pelo calor advindo da fonte quente. Assim, podemos determinar o rendimento de uma máquina térmica genérica:

$$\eta = \frac{\tau}{Q_q} \Rightarrow \eta = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} \Rightarrow$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}.$$



No exemplo acima, o trabalho no trecho AB é positivo e no trecho CA é negativo. Em módulo, o trabalho será dado pela área interna do diagrama ABC, e o sinal (positivo ou negativo) é dado pelo sentido: positivo no sentido horário e negativo no sentido anti-horário.

Note também que num ciclo ABCA a variação da energia interna é nula, por isso que podemos dizer que o calor total no ciclo é $Q = Q_q - Q_f$ e $Q = \tau + \Delta U \Rightarrow Q = \tau$, ou seja, $Q_q - Q_f = \tau$.

Note que uma máquina térmica deve executar o ciclo térmico diversas vezes, como indicado no painel de um carro, em que ele executa um ciclo completo em cada cilindro no motor. Ao lado vemos um exemplo:



Na figura acima vemos que a rotação do motor está em 2400 rpm (aproximadamente), ou seja, o motor executa 2400 ciclos em um minuto.

Dividindo por 60 (número de segundos em um minuto), descobrimos que o motor executa $2400 / 60 = 40$ ciclos a cada segundo (ou seja, 40 Hz).

Chamaremos isso de frequência f e o inverso disso chamaremos de período $T = 1/f$.

A potência útil do motor pode ser determinada dividindo o trabalho em um ciclo pelo período ou multiplicando por f :

$$P_{util} = \frac{\tau}{T} = \tau \cdot f.$$

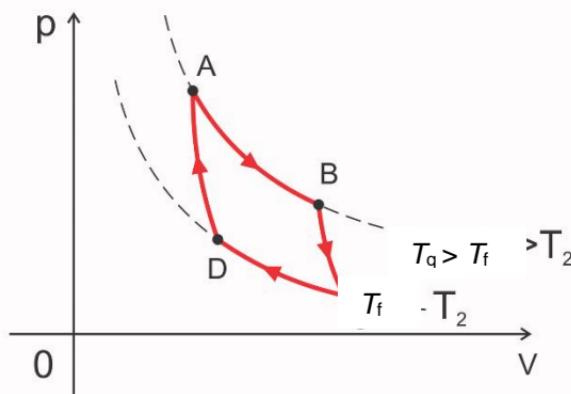
A chamaremos a potência fornecida pela fonte quente de $P_q = Q_q \cdot f$ e a potência rejeitada para a fonte fria de $P_f = Q_f \cdot f$, podemos então reescrever a equação do rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{P_f / f}{P_q / f} \Rightarrow$$

$$\eta = 1 - \frac{P_f}{P_q}.$$

38. CICLO DE CARNOT

Existe um ciclo no qual o rendimento é máximo e este ciclo é chamado de ciclo de Carnot.



Um ciclo de Carnot é definido pelo ciclo limitado por duas isotermas e duas adiabáticas. Carnot, um engenheiro francês, pôde concluir que o rendimento máximo de uma máquina térmica pode ocorrer quando o ciclo da máquina térmica é como o representado na figura anterior e a relação abaixo deve ser obedecida:

$$\frac{Q_f}{Q_q} = \frac{T_f}{T_q}.$$

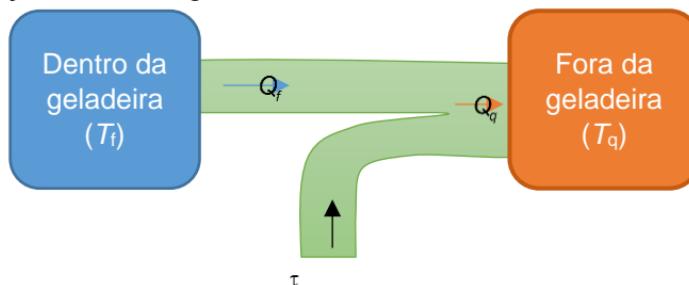
Substituindo esta razão na equação do rendimento, temos:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_q} \geq \eta.$$

39. REFRIGERADORES E CICLO DE CARNOT

Refrigeradores (geladeiras), ar-condicionado e bombas de calor (aqueles aparelhos de ar-condicionado que conseguem aquecer um ambiente) são máquinas térmicas.

Vamos começar com o refrigerador:



Note que a geladeira deve ser ligada na tomada para que seja extraído calor do interior da geladeira. Assim, por conservação da energia, temos que o calor removido da fonte fria somado ao trabalho realizado sobre o gás e cuja energia veio da rede elétrica:

$$Q_q = Q_f + \tau.$$

Vamos agora determinar um novo coeficiente, agora chamado de coeficiente de rendimento (CDR). Similarmente ao coeficiente de rendimento, vamos definir-o como sendo a razão entre o calor extraído da fonte fria pelo custo energético (agora o trabalho):

$$CDR = \frac{Q_f}{\tau}$$

Da equação anterior podemos, podemos isolar o trabalho e reescrever a relação do CDR:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = Q_q - Q_f \\ CDR = \frac{Q_f}{\tau}, \end{array} \right.$$

$$CDR = \frac{Q_f}{Q_q - Q_f} \quad \div Q_f \Rightarrow$$

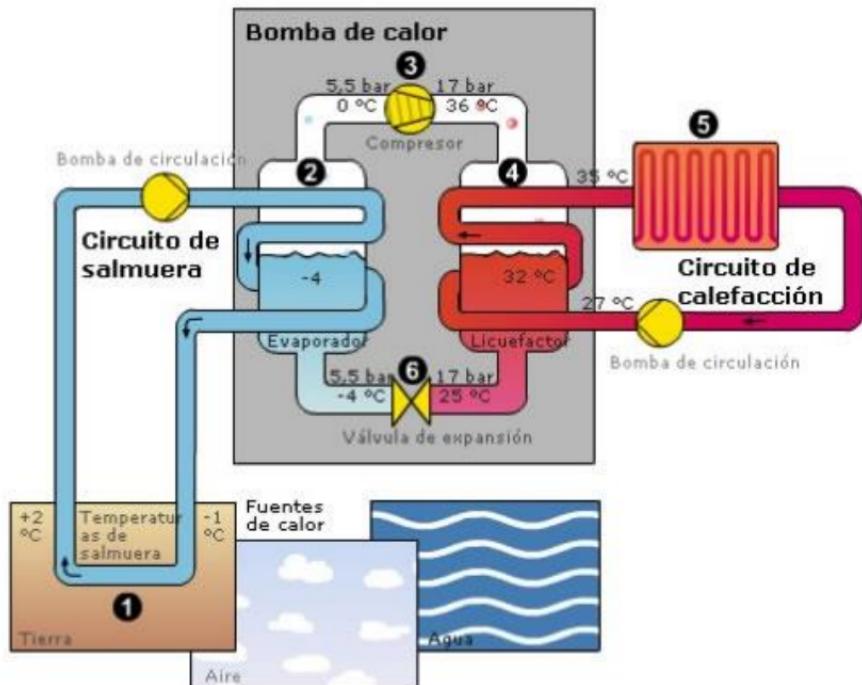
$$CDR = \frac{1}{\frac{Q_q}{Q_f} - 1}.$$

Se tivéssemos um refrigerador de Carnot, podemos definir o coeficiente de rendimento do ciclo de Carnot como:

$$CDR_{Carnot} = \frac{1}{\frac{T_q}{T_f} - 1} \geq CDR.$$

O ciclo é o mesmo que o da máquina térmica de Carnot, invertendo somente o sentido do ciclo (sentido anti-horário no caso do refrigerador).

No caso do ar-condicionado temos exatamente a mesma ideia, sendo que a parte interna da geladeira passaria a ser a parte interna da sala. Vejamos alguns esquemas sobre o ar-condicionado.



A imagem ao lado apresenta um trocador de calor, que fica geralmente em um local alto e inacessível à maioria das pessoas. Nele, o calor e a energia vinda da rede elétrica, são dissipados na forma de calor.

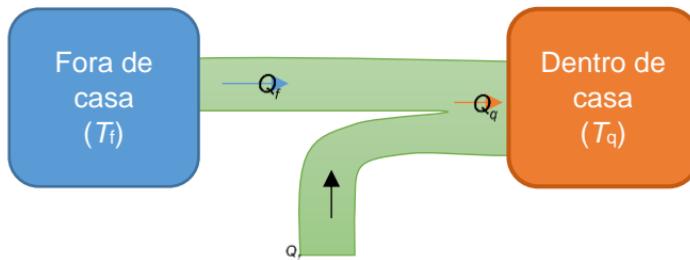


Ao lado temos uma imagem de um radiador, algo similar ao que tem no trocador de calor.



Falta agora falarmos da bomba de calor, que serve para aquecer um ambiente, assim como aquecedores resistivos. Diferente do sistema resistivo, a bomba de calor usa a energia térmica vinda da rede elétrica e uma certa quantidade de

calor extraída da fonte quente. Fazendo uma comparação com a geladeira, usamos a bomba de calor em dias frios, assim é como se a parte interna da geladeira fosse a área externa enquanto a parte dentro de casa seria a fonte quente.



A discussão aqui é exatamente a mesma que fizemos anteriormente. Sobre unidades de medidas, usamos no dia a dia uma unidade de medida britânica chamada de BTU (*British thermal unit*) que equivale a 252,2 calorias ou 1055,05585 joules. Quando compramos um ar-condicionado, geralmente consideramos que a energia extraída é em BTU por hora.

Como exemplo, seja um ar-condicionado capaz de extrair 1800 BTUs de calor por hora, então qual será a potência térmica extraída da fonte fria em W?

Resposta:

$$P_f = \frac{18000 \text{ BTU}}{3600 \text{ s}} = \frac{5 \cdot 1055,05585 \text{ J}}{\text{s}} \approx 5275 \text{ W.}$$

Como curiosidade, uma pessoa dissipava 100 W, assim este ar-condicionado manteria uma temperatura constante uma sala com até 52 pessoas, desprezando qualquer perda de calor pelas paredes da sala. Na prática, o ganho de calor do ambiente, seja devido às portas abertas ou janelas, mesmo que fechadas, porém finas e não isoladas termicamente, é muito maior que o devido às pessoas no ambiente. Para entender melhor, deveríamos estudar a condução térmica, assunto visto no primeiro ano e que não será retomado aqui.

40. SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

De forma muito simplificada, vamos definir a entropia como sendo o nível de desordem de um sistema. Também podemos calcular a entropia de um sistema como sendo

$$\Delta S = \frac{Q}{T}.$$

Ou seja, a variação da entropia ΔS de um sistema a uma temperatura T que recebeu (ou cedeu) uma quantidade de calor Q . Tendo assim esta ideia, podemos enunciar a segunda lei da termodinâmica de duas formas:

Enunciado de Claussius:

O calor flui espontaneamente de um corpo quente para um corpo frio. O inverso só ocorre com a realização de trabalho.

Enunciado de Max Planck

É impossível, para uma máquina térmica que opera em ciclos, converter integralmente calor em trabalho.

Como consequência, se tivéssemos uma máquina térmica que viole estas leis ou mesmo que tenha rendimento maior que o rendimento de uma máquina de Carnot, poderíamos extrair energia sem necessidade de combustíveis.

Abaixo, temos uma página de um livro que discute isso de forma muito bem descrita. O texto abaixo foi retirado do livro de física "Fundamentos de Física", Halliday e Resnick.

20-7 | A Eficiência de Máquinas Térmicas Reais

Seja ε_C a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre duas temperaturas dadas. Nesta seção mostraremos que nenhuma máquina térmica real operando entre as mesmas temperaturas pode ter uma eficiência maior do que ε_C . Se isso fosse possível, a máquina violaria a segunda lei da termodinâmica.

Vamos supor que um inventor, trabalhando na garagem de casa, tenha construído uma máquina X que, segundo ele, possui uma eficiência ε_X maior do que ε_C :

$$\varepsilon_X > \varepsilon_C \quad (\text{alegação do inventor}). \quad (20-17)$$

Vamos acoplar a máquina X a um refrigerador de Carnot, como na Fig. 20-16a. Ajustamos os tempos do refrigerador de Carnot para que o trabalho necessário por ciclo seja exatamente igual ao executado pela máquina X . Assim, não existe nenhum trabalho (externo) associado à combinação máquina térmica + refrigerador da Fig. 20-16a, que tomamos como sendo nosso sistema.

Se a Eq. 20-17 for verdadeira, de acordo com a definição de eficiência (Eq. 20-11) devemos ter

$$\frac{|W|}{|Q'_0|} > \frac{|W|}{|Q_0|}.$$

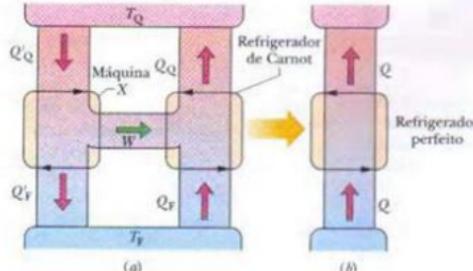


FIG. 20-16 (a) A máquina térmica X alimenta um refrigerador de Carnot. (b) Se, como alega o inventor, a máquina X é mais eficiente que a máquina de Carnot, a combinação mostrada em (a) é equivalente ao refrigerador perfeito mostrado em (b). Como isso viola a segunda lei da termodinâmica, concluimos que a máquina X não pode ser mais eficiente que uma máquina de Carnot.

onde a plica indica a máquina X , e o lado direito da desigualdade é a eficiência do refrigerador de Carnot quando funciona como uma máquina térmica. Esta desigualdade exige que

$$|Q_O| > |Q'_O|. \quad (20-18)$$

Como o trabalho realizado pela máquina X é igual ao trabalho realizado sobre o refrigerador de Carnot, temos, segundo a primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. 20-8,

$$|Q_O| - |Q_F| = |Q'_O| - |Q'_F|,$$

que pode ser escrita na forma

$$|Q_O| - |Q'_O| = |Q_F| - |Q'_F| = Q. \quad (20-19)$$

De acordo com a Eq. 20-18, o valor de Q na Eq. 20-19 deve ser positivo.

De acordo com a Eq. 20-19 e a Fig. 20-16, o efeito da máquina X e do refrigerador de Carnot, trabalhando em conjunto, é transferir uma energia Q na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho. Assim, a combinação age como o refrigerador perfeito da Fig. 20-15, cuja existência viola a segunda lei da termodinâmica.

Algo deve estar errado com uma ou mais de nossas suposições, e a única que foi tomada arbitrariamente foi aquela expressa pela Eq. 20-17. A conclusão é que *nenhuma máquina real pode ter uma eficiência maior que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas*. Na melhor das hipóteses, a máquina real pode ter uma eficiência igual à de uma máquina de Carnot. Nesse caso, a máquina real é uma máquina de Carnot.

A lista “Termodinâmica”, da apostila pode ser feita por completo.

41. MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES – INTRODUÇÃO

(A) SISTEMAS OSCILATÓRIOS

- Pêndulos, um bloco em uma mola, uma folha em uma árvore etc.

(B) GRANDEZAS EM SISTEMAS OSCILATÓRIOS

- Definição de período

$$T = \frac{\Delta t}{\text{número de oscilações}} = \text{tempo de uma volta} \quad (1)$$

- No sistema internacional o período é medido em segundos

- Definição de frequência

$$f = \frac{\text{número de oscilações}}{\Delta t} = \text{oscilações por segundo} \quad (2)$$

- No sistema internacional a frequência é medida em hertz (Hz) e equivale ao inverso de um segundo

- Relação entre período e frequência

$$T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

(C) SISTEMA MASSA MOLA

- Vamos estudar inicialmente um bloco em uma mola
- Não consideraremos força de atrito
- Lembremos da segunda lei de Newton

$$F_{res} = m \cdot a \quad (4)$$

- Vejamos a lei de Hook

$$F_{el} = -k \cdot x \quad (5)$$

- Se a única força que age sobre o corpo é a elástica então ela é a resultante

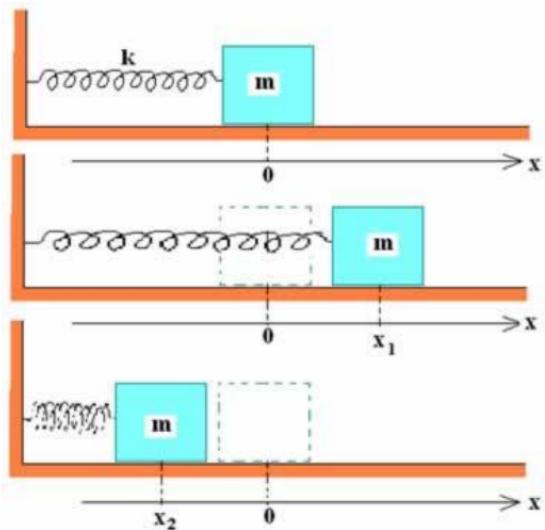
$$\boxed{m \cdot a = -k \cdot x} \quad (6)$$

- A equação 6 é a equação chave do estudo de oscilações e começaremos com uma pergunta que parece simples, mas por séculos a humanidade não sabia a resposta:

- Qual a equação horária de $x(t)$ e $a(t)$ que satisfaz a equação (6)?

