

УДК 551.465.15

© Г. В. Жегулин¹, А. В. Зимин^{1,2}¹Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН²Российский государственный гидрометеорологический университет, г. Санкт-Петербург
gleb-jegulin@rambler.ru**ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА
В БЕЛОМ МОРЕ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ**

Статья поступила в редакцию 09.06.2015, после доработки 07.09.2016.

В работе на основе данных учащенных измерений скоростей течения, выполненных в проливных зонах Белого моря, произведен расчет коэффициентов горизонтального турбулентной вязкости и их изменчивость с глубиной в зависимости от периода осреднения скоростей течения. Для устранения упорядоченных движений в поле скоростей применялась методика скользящего осреднения, а выделение локальных эффектов производилось на основе вейвлет-анализа. Полученные результаты указали на возможность выделения в Белом море интервалов временных масштабов притока энергии от упорядоченных энергосодержащих движений (колебания с приливными частотами M_2 , M_4 и M_6 , механизм регулярной перестройки течений, придонное трение) и нестационарных внешних источников (бароклинные течения, дезинтеграция внутреннего прилива, короткопериодные внутренние волны). Установлено, что анизотропия возрастает с увеличением периода осреднения. При определенных масштабах сглаживания скоростей течения, преимущественно для центральных областей потока, поле пульсаций горизонтального вектора скорости изотропно. С учетом исключения влияния внешних источников энергии на структуру потока и поверхностных ветро-волновых процессов порядок значений коэффициентов турбулентной вязкости вдоль течения составил 10^2 — 10^5 см²/с, а в направлении, нормальном к потоку, коэффициент обмена в 1—3 раза меньше.

Ключевые слова: Белое море, пульсации скорости, период осреднения, энергоснабжение, коэффициент турбулентного обмена.

G. V. Zhegulin¹, A. V. Zimin^{1,2}¹Saint-Petersburg Branch of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Russia²Russian State Hydrometeorological University, Saint-Petersburg, Russia**EVALUATION FACTORS OF HORIZONTAL TURBULENT EXCHANGE
IN THE WHITE SEA ACCORDING TO FLOW MEASUREMENT**

Received 09.06.2015, in final form 07.09.2016.

The coefficients of horizontal turbulent viscosity and their variability with the depth depending on the averaging period of flow rates are calculated on the basis of an increased flow velocity measurement data performed in the heavy areas of the White Sea. The technique of sliding averaging was used to eliminate the orderly movement in the velocity field, and the selection of local effects was carried out on the basis of wavelet analysis. The results indicated the possibility of release the time interval scale inflow of energy from the energy-ordered motions in the White Sea (fluctuations with the tidal frequencies M_2 , M_4 and M_6 , the mechanism of the regular adjustment of currents, bottom friction), and unstable external sources (baroclinic currents, the disintegration of the internal tide, short-period internal waves). It was found that the anisotropy increases with the averaging period. Under certain extent of smoothing the flow velocity, mainly for the central regions of the flow field, the field of pulsations of a horizontal vector of speed is isotropic. Taking into account the exclusion of influence of external sources of energy in the flow structure and the surface wind and wave processes the values of eddy viscosity coefficients along the flow was 10^2 — 10^5 sm²/s, and in a direction normal to the flow the exchange ratio was 1—3 times smaller.

Key words: the White Sea, velocity fluctuations, averaging period, energy, turbulent exchange coefficient.

Ссылка для цитирования: Жегулин Г. В., Зимин А. В. Оценки коэффициентов горизонтального турбулентного обмена в Белом море по данным измерений скорости течений // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2017. Т. 10, № 1. С. 17—30.

For citation: Zhegulin G. V., Zimin A. V. Evaluation factors of horizontal turbulent exchange in the White Sea according to flow measurement. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2017, 10, 1, 17—30.

DOI: 10.7868/S2073667317010038.

