

PROFESSOR DANILO

FOLHA 07

Nesta folha, o conteúdo que você deve dar especial atenção vai até a Figura 5.

TRABALHO REALIZADO POR UM GÁS À...

PRESSÃO CONSTANTE

Para vermos como calcular o trabalho de um gás a pressão constante, vamos primeiramente supor um gás dentro de um cilindro com êmbolo de área A .

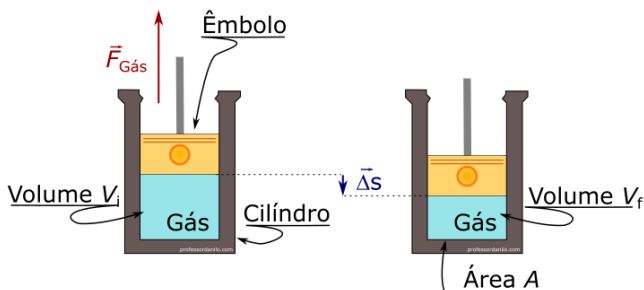


Figura 1: Cilindro de área A , gás com volume inicial V_i , êmbolo, força do gás e deslocamento do êmbolo.

Observe a figura 1 na qual apresentamos um gás que é comprimido. Vamos supor que a temperatura do gás é controlada de tal forma que a pressão do gás se mantenha constante. Com isso podemos determinar o trabalho que o gás realiza.

Primeiramente, suponhamos que o ângulo entre a força que o gás faz e o deslocamento do êmbolo seja θ . Observe que se o gás sofre expansão, então $\theta = 0^\circ$ e, portanto, $\cos\theta = 1$; quando o gás sofre compressão, então $\theta = 180^\circ$ e $\cos\theta = -1$.

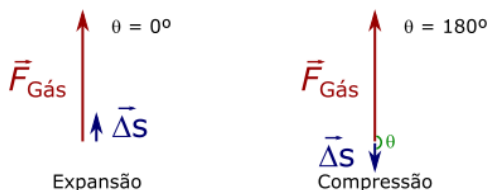


Figura 2: Se o gás sofre uma expansão, o cálculo do trabalho retorna um valor positivo; se o gás sofre uma compressão, o trabalho retorna um valor negativo.

Calculemos o trabalho:

$$\tau = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} \tau = F \cdot \Delta s & \text{se } \theta = 0^\circ \\ \tau = -F \cdot \Delta s & \text{se } \theta = 180^\circ \end{cases} \quad \text{Eq. (01)}$$

Lembremos que a força que o gás faz é o produto da pressão do gás pela área A do cilindro/êmbolo:

$$F_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot A \quad \text{Eq. (02)}$$

Assim, substituindo na equação do trabalho, obtemos de forma genérica sem considerar os sinais, que:

$$\tau_{\text{gás}} = F_{\text{gás}} \cdot \Delta s \Rightarrow \tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot (A \cdot \Delta s) \Rightarrow \tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot \Delta V \quad \text{Eq. (03)}$$

variação do volume do gás

Sendo ΔV a variação do volume do gás. Note que a variação do volume do gás pode ser positiva ou negativa:

$$\Delta V = V_f - V_i \Rightarrow \begin{cases} \Delta V > 0 \text{ se } V_f > V_i & (\cos\theta = 1) \\ \Delta V < 0 \text{ se } V_f < V_i & (\cos\theta = -1) \end{cases}$$

¹ É comum utilizar os termos "trabalho realizado pelo gás" e "trabalho realizado sobre o gás". Para evitar qualquer tipo de confusão, sempre que falarmos de trabalho sempre estaremos nos referindo ao gás, nunca à algum operador que realiza trabalho sobre o gás.

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

com isso podemos ver que a equação 03 é geral, pois se o gás expandir, $\Delta V > 0$, o trabalho também será positivo; se, por outro lado, o gás sofrer compressão, $\Delta V < 0$, então o trabalho também será negativo.

Podemos então resumir nosso resultado da seguinte maneira:

Em um processo isobárico, o trabalho de um gás é determinado por

$$\tau_{\text{gás}} = p_{\text{gás}} \cdot \Delta V.$$

VOLUME CONSTANTE

Se o volume do gás não varia então não há deslocamento, portanto pela equação (01) o trabalho do gás é nulo.

Em um processo isocórico (ou isométrico ou isovolumétrico), o trabalho de um gás é NULO

$$\tau_{\text{gás}} = 0.$$

CASO GERAL

O trabalho é calculado pela equação (03), caso a pressão for constante, no entanto se a pressão variar, temos que calcular a área da figura plana definida entre o eixo horizontal até a função que representa a pressão *versus* volume. Como uma imagem vale mais que mil palavras, abaixo representamos esta figura:

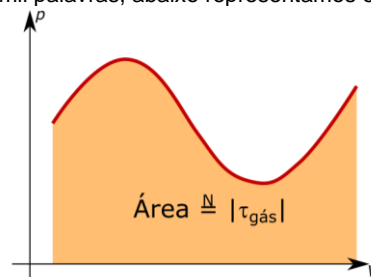


Figura 3: Caso a pressão não seja constante, o trabalho é definido pela área da figura abaixo da curva definida pelo diagrama p versus V .

Temos, no entanto, que orientar este processo, pois como vimos anteriormente se o gás sofre uma expansão então o trabalho é positivo e se o gás sofre compressão então o trabalho realizado pelo gás é negativo¹.

Veja nas figuras 4 e 5 a seguir os diagramas de pressão versus volume no caso do gás sofrendo expansão e no caso do gás sofrendo compressão. Você pode simplificar dizendo que o trabalho é positivo se o diagrama é da esquerda para a direita e negativo se o diagrama é da direita para a esquerda.