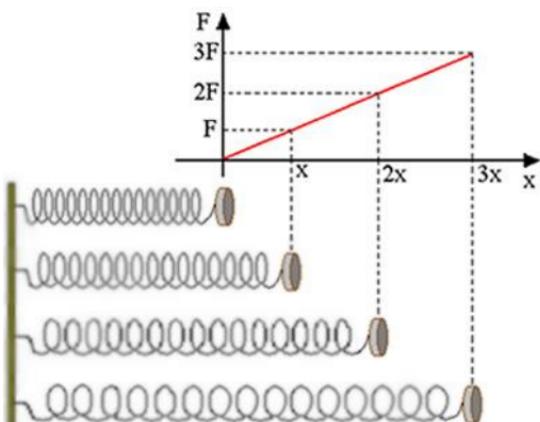
- Todo sistema que sofre a ação de uma força de acordo com a equação (6) é dito um sistema que se move em um MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES ou MHS
- Vamos então estudar o sistema massa-mola

42. SISTEMA MASSA-MOLA



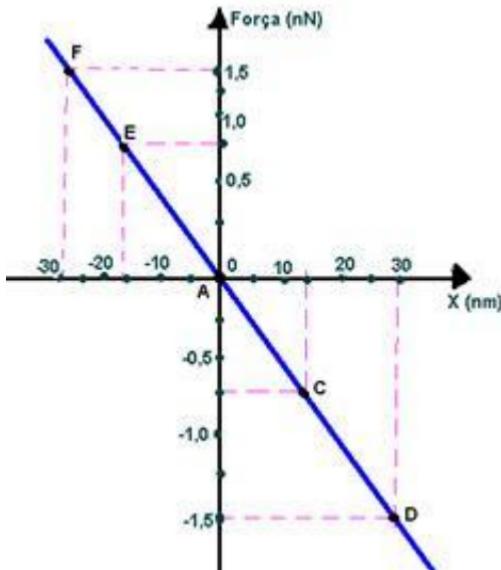
Fonte: <https://alunosonline.uol.com.br/fisica/mhs.html>

- Seja um bloco preso em uma mola de acordo com a figura anterior que oscila na horizontal e que não haja atrito
- Note que há um referencial, considerado positivo para a direita
- Assim se $x > 0$ (deslocamento para a direita) a força elástica é para a esquerda, ou seja, $F_{el} < 0$
- Isso justifica porque consideraremos um sinal negativo na equação da Lei de Hooke
- Gráfico do módulo da força versus módulo da posição



Fonte: <https://alunosonline.uol.com.br/fisica/representacao-grafica-lei-hooke.html>

- O gráfico, na forma escalar, seria



Fonte: <http://fisicavestibular.com.br/novo/mecanica/dinamica/mhs/mhs-sistema-massa-mola/exercicios-de-vestibulares-com-resolucao-comentada-sobre-mhs-sistema-massa-mola/>

- Período no MHS

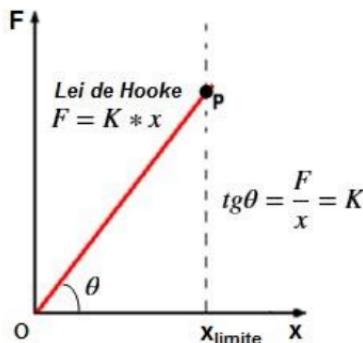
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

Sendo m a massa do bloco oscilando

- Frequência no MHS

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

- Note também que a inclinação do gráfico nos fornece a constante elástica



Fonte: http://4.bp.blogspot.com/-xA_2nd9A5CY/VIBdq-4MxWI/AAAAAAAADb4/rjkGwok73ME/s1600/Pic-Hooke-03a.bmp

43. ENERGIA NO MHS

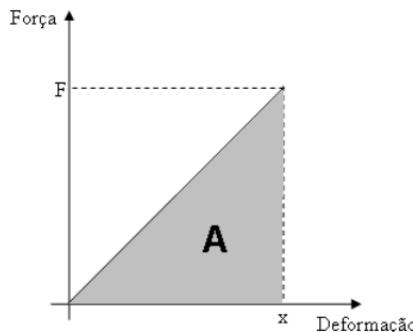
- Como não há atrito, dizemos que no MHS não há forças dissipativas e por isso dizemos que é um sistema conservativo
- Um sistema conservativo, em mecânica, é um sistema que mantém constante a energia mecânica total de um sistema
- Lembre-se que a energia mecânica é a soma da energia potencial mais a energia cinética:

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} \quad (9)$$

- Lembremos que

$$E_{cin} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (10)$$

- A energia potencial está relacionada ao trabalho que a mola é capaz de fazer quando liberada, assim podemos determiná-la pelo gráfico da força elástica
- Consideraremos o gráfico do módulo da força elástica



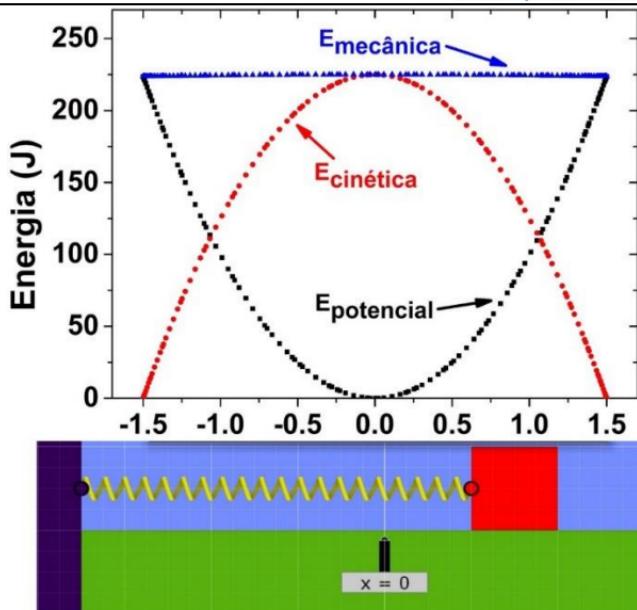
Fonte: <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/energia2.php>

$$\text{Área} = \frac{x \cdot F}{2} = \frac{x \cdot kx}{2} \Rightarrow$$

$$\tau = E_{pot} = \frac{k \cdot x^2}{2} \quad (11)$$

- Como o sistema é conservativo a energia mecânica total do sistema é constante

$$E_{mec} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (12)$$



Fonte: <https://labanimation.wordpress.com/sistema-massa-mola/>

- Observe que quando x é máximo, a velocidade é mínima
- A posição varia de $-A < x < A$, assim o máximo valor de x é A , e x vai de $-A$ a A
- Observe que quando a energia potencial é máxima toda a energia mecânica está na forma de energia potencial

$$E_{mec} = \frac{k \cdot A^2}{2} \quad (13)$$

- Quando a velocidade é máxima a energia mecânica está na forma de energia cinética

$$E_{mec} = \frac{m \cdot v_{máx}^2}{2} \quad (14)$$

- Igualando (13) com (14)

$$\frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot v_{máx}^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad (15)$$

44. PÊNDULO SIMPLES

- Demonstração da equação do pêndulo simples

A força restauradora em um pêndulo simples é

$$mg \operatorname{sen} \theta$$

A posição x é dada por

$$x \approx L\theta$$

Para pequenos

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta$$

Com isso

$$mg \operatorname{sen} \theta = ma \Rightarrow mg \frac{x}{L} \approx ma$$

Como a força é restauradora, fica mais bem escrita como

$$ma = -\frac{mg}{L}x$$

Comparando com a equação do MHS (sistema massa-mola)

$$ma = -kx$$

Vemos que $k = mg/L$ assim temos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} \Rightarrow$$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

(16)

Ou se preferir

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad e \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (17)$$

- Como exercício extra:

Você fez um túnel ligando o Elite ao Japão. Ao soltar uma maçã esta começou um movimento harmônico simples.

Em função da aceleração da gravidade no Elite g e do raio da Terra R determine o tempo que a maçã leva para atingir o Japão considerando desprezível a resistência do ar e que a densidade da Terra seja constante.

Na superfície da Terra

$$mg = \frac{GM'm}{x^2} = \frac{G}{x^2} \left(\rho \frac{4}{3} \pi x^3 \right) m = \frac{G}{d^2} \left(\frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi x^3 \right) m \Rightarrow$$

$$mg = \frac{GM}{R^3} xm \Rightarrow mg = \frac{GMm}{R^3} \cdot x$$

Esta força é restauradora e por isso podemos comparar com a força elástica no MHS:

$$ma = -\frac{GMm}{R^3} \cdot x$$

$$ma = -kx$$

Vemos que $k = \frac{GMm}{R^3}$, com isso:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

(18)

Note que na superfície da Terra $mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$ logo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{GM/R^2} \cdot R} = T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

O tempo de viagem do Elite ao Japão é

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

Substituindo os dados ($g = 10 \text{ m/s}^2$ e $R = 6400 \text{ km}$) temos

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \pi \sqrt{\frac{6400 \cdot 10^3}{10}} = \pi \sqrt{64 \cdot 10^4} \Rightarrow \Delta t \approx 2.513 \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Delta t \approx 41 \text{ min } 53 \text{ s}$$

45. EQUAÇÃO DO MHS

Lembremos que o problema fundamental no MHS é resolver a seguinte equação:

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (19)$$

Entendemos por resolver esta equação encontrar $x(t)$ e $a(t)$ que satisfaça esta equação. Note que $x(t)$ é a posição em função do

tempo e $a(t)$ é a aceleração em função do tempo, isto é, queremos encontrar duas funções que satisfaça o problema acima.

Esse tipo de problema é inédito para qualquer aluno do ensino médio e não vamos estudar em detalhes como chegar nessa solução.

Entretanto precisamos saber de duas coisas:

1. sabe-se que se encontrarmos alguma solução para tal problema, esta solução é única;
2. as equações que resolvem o problema são na verdade a projeção do **movimento** circular uniforme em uma reta (digamos no eixo x para um corpo que executa um movimento circular uniforme no sentido anti-horário em uma circunferência de raio R , centrada na origem do sistema cartesiano que usaremos como referência e velocidade angular ω).

Entendemos a projeção do movimento não somente a projeção da posição, mas também de todo vetor que caracteriza o **movimento** do corpo. São elas:

- Posição;
- Velocidade;
- Aceleração.

Comecemos calculando a posição x da projeção da posição do corpo, que representaremos por um ponto.

(A) EQUAÇÃO DA POSIÇÃO $x(t)$

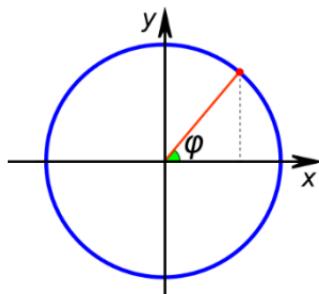


Figura 1: projeção horizontal da posição de um corpo em m.c.u.

Lembremos da matemática que a abscissa x é o cosseno do ângulo φ vezes o raio R da circunferência. Assim:

$$x = R \cdot \cos(\varphi) \quad (20)$$

Lembremos que no movimento circular a velocidade angular é dada por:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Que desenvolvendo chega-se a:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t \quad (21)$$

Note que se costuma escrever a equação (21) na forma

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

Ambas as formas são equivalentes e o que importa é lembrar que a velocidade angular sempre multiplicará o tempo.

Agora substituímos a equação (21) na equação (20):

$$x = R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Como dissemos esta equação descreve o movimento de um corpo em MHS, logo não faz sentido em falar de ângulo inicial φ_0 , velocidade angular ω ou mesmo raio R e por isso identificamos as grandezas equivalentes no sistema harmônico simples.

Chamaremos:

- φ de fase;
- φ_0 de fase inicial;
- ω de frequência angular;
- R será a amplitude de movimento e a única grandeza que trocaremos o seu símbolo: usaremos A para indicá-la.

Agora podemos escrever a equação do MHS para a posição:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (22)$$

(B) EQUAÇÃO DA VELOCIDADE $v(t)$

Observe a figura a seguir onde está representada a velocidade instantânea do corpo em m.c.u. (movimento circular e uniforme):

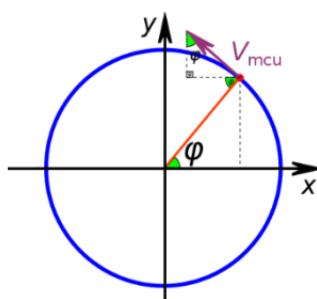


Figura 2: projeção horizontal da velocidade de um corpo em m.c.u

Note que pela propriedade dos ângulos alternos internos serem iguais, a velocidade instantânea ser perpendicular ao raio e a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo ser 180° podemos ver onde φ se encontra no triângulo superior.

Observe que a velocidade da projeção horizontal v é a velocidade do movimento circular vezes seno, pois:

$$\text{sen } \varphi = \frac{v}{V_{\text{mcu}}} \Rightarrow v = V_{\text{mcu}} \cdot \text{sen } \varphi \quad (23)$$

Lembremos que no movimento circular a velocidade é o produto da velocidade angular pelo raio

$$V_{\text{mcu}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \xrightarrow{\text{para uma volta}} V_{\text{mcu}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot R \Rightarrow$$

$$V_{\text{mcu}} = \omega \cdot R \quad (24)$$

Substituímos a equação (21) e (24) em (23) e usamos as substituições do m.c.u. para o MHS descritas no subitem (A):

$$v = \omega \cdot R \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$v = A \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Mas está ainda não é a solução final uma vez que o sinal da velocidade deve ser dado pela equação que procuramos, pois assim a solução fica completa.

Vamos começar analisando o sinal da função seno no círculo trigonométrico. Isso é feito na figura a seguir:

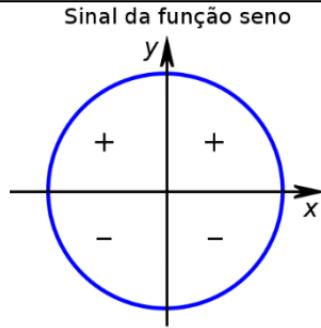


Figura 3: sinais da função seno em cada quadrante

Compare com o sinal da velocidade em cada quadrante do círculo. Antes lembremos os nomes dos quadrantes:

Nome dos quadrantes

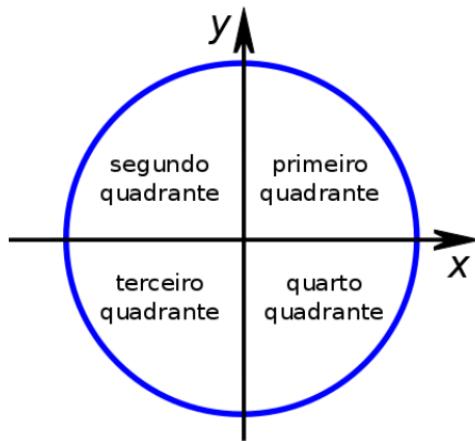


Figura 4: nome dos quadrantes em um círculo trigonométrico

Agora observe o sentido da projeção da velocidade em cada quadrante. Lembrando que estamos falando da velocidade no MHS, que é a projeção do vetor velocidade no m.c.u. no sentido anti-horário:

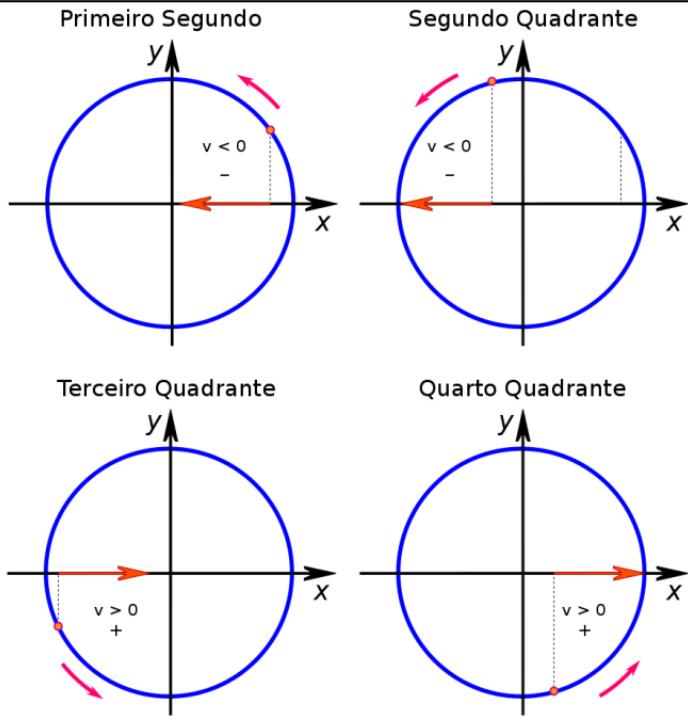


Figura 5: análise dos sinais da projeção horizontal da velocidade de um corpo em movimento circular e uniforme (m.c.u.). Note que esta é a direção correspondente à velocidade de um corpo em MHS

Observe que os sinais entre a função seno e a velocidade que encontramos é exatamente oposta, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 1: Comparação entre os sinais da função seno e os sinais da velocidade que encontramos

Quadrante	Sinal da função seno	Sinal da velocidade (encontrada)
Primeiro	+	-
Segundo	+	-
Terceiro	-	+
Quarto	-	+

Assim fica fácil ver que devemos multiplicar por -1 a função que encontramos (equivale a adicionar um de menos na equação obtida), portanto:

$$v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (25)$$

(C) EQUAÇÃO DA ACELERAÇÃO $a(t)$

Por fim faremos o mesmo para a aceleração.