История исследований турбулентности в океане берет начало примерно с 1950-х гг. Описание главных этапов в развитии изучения морской турбулентности, изложение как теоретических, так и экспериментальных результатов было представлено в [1–4]. Как правило, основной целью измерений турбулентности в толще океана является оценка эффективных коэффициентов вязкости и диффузии, что позволяет определить интенсивность горизонтального и вертикального перемешивания. В силу разнообразия природных условий коэффициенты обмена могут меняться в очень широких пределах, и на данном этапе исследования стоит задача выявить максимально точно зависимости от доминирующих факторов. Использование осредненного коэффициента турбулентного обмена не дает удовлетворительного результата в моделях динамики вод, поэтому возникает необходимость учета его пространственно-временной изменчивости.

Существуют прямые и косвенные методы проведения оценок характеристик и коэффициентов горизонтального обмена. В косвенных методах осуществляется сопоставление наблюдаемых осредненных полей с решениями упрощенных осредненных уравнений движения, теплопроводности и диффузии [2, 5, 6]. В настоящее время на практике широко применяются процедуры параметризации турбулентного обмена (теории подобия и иерархия моделей параметризации турбулентных пограничных слоев). При практическом применении такой параметризации, прежде всего, встает вопрос о численном значении коэффициентов турбулентного обмена. И в современных численных моделях этот коэффициент часто фигурирует как подгоночный параметр, выбором которого можно добиться достаточно хорошего согласия полученных решений и данных наблюдений. Но его значение часто выбирается из соображений вычислительной устойчивости счета на длительные сроки, и может на порядки превосходить физически разумные его оценки для реального океана.

В последнее время хорошо зарекомендовала себя двухслойная модель [7, 8]. Ее основу составляют две модели: модель с одним уравнением, которая вполне адекватно описывает турбулентные характеристики в пристеночном слое, и стандартная, наиболее часто используемая при решении реальных инженерных задач, k - ϵ модель для расчета параметров в области развитого турбулентного течения [9]. Однако данные модели имеют как преимущества, так и недостатки, и существует огромное количество альтернативных моделей, к примеру, *RNG* [10] и реальная k - ϵ модель [11], применяемые для более широкого класса жидкостей по сравнению со стандартной k - ϵ моделью.

В исследовании турбулентности морских течений наиболее естественным является путь изучения одной из характерных особенностей этого явления – пульсаций скоростей течения. Поэтому с начала 1940-х гг. начинают осуществляться попытки подсчета коэффициентов турбулентного обмена в море прямыми методами — по данным не осредненных, а пульсационных характеристик исследуемых величин. Прямые методы основаны на определении турбулентных потоков как осредненных по пространству или времени (корреляции) произведений отклонений составляющих скорости течений и переносимой физической величины. К прямым методам можно отнести методы оценки характеристик турбулентности по перемещению или рассеянию маркеров (индикаторов, буйев). В последние десятилетия все шире применяются так называемые дрейфтеры [12–15] (свободно переносимые течениями буйи, положение которых фиксируется через определенные промежутки времени). Для оценок характеристик турбулентности с помощью прямых методов существует проблема, связанная с необходимостью получения больших объемов данных, а также длительных и дорогостоящих экспедиционных измерений [16]. Ограниченность числа дрейфтеров и времени их работы вызывает существенные трудности при обработке данных и их интерпретации [12, 15]. При этом остаются неосвоенными многие районы океана и морей. Произведение осредненных возмущений геострофических скоростей и их пространственных масштабов дает оценку коэффициента турбулентной вязкости. Подобный подход применялся для восточной части северной Атлантики [17–20].

В последние годы наметился большой прогресс в технологии и серийном производстве акустических измерителей параметров течения (ADCP), которые сейчас широко используются не только для определения средней скорости течения, но и для прямых оценок параметров турбулентности. Высокое разрешение прибора по скорости течения дает уникальную возможность оценить ряд параметров турбулентности, таких как напряжения Рейнольдса. В частности, такие приборы применялись для исследования турбулентности в прибрежных районах моря [21, 22], проливах и каналах [23–27]. ADCP имеют особое значение для исследования турбулентности в придонном пограничном слое [25, 28], где оценки параметров турбулентности дают ключ к пониманию процессов ее генерации.