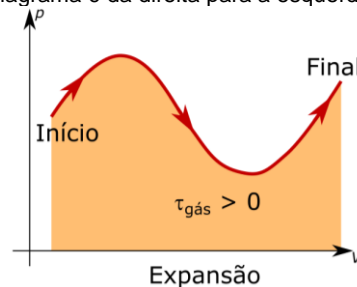


Figura 4: Na expansão, o volume do gás aumenta, portanto o trabalho do gás é positivo.

Em todo nosso material, se quiser saber sobre o trabalho realizado sobre o gás, basta substituir o trabalho do gás em todas as equações que ele aparecer por menos trabalho sobre o gás:

$$\tau_{\text{gás}} = \tau_{\text{PELO gás}} = -\tau_{\text{sobre o gás}}$$

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

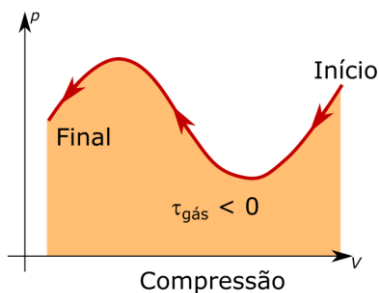


Figura 5: Na compressão, o volume do gás diminui, portanto o trabalho do gás é negativo.

TEMPERATURA CONSTANTE

No caso de uma transformação isotérmica a curva obtida é tal que não sabemos como calcular a sua área (pelo menos não aprendemos como fazer isso no ensino médio). Por esta razão, normalmente não se vê a fórmula de se determinar o trabalho, mas como o céu é o limite, vamos ver isso aqui!

Veja a figura a seguir, onde apresentamos a pressão em função do volume no caso de uma transformação isotérmica:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

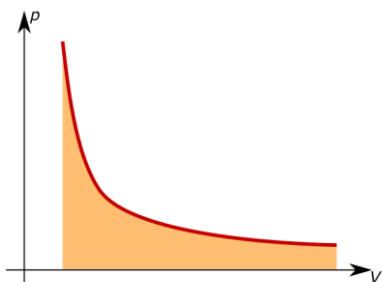


Figura 6: Uma transformação isotérmica. Não indicamos a direção do processo (compressão ou expansão) pois isso é determinado numericamente pelos valores dos volumes final e inicial.

Utilizando-se cálculo integral (vocês terão uma noção sobre isso no final do ano) pode-se demonstrar que o trabalho do gás é dado por:

$$\tau_{\text{gás}} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \text{Eq. (04).}$$

Em um processo isotérmico, o trabalho de um gás é determinado por

$$\tau_{\text{gás}} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Note aqui que \ln é o logaritmo neperiano, isto é, é o logaritmo na base e, que é o número neperiano:

$$\ln k = \log_e k.$$

Lembre-se também de como mudar a base:

$$\ln k = \log_e k = \frac{\log k}{\log e}$$

Lembre-se também de como trabalhamos com funções logarítmicas:

$$\log_{10} k = a \Leftrightarrow 10^a = k.$$

Lembremos também que

$$e = 2,718281828...$$

VALOR QUADRÁTICO MÉDIO

Nos próximos materiais, vamos falar sobre valor quadrático médio da velocidade. Como velocidade é um vetor, ou seja, precisamos de mais informações do que somente o módulo, se fará necessário falar em velocidade quadrática média. Porém, antes de fazermos algumas demonstrações, vamos falar de valor quadrático médio.

01. Para começar, sejam os números:

5, 4, 9, 7, 9, 3, 2, 5, 8 e 1.

Considerando duas casas após a vírgula, calcule:

a) A média destes números. Chame-os de x_1, x_2, \dots, x_{10} respectivamente. Chamamos o valor médio de \bar{x} ou $\langle x \rangle$ ou ainda $x_{\text{méd}}$.

Resposta: 5,30

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow \\ \langle x \rangle &= \frac{5 + 4 + 9 + 7 + 9 + 3 + 2 + 5 + 8 + 1}{10} \Rightarrow \\ \langle x \rangle &= \frac{53}{10} \Rightarrow \langle x \rangle = 5,3. \end{aligned}$$

b) Calcule a média dos quadrados destes termos.

Resposta: 35,50

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} \Rightarrow \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{5^2 + 4^2 + 9^2 + 7^2 + 9^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2 + 1^2}{10} \Rightarrow \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{355}{10} \Rightarrow \langle x^2 \rangle = 35,5. \end{aligned}$$

c) Calcule o quadrado da média.

Resposta: 28,09

Do item a), sabemos que $\langle x \rangle = 5,3$. Portanto

$$\langle x \rangle^2 = 28,09.$$

d) Calcule a raiz quadrada da média dos quadrados dos termos.

Resposta: 5,96

Do item b), sabemos que $\langle x^2 \rangle = 35,50$. Portanto:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} \approx 5,9581876 \approx 5,96.$$

e) Compare os valores obtidos nos itens (A) e (D).

Observe que a média dos quadrados (item b) é diferente do quadrado da média (item c) e que a média (item a) é diferente da raiz quadrada da média dos quadrados (item d), apesar de serem próximos. Esta é também chamada de *raiz quadrática média* ou *rms*, do inglês *root mean square*.

Concluimos que o valor médio de uma grandeza não corresponde à raiz quadrática média (*root mean square*, em inglês). A situação fica ainda pior se estamos trabalhando com valores positivos e negativos.