Antes disso lembremos que se um corpo possui movimento circular uniforme, isto é, se a velocidade vetorial do corpo possuir velocidade vetorial de **módulo** constante, ele possui aceleração, pois o vetor velocidade muda com o tempo (altera a sua direção).

Esta aceleração é a centrípeta cuja fórmula é:

$$a_{cp} = \frac{v_{mcu}^2}{R}$$

Usando a equação (24) obtemos:

$$a_{cp} = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} \Rightarrow$$

$$a_{cp} = \frac{v_{mcu}^2}{R} \quad (26)$$

Agora vamos calcular a componente horizontal desta aceleração como fizemos com a posição e com a velocidade:

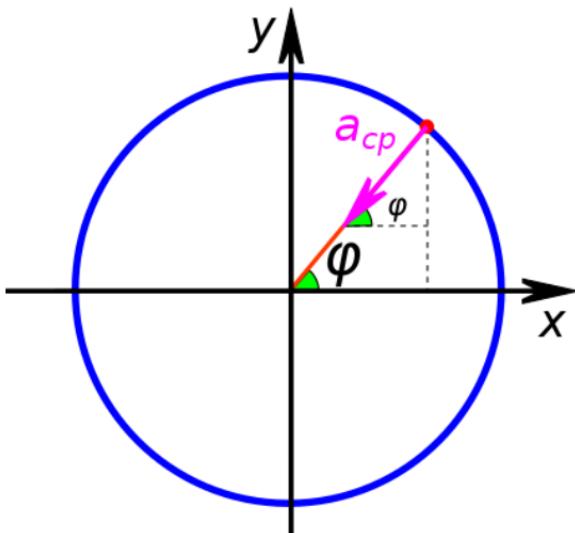


Figura 6: projeção horizontal da aceleração de um corpo em mcu

A componente horizontal desta velocidade é:

$$\cos \varphi = \frac{a}{a_{cp}} \Rightarrow a = a_{cp} \cos \varphi$$

Substituindo as equações (26) e (21) obtemos:

$$a = \omega^2 R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Fazendo a troca de R por A obtemos:

$$a = A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Fazendo as mesmas análises de sinais entre o seno e a aceleração que obtemos, vemos que novamente possuem sinais opostos:

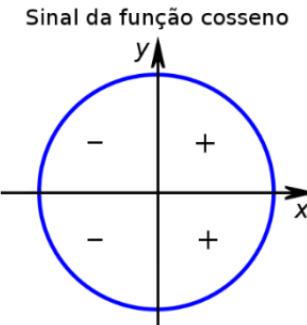


Figura 7: sinais da função cosseno em cada quadrante

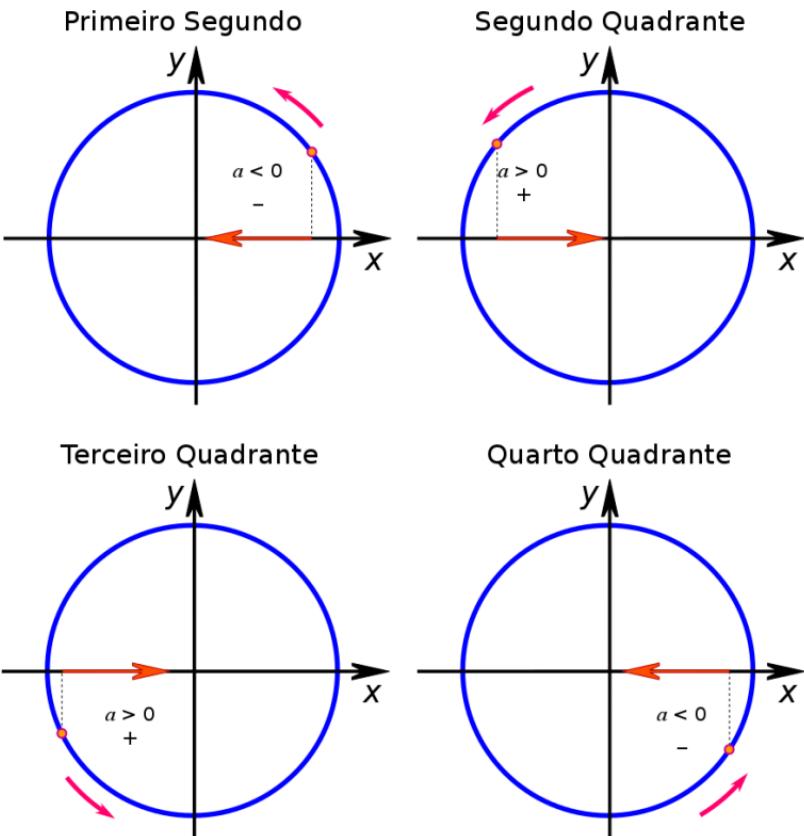


Figura 8: análise dos sinais da projeção horizontal da aceleração centrípeta de um corpo em movimento circular e uniforme (mcu). Note que esta é a direção correspondente à aceleração de um corpo em MHS

Tabela 2: Comparação entre os sinais da função cosseno e os sinais da aceleração que encontramos

Quadrante	Sinal da função cosseno	Sinal da aceleração (encontrada)
Primeiro	+	-
Segundo	-	+
Terceiro	-	+
Quarto	+	-

Assim fica fácil ver que devemos multiplicar por -1 a função que encontramos (equivale a adicionar um de menos na equação obtida), logo:

$$a(t) = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (26)$$

(D) VERIFICANDO AS SOLUÇÕES ENCONTRADAS

Vamos organizar as ideias:

- Primeiro queríamos encontrar as funções que satisfaçam a identidade:
- $$m \cdot a = -k \cdot x$$
- Utilizando-se da ideia de que a componente horizontal do mcu satisfaz isso (historicamente isto foi “chutado” e posteriormente calculado), encontramos:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$a = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

- Vamos verificar se realmente isso é satisfeito:

Substituímos $x(t)$ e $a(t)$ na equação

$$m \cdot a = -k \cdot x \Rightarrow$$

$$m \cdot -\left(A\omega^2 \cdot \underline{\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}\right) = -k \cdot \cancel{A} \cdot \underline{\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)} \Rightarrow$$

$$-m \cdot \omega^2 = -k \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (27)$$

Certo, as funções encontradas satisfazem $m \cdot a = -k \cdot x$ desde que a frequência angular seja escrita como na equação (27). Se notarmos que o período (tempo de uma volta) de um movimento circular uniforme, cuja projeção horizontal é igual ao MHS, deve ser o mesmo período do MHS (tempo de uma oscilação) podemos dizer que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (28)$$

E como a frequência é o inverso do período, temos

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (29)$$

Como ω é a frequência f vezes 2π , isto é, um ângulo, podemos justificar porque ω é chamado de **frequência angular**.

- Por fim, podemos garantir que se estas equações resolvem $m \cdot a = -k \cdot x$, então estas são as **únicas** equações que satisfazem o problema (há um teorema que garante isso)

Portanto podemos resumir todas as equações que descrevem o movimento harmônico simples em (30).

Note que estas equações descrevem o movimento, portanto não estão relacionadas as energias no MHS:

$$m \cdot a = -k \cdot x \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ a(t) = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{cases} T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \end{cases}$$

(E) ENERGIA NO MHS

Vamos escrever as equações das energias para o MHS começando pela energia potencial:

$$E_{\text{pot}} = \frac{k \cdot x^2}{2} \Rightarrow$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{k \cdot (A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0))^2}{2}$$

Lembremos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

Assim:

$$E_{\text{pot}} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Cujo gráfico fica assim:

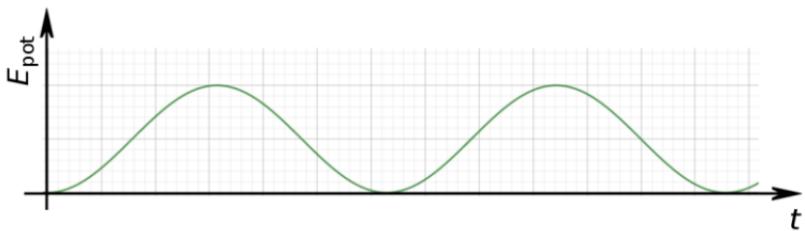


Figura 9: Energia potencial em função do tempo para um corpo em MHS

Agora para a energia cinética:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot (-A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0))^2}{2} \Rightarrow$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Cujo gráfico fica:



Figura 10: Energia cinética em função do tempo para um corpo em MHS

Para facilitar, vamos representar as duas energias em um mesmo gráfico:

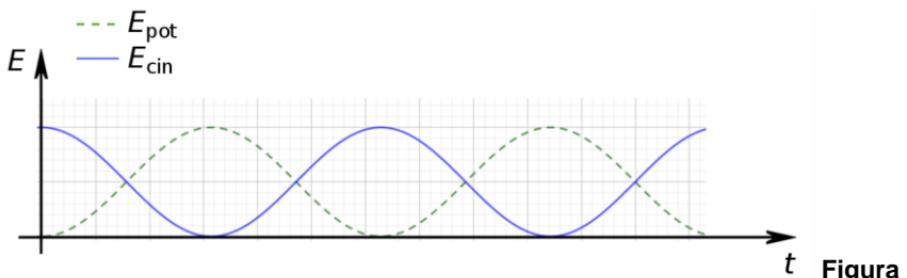


Figura 11: Gráfico comparativo entre as energias potencial e cinética em função do tempo para um corpo em MHS

Qual seria a energia total? Bom, podemos calcular somando as duas equações que obtemos:

$$E_{\text{Total}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{Total}} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$E_{\text{Total}} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot (\cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0))$$

Lembremos a relação fundamental da trigonometria:

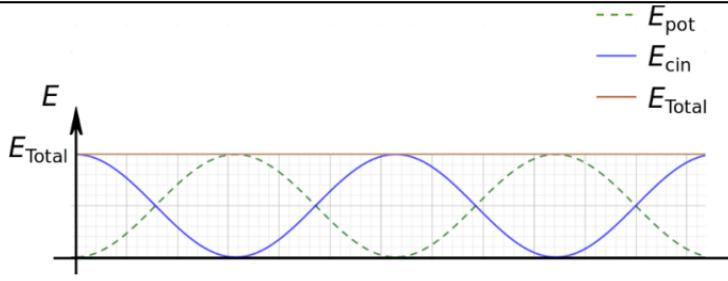
$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Então:

$$E_{\text{Total}} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

Observe que a energia mecânica total é constante, ou seja, não depende do tempo t .

Vamos ver como ficaria o gráfico das três energias então.



t Figura

12: Gráfico comparativo entre as energias potencial, cinética e energia mecânica total em função do tempo para um corpo em MHS

(F) OUTRAS RELAÇÕES NO MHS

Observe que $x(t)$ depende do cosseno enquanto $v(t)$ depende do seno. Vamos isolar as funções trigonométricas destas funções e utilizar a relação fundamental da trigonometria para ver aonde chegamos:

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{x}{A} \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{v}{A\omega} \end{cases}$$

Da relação fundamental da trigonometria

$$\sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) + \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$$

Temos

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1}$$

Provavelmente você não se lembra, mas a equação de uma elipse é

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

Sendo a o semieixo horizontal, b o semieixo vertical, x_c o “ x ” do centro da elipse e y_c o “ y ” do centro da elipse.

Como exemplo, tomemos $a=2$, $b=1$, $x_c=y_c=2$, disso a equação dessa nossa elipse fica

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Cujo gráfico será:

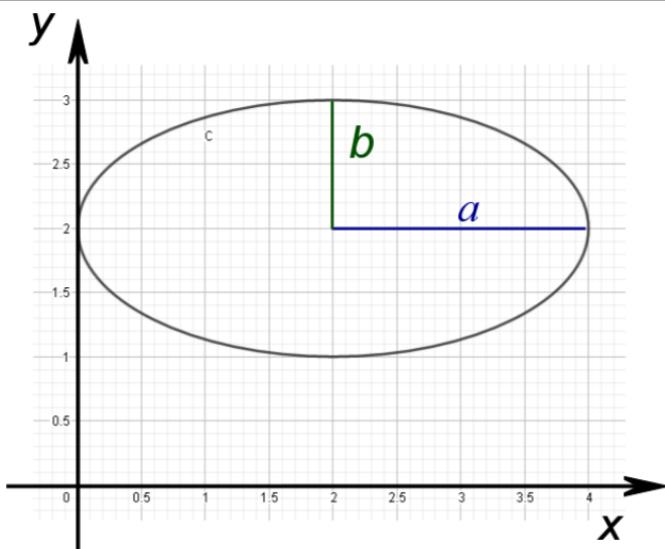


Figura 13: Exemplo de uma elipse

Voltando à equação do MHS, vemos que

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$$

representa uma elipse onde a velocidade substitui o eixo y , $x_c = y_c = 0$ (elipse centrada na origem), $a = A$ (semieixo ao longo do eixo x que corresponde ao valor máximo da posição) e $b = A\omega$ (semieixo vertical cujo valor corresponde ao máximo valor da velocidade). Assim podemos representar esta relação graficamente:

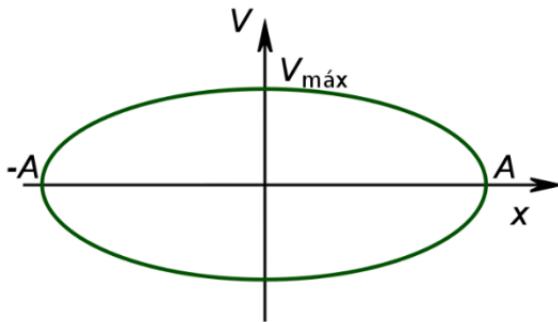


Figura 14: Elipse representando a elação entre velocidade e posição

Por fim, podemos fazer o mesmo com a aceleração e a velocidade:

$$\begin{cases} v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ a(t) = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{v}{A\omega} \\ \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{a}{A\omega^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) &= \frac{v^2}{(A\omega)^2} \\ \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) &= \frac{a^2}{(A\omega^2)^2} \end{aligned} \right. + \\ & \frac{v^2}{(A\omega)^2} + \frac{a^2}{(A\omega^2)^2} = 1 \end{aligned}$$

Observe que $A\omega$ é a velocidade máxima e $A\omega^2$ é a aceleração máxima, logo nosso diagrama (note que uma elipse não é função) fica assim:

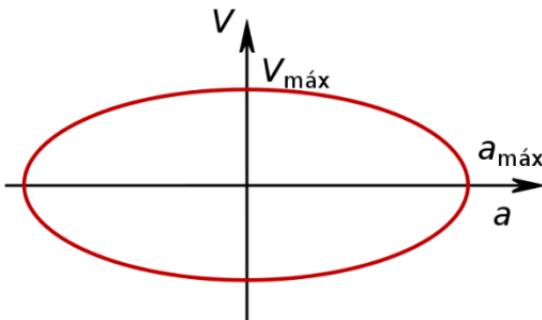


Figura 15: Elipse representando a relação entre velocidade e aceleração

BÔNUS

Vamos fazer mais algumas manipulações. Vejamos:

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ v(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ a(t) = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{cases}$$

Isolemos as funções trigonométricas novamente

$$\begin{cases} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{x}{A} \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{v}{A\omega} \\ \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{a}{A\omega^2} \end{cases}$$

Multipliquemos a primeira equação pela última e elevemos a segunda ao quadrado:

$$\begin{cases} \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{x}{A} \cdot \frac{a}{A\omega^2} \\ \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{v^2}{(A\omega)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\frac{ax}{(A\omega)^2} \\ \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{v^2}{(A\omega)^2} \end{cases}$$

Somando as duas equações temos:

$$\frac{v^2}{(A\omega)^2} - \frac{ax}{(A\omega)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{v^2 - ax}{(A\omega)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$v^2 = (A\omega)^2 + ax$$

Como a velocidade máxima é

$$V_{máx} = A\omega$$

Podemos reescrever esta equação de forma que fique parecida com a equação de Torricelli:

$$v^2 = V_{máx}^2 + ax$$

Por esta razão esta equação é por vezes chamada de equação de Torricelli no MHS.