В настоящей работе выполнен расчет коэффициентов горизонтального турбулентного обмена при использовании целого набора периодов осреднения турбулентных пульсаций скоростей. Это позволит в дальнейшем выделить временные масштабы, вблизи которых осуществляется усиленный приток внешней энергии, а также масштабы, в пределах которых турбулентность не получает энергию от осредненного движения и не оказывает влияние на это движение. С некоторыми оценками зависимости характеристик турбулентного обмена от масштаба осреднения можно ознакомиться, например, в монографии Озмидова [2]. Для Белого моря в литературе подобных оценок не приводится, за исключением недавних работ [26, 27].

Для оценки коэффициентов горизонтального турбулентного обмена нами был использован метод Эртеля [29], который заключается в осреднении по времени произведений пульсационных составляющих скоростей течения. Теория этого метода является эклектическим соединением полуэмпирической теории Прандтля и статистического подхода для случая трехмерного анизотропного турбулентного течения. Указанный способ вычисления коэффициентов обмена встречается также в работах [30—34]. Суть и особенность метода состоят в следующем: поскольку передача количества движения характеризуется направленностью, то коэффициенты турбулентной вязкости рассматриваются в качестве векторных величин, являющихся составляющими тензора турбулентного обмена. Тензор обмена, характеризующий перенос количества движения турбулентными пульсациями, является симметричным. Геометрический смысл симметричного тензора — поверхность второго порядка (тензорный эллипсоид), который характеризует экстремальные значения коэффициентов обмена в различных направлениях. По величине коэффициентов обмена можно судить об интенсивности турбулентного перемешивания в любом заданном направлении.

Исходные данные и средства наблюдения. В качестве исходного материала были использованы данные наблюдений над скоростью течения на многосуточных буйковых станциях во время Беломорской экспедиции летом 2012 г. в проливных зонах Белого моря с различной гидрологической структурой вод [35] (рис. 1):

- на границе пролива Восточная Соловецкая Салма и Онежского залива, разделяющего воды залива и Бассейна — станция 1, ($\varphi = 65^{\circ}10,56$; $\lambda = 36^{\circ}35,35$);
- в проливе Западная Соловецкая Салма — станция 2, ($\varphi = 65^{\circ}20,90$; $\lambda = 36^{\circ}31,58$);
- на границе Бассейна и Горла Белого моря — станция 3, ($\varphi = 65^{\circ}34,63$; $\lambda = 39^{\circ}33,15$).

Научная программа рейса была утверждена руководством СПбФ ИО РАН и направлена на изучение локальной изменчивости гидрофизических полей, связанной с приливными колебаниями в различных по гидрологическим условиям районах. Отметим также, что наличие сильных приливных течений

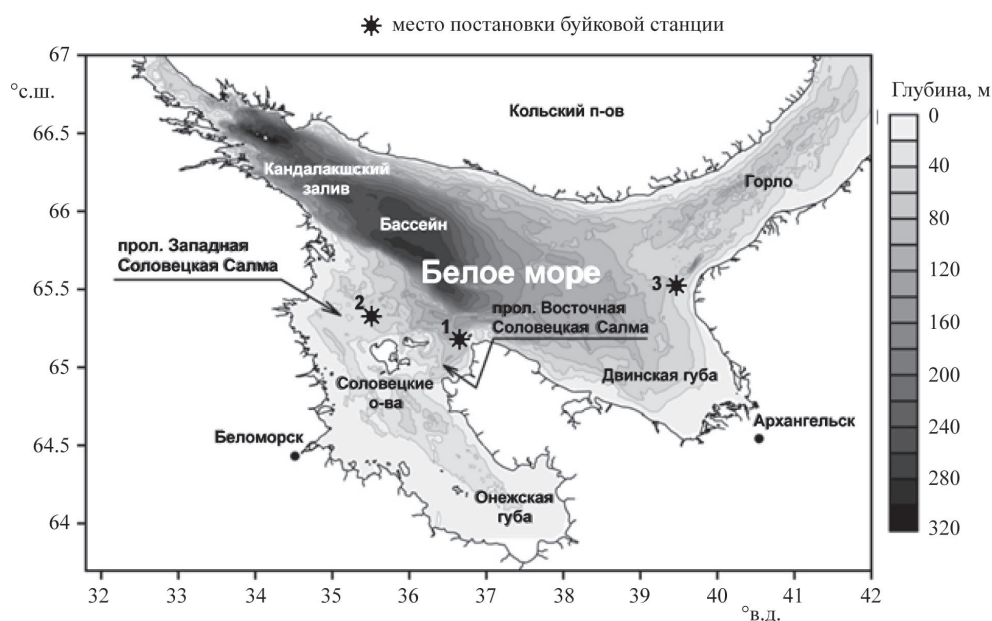


Рис. 1. Районы постановки буйковых станций.