02. Como exemplo, seja a seguinte sequência de valores:

$$x_i = \{5, 4, 9, -5, -9, 3, -8, -4, 8, -3\}$$

Considerando três casas após a vírgula, calcule:

a) Calcule o valor médio destas grandezas. Calcule também o quadrado da média destas grandezas.

Respostas: zero e zero

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow \\ \langle x \rangle &= \frac{5 + 4 + 9 + (-5) + (-9) + 3 + (-8) + (-4) + 8 + (-3)}{10} \Rightarrow \\ \langle x \rangle &= 0,00. \end{aligned}$$

Com isso, a raiz quadrada da média é zero também:

$$\sqrt{\langle x \rangle} = 0,00.$$

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

b) Calcule a média dos valores quadráticos destes valores. Calcule também a raiz quadrada destes valores, isto é, o valor quadrático médio de x . Também representamos o valor quadrático médio de x por \bar{x}_{rms} .

Respostas: 39,00 e 6,24

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} \Rightarrow \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{5^2 + 4^2 + 9^2 + (-5)^2 + (-9)^2 + 3^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 8^2 + (-3)^2}{10} \\ &\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{390}{10} \Rightarrow \langle x^2 \rangle = 39,00. \end{aligned}$$

Com isso, a raiz quadrática média será:

$$\bar{x}_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{39,00} \Rightarrow \bar{x}_{rms} \approx 6,244998 \approx 6,24.$$

Em breve, vamos falar de velocidade das moléculas e devemos diferenciar o que é média das velocidades, velocidade quadrática média e velocidade mais frequente das moléculas. Isso será importante para entendermos efeitos que parecem violar a lei zero da termodinâmica², como ocorre em vasos de barro: nossos antepassados costumavam guardar água em vasos de barro pois esta fica mais fria que se armazenada em vasos de vidro. Isso parece violar a lei do equilíbrio térmico: como pode a água em um vaso de barro ficar mais fria que a temperatura ambiente? A física está errada? Bom, fingiremos que nossa aula é um seriado e deixemos a resposta para o próximo capítulo.

Vamos entender como o micro (velocidade das moléculas) pode afetar o macro (pressão, temperatura etc.). Começemos com algo muito simples: uma caixa cúbica de lado L contendo um gás.

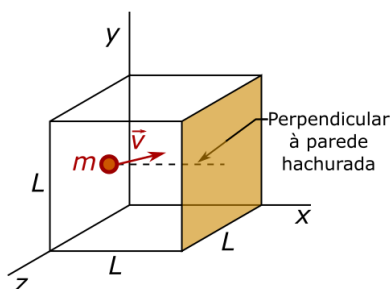


Figura 7: Uma caixa de lado L , contendo n mols de um gás ideal. Uma molécula de massa m e velocidade \vec{v} está a caminho de colidir com a parede hachurada de lado L^2 . É representada uma linha perpendicular à esta parede.

Seguindo o descrito na Figura 7, suponha que a molécula de gás colida com a parede de forma elástica, podemos determinar a variação da quantidade de movimento em x .

Q. 1 – VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM x

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= Q_{x \text{ depois}} - Q_{x \text{ inicial}} = m \cdot v_x - (-m \cdot v_x) \Rightarrow \\ \Delta Q_x &= 2m \cdot v_x \end{aligned} \quad \text{Eq. (05).}$$

Lembremos da segunda lei de Newton em função da variação da quantidade de movimento:

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} \quad \text{Eq. (06).}$$

Com isso, podemos calcular a força que a parede faz na molécula do gás, que é nosso objeto de estudo:

Q. 2 – FORÇA MÉDIA QUE A PAREDE FAZ NA MOLÉCULA

$$\begin{aligned} F_{\text{méd } x} &= \frac{\Delta Q_x}{\Delta t} \Rightarrow \\ F_{\text{méd } x} &= \frac{2m \cdot v_x}{\Delta t} \end{aligned} \quad \text{Eq. (07).}$$

Em média, esta molécula irá colidir na parede uma vez apenas, enquanto a molécula atravessa duas vezes a aresta da caixa, de comprimento L . Assim, o Δt que aparece na equação 07 pode ser obtido considerando a componente horizontal da velocidade da molécula.

Q. 3 – INTERVALO ENTRE DUAS COLISÕES

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{2L}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Delta t &= \frac{2L}{v_x} \end{aligned} \quad \text{Eq. (08).}$$

Substituindo na equação 07, obtemos a força média que cada molécula faz na parede, que é sempre do interior para o exterior do gás.

Q. 4 – FORÇA MÉDIA QUE A MOLÉCULA FAZ NA MOLÉCULA

$$\begin{aligned} F_{\text{méd } x} &= \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{2mv_x}{1} \cdot \frac{v_x}{2L} \Rightarrow \\ F_{\text{méd } x} &= \frac{mv_x^2}{L} \end{aligned} \quad \text{Eq. (09).}$$

Lembremos da equação que relaciona a pressão com a força (equação 02) e calculemos a pressão média que apenas uma molécula faz na parede apresentada na figura 7.

Q. 5 – PRESSÃO MÉDIA DEVIDO À UMA ÚNICA MOLÉCULA DO GÁS

$$\begin{aligned} p_{\text{média parede em } x=L} &= \frac{F_{\text{méd } x}}{L^2} = \frac{\frac{mv_x^2}{L}}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L} \cdot \frac{1}{L^2} \Rightarrow \\ p_{\text{média parede em } x=L} &= \frac{mv_x^2}{L^3}. \end{aligned}$$

Note, porém, que L^3 é o volume V do recipiente em estudo:

$$p_{\text{média parede em } x=L} = \frac{mv_x^2}{V} \quad \text{Eq. (10).}$$

Perceba que a pressão pode ser entendida como um tipo de densidade de energia cinética.