No SisQ, toda a lista, da apostila 2, de nome “Movimento Harmônico Simples” podem ser resolvidos.

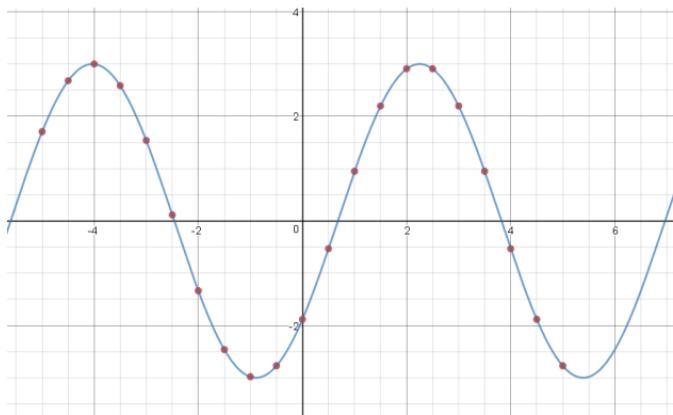
46. CLASSIFICAÇÃO DAS ONDAS

Comecemos com um exemplo:

- Imagine uma corda e que cada ponto desta corda esteja com um movimento harmônico simples
- Imagine agora que cada ponto começou esta oscilação em um instante de tempo ligeiramente diferente um do outro

Veja esta simulação em

<https://www.desmos.com/calculator/8pn1az5gfg>



(A) As ondas podem ser classificadas, quanto à sua **natureza**, em:

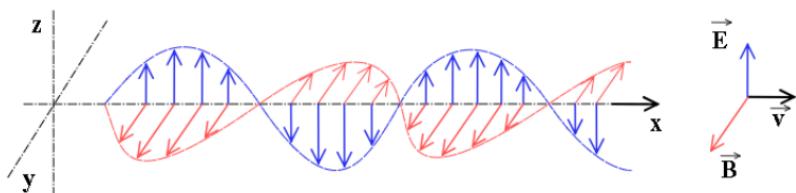
- **Ondas mecânicas**
 - Ondas governadas pelas leis de newton
 - Precisa de matéria para existirem
 - Exemplos
 - Ondas do mar
 - Ondas sonoras
 - Ondas em uma corda
 - Ondas sísmicas
 - Ondas em uma mola
 - Etc.



Fonte: <http://brunofrancesco.com.br/wp-content/uploads/2011/07/guitar-tilt-315x169.jpg>

- **Ondas eletromagnéticas**

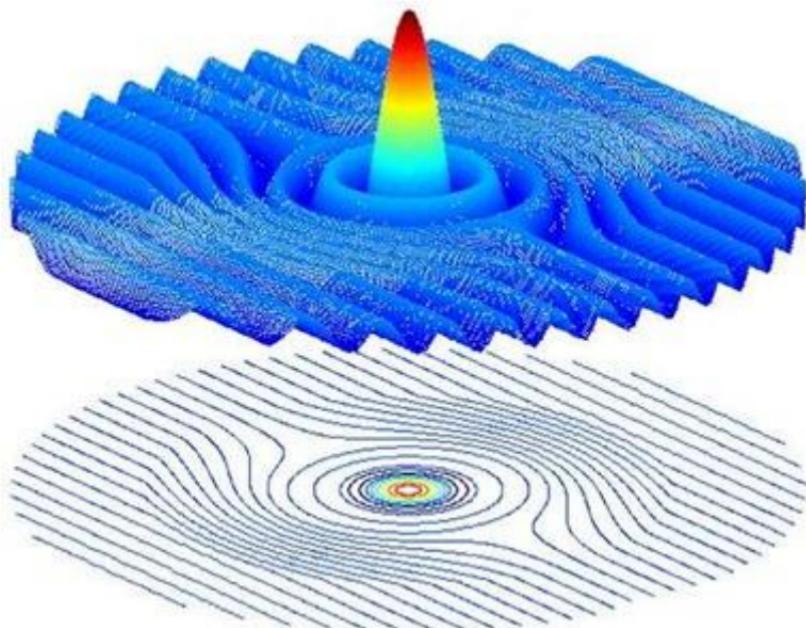
- Ondas governadas pelo eletromagnetismo
- Possuem velocidade constante quando no vácuo
 - $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$
- Campos elétricos e magnéticos oscilam simultaneamente no espaço
- Não precisam de matéria para existir e se propagar
- Exemplos:
 - Luz
 - Raio X
 - Raio gama (γ)
 - Micro-ondas
 - Ondas de rádio (AM e FM)
 - Ondas de telecomunicações (rádio amador, *walkie talkies*, celular, *wi-fi*, televisão, internet, etc.)
 - Radar
 - Infravermelho
 - Ultravioleta
 - Etc.



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/Onde_electromagnetique.svg

- **Ondas de Matéria**

- Governada pelas leis da mecânica quântica (física moderna)
- Partículas elementares se comportam como ondas. Por se tratar de matéria, recebem este nome
- Exemplos
 - Elétrons
 - Prótons
 - Nêutrons
 - Quarks (up, down, strange, charm, bottom e top)
 - Átomos e moléculas
 - Muitas outras partículas estudadas pela física de partículas



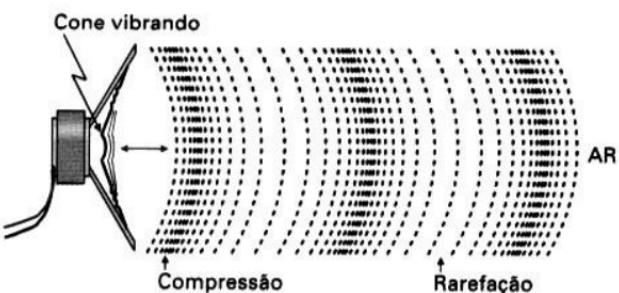
Fonte: http://lh3.ggpht.com/-zFmz7XQUXoY/T9lapEMEnl/AAAAAAAAGB4/ZK0WixCQPHAO%252520chap%2525C3%2525A9u%252520de%252520Schrodinger_thumb%25255B2%25255D.jpg?imgmax=800

(B) Podemos classificar as ondas com relação à direção de propagação

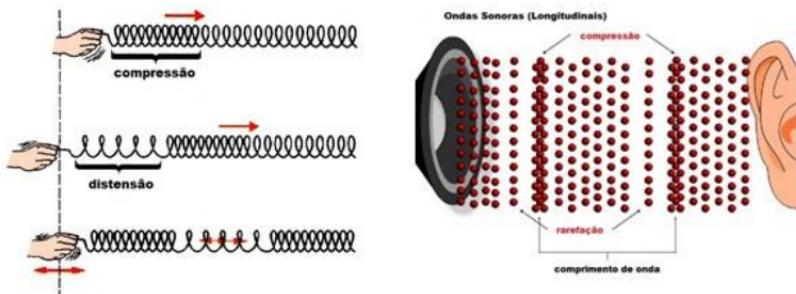
- **Ondas longitudinais**

- Direção de vibração (oscilação) é a mesma que a direção de propagação (velocidade)

- Ondas sonoras no ar, uma mola quando comprimida etc.



Fonte: <http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2010/01/onda-longitudinal-1.jpg>



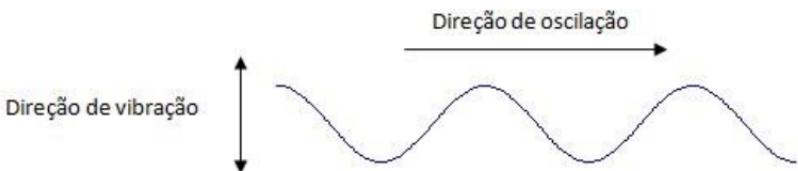
Fonte: http://4.bp.blogspot.com/-6vAmv79j8B4/Ttth5jdqgIAAAAAAAAzc/G5ddUOarA5U/s1600/Terremotos_Explos%25C3%25B5es_01.jpg

Veja esta simulação em

<https://www.desmos.com/calculator/rn3epzo98b>

- **Ondas transversais**

- Direção de vibração (oscilação) é perpendicular (transversal) à de propagação (velocidade)
 - Ondas eletromagnéticas (todas), ondas em uma corda, etc.



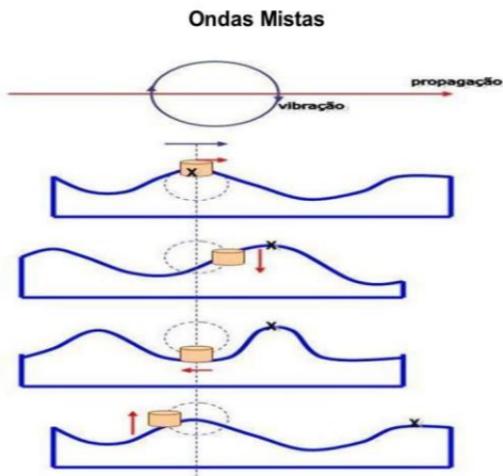
Fonte: <http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2010/01/onda-transversal.jpg>

Veja novamente esta simulação em

<https://www.desmos.com/calculator/zss3gtpywk>

- **Ondas mistas**

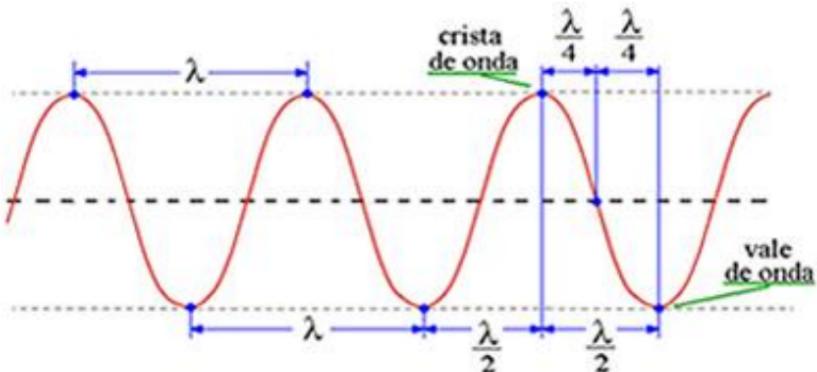
- Possui vibração (oscilação) tanto na direção de propagação como na direção perpendicular à esta
- Ou seja, é longitudinal e transversal ao mesmo tempo
 - Ondas sísmicas, ondas na superfície da água, etc.



Fonte: <http://slideplayer.com.br/8996476/26/images/9/Ondas+Mistas.jpg>

47. ELEMENTOS DAS ONDAS

- Comprimento de onda
- Crista
- Vale



Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/images/crista-e-vale-de-uma-onda.jpg>

- Período (T)

- Tempo em que um elemento retorna à posição original
- Portanto é o tempo que a onda gasta para recuperar sua posição original
- Volte a ver a simulação a seguir para ficar mais claro

<https://www.desmos.com/calculator/8pn1az5gfg>

- Portanto a velocidade de propagação da onda é

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}$$

- Frequência (f)

- Inverso do período

$$f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

- Portanto podemos reescrever a velocidade de propagação de uma onda

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA ONDULATÓRIA

$v = \lambda \cdot f$

48. FUNÇÃO DE ONDA

Lembremos um pouco sobre translação de uma função em um gráfico.

Seja a função $f(x) = x^2$

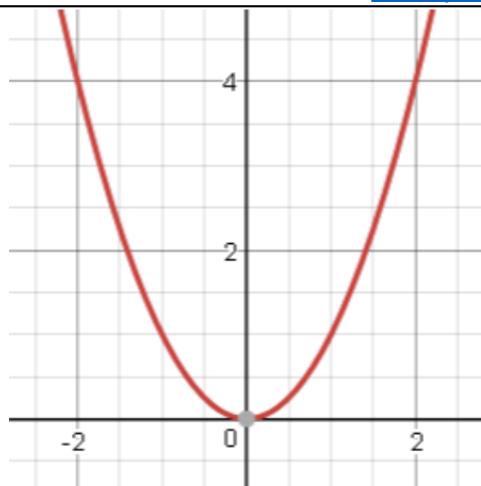


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$

Se quisermos deslocar este gráfico para a direita temos que subtrair um valor. Vamos **subtrair 2 unidades da variável x** para ver o que ocorre:

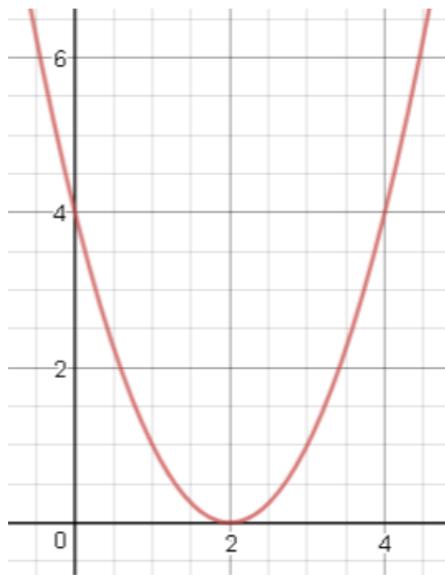


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = (x - 2)^2$

Note que temos que subtrair da variável!!!

Vamos aplicar esta ideia numa onda.

Primeiramente imaginemos uma fotografia de uma onda em uma corda como na figura a seguir:

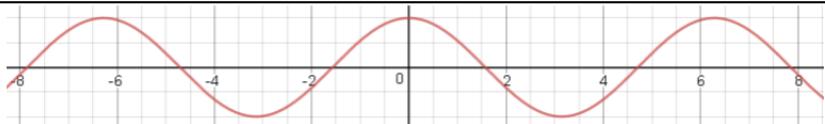


Figura 3: Ilustração gráfica que representa uma fotografia (instantâneo) de uma onda em uma corda

É de supor que uma onda pode ser adequadamente descrita por uma função trigonométrica. De fato, foi usada a função

$$y(x) = \cos x$$

Vamos transladar esta onda para direita de duas unidades, ou seja, vamos ver como fica a função

$$y_2(x) = \cos(x - 2)$$

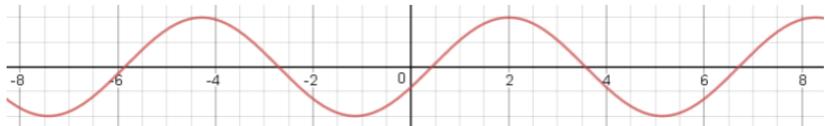


Figura 4: Ilustração gráfica que representa uma fotografia (instantâneo) de uma onda em uma corda quando transladada de duas unidades para a direita, em relação à figura anterior

Se quisermos representar esta onda de fato, podemos simplesmente dizer que em um instante t a onda transladou para a direita de uma distância vt para a direita (onda progressiva).

Assim, temos que uma onda poderia ser descrita pela função:

$$y(x, t) = \cos(a_1 x - a_2 t + a_3)$$

depende de x depende de t

Não se assuste aqui, pois vamos discutir cada termo.

Notemos o seguinte:

- Quando decorrido um tempo igual ao período, a onda deverá andar exatamente λ , ou seja, quando $t=T$ (período) a onda volta a ser o que era. Por uma regra de três:

$$\frac{T}{t} = \frac{2\pi}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{2\pi}{T} t$$

- Quando “andarmos” λ voltamos a ver a onda com o mesmo formato, assim podemos dizer que:

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{2\pi}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{2\pi}{T} x$$

Assim chegamos já no seguinte:

$$y(x,t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + a_3\right)$$

Lembremos que a frequência angular é

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Assim podemos melhorar nossa função de onda:

$$y(x,t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t + a_3\right)$$

Temos uma nova grandeza que é, na verdade, um vetor e é chamado de número de onda k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Melhorando então essa nossa função:

$$y(x,t) = \cos(k \cdot x - \omega t + a_3)$$

Por fim, quem seria a_3 ?