в проливных зонах создают уникальные условия для исследования механизмов генерации и подавления турбулентности в естественных условиях.

Наблюдения проводились с 17 июля по 8 августа. Глубина моря в районах проведения работ не превышала 45—50 м. Для измерений скорости течений использовался акустический доплеровский профилограф ADCP WHS-300 в режиме донной постановки. Прибор был ориентирован так, что излучающие гидроакустические импульсы распространялись от дна к поверхности. Прием отраженных сигналов, несущих информацию о скорости течения, осуществлялся с дискретностью 1 м, начиная с 1.5 м от дна. Регистрация компонент скорости течения проводилась в течение суток с интервалом аппаратного осреднения 2 мин. Из анализа изымались 2—3 приповерхностных горизонта, чтобы исключить влияние ветро-волновых процессов на отраженный акустический сигнал. Точность измерения компонент течения составляла ± 0.5 см/с, диапазон измерений $0 \dots \pm 500$ см/с. Прибор имел встроенный компас, что позволяло определять ориентацию прибора, а соответственно и направление течений с точностью ± 2 градуса. Прибор был оснащен датчиками давления, позволявшим отслеживать колебания уровня моря.

Наглядное представление о типичной изменчивости профилей течений и их связи с приливными процессами можно получить из рис. 2. На рисунке в качестве примера представлены проекции течений вдоль оси север-юг и восток-запад в проливе Западная Соловецкая Салма с привязкой данных наблюдений к колебаниям уровня.

Представленные на рисунке течения имеют правильный полусуточный характер с доминирующими направлениями вдоль оси север-юг. В целом во всей толще вод меридиональная составляющая скорости течения в 1.5—2 раза превосходит широтную составляющую. В полную воду доминируют течения, направленные на север, в прилив — течения южных и юго-восточных направлений, что связано с особенностями рельефа дна и конфигурацией берегов. Максимальные скорости наблюдаются у поверхности, причем перестройка направления течения начинается с придонных горизонтов и происходит быстро. В моменты полных и малых вод скорости течения достигают 40—45 см/с при средних значениях 20—25 см/с. С глубиной наблюдается вращение течений по часовой стрелке. Сопоставление скоростей и колебаний уровня показывает, что максимальные скорости течения наблюдаются в периоды прилива и отлива. Наибольшие отличия в скоростях отмечаются в периоды стояния уровня. В целом течения в районе имеют практически реверсивный характер. Вращательная компонента проявляется преимущественно в проекции восток-запад. В придонном слое вследствие влияния сил трения течение затухает.

Колебания уровня представляют собой почти правильный полусуточный прилив высотой около 1.5 м. По мере увеличения амплитуды прилива увеличивается и скорость приливных течений. Колебания скоростей течения, кроме приливного периода, содержат и более высокочастотные компоненты. Эпизодически наблюдаются колебания скорости течения с амплитудой 5—10 см/с и периодом от десятков минут до единиц часов. Особенно они хорошо заметны в середине водной толщи.