Agora somemos a contribuição de cada uma das moléculas que existem neste gás e determinemos a pressão total nesta parede:

$$\begin{aligned} p &= \frac{mv_{x1}^2 + mv_{x2}^2 + \dots + mv_{xN}^2}{V} \Rightarrow \\ p &= \frac{m}{V} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2) \end{aligned} \quad \text{Eq. (11).}$$

Sendo $N = n \cdot N_A$ o número total de moléculas no gás, n o número de mols e N_A o número de Avogadro. Podemos utilizarmos aqui nosso conhecimento de raiz quadrática média e escrever:

$$\begin{aligned} (v_x^2)_{\text{méd}} &= \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N} \Rightarrow \\ v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2 &= N (v_x^2)_{\text{méd}} \Rightarrow \\ v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2 &= n \cdot N_A \cdot (v_x^2)_{\text{méd}} \end{aligned} \quad \text{Eq. (12).}$$

² A lei zero da termodinâmica afirma que dois corpos estão em equilíbrio térmico se ambos estiverem à mesma temperatura. Quando colocamos um

objeto qualquer em um ambiente isolado termicamente, basta esperar tempo suficiente para que o objeto tenha a mesma temperatura que o ambiente.

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

Portanto, podemos reescrever a equação 11 com o resultado obtido na equação 12:

$$p = \frac{m}{V} \cdot n \cdot N_A \cdot (v_x^2)_{\text{méd}} \Rightarrow$$

$$p = \frac{n \cdot m \cdot N_A}{V} (v_x^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (13).}$$

Lembremos que $m \cdot N_A = M$, que é a massa molar do gás (massa de 1 mol do gás). Assim:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} (v_x^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (14).}$$

Sabemos que para qualquer molécula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como há muitas moléculas (1 milésimo de um mililitro de gás a 0°C e 1 atm de pressão possui mais de 26 trilhões de moléculas³, isto é, quase 3250 moléculas por habitante no planeta Terra no início de 2022 [8 bilhões de pessoas]), podemos supor que a velocidade quadrática média em qualquer direção é sempre igual⁴, assim:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_x^2 + v_x^2 \Rightarrow v^2 = 3v_x^2 \Rightarrow$$

$$v_x^2 = \frac{v^2}{3} \quad \text{Eq. (15).}$$

Podemos então reescrever a equação 14 de posse da equação 15:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} \frac{1}{3} (v^2)_{\text{méd}} \quad \text{Eq. (16).}$$

Lembrando do que discutimos na seção anterior sobre valor quadrático médio:

$$\sqrt{(v^2)_{\text{méd}}} = v_{rms} \Rightarrow v_{rms}^2 = (v^2)_{\text{méd}},$$

portanto descobrimos que:

$$p = \frac{n \cdot M}{V} \frac{1}{3} v_{rms}^2 \quad \text{Eq. (17).}$$

Da equação dos gases ideais, sabemos que $p = \frac{nRT}{V}$, logo:

$$\frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{n \cdot M}{V} \frac{1}{3} v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{Eq. (18).}$$

ENERGIA CINÉTICA MÉDIA DO GÁS

A equação 18 é simplesmente a equação mais importante que obtemos na seção anterior pois ela nos permite calcular a energia cinética média das moléculas de um gás. Vamos calcular isso a partir da equação da energia cinética de apenas uma molécula, como a apresentada na figura 7:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} mv^2$$

Mas isso não é novidade. Então, vamos calcular a energia cinética média das moléculas, pois como mencionado anteriormente, a velocidade de uma única molécula pode ser diferente das demais.

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)_{\text{méd}} = \frac{1}{2} m (v^2)_{\text{méd}}$$

Sendo $m \cdot N_A = M \Rightarrow m = M / N_A$ e do resultado obtido na equação 18, temos

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \frac{M}{N_A} v_{rms}^2 \Rightarrow$$

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \frac{M}{N_A} \frac{3RT}{M} \Rightarrow$$

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} \quad \text{Eq. (19).}$$

Por fim, vamos adicionar uma nova grandeza, chamada de constante de Boltzmann k_B e que está relacionada à duas outras constantes conhecidas:

$$k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \quad \text{Eq. (20 a)}$$

$$k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad \text{Eq. (20 b).}$$

Por fim, chegamos então em uma nova equação que certamente é mais fácil de ser memorizada que a equação 18, porém é tão útil quanto. Utilizando as equações 19 e 20 obtemos:

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \frac{3}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (21).}$$

A equação 21 é muito importante, uma vez que ela permite relacionarmos a temperatura com a energia cinética média, ou seja, é uma estimativa para a energia cinética de uma única partícula. Para se ter ideia, podemos criar um forno capaz de emitir moléculas com velocidade determinada, basta selecionarmos a temperatura do forno.

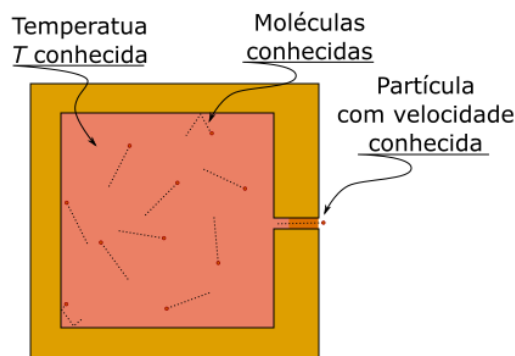


Figura 8: Um forno aquecido capaz de produzir feixe de moléculas com velocidade conhecida.

Podemos relacionar com gravitação também, e você verá isso em breve.