É apenas “uma fase”, ou seja, é um valor que usamos para adaptar nossa função à onda que chamamos simplesmente de φ_0 :

$$y(x,t) = \cos(k \cdot x - \omega t + \varphi_0)$$

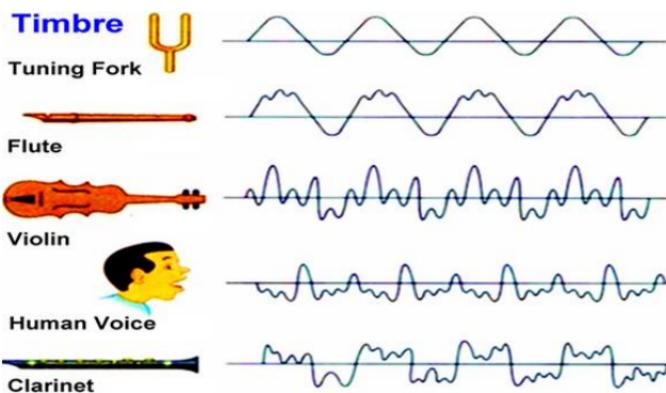
Falta incluir a amplitude, obtendo, portanto,

$y(x,t) = A \cos(k \cdot x - \omega t + \varphi_0)$

49. ONDAS MECÂNICAS

(A) O SOM

- O Som é uma onda longitudinal e percebido pelos seres humanos por fazer vibrar em nosso ouvido uma membrana chamada **tímpano**
- Sons mais agudos possuem frequências maiores e mais graves menores frequências. Dizemos que sons mais agudos possuem maiores **alturas**
- Diferimos dois sons produzidos por instrumentos diferentes através do seu **timbre**



Fonte: <https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-ebb09e35af145475d220f10e368276f0>

(B) VELOCIDADE DE ONDAS MECÂNICAS

- Seja uma onda propagando-se em uma corda esticada sob uma tração T , massa m e comprimento L . Definimos como densidade linear μ :

$$\mu = \frac{m}{L}$$

A velocidade de uma onda mecânica transversal nesta corda será dada por:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Animação em:

<https://www.desmos.com/calculator/e4qf7h1egh>

- Seja uma cuba com água. A profundidade da lâmina d'água é constante e igual à h num local onde a gravidade é g . A velocidade de uma onda que se propaga nessa superfície é

$$v = \sqrt{gh}$$

Animação em:

<https://www.desmos.com/calculator/moqiez2eri>

É importante notar que isso só ocorre para pequenas profundidades ($h < \lambda/2$). Para meios profundos a velocidade dependerá da frequência, mas essa dependência é complicada.

- Em gases, a velocidade da onda é

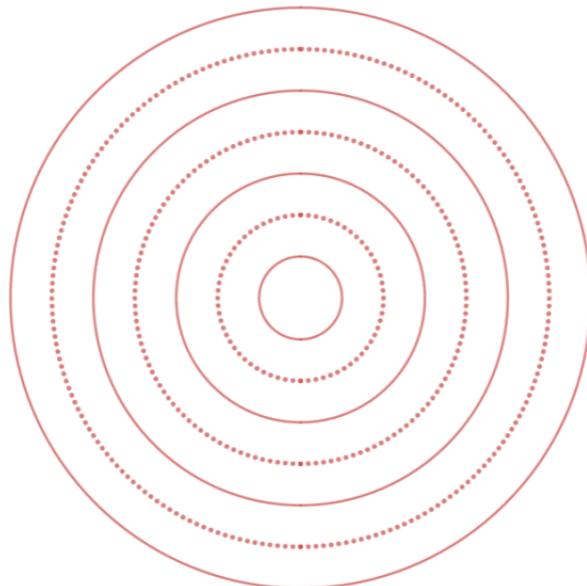
$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{d}}$$

Sendo d a densidade do meio, p a pressão e γ o coeficiente de Poisson que varia de gás para gás

(C) ONDAS UNI, BI E TRIDIMENSIONAIS

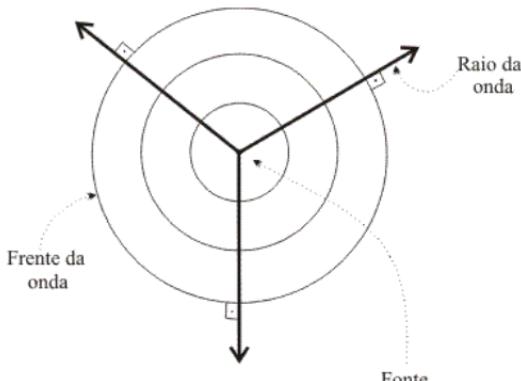
- Uma onda em uma corda é unidimensional pois só se propaga em uma direção
- Ondas na superfície da água é bidimensional pois podem se propagar por duas direções
- Ondas esféricas, como a luz emitida pelo Sol, é tridimensional pois pode se propagar em três direções distintas

Chamamos de frente de onda uma linha que passa por todos os pontos consecutivos onde há uma crista. Vejamos como exemplo a frente de onda de uma onda na superfície da água:



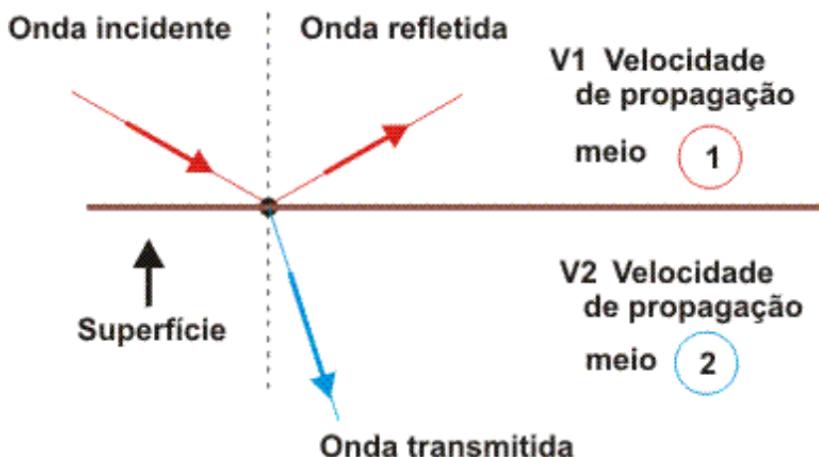
As linhas pontilhadas representam os vales de uma onda e as linhas cheias as frentes de ondas, ou seja, as cristas da onda.

- Chamamos de raio de onda a direção de propagação das frentes de ondas, tal como usamos em elétrica para representar o campo elétrico



Fonte : <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/Ondas/figuras/clas5.gif>

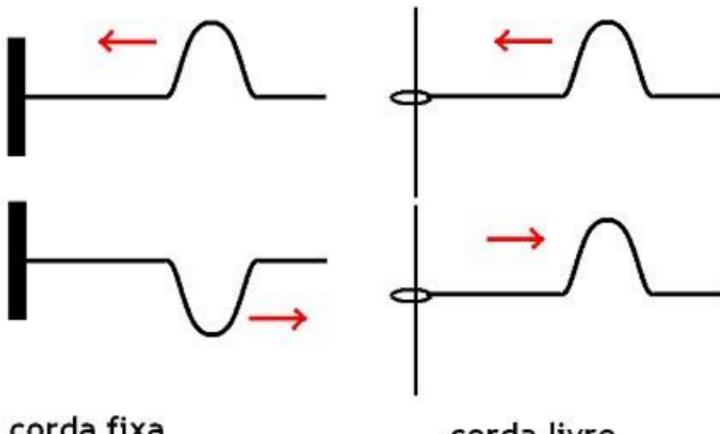
50. REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE ONDAS



- Os fenômenos de transmissão e reflexão normalmente ocorrem juntos
- Quando a onda é transmitida dizemos que ela sofreu refração

REFLEXÃO E REFRAÇÃO EM FIOS

- Temos que diferenciar as extremidades de um fio como presa ou livre
- Reflexão em extremidade livre não inverte a fase (inversão da onda verticalmente)
- Reflexão em extremidade livre é acompanhada de inversão de fase.



Veja animações:

1) Extremidade fixa

<https://www.desmos.com/calculator/gcj8taqbiw>

2) Extremidade livre

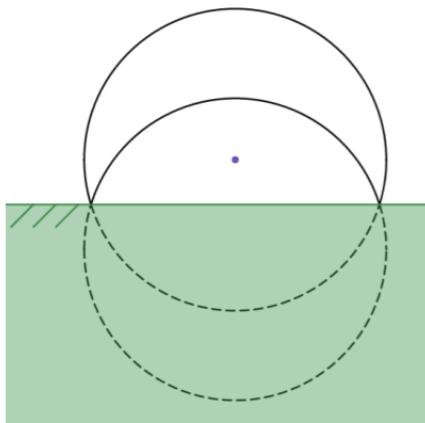
<https://www.desmos.com/calculator/7tmafi2ley>

- Quando a onda muda de meio ela sofre refração, pois refração é a mudança de meio com mudança de velocidade
- A reflexão também pode ocorrer



REFLEXÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS

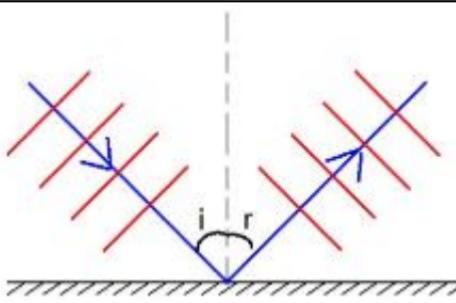
- Reflexão de onda devido a fonte pontual



Veja animação em

<https://www.desmos.com/calculator/5ikw071fon>

- Reflexão devido à uma frente de onda reta (no caso bidimensional) ou plana (no caso tridimensional)



- Refração de uma onda reta/plana

Veja animação:

<https://www.desmos.com/calculator/8waauky7y8>

Ondas Bidimensionais

Refração de ondas bidimensionais

Lei de Snell - Descartes

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Animation

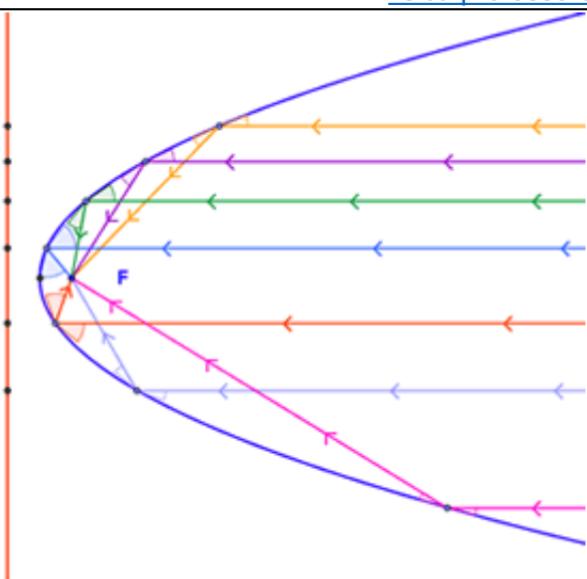
[elaelençar](#)

Animation do fenômeno da refração no caso de ondas planas:

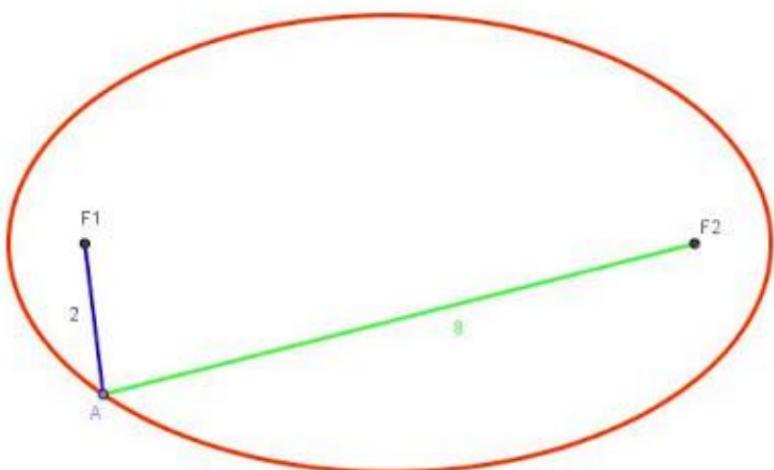
<https://www.desmos.com/calculator/tkuimo5fsm>

ALGUMAS PROPRIEDADES CURIOSAS DE SUPERFÍCIES PARABÓLICAS E ELIPSÓIDES

- Reflexão em uma superfície parabólica: raios que chegam paralelos entre si concentram-se no foco



- Se em um dos focos de uma elipse estiver uma fonte pontual então eles se concentrarão no segundo foco

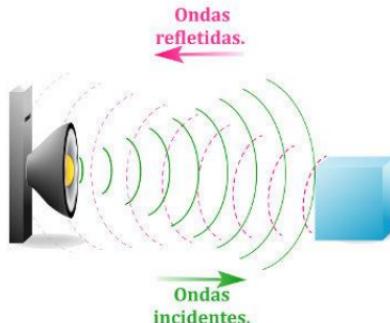


- Eco
 - Ondas são úteis para determinar distância entre objetos e a fonte
 - Emite-se uma onda e mede-se o tempo de ida e volta da onda
 - Com a diferença de tempo determina-se a distância requerida

- Esse é o princípio de funcionamento do sonar, por exemplo

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$x = \frac{V \cdot \Delta t}{2}$$

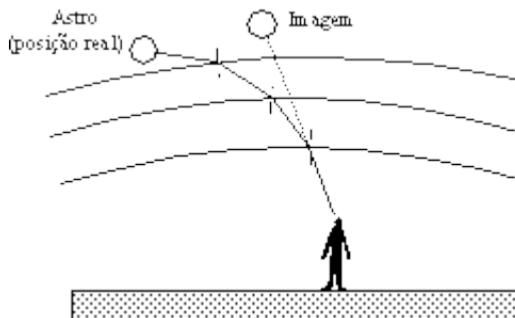


- Reverberação

- Quando ouvimos dois sons, um emitido e o outro refletivo, e podemos reconhecer os dois, chamamos de eco
- Quando não reconhecemos os dois sons, chamamos de reverberação
- Para distinguir dois sons o intervalo de tempo percebido entre os dois sons deve ser superior a 0,1 s. Sabendo que o som possui velocidade de 340 m/s, determine esta distância

$$x = \frac{V \cdot \Delta t}{2} = \frac{340 \cdot 0,1}{2} = 17 \text{ m}$$

- Refrações sucessivas



- Como explicar as ondas no mar ao quebrarem na praia sempre incidirem perpendicularmente à orla?

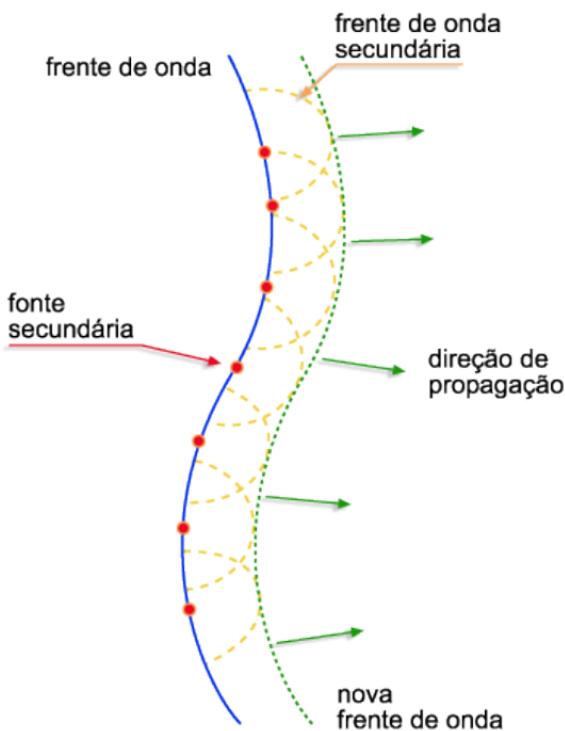
51. FENÔMENOS ONDULATÓRIOS

(A) DIFRAÇÃO E ESPALHAMENTO

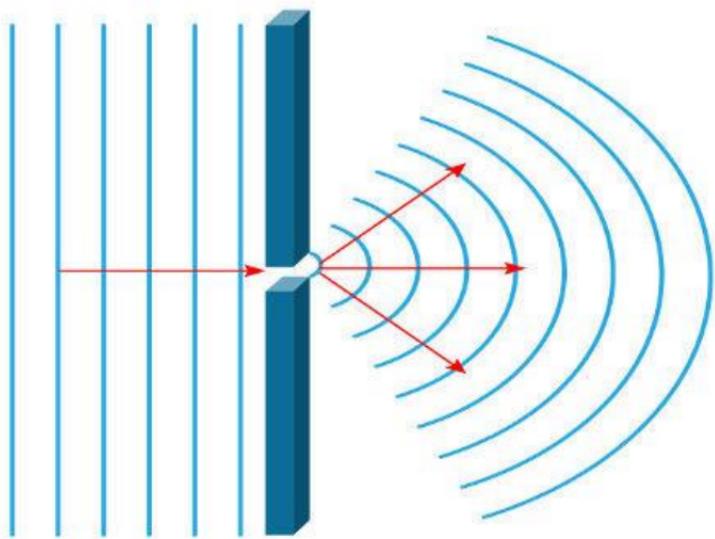
- A difração é a capacidade de contornar objetos de dimensões próximas ao comprimento de onda da onda incidente
- O espalhamento ocorre quando as dimensões dos objetos são muito menores que o comprimento de onda da onda incidente
- Falaremos disso em detalhes mais adiante