В проливах Восточная Соловецкая Салма и Горле течения так же имеют бимодальный характер, при котором компонента, направленная преимущественно вдоль оси север-юг, превышает значения

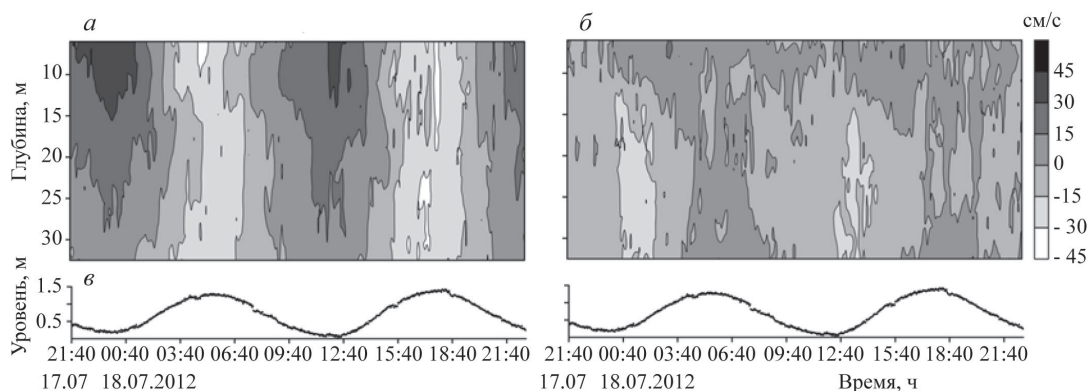


Рис. 2. Временная изменчивость компонент скорости течения: компоненты скорости вдоль оси север-юг (а) и восток-запад (б), а также колебания уровня (в) по данным акустического профилографа ADCP WHS-300, установленного в районе пролива Западная Соловецкая Салма с 17 по 18 июля 2012 г. (станция 3, $\varphi = 65^{\circ}34,63$; $\lambda = 39^{\circ}33,15$).

компоненты скорости вдоль оси восток-запад в разы. Стоит отметить, что течения в Горле сильнее, чем в других проливах на 15—20 см/с.

Максимальные скорости течения более 120 см/с фиксировались в фазу прилива на глубине 4—8 м на протяжении десятков минут на юго-западной границе Горла около Терского берега (станция 3, рис. 1). Минимальные скорости наблюдались на придонных горизонтах во всех рассматриваемых районах моря.

Методика исследования. Концепция разделения скорости течения на среднюю и турбулентную составляющие является ключевой при оценке параметров турбулентного обмена, поскольку упорядоченные периодические движения турбулентности не порождают. Турбулентность зарождается, когда появляются условия возникновения неустойчивости основного движения. Поэтому, для последующего определения осредненных и пульсационных характеристик турбулентного потока производилась фильтрация исходных записей скоростей течения при помощи косинус-фильтра [1, 2] с различным периодом осреднения:

$$\tilde{u}_t = \frac{1}{T} \sum_{i=t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left[1 + \cos \frac{2\pi(t-i)}{T} \right] u_i; \quad t = \frac{T}{2}, \dots, N - \frac{T}{2}; T \geq 2,$$

где T — интервал сглаживания. После сглаживания длина ряда сокращается до $\tilde{N} = (N - T)$ членов. Фильтрация достигается операцией вычитания сглаженных величин из первичных по формуле $u'_t = u_t - \tilde{u}_t$.

Для условий приливных морей выбор такого интервала сглаживания T , при котором осредненные движения наилучшим образом подавляются, затруднен из-за многомасштабного характера движений. Снабжение энергией от внешних источников происходит не только с длинноволновых участков скоростных образований. Источником снабжения энергией, помимо приливообразующих сил, является касательное напряжение трения ветра, внутренние волны, сдвиговые течения, трение о дно и т. д. Выбор масштаба становится сложной задачей.

Самые крупные пульсации являются анизотропными. Они получают свою энергию непосредственно от осредненного движения и передают ее последовательно все более мелким возмущениям. Случайный характер дробления вихрей в турбулизированной среде приводит к представлению о том, что турбулентные неоднородности, начиная с некоторого масштаба, можно рассматривать как изотропные. Другими словами, турбулентные вихри теряют свойства преобладающей ориентации, присущие энергосодержащим образованиям, и их, начиная с этого масштаба, можно считать горизонтально изотропными. Для такого турбулентного движения приближенно выполняется условие статистического равновесия (локальной изотропии). Основной характеристикой стационарного случайного процесса служит коэффициент корреляции $R(u', v')$ между пульсационными составляющими скоростей.