³ Em condições normais de pressão e temperatura, isto é, a 1 atm de pressão e a 0°C, um mol de gás ideal ocupa 22,4 litros de volume.

⁴ Você pode estar se perguntando por que a velocidade quadrática média é que é constante para as moléculas e não a média dos módulos das velocidades, por exemplo, ou o módulo da média dos vetores velocidade ou mesmo qualquer outra média mais complicada ainda. A resposta está relacionada com a

distribuição de energia: a energia cinética das moléculas se distribui de modo uniforme associando-se em quantidade parecidas em todas as direções. Note que não podemos dizer que a energia cinética na direção de x é igual à energia cinética na direção de y e é igual à energia cinética na direção de z, pois a energia cinética é uma grandeza escalar, e não vetorial, muito embora estamos falando de energia cinética associada ao movimento de translação na direção de x, y e z.

PROFESSOR DANILO

APLICAÇÃO DA TEORIA CINÉTICA

Q. 6 – ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Lembrando do que foi visto em Gravitação Universal, a energia potencial gravitacional associada a dois corpos, um de massa m e outro de massa M , separados por uma distância d (distância entre os centros de massa dos dois corpos) é dada por:

$$E_{pot} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{d} \quad \text{Eq. (22).}$$

Q. 7 – ENERGIA CINÉTICA

$$E_{cin} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \text{Eq. (23).}$$

Q. 8 – ENERGIA MECÂNICA

Como bem sabemos, a energia mecânica é sempre a soma da energia cinética com a potencial. Esta última, pode ser de vários tipos, como potencial elétrica, elástica ou gravitacional. Como estamos falando de gravitação, vamos somar as energias cinética e potencial gravitacional

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_{cin} + E_{pot} \Rightarrow \\ E_{mec} &= \frac{m \cdot v^2}{2} + \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{d} \right) \Rightarrow \\ E_{mec} &= \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{d} \quad \text{Eq. (24).} \end{aligned}$$

Consideremos que m seja a massa de uma molécula de um gás na atmosfera de um planeta de massa M .

Q. 9 – ENERGIA POTENCIAL NO “INFINITO”

Quando a distância entre dois corpos tende a infinito, a energia potencial gravitacional tende a zero

$$\lim_{d \rightarrow \infty} (E_{pot}) = \lim_{d \rightarrow \infty} \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{d} \right) = 0 \quad \text{Eq. (25).}$$

Q. 10 – VELOCIDADE DE ESCAPE

Em um sistema conservativo, a energia mecânica é constante, por isso, dizemos que a energia mecânica em dois instantes (ou em dois pontos) são iguais. Assim:

$$(E_{mec})_{\text{superfície do planeta}} = (E_{mec})_{\text{no infinito}}$$

Da mesma forma que a energia potencial no infinito é nula, dizemos que a energia cinética mínima que um corpo precisa para escapar do campo gravitacional de um planeta é aquela que faz com que a energia cinética tenda a zero conforme a distância tende à infinito. Com isso, a soma das energias potencial mais cinética de um corpo de massa m na superfície de um planeta para que este corpo escape do planeta é zero:

$$\begin{aligned} (E_{mec})_{\text{superfície do planeta}} &= (E_{mec})_{\text{no infinito}} \Rightarrow \\ (E_{cin} + E_{pot})_{\text{superfície do planeta}} &= (E_{cin} + E_{pot})_{\text{no infinito}} \Rightarrow \\ \frac{m \cdot v_{\text{Escape}}^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Note que substituímos d por R , o raio do planeta, pois vamos supor uma molécula de massa m , com velocidade v_{Escape} apontada verticalmente para cima. Com isso, determinamos a velocidade de escape:

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot v_{\text{Escape}}^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{v_{\text{Escape}}^2}{2} &= \frac{G \cdot M}{R} \Rightarrow \\ v_{\text{Escape}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \quad \text{Eq. (26).} \end{aligned}$$

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

Como vimos anteriormente (Equação 21 e 27), a velocidade de uma molécula de um gás depende da temperatura do gás e da constante de Boltzmann ($k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$):

$$(E_{cin})_{\text{méd}} = \frac{3}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (27).}$$

Com isso, sabendo a massa de uma molécula de certo gás (ou massa molecular $MM = m$) conseguimos determinar uma equação que relaciona a velocidade de escape de um planeta com a temperatura de um gás.

Isso permite calcularmos a temperatura máxima que um planeta de massa M e raio R pode ter para que seja capaz de manter uma atmosfera de um gás cuja massa é m .

Q. 11 – TEMPERATURA MÁXIMA DE UM PLANETA

Vamos substituir a velocidade de escape (Equação 26) na energia cinética de um molécula (Equação 23) e igualar com a energia cinética de uma molécula de acordo com a termodinâmica (Equação 27):

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} k_B T = \frac{m \cdot v_{\text{Escape}}^2}{2} \Rightarrow \\ 3 k_B T &= m \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M}{R} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m}{3 \cdot k_B \cdot R}. \end{aligned}$$

Podemos melhorar esta relação de voltarmos para a gravitação e lembrarmos que o campo gravitacional na superfície de um planeta é dado por:

$$\begin{aligned} g &= \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} \Rightarrow \\ G \cdot M \cdot m &= R^2 g. \end{aligned}$$

Assim, isolamos a expressão $G \cdot M \cdot m$ e substituímos na equação anterior:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m}{3 \cdot k_B \cdot R} \Rightarrow \\ T &= \frac{2 \cdot R^2 \cdot g}{3 \cdot k_B \cdot R} \Rightarrow \\ T &= \frac{2 \cdot R \cdot g}{3 \cdot k_B} \quad \text{Eq. (28).} \end{aligned}$$

Isso pode explicar por que não encontramos gás hélio na atmosfera do nosso planeta.