PRINCÍPIO DE HUYGENS

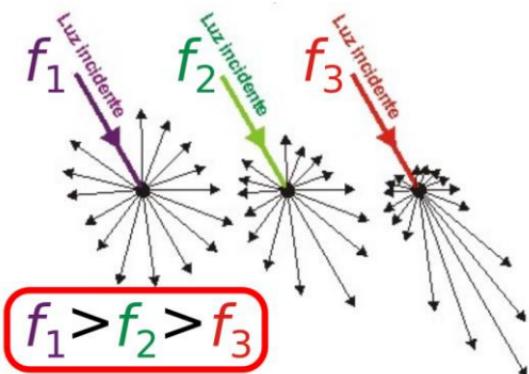
- Cada ponto de uma frente de onda se comporta como se fosse uma fonte de onda



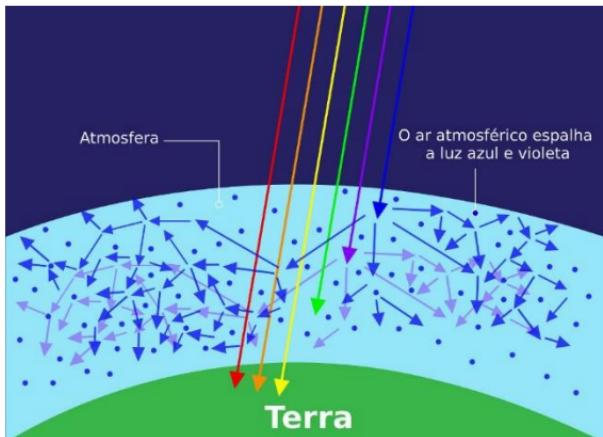
- Podemos explicar o espalhamento e a difração usando este princípio



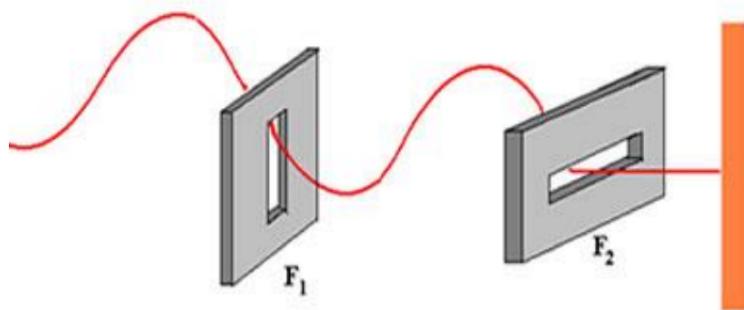
Difração: a fenda se comporta como uma fonte e a parede interromperá as ondas nas laterais.



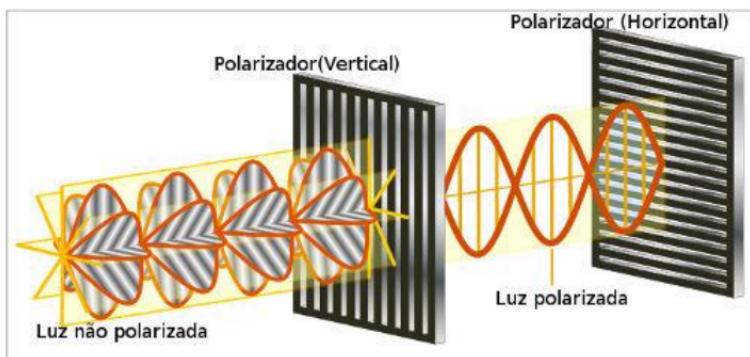
Quanto maior a frequência maior o espalhamento. Os pontos entorno das partículas se comportam como fontes.



(B) POLARIZAÇÃO



- Só podemos polarizar ondas transversais
- Um polarizador funciona como um filtro permitindo a passagem de uma parte da onda que oscila em direção específica
- É muito usado em óptica (display de calculadora, lentes etc.)



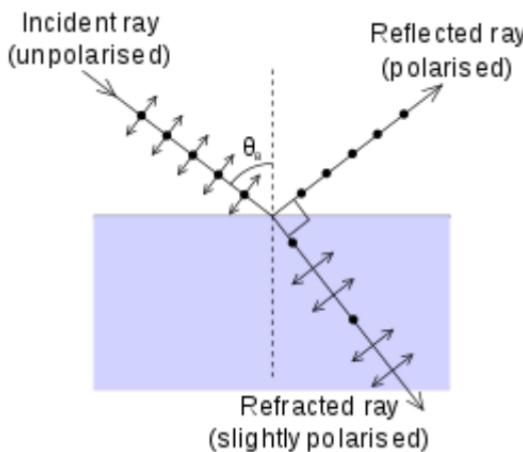
- Digamos que uma onda eletromagnética incide oscilando em uma direção z e haja uma lente polarizadora inclinada de um ângulo θ em relação à essa direção. Se a intensidade do campo incidente é E_0 , a intensidade que atravessa é

$$E_{passa} = E_0 \cdot \cos \theta$$

- Como a intensidade de uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado do campo elétrico:

$$I_{passa} = I_0 \cdot \cos^2 \theta$$

- A polarização pode ocorrer por reflexão: quando o raio refratado forma um ângulo de 90° com o ângulo refletido, a polarização é máxima.



- Esta condição implica na chamada lei de Brewster. Vamos demonstrá-la.

Se o raio refratado forma 90° com o refletido, então, sendo i o ângulo de incidência e r o refratado, podemos escrever:

$$r + i = 90^\circ \Rightarrow \sin r = \cos i$$

Pela lei de Snell, supondo que o raio vai do meio A para o B:

$$n_A \cdot \sin i = n_B \cdot \sin r \Rightarrow$$

$$n_A \cdot \sin i = n_B \cdot \cos i \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan i = \frac{n_B}{n_A}}$$

Esta é conhecida como lei de Brewster.

(C) REFLETÂNCIA E TRANSMITÂNCIA

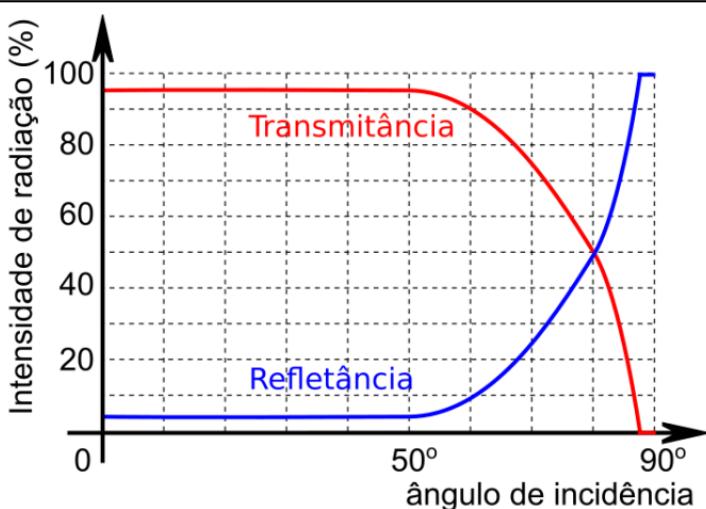
- Como vimos, quando a luz atinge uma interface ela pode sofrer reflexão e transmissão
- Sendo I_0 a intensidade da onda incidente, I_T a intensidade da onda transmitida e I_R a intensidade da onda refletida podemos definir a

$$\text{Transmitância: } T = \frac{I_T}{I_0} \quad \text{E} \quad \text{Refletância: } R = \frac{I_R}{I_0}$$

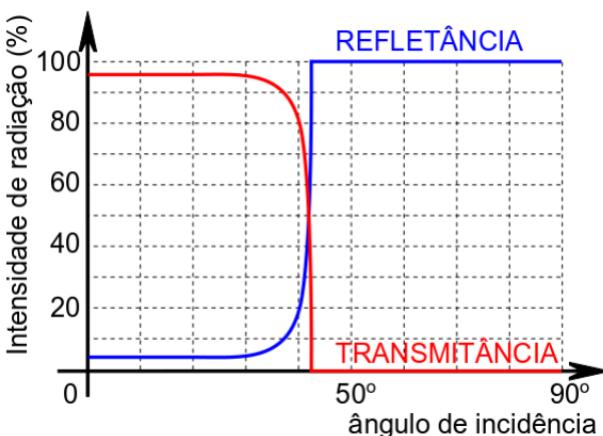
Note que se não houver absorção:

$$I_0 = I_T + I_R \Leftrightarrow 1 = T + R$$

O gráfico a seguir representa a transmitância e a refletância, de forma qualitativa, para um ângulo de incidência que varia de 0 à 90° quando a luz vai do meio menos refringente para o mais refringente.



O gráfico a seguir representa a situação em que a radiação vai do meio mais para o menos refringente.



Observe neste exemplo que o ângulo limite é um pouco maior que 40°.

(D) RESSONÂNCIA

Veremos por meio de exemplos.

Exemplo 1:

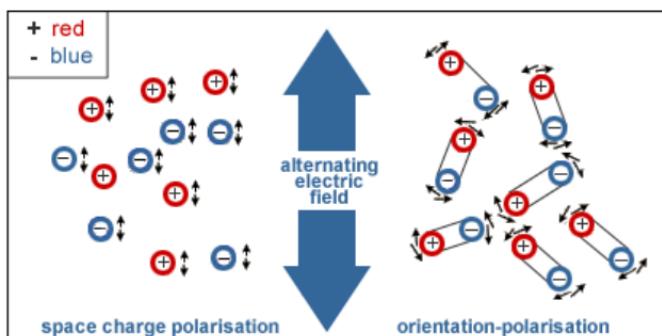
Quando você balança alguém em um balanço, a força deve ser aplicada no momento certo.

Exemplo 2 (ATENÇÃO):

O forno de microondas aquece somente substâncias polares. Sendo a água polar e sabendo que um dipolo (tal como a molécula de água) se alinha ao campo elétrico, uma onda eletromagnética faz a água se alinhar ora em uma direção e ora em outra. É importante saber que a **frequência natural de oscilação da água é muito maior**.

que a frequência do forno, portanto NÃO SE TRATA DE UM EXEMPLO DE RESSONÂNCIA

Veja abaixo um esquema que representa cargas elétricas livres (a esquerda) e dipolos elétricos (lado direito). Em ambos os casos há transferência de energia da onda eletromagnética para as partículas. Não tendo partículas carregadas livres, o aquecimento não ocorre, tal como num prato de vidro vazio.



Exemplo 3

Quando sintonizamos uma radio ou quando recebemos um sinal eletromagnético através do nosso celular, estamos fazendo o uso da ressonância. Isso porque temos um circuito elétrico com pelo menos um capacitor e um indutor, o que faz com que as cargas elétricas fiquem se movendo no circuito.

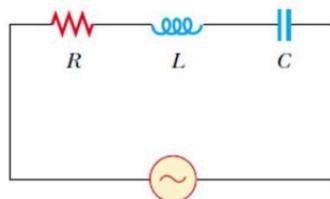
$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

Sendo $\omega = 2\pi f$, tem-se: $f_{ress} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$f_{ress} \rightarrow$ Frequência de Ressonância

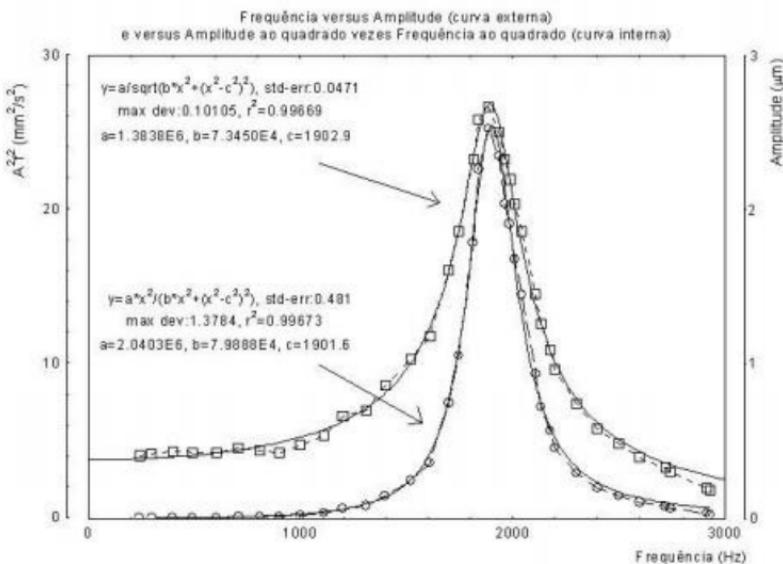
O indutor é basicamente uma espira que é capaz de armazenar energia associada a um campo magnético (podemos contrapor à um capacitor que armazena energia associada à um campo elétrico. Quando um campo elétrico (ou mesmo magnético) variável atua de alguma forma no circuito, há corrente elétrica gerada. Se a frequência da onda atuante for igual à frequência de oscilação natural do circuito, temos a condição de ressonância.

Abaixo temos uma figura que representa um circuito com uma fonte alternada de corrente elétrica. Nele, temos um indutor L e um capacitor C associados em série, permitindo assim que haja um circuito ressonante. A resistência R confere ao circuito uma propriedade de amortecimento, isto é, devido à resistência elétrica, parte da energia é dissipada. Fazendo um análogo mecânico, é como se você estivesse balançando uma pessoa em um balanço com algum atrito: se você parar de balançar, em algum tempo o balanço para.



A figura a seguir mostra os dados experimentais de ressonância de um alto falante. Note que a ressonância corresponde ao pico da curva e corresponde à frequência em que a taxa de transmissão de energia é máxima.

O curioso do deste é que alto falantes possuem um melhor desempenho (melhor qualidade do som) quando trabalham na faixa linear (para o gráfico acima, frequências menores que 1000 Hz). Como a curva de ressonância é diferente para cada modelo de alto falante, costumamos fazer uso de vários ao mesmo tempo (é o caso do tweeter – alta frequência – e do subwoofer – baixa frequência).



(E) BATIMENTO

Falaremos melhor deste assunto quando estudarmos interferência, mas, de forma simplificada, podemos dizer que se duas ondas de frequências parecidas se sobrepõem, então a onda resultante terá uma frequência resultante f_{result} igual à média das duas frequências:

$$f_{result} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Se você ouvir dois sons com frequências próximas, você irá perceber que surgirão altos e baixos, isto é, a intensidade do som se

altera com o tempo. Sendo f_{bat} a frequência destes altos e baixos, chamada de frequência de batimento, temos:

$$f_{bat} = |f_1 - f_2|$$

Deixaremos para nos aprofundar no assunto mais para frente.

52. ACÚSTICA

(A) INTENSIDADE DE UMA ONDA

- Ondas tridimensionais se espalham por todo o espaço.
- Intensidade é a potência sobre uma área. É como uma densidade superficial de potência.
- Se a fonte for isotrópica (envia energia de forma uniforme em todas as direções) e o meio também for isotrópico, então a energia se espalha por todas as direções de forma igual

A intensidade dessa onda em um ponto é

$$I = \frac{P}{A}$$

Sendo P a potência e A a área. Se estivermos falando de uma fonte pontual em um meio isotrópico a energia se espalha de forma igualitária em todas as direções. A área pela qual ela se espalha corresponde à área de uma esfera de raio r . Assim

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Relação entre intensidade e amplitude

$$I = \alpha f^2 A^2$$

Exemplo 1:

Sabendo que a constante solar é $F = 1367 \text{ W/m}^2$ determine a potência do Sol. Dado: sabe-se que a distância do Sol à Terra é de 150.000.000 km e que a constante solar é a intensidade da luz solar na Terra.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow$$

$$1367 = \frac{P}{4\pi(150 \cdot 10^9)^2} \Rightarrow$$

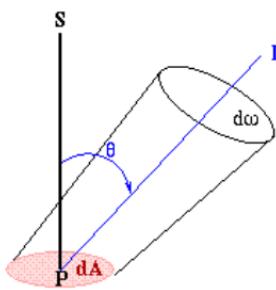
$$P \approx 386 \cdot 10^{24} \text{ W}$$

Se, no entanto, a direção de irradiação não for perpendicular temos uma modificação na fórmula

Seja I a intensidade incidente em uma superfície de área A conforme a figura anterior. A intensidade I' na superfície depende da direção de incidência e da normal à superfície:

$$I' = I \cos \theta$$

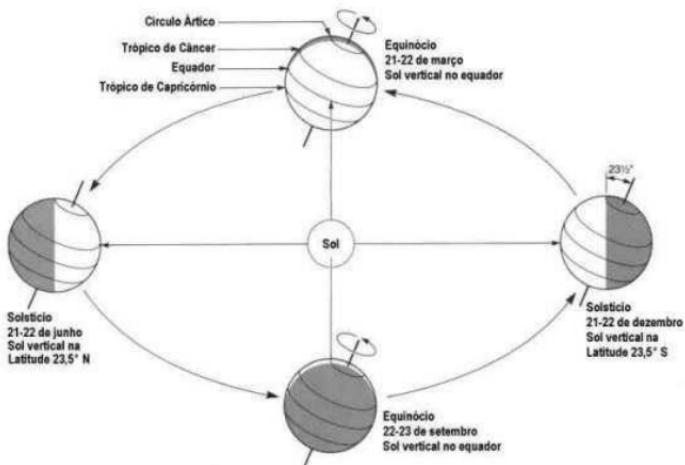
Isso explica as estações do ano e o porquê quando é verão no hemisfério norte, é inverno no hemisfério sul.