Наличие областей с высокими значениями коэффициентов корреляции будет указывать на нарушение изотропии, что является следствием присутствия упорядоченных колебаний данного периода в исследуемом поле скорости. Для значений R , принадлежащих диапазону от 0 до 1, выполняется проверка на статистическую значимость. Для этого выбирается t -критерий Стьюдента, выборочное значение которого рассчитывается по выражению

$$t^* = \frac{R(u', v')}{\sigma_R}, \quad \text{где } \sigma_R = \frac{1 - R(u', v')^2}{\sqrt{N - 1}},$$

где σ_R — стандартное отклонение для распределения коэффициентов корреляции. Далее определяется критическое значение $t_{кр}(\alpha, \mu)$, где уровень значимости α принимается равным 5 %, а число степеней свободы $\mu = N - 1$, где N — длина ряда. Если $|t^*| > t_{кр}$, то коэффициент корреляции значим, т. е. между пульсациями скоростей существует статистически значимая связь. Если $|t^*| < t_{кр}$, то коэффициент корреляции незначим, т. е. между пульсациями статистически значимая связь отсутствует и турбулентность обладает достаточной степенью изотропии. При $|t^*| / t_{кр} > 1$ начинает сказываться анизотропное влияние внешних источников на структуру потока.

Однако анализ корреляционных зависимостей в потоке усложняется, если на турбулентный режим оказывают влияние локальные (нестационарные) источники энергии, такие, например, как бароклинные течения, включая нелинейные внутренние волны. При этом кратковременные активные взаимодействия

между пульсациями скоростей могут приводить к увеличению значимости коэффициента корреляции. Также нельзя исключать тот факт, что локальный внешний источник энергии может оказывать доминирующее влияние на изменчивость только одной из двух компонент горизонтального вектора скорости. Все это накладывает ограничения на возможность применения классического корреляционного анализа при исследовании возмущений в поле скоростей от локальных источников энергоснабжения. На практике с целью описания частных свойств числовых последовательностей используются статистические параметры распределения вероятности, такие, например, как несмещенная оценка выборочного коэффициента эксцесса:

$$Ex = \left[\frac{mn(mn-1)}{(mn-1)(mn-2)(mn-3)} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{M_{ij} - \bar{M}}{\sigma(M)} \right)^4 \right] - \frac{3(mn-1)^2}{(mn-2)(mn-3)},$$

где m и n — объемы выборок, M — двумерный массив пульсаций скоростей u' и v' размером $m \times n$, $\sigma(M)$ — среднеквадратическое отклонение, \bar{M} — среднее арифметическое значение. Для нормального распределения Гаусса $Ex = 0$. Положительное значение эксцесса показывает, что распределение является «менее плоским», чем нормальное, — величина концентрируется в областях или очень больших, или очень малых значений. Движения с таким распределением пульсаций характеризуются чередованием длительных периодов относительного покоя с периодами повышенной интенсивности пульсаций. Такую статистическую структуру, характерную для мелкомасштабной (перемежающейся) турбулентности [36], называют «пятнистой». В этом случае полезным и актуальным инструментом для регистрации, уточнения причинно-следственных связей между пульсациями и исследования энергоактивных участков потока является вейвлет-анализ [37—41]. Он позволяет проследивать эволюцию во времени энергии пульсаций скоростей и статистическую значимость по отношению к фоновым условиям.

В настоящей работе использовалось непрерывное вейвлет-преобразование (НВП), которое хорошо подходит для анализа нестационарных процессов. НВП осуществляется путем свертки

$$W(a, b) = \frac{1}{|a|^{0.5}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

анализируемой функции $f(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right),$$

где $a, b \in R$; $a \neq 0$; $\psi(t) \in L^2(R)$. $L^2(R)$ — пространство функций $f(t)$ (гильбертово пространство), определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной энергией (нормой).