EXERCÍCIOS

03. Sabendo que a massa de uma molécula de oxigênio é de $2,6569 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, sendo a temperatura ambiente de 27°C e a constante de Boltzmann $k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, determine a velocidade da molécula de O_2 .

Resposta: 684 m/s.

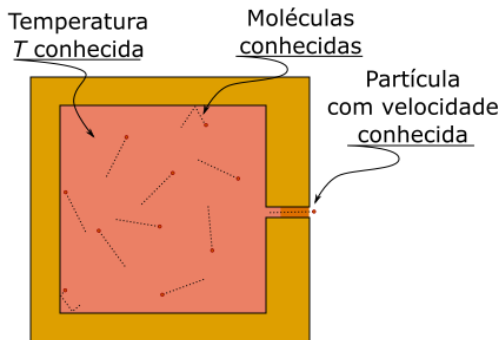
Utilizando a Equação 27 e a Equação 23:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k_B T &= \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \\ 3 \cdot 1,380 \cdot 10^{-23} \cdot (273 + 27) &= 2,6569 \cdot 10^{-26} \cdot v^2 \Rightarrow \\ \frac{4,14}{2,6569} \cdot 10^3 \cdot 300 &= v^2 \Rightarrow v \approx \sqrt{467.462} \Rightarrow \\ v &\approx 684 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

04. Utilizando dados anteriores e sabendo que a massa da prata é $1,79 \cdot 10^{-25}$ kg, determine a velocidade com que um forno emite átomos de prata estando este forno a 1727°C ?



Resposta: 680 m/s

Utilizando a Equação 27 e a Equação 23:

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow$$

$$3 \cdot 1,380 \cdot 10^{-23} \cdot (273 + 1727) = 1,79 \cdot 10^{-25} \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4,14}{1,79} \cdot 10^2 \cdot 2000 = v^2 \Rightarrow v \approx \sqrt{462.670} \Rightarrow$$

$$v \approx 680 \text{ m/s.}$$

Com isso, você pode ter uma ideia de como se consegue certas partículas com determinadas velocidades para experimentos, por exemplo, em problemas de eletromagnetismo.

LIVRE CAMINHO MÉDIO

Responda mentalmente as seguintes perguntas:

- Se a velocidade das moléculas é tão grande, como pode o som no ar (340 m/s) ter velocidade menos que o das moléculas?
- Se abrimos um vidro de perfume no interior de uma sala em um canto desta sala, demorará alguns minutos até que uma pessoa no canto oposto sinta este cheiro. Explique como pode demorar tanto para as moléculas do perfume atravessarem a sala se a velocidade destas moléculas deve ser superior a 100 m/s?

A resposta tem a ver com o que chamamos de livre caminho médio.

Vamos falar sobre isso.

Uma molécula em movimento no interior de um gás pode colidir com outra molécula deste gás tendo um caminho aleatório. Veja um esquema sobre isso na Figura 9.

A equação 08 a seguir apresentamos uma fórmula que permite determinar o livre caminho médio de uma molécula: O livre caminho médio é a distância média que uma molécula percorre entre duas colisões.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \quad \text{Eq. (29).}$$

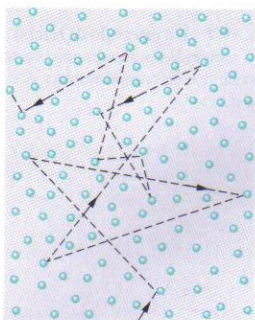


Figura 9: Caminho percorrido por uma molécula de um gás no interior deste gás.

Note que o livre caminho médio depende do inverso da concentração de moléculas por unidade de volume (N/V) e do diâmetro d da molécula.

Q. 12 – DETERMINE O LIVRE CAMINHO MÉDIO EM FUNÇÃO DA CONSTANTE DE BOLTZMANN, DA TEMPERATURA DO GÁS E DA PRESSÃO DO GÁS

Da equação de Clapeyron:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

O número de mols n se relaciona com o número N de moléculas através do número de Avogadro N_A por:

$$N = n \cdot N_A \Rightarrow n = \frac{N}{N_A}.$$

Substituindo na equação anterior obtemos o inverso da concentração de moléculas por unidade de volume (N/V):

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T \Rightarrow$$

$$p \cdot N_A = \frac{N}{V} \cdot R \cdot T \Rightarrow$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p \cdot N_A}{R \cdot T} \Rightarrow$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{T} \cdot \frac{N_A}{R}.$$

Da Equação 20 a, sabemos que:

$$k_B = \frac{R}{N_A} \Rightarrow R = N_A \cdot k_B$$

então temos que:

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{T} \cdot \frac{N_A}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{T} \cdot \frac{N_A}{N_A \cdot k_B} \Rightarrow$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T}.$$

Finalmente, substituindo na Equação 29, obtemos:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \frac{p}{k_B T}} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p}.$$

Eq. (30).

EXERCÍCIOS

05. Sabendo que o diâmetro da molécula de oxigênio é de $2,9 \cdot 10^{-10}$ m, determine o livre caminho médio de uma molécula de oxigênio sob pressão de 1 atm (10^5 Pa) e temperatura de 27°C . Compare com o diâmetro da molécula de oxigênio.

Resposta: $1,11 \cdot 10^{-7}$ m ou aproximadamente 382 vezes o diâmetro da molécula de oxigênio.

Utilizando a equação 30:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1,380 \cdot 10^{-23} \cdot (273 + 27)}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2,9 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 10^5} \Rightarrow$$

$$\lambda = 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Dividindo este valor pelo diâmetro da molécula, temos que o livre caminho médio é aproximadamente 382.