Exemplo 2:

Suponha que hoje seja o maior dia do ano no hemisfério norte, ou seja, é verão lá e o Sol está a pino no trópico de câncer, numa latitude de $23,5^\circ$ no hemisfério norte. Sabe-se que nestas condições, a intensidade luminosa, ao meio-dia, em uma cidade localizada no trópico de câncer é de $500 \cdot \sqrt{2}$ W/m². Em uma cidade um pouco ao norte de Campinas, numa latitude de $21,5^\circ$, ao meio-dia, de quanto será a intensidade luminosa?

$$I' = I \cdot \cos \theta \Rightarrow I' = 500\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow I' = 500 \text{ W}$$



Exemplo 3:

Duas fontes A e B, são percebidas com uma mesma intensidade por um observador distante x da fonte A e $2x$ da fonte B. Tanto o observador como as fontes estão alinhados e a potência da fonte A é de 100 W. Qual a potência da fonte B?

$$I_A = I_B \Rightarrow \frac{P_A}{4\pi x^2} = \frac{P_B}{4\pi(2x)^2} \Rightarrow 100 = \frac{P_B}{4} \Rightarrow P_B = 400 \text{ W.}$$

(B) NÍVEL SONORO

Nosso ouvido não detecta a intensidade sonora. Por exemplo, se dobrarmos a intensidade não percebemos dobrar o que estamos ouvindo.

Nosso ouvido tem sensibilidade que obedece a uma relação logarítmica, isto é, nosso ouvido percebe o que chamamos de nível sonoro β :

$$\beta = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{unidade de medida: bel}$$

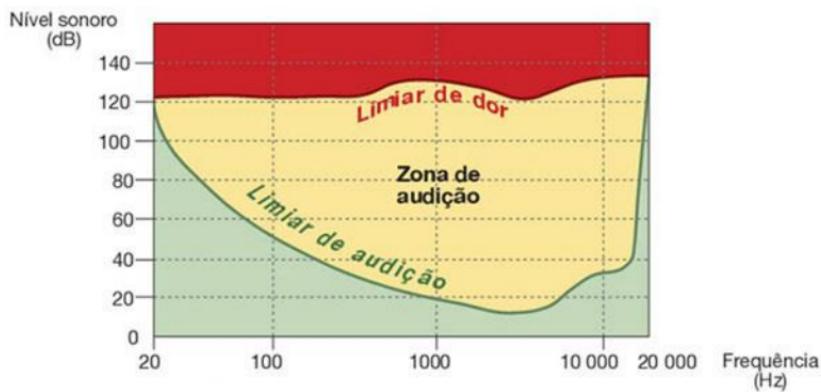
Sendo I_0 uma intensidade sonora que utilizamos como padrão e vale

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Normalmente utilizamos a unidade de medida do nível sonoro em decibel

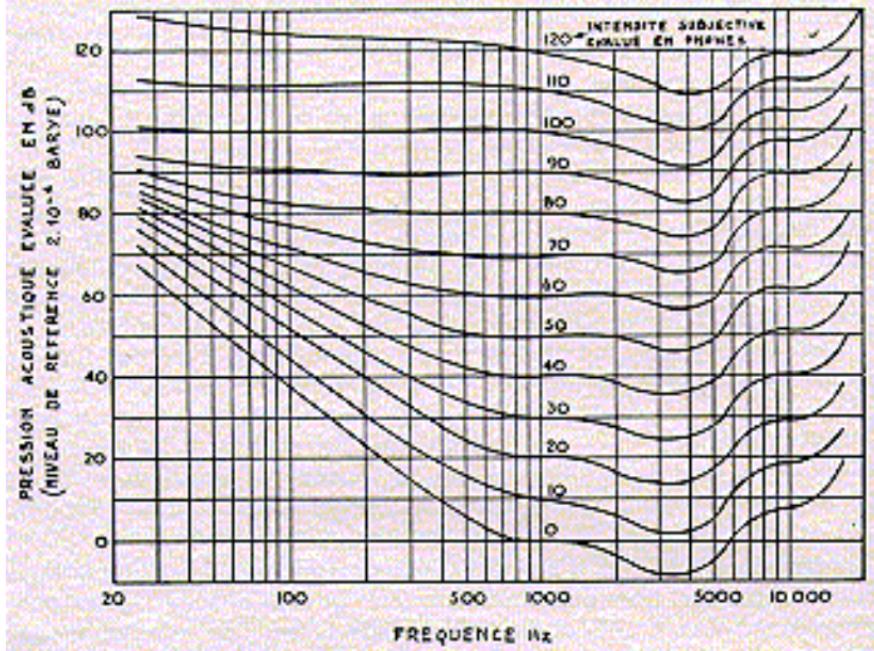
$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{Em decibel}$$

A intensidade de referência é a mínima audível em determinada frequência.



A sensibilidade varia, de pessoa para pessoa, com a frequência. Fatores como sexo e idade também influenciam. Como exemplo, mulheres e pessoas mais novas possuem sensibilidade maior para altas frequências.

Sensibilidade auditiva



(C) EFEITO DOPPLER DE UMA ONDA SONORA

- Seja uma onda sonora de comprimento de onda λ
- Note que este comprimento não pode depender da velocidade do observador
- Seja um observador se movendo na direção da fonte com velocidade v_{ob} , a velocidade com que ele vê a onda se aproximando será:

$$v_{som} \pm v_{ob}$$

O sinal considerado é o de “+” se o observador estiver se movendo contrário à velocidade do som e “-” se o observador estiver se movendo no mesmo sentido.

- Se a fonte estiver se movendo com velocidade v_{fnt} , em relação à fonte o som terá velocidade

$$v_{som} \pm v_{fnt}$$

Mesma regra de sinal anterior.

- Tanto fonte como observador concordam com o comprimento de onda. Da equação fundamental da ondulatória, sabemos que

$$\lambda = \frac{v_{som}}{f}$$

- Vamos igualar os comprimentos considerados, notando que agora a velocidade do som é diferente para cada observador:

$$\lambda_{ob} = \lambda_{fnt} \Rightarrow$$

$$\frac{v_{som} \pm v_{ob}}{f_{ob}} = \frac{v_{som} \pm v_{fnt}}{f_{fnt}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{f_{ob}}{v_{som} \pm v_{ob}} = \frac{f_{fnt}}{v_{som} \pm v_{fnt}}}$$

Esta é a equação do efeito Doppler. Note que a velocidade do som é medida em relação ao meio (ar) por onde ela se propaga. Assim se o ar estiver se movendo, devemos calcular tudo no referencial do ar.

Legenda:

v_{som} : módulo da velocidade do som em relação ao ar

v_{ob} : módulo da velocidade do observador em relação ao ar

v_{fnt} : módulo da velocidade da fonte em relação ao ar

f_{ob} : frequência observada pelo observador

f_{fnt} : frequência emitida pela fonte; é a frequência que o observador perceberia se estiver parado em relação à fonte.

Animação em <https://www.desmos.com/calculator/80tpkllhu3>

(D) EFEITO DOPPLER DE ONDA ELETROMAGNÉTICA

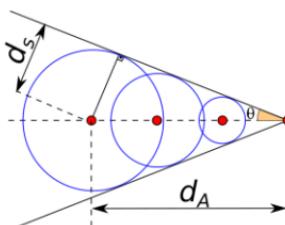
$$\Delta f = \frac{\Delta v}{c} f_{fnt}$$

Sendo Δf a diferença entre as frequências emitida e observada; Δv a diferença entre as velocidades radiais da fonte e do observador; c é a velocidade da luz; e f_{fnt} é a frequência emitida pela fonte.

Usa-se efeito Doppler para medir velocidade de veículos, estrelas e em medicina.

(E) CONE DE MACH

- Se uma fonte de ondas mecânicas viaja a uma velocidade superior às ondas produzidas, o conjunto de ondas produzidas permanecerão sempre dentro de um cone (caso tridimensional)
- Este cone é chamado de cone de Mach
- A figura a seguir representa tal ideia.



Veja animação em <https://www.desmos.com/calculator/9qaa4pa6fp>

d_S : distância percorrida pela onda (som, por exemplo)

d_A : distância percorrida pela fonte (avião, por exemplo)

θ : ângulo de Mach

- Por geometria, temos:

$$\boxed{\sin \theta = \frac{d_S}{d_A}}$$

- Note que se o ângulo for medido e a velocidade da onda conhecida (esta hipótese é bem razoável) então podemos determinar a velocidade do avião:

$$d_A = \frac{d_S}{\sin \theta} \stackrel{\div \Delta t}{\Rightarrow} \frac{d_A}{\Delta t} = \frac{\frac{d_S}{\Delta t}}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_A = \frac{v_S}{\sin \theta}}$$

- Unidade MACH:

- É comum ouvir em filmes que a velocidade de um avião supersônico é MACH 1, por exemplo. Esta medida expressa de quantas velocidades do som corresponde à velocidade do avião. Por exemplo, MACH n significa que a velocidade do avião é

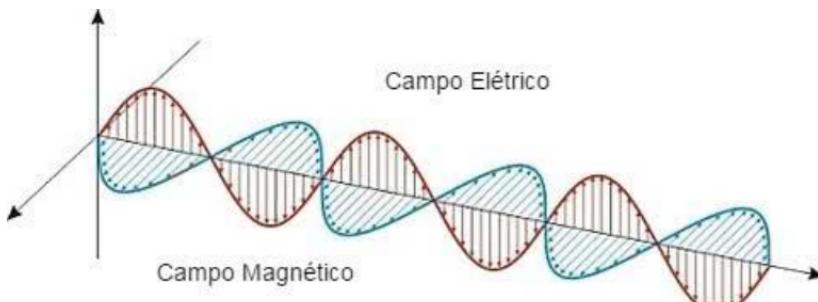
$$v_{avião} = n \times v_{som}$$

- Note como o ângulo se relaciona com a unidade MACH:

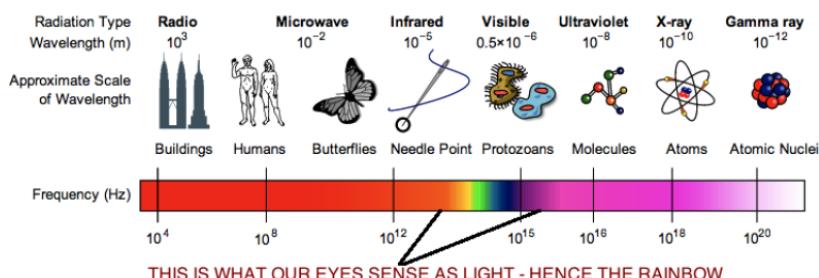
$$v_A = \frac{v_S}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow n \cdot v_S = \frac{v_S}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow$$

$$n = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{n}$$

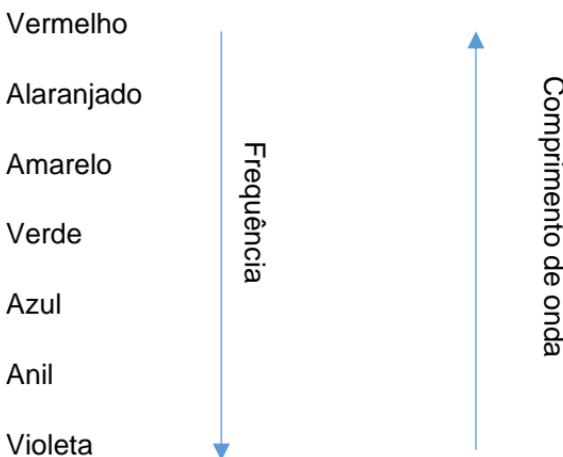
53. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS



Fonte: <https://static.todamateria.com.br/upload/57/dc/57dc0a05e97d3-ondas-eletromagneticas.jpg>



Fonte:
<https://i.pinimg.com/originals/b9/05/88/b90588b273d6d018779dad9201cb9023.png>



Em um ponto o campo Elétrico e Magnético oscila.

No vácuo a velocidade da luz é constante, bem como qualquer onda eletromagnética

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Em meios materiais a velocidade das ondas eletromagnéticas é a velocidade da luz no vácuo pelo índice de refração n do meio

$$v = \frac{c}{n}$$

Em cada instante, a razão entre o campo elétrico e o campo magnético é constante

$$\frac{E}{B} = c$$

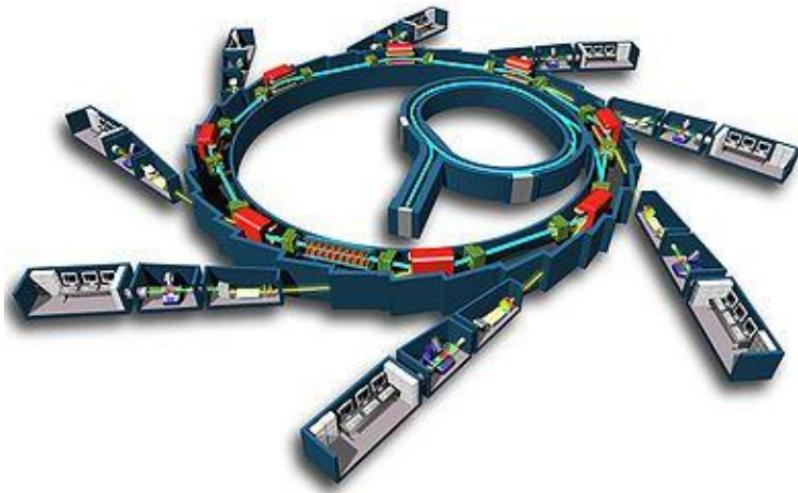
Nunca confunda:

Raios gama e raios X são ondas eletromagnéticas bem como ondas de rádio, tv, infravermelho, luz visível e micro-ondas.

Uma carga acelerada emite radiação eletromagnética.

A diferença entre Raios X e raios gama é que raios X são produzidos por aceleração de elétrons, como num tubo de tv antiga, enquanto raios gama são produzidos por decaimento radioativo (reação nuclear).

Uma carga em movimento circular emite radiação, pois está acelerada mesmo que o módulo da velocidade seja constante. A essa radiação damos o nome de radiação sincrotron.



Fonte:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Sch%C3%A9ma_de_principe_du_synchrotron.jpg/400px-Sch%C3%A9ma_de_principe_du_synchrotron.jpg

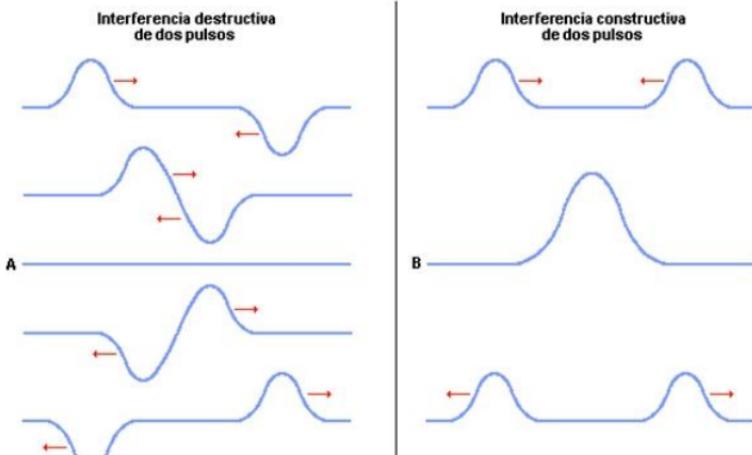
Essa radiação é utilizada para estudar estrutura de materiais assim como os raios X.

Veremos um pouco sobre isso quando estudarmos interferência.