Входящая в выражение (5) функция $\psi(t)$ называется вейвлетом (анализирующим, базисным или материнским вейвлетом). Параметр « a » определяет размер вейвлета и называется *масштабом*. Его аналогом в Фурье-анализе является период гармонического колебания. Параметр « b » задает временную локализацию вейвлета и называется *сдвигом*. Этот параметр не имеет аналога в Фурье-преобразовании. В качестве материнского был выбран вейвлет Морле [38], который позволяет добиться лучшей частотной локализации, поскольку его Фурье-образом является гауссиана, и оценить значение частот многокомпонентного сигнала с меньшей ошибкой, по сравнению с другими базисными вейвлетами [39]:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2} e^{i2\pi t}.$$

Результатом НВП одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования $|W(a, b)|$, а величина $|W(a, b)|^2$ носит название *локального спектра энергии*, которая характеризует энергетические уровни сигнала в пространстве (a, b) и позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам. В противоположность этому, величину

$$E_{\omega}(a) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b)|^2 db$$

называют *глобальным спектром энергии*, где N — число отсчетов в ряду. Глобальный спектр энергии есть плотность спектра энергии, сглаженная на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего

вейвлета [37]. Считается, что методика НВП вполне надежна для выявления спектральных пиков, хотя и уступает Фурье-преобразованию по спектральной разрешающей способности [40].

Ряды пульсаций скоростей течения, для которых $R(u', v')$ статистически незначим и «Ех» не высок, положены в основу вычисления коэффициентов горизонтального и вертикального турбулентного обмена с помощью формул Эртеля. Группируя пульсации u'_i по знаку отклонения от средней составляющей скорости (положительному или отрицательному), который сохраняется в течение промежутка времени Δt , получается некоторое число групп n , которое представляет собой число вихрей, наблюдавшихся в течение всего промежутка времени измерений. Каждый раз, когда вихрь попадает в фиксированную нами точку, мы его замечаем по отклонениям составляющих скорости от их среднего значения. Знак отклонения может быть как плюсом, так и минусом. Следовательно, n представляет собой число вихрей, наблюдавшихся в течение всего промежутка времени измерений. В таком случае составляющие турбулентного обмена принимают вид

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2} \rho l_j^* u_k',$$

где $l_j^* = 2l_j = \int_t^{t+\Delta t_j} u' dt = \Delta t_j u_j^{(*)}$ — путь пробега; $u_j^{(*)}$ — среднее значение скорости в интервале времени $[t; t + \Delta t_j]$. Путь пробега l_j^* в указанном смысле равен удвоенному пути смещения l_j в духе Прандтля. Предполагалось, что изменение знака пульсационной скорости u'_k означает прохождение через точку наблюдения турбулентного образования с размером, равным $2l_j$.

Выбирая за координатные оси географические координаты, направив ось x на север, ось y на восток, уравнение эллипса горизонтального турбулентного обмена запишется в следующем виде:

$$A_\phi x^2 + A_\lambda y^2 + 2A_{\phi\lambda} xy = 1, \quad (1)$$

где A_ϕ — коэффициент турбулентного обмена в направлении меридиана, равный $\overline{\rho l_\phi u_\phi'}$; A_λ — коэффициент турбулентного обмена в направлении параллели, равный $\overline{\rho l_\lambda u_\lambda'}$; $A_{\phi\lambda}$ — коэффициент, зависящий от ориентации эллипса обмена по отношению к избранной системе координат ϕ и λ . Величины коэффициентов A_ϕ , A_λ , $A_{\phi\lambda}$, полагая $\rho = 1$, находятся из выражений

$$A_\phi = \frac{t}{2N_\phi} \sum_1^{2N_\phi} \frac{(\sum_1^{n_\phi} u_\phi')^2}{n_\phi}; \quad A_\lambda = \frac{t}{2N_\lambda} \sum_1^{2N_\lambda} \frac{(\sum_1^{n_\lambda} u_\lambda')^2}{n_\lambda};$$

$$A_{\phi\lambda} = \frac{t}{2N_\phi} \sum_1^{2N_\phi} \frac{(\sum_1^{n_\phi} u_\phi' \sum_1^{n_\lambda} u_\lambda')}{n_\phi}; \quad A_{\lambda\phi} = \frac{t}{2N_\lambda} \sum_1^{2N_\lambda} \frac{(\sum_1^{n_\lambda} u_\lambda' \sum_1^{n_\phi} u_\phi')}{n_\lambda};$$

$$A_{\phi\lambda} = \frac{A_{\phi\lambda} + A_{\lambda\phi}}{2},$$

где n — число членов в каждой группе составляющих отклонений величин u_λ' и u_ϕ' соответственно; $2N$ — число групп по знаку пульсаций u_λ' и u_ϕ' ; t — период осреднения пульсаций.

При построении эллипса обмена уравнение (1) приводится к каноническому виду. Определяется угол поворота α главных осей эллипса обмена по отношению к избранной системе координат ϕ и λ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_{\phi\lambda}}{A_\phi - A_\lambda}$$

и значения полуосей $a_{x'}$, $b_{y'}$:

$$a_{x'} = \sqrt{\frac{1}{A_{x'}}}; \quad b_{y'} = \sqrt{\frac{1}{A_{y'}}},$$

где $A_{x'}$ — коэффициент обмена вдоль малой оси $a_{x'}$; $A_{y'}$ — коэффициент обмена вдоль большой оси $b_{y'}$ эллипса обмена. При этом ось x' будет направлена по течению, и ей будет соответствовать малая полуось эллипса обмена $a_{x'}$, следовательно, в этом направлении турбулентный обмен наиболее интенсивен. В направлении оси y' турбулентный обмен менее интенсивен, и ей будет соответствовать большая полуось эллипса $b_{y'}$.

Коэффициенты A_x и A_y являются корнями квадратного уравнения [33]:

$$A^2 - (A_\varphi + A_\lambda)A + (A_\varphi A_\lambda - A_{\varphi\lambda}^2) = 0.$$

Результаты и их обсуждение. Если представить поле скорости течения в виде суммы правильного периодического колебания и неупорядоченного турбулентного шума, то энергетический спектр такого суммарного движения вод будет суммой непрерывного колмогоровского спектра и отдельной линии, соответствующей периодической составляющей скорости. С целью проверки качества данных были проанализированы спектры плотности энергии скорости течения. На рис. 3 приведены характерные энергетические спектры Фурье и глобальные спектры горизонтальных пульсаций скоростей течения на глубине 20 м, осредненных за весь период наблюдения. В низкочастотном диапазоне представленных спектров присутствует зона энергоснабжения, соответствующая приливным частотам M_2 , M_4 и M_6 , после которых спектры монотонно спадают и описываются колмогоровским законом $-5/3$. Приливные колебания наблюдаются на всех спектрах, разница состоит лишь в значении спектральной плотности мощности: в пр. Западная Соловецкая Салма оно ниже на порядок. На участках $-5/3$ непосредственную передачу энергии водам Белого моря от внешних источников можно считать несущественной. Самый протяженный участок спектра (от $T \sim 3$ ч до $T \sim 0.5$ ч), подчиняющийся закону $-5/3$, принадлежит меридиональной проекции скорости в пр. Восточная Соловецкая Салма. Аппроксимация спектральной кривой прямой с наклоном $-11/5$ в диапазоне от $T \sim 1.5$ ч до $T \sim 0.5$ ч (рис. 3 — Горло), позволяет сделать предположение о том, что энергия турбулентности здесь затрачивается в основном на работу против сил плавучести [1].

Для выбора оптимального периода сглаживания были проанализированы спектры пульсационных скоростей течения, прошедших фильтрацию косинус-фильтром с периодами осреднения от 8 мин до 12 ч, а также выполнена проверка на статистическую значимость коэффициентов корреляции $R(u', v')$ (рис. 4, а). Был сделан вывод, что для расчета коэффициентов турбулентного обмена для проливных зон Белого моря, предпочтительней фильтрация с такими интервалами сглаживания, чтобы отношение выборочного значения t -критерия Стьюдента к критическому было меньше единицы ($|t^*| / t_{кр} < 1$), а коэффициент эксцесса Ex не принимал экстремальных значений. Тогда осредненные движения практически полностью подавляются.

Полученные данные указывают на присутствие зон непрерывного притока энергии к водам Белого моря, за исключением придонных областей в Западной и Восточной Салме, где приливной поток будет