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

Chegamos ao último item da teoria cinética dos gases: distribuição de velocidades.

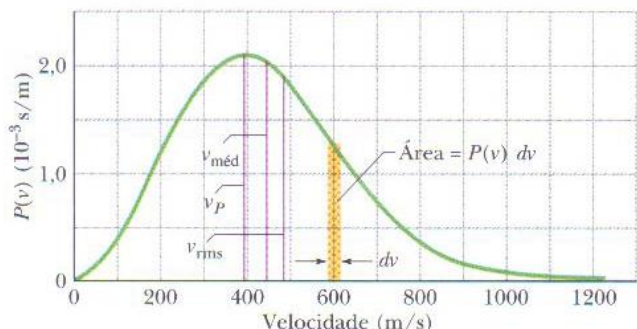
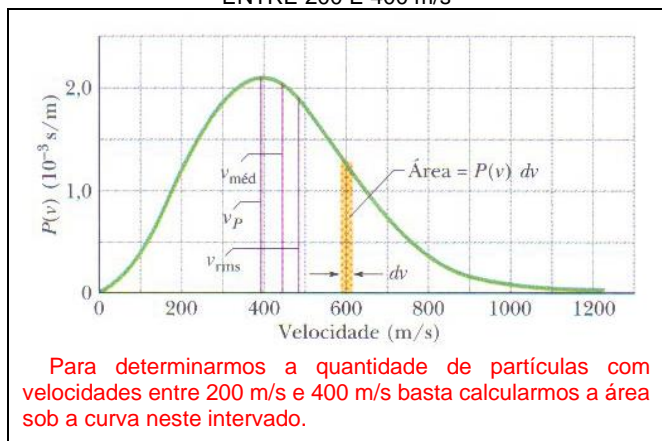


Figura 10: Distribuição de velocidades sendo representado a média das velocidades, a velocidade quadrática média e a velocidade mais provável.

Já falamos sobre velocidade quadrática média e que ela sempre será maior ou igual que a média das velocidades. Quando estudamos gases, as moléculas dos gases não possuem apenas uma velocidade, isto é, as partículas não possuem todas a mesma velocidade e o gráfico acima nos ajuda a entender como se distribui as velocidades.

Seja a área de uma região estreita sob o gráfico da Figura 10: a área representa quantas partículas possuem velocidade entre os extremos da base deste triângulo

Q. 13 – NÚMERO DE PARTÍCULAS COM VELOCIDADES ENTRE 200 E 400 m/s



O valor da velocidade quadrática média (v_{rms}) está representado na figura 1 e é sempre maior que a média das velocidades (v_{med}).

Note que a curva possui um pico e este pico representa a velocidade mais provável.

Note que mesmo para um gás onde a $v_{rms} \approx 500$ m/s teremos algumas poucas partículas com velocidade muito altas, tal como 1200 m/s.

Observe agora a Figura 11, no qual está representado as distribuições de velocidades para duas temperaturas do gás oxigênio.

Vejam agora aquela pergunta da primeira parte sobre teoria cinética dos gases: como podemos manter a água em um vaso de barro e a temperatura da água ficar menor que a temperatura ambiente?

A resposta tem a ver com o fato de que a distribuição de velocidades também deve ser considerada para líquidos e a parede do vaso, por ser de barro, permite que algumas partículas, mais energéticas, atravessem o barro levando consigo uma quantidade significativa de energia, alterando a distribuição de velocidades e diminuindo a temperatura da água.

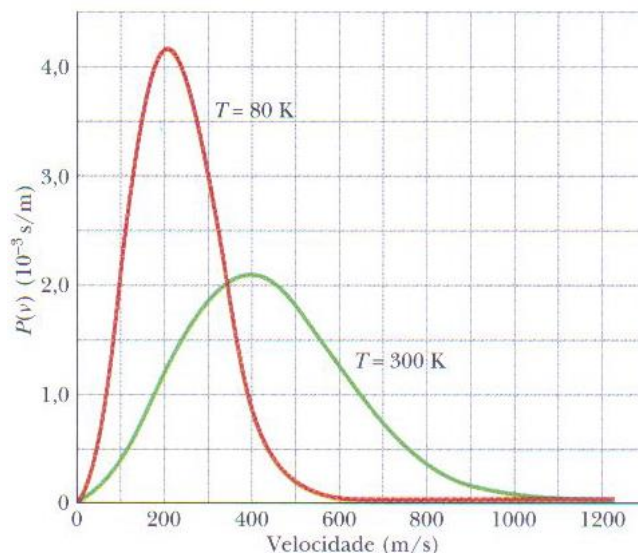


Figura 11: As curvas de distribuição de velocidade para as temperaturas de 300 e 80 K. Note como a distribuição das velocidades fica menos distribuída quando a temperatura é menor.

Q. 14 – COMO É POSSÍVEL UM VASO DE BARRO MANTER ÁGUA A UMA TEMPERATURA MENOR QUE A AMBIENTE?

Como podemos ver na Figura 11, existe uma distribuição de velocidade nas moléculas dos gases, o que pode ser estendido também para moléculas de líquidos.

Uma vez que vasos de barro são estruturas porosas, as moléculas mais rápidas são capazes de atravessar o barro, fazendo com que a velocidade quadrática média das moléculas restantes seja reduzida.

Como resultado, a temperatura do líquido no interior do jarro diminui. Ou seja, encontramos uma situação em que haja um equilíbrio, mas com a temperatura da água menor que a temperatura do ambiente.