54. INTERFERÊNCIA DE ONDAS

(A) INTRODUÇÃO

- Sabemos que uma onda pode ser descrita matematicamente através de funções
- Da experiência, sabemos que quando duas ondas se superpõem, o resultado equivale à soma das duas funções que descrevem as duas ondas
- Não faremos isso matematicamente, apenas geometricamente



- Quando duas ondas estão em fase e se interferem, a amplitude final será a soma das duas ondas e chamamos isso de **interferência construtiva**
- Quando duas ondas estão em oposição de fase se superpõem (interferem), a amplitude resultante será a diferença das duas amplitudes e a isso chamamos de **interferência destrutiva**. Particularmente, se as duas ondas possuem a mesma amplitude, quando a amplitude resultante dá zero, chamamos isso de **interferência totalmente destrutiva**.
- É importante destacar que a interferência é local: as duas ondas seguirão seus caminhos, após interagirem uma com a outra, como se nada tivesse acontecido.

Veja uma postagem com mais conteúdo para você em

<http://estudeadistancia.professordanilo.com/?p=1610>

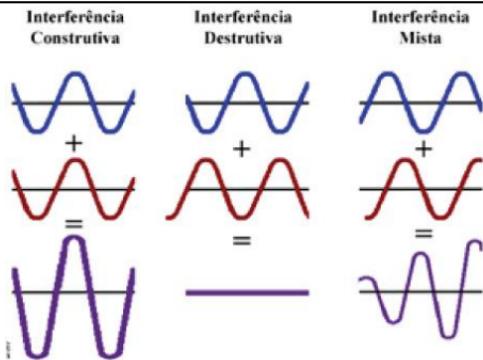
- Se as duas ondas que interferirem possuírem frequências próximas, ocorrerá um fenômeno chamado de batimento cuja frequência será f_{bat} .

$$f_{bat} = |f_1 - f_2|$$

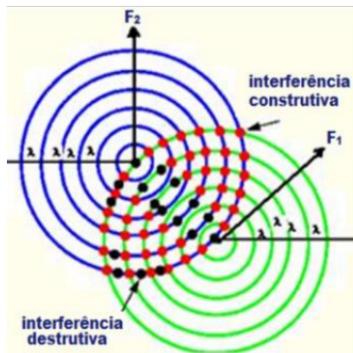
Enquanto a onda resultante terá frequência f_{result} dada por

$$f_{result} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Observe alguns casos de interferências:



Em representação bidimensional, os vales são representados por linhas pontilhadas e as cristas por linhas cheias



Para animações sobre interferência, veja:

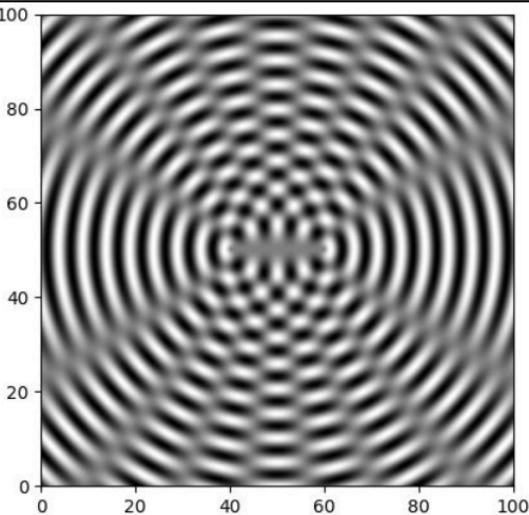
2) Interferência Construtiva

<https://www.glowscript.org/#/user/djkcond/folder/Ondas/program/Interferencia-Construtiva>

2) Interferência Destrutiva

<https://www.glowscript.org/#/user/djkcond/folder/Ondas/program/Interferencia-Destrutiva>

Um exemplo de representação gráfica, usando escala de cinza (quanto mais escuro, maior é o valor da ordenada da onda) é representado a seguir:



A imagem acima foi gerada por um programa escrito em Python. Se tiver interesse, baixe-o aqui:

<http://fisica.professordanilo.com/download/diversos/programasPython/ripples.txt>

As duas animações anteriores também foram escritas em Python.

(B) INREFERÊNCIA EM DUAS DIMENSÕES

- Dadas duas fontes, a diferença de fase total é:
 - Devido à diferença de caminho:

$$\Delta\phi_{caminho} = \frac{|d_1 - d_2|}{\lambda} \cdot 2\pi$$

- Devido às reflexões:

$$\Delta\phi_{reflexão} = \pi \text{ para cada reflexão}$$

- A diferença de fase total será:

$$n \cdot \pi$$

- Se n for par, a interferência é construtiva
- Se n for ímpar, a interferência é destrutiva

- Soma-se ou subtrai uma fase dependendo das condições iniciais do problema.

(C) INTERFERÊNCIA DA LUZ

- Dupla fenda de Thomas Young

$$x = k \frac{\lambda D}{y}$$

(calculando a espessura de um fio de cabelo)

- Películas (filmes) finas
- Iridescência

55. ONDAS ESTACIONÁRIAS

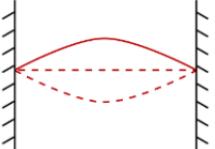
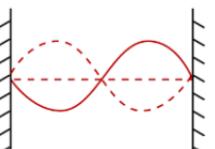
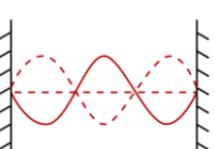
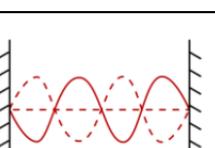
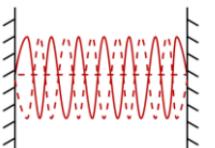
Mais detalhes em

<http://estudeadistancia.professordanilo.com/?p=1664>

- Imagine uma onda produzida em uma corda com ambas as extremidades presas
- Quando refletida ela volta com inversão de fase



- Se o comprimento do fio tiver tamanho adequado dizemos que a onda no fio é uma onda estacionária, pois vemos a onda como se estivesse parada
- Vamos estudar os harmônicos nesse caso

	1º Harmônico	$\lambda_1 = \frac{2L}{1}$
	2º Harmônico	$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = L$
	3º Harmônico	$\lambda_3 = \frac{2L}{3}$
	4º Harmônico	$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = 2L$
...
	nº Harmônico	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$

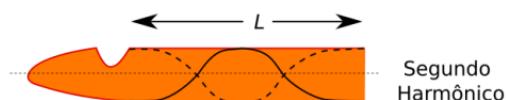
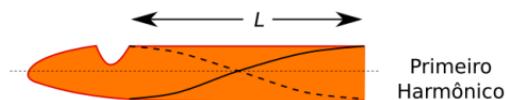
Para o n-ésimo harmônico temos:

$$\begin{cases} v = \lambda \cdot f \\ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \frac{2L}{n} \\ \lambda_n \cdot f_n = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{cases} \Rightarrow \frac{2L}{n} \cdot f_n = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

TUBOS SONOROS

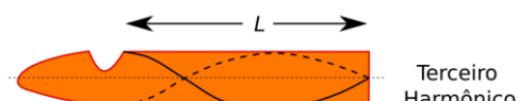
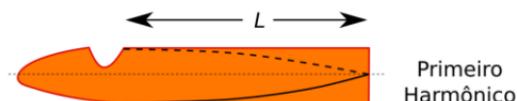
- Instrumentos musicais cujo som é produzido por sopro segue a mesma lógica
- Em geral um dos lados é aberto e o outro é ou aberto ou fechado

DUAS EXTREMIDADES ABERTAS



1º Harmônico	$L = 2 \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4L}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4L}{2 \cdot 1}$
2º Harmônico	$L = 4 \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{2 \cdot 2}$
3º Harmônico	$\lambda_3 = \frac{4L}{2 \cdot 3}$
4º Harmônico	$\lambda_4 = \frac{2L}{4}$
...	...
nº Harmônico	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$

UMA EXTREMIDADE ABERTA E OUTRA FECHADA



1º Harmônico	$L = 1 \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4L}{1}$
2º Harmônico	Não existe
3º Harmônico	$\lambda_3 = \frac{4L}{3}$
4º Harmônico	Não existe
...	...
nº Harmônico	$\lambda_n = \frac{4L}{n}$

- Note que não existe os harmônicos pares para tubos com uma extremidade aberta e outra fechada.

56. APÊNDICE

A. UNIDADES DE MEDIDAS

FATORES DE CONVERSÃO

Vamos ver um pouco mais sobre mudança de unidades de medidas. Começaremos com os fatores de conversão, que ficam à esquerda da unidade de medida.¹

Tabela 1: fatores de conversão

Fator	Nome	Símbolo
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	fento	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^1	deca	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zeta	Z
10^{24}	yota	Y

Na Tabela 1 vemos os fatores de conversão. Como sugestão, procure decorar os valores da tabela acima na faixa do *pico* até o *tera*.

AS UNIDADES BASE DO SISTEMA INTERNACIONAL

Em geral, temos 7 unidades de medidas no Sistema Internacional de Unidades que formam a base de nosso sistema. Isso quer dizer que qualquer outra unidade de medida pode ser escrita em termos destas. Por exemplo, vimos que o newton é uma unidade de medida de força, mas podemos escrevê-la em termos de kg m/s^2 .

Vejamos na Tabela 2,

Tabela 2: Unidades de medidas derivadas em termos das unidades base

GRANDEZA A SER MEDIDA	UNIDADE DE MEDIDA DERIVADA	UNIDADES BASE
Força	newton ou N	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
Pressão	pascal ou Pa	$\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$
Energia	joule ou J	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$

Na Tabela 3 você encontra estas unidades de medidas. Note que algumas você certamente já trabalhou, outras, como em elétrica, você verá este ano. Uma delas, em particular, não veremos no ensino médio (a candela – unidade de intensidade luminosa).

Perceba que a temperatura é em kelvin, que a abreviação e o nome da grandeza que descreve quantidade de matéria possuem um símbolo só (mol) e que, na eletricidade, não é a carga elétrica a unidade base, e sim a corrente elétrica.

Tabela 3: Tabela de unidades de base para medidas no Sistema Internacional

Grandeza base	Unidade de Base	
Nome	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

LETRAS GREGAS

Conforme o professor havia comentado, é importante sabermos algumas letras gregas, afinal os físicos adoram usá-las para nomear grandezas.

Como exemplo, é usual utilizarmos μ ("mi") para representar o coeficiente de atrito ou a massa específica de um corpo; ρ ("rô") para representar a densidade, além da letra d , como faremos nesta disciplina; τ ("tau") para trabalho; α , β , γ e θ para ângulos; usamos γ ("gama") também para representar um fóton; λ ("lamba") para comprimento de onda; Σ ("sigma" maiúscula) para representar somatória e muitos outros (delta maiúsculo para desvio da luz, teta para temperatura, pi é um número (3,14159265358979323846), ômega para velocidade angular e muito provavelmente mais algum que o professor esqueceu).

Tabela 4: Letras gregas.

Nome	Minúsculo	Maiúsculo
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gama	γ	Г
Delta	δ	Δ
Épsilon	ε	Ε
Zeta	ζ	Ζ
Eta	η	Η
Teta	θ	Θ
Iota	ι	Ι
Capa	κ	Κ
Lambda	λ	Λ
Mi	μ	Μ
Ni	ν	Ν
Csi	ξ	Ξ
Ómicron	$\ο$	Ο
Pi	π	Π
Rô	ρ	Ρ
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	Τ
Úpsilon	$\υ$	Υ
Fi	ϕ ou φ	Φ
Qui	χ	Χ
Psi	ψ	Ψ
Ômega	ω	Ω

B. CONSTANTES FÍSICAS

A seguir são apresentadas constantes físicas cujos valores são fornecidos pelos vestibulares. Caso você se depare com alguma questão sem tais valores, é possível que esta informação tenha sido perdida no processo de cópia da questão para um banco de dado. Se tal valor não foi durante a prova (simulado ou vestibular), considere falar com o professor para verificar se a anulação é possível. Em caso afirmativo, em se tratando de vestibular, você pode entrar com recurso e pedir a anulação da questão.

Tabela 5: Constantes fundamentais.

Nome	Símbolo	Valor
Carga elétrica elementar	e	$1,6 \cdot 10^{-19}$ C
Constante de Coulomb	k	$9 \cdot 10^9$ N·m ² C ⁻¹
Constante de Planck	h	$6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s
Constante dos Gases	R	$8,3$ J·K ⁻¹ ·mol
Constante Gravitacional	G	$6,7 \cdot 10^{-11}$ N·m ² ·kg ⁻²

Elétron-volt (unidade de medida)	eV	$1,6 \cdot 10^{-19}$ J
Massa do elétron	m_e	$9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg
Massa do próton	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
Número de Avogadro	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ partículas mole
Permeabilidade elétrica no vácuo	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ C ² · m ⁻²
Permeabilidade magnética no vácuo	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A ⁻¹
Raio de Bohr	a_0	$0,529 \cdot 10^{-10}$ m
Unidade de massa atômica	u	$1,661 \cdot 10^{-27}$ kg
Velocidade da luz no vácuo	c	$3 \cdot 10^8$ m/s

C. CONSTANTES MATEMÁTICAS

Tabela 6: Constantes matemáticas frequentemente utilizadas em física

Nome	Valor
Euler	$e = 2,7182\ 81828\ 4590452353\ 60287$
Pi	$\pi = 3,1415\ 92653\ 58979\ 32384\ 62643$
-	$\sqrt{2} = 1,4142\ 13562\ 37309\ 50488$
-	$\sqrt{3} = 1,7320\ 50807\ 56887\ 72935$
-	$\sqrt{10} = 3,1622\ 77660\ 16837\ 93320$

D. FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA

Frações:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Multiplicação:

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Fatorização:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Equação do primeiro grau:

$$ax + b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

LOGARITMO E EXPONENCIAL

$$a^y = x \Rightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

E. COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME

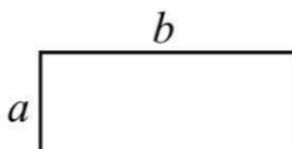
RETÂNGULO

Perímetro:

$$P = 2(a+b)$$

Área:

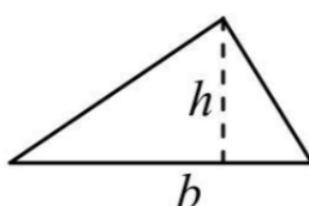
$$A = a \times b$$



TRIÂNGULO

Área:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$



CIRCUNFERÊNCIA

Diâmetro:

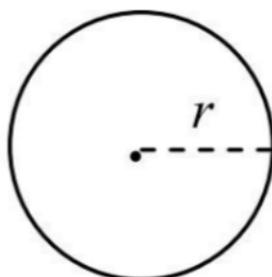
$$d = 2r$$

Perímetro:

$$P = 2\pi r$$

Área:

$$A = \pi r^2$$



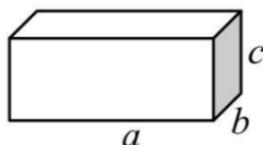
PARALELEPÍPEDO

Área da base:

$$A = ab$$

Volume:

$$V = abc$$



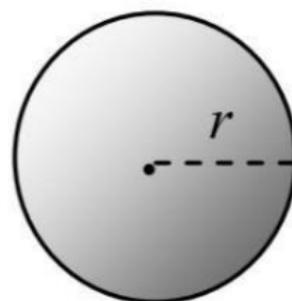
ESFERA

Área:

$$A = 4\pi r^2$$

Volume:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



CILINDRO

Área da base:

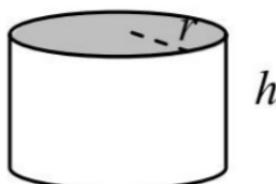
$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral:

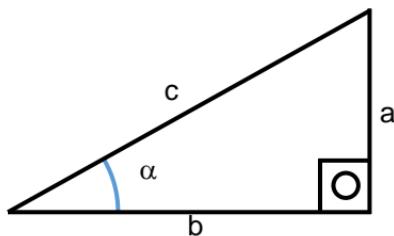
$$A_l = 2\pi r \ell$$

Volume:

$$V = \pi r^2 \ell$$



F. TRIGONOMETRIA



Teorema de Pitágoras:

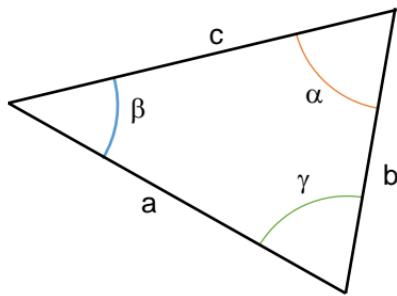
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Funções trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Relação fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



Lei dos senos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2abc \cos \alpha$$

Soma de arcos e outras relações

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$