Outro exemplo interessante é a formação de gelo quando a temperatura ambiente é superior a 0 °C. Para entender como isso é possível, seja uma noite sem nuvens: o céu noturno e limpo se comporta como um corpo negro com temperatura muito baixa (cerca de -270 °C ou 3 K). Isso quer dizer um recipiente contendo água nessas condições recebe pouco calor do céu, assim, se o recipiente que contém a água for um bom isolante térmico, no balanço energético final temos que a temperatura da água pode ser inferior à temperatura ambiente, assim, seria possível a formação de gelo mesmo em um ambiente onde a temperatura é superior a 0 °C.

O fenômeno acima descrito também explica como é possível a água de um lago evaporar mesmo à uma temperatura bem menor que a temperatura de ebulição.

Para encerrar, vamos às equações das velocidades. Não precisa decorar nenhuma fórmula, mas é de alguma importância lembrar que $v_p > v_{med} > v_{rms}$.

Velocidade quadrática média:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{Eq. (31).}$$

sendo M a massa da partícula.

PROFESSOR DANILO

TEORIA CINÉTICA DOS GASES – SEGUNDO ANO – 29/04/2024

A média das velocidades, na verdade, dos módulos da velocidade, é:

$$v_{\text{méd}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{Eq. (32).}$$

A velocidade mais provável é:

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{Eq. (33).}$$

EQUIPARTIÇÃO DE ENERGIA

Lembremos da fórmula de energia cinética de uma molécula de um gás ideal monoatômico.

Q. 15 – ENERGIA CINÉTICA DE UM GÁS MONOATÔMICO

$$(E_{\text{cin}})_{\text{méd}} = \frac{3}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (34).}$$

Até o momento, estudamos a energia cinética de uma molécula monoatômica. Note que assumimos os átomos como sendo esferas maciças, e qualquer semelhança com o modelo de Dalton não é mera coincidência: assumimos que um átomo colide com as paredes de um recipiente de maneira elástica e não consideramos nada além disso. Mas isso é interessante, pois por mais simples que seja, esse modelo funciona muito bem para certas situações, como alta temperatura e baixa densidade de átomos em certo gás.

Mas podemos fazer uma tentativa de generalização (é interessante notar que o exercício resolvido 03 foi feito sem garantia de que estaríamos usando corretamente a Equação 21). Vamos então falar mais sobre outras formas de energias associadas ao movimento, mas não é a tradicional energia cinética de translação.

Q. 16 – ENERGIA DE ROTAÇÃO DE UM GÁS DIATÔMICO

Como se pode notar em <http://fisica.professordaniilo.com/download/diversos/MoleculaDiatomica.gif>, (QR-code abaixo), um gás diatômico pode girar em torno de dois eixos que não seja aquele que liga os centros dos átomos. A energia cinética associada à rotação dos átomos em torno do eixo que liga os centros dos átomos é desprezível, por isso dizemos que somente temos energias cinéticas associadas aos dois outros eixos de rotação, apresentados no QR-code abaixo.



A cada uma destas direções podemos associar uma energia cinética de rotação dada por

$$E_{\text{rot por grau de liberdade}} = \frac{1}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (35).}$$

A cada direção à qual podemos associar uma energia, seja cinética de translação (três graus de liberdade, pois os corpos podem se mover nas direções x, y e z) ou de rotação (x e y no

caso da animação apresentada no Q. 16 ou pelo professor em aula) ou ainda de oscilação (no caso de moléculas tri atômicas ou superiores), podemos associar a energia representada na Equação 35.

Q. 17 – GRAUS DE LIBERDADE

Gás monoatômicos possuem três graus de liberdades todos associados à energia cinética de translação.

Gás diatômicos também possuem três graus de liberdades associados à energia cinética de translação e mais dois associados à rotação.

Gás tri atômicos também possuem três graus de liberdades associados à energia cinética de translação, mais dois associados à rotação e mais dois associados à vibração.

Quanto maior o número de átomos, mais a teoria apresentada aqui se difere dos resultados experimentais.

Q. 18 – TEOREMA DA EQUIPARTIÇÃO DE ENERGIA

O teorema da equipartição de energia afirma que à cada grau de liberdade associamos $\frac{1}{2} k_B \cdot T$ de energia.

Q. 19 – ENERGIA INTERNA E CINÉTICA TRANSLACIONAL DE UM GÁS FORMADO POR MOLÉCULAS DE j ÁTOMOS E DE f GRAUS DE LIBERDADES

$$f = 2j + 1 \quad \text{Eq. (36).}$$

$$E_{\text{interna total}} = \frac{f}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (37).}$$

$$E_{\text{cinética translação}} = \frac{m \cdot (v^2)_{\text{méd}}}{2} = \frac{1}{2} k_B \cdot T \quad \text{Eq. (38).}$$

Note que EM TODOS OS CASOS a energia cinética de translação é a mesma, logo, tudo o que discutimos até aqui está certo (por exemplo, distribuição de energia, velocidade de escape etc.).

Vamos especificar então:

Tabela 1: Relação entre graus de liberdade e números de átomos na molécula do gás.

NÚMERO DE ÁTOMOS	GRAUS DE LIBERDADE	ENERGIA INTERNA
1	3	$\frac{3}{2} k_B \cdot T$
2	5	$\frac{5}{2} k_B \cdot T$
3	7	$\frac{7}{2} k_B \cdot T$

Note que a energia cinética de translação não depende da atomicidade da molécula!

$$E_{\text{cinética translação}} = \frac{m \cdot (v^2)_{\text{méd}}}{2} = \frac{1}{2} k_B \cdot T.$$

Esse conteúdo servirá de base para darmos continuidade ao nosso estudo em termodinâmica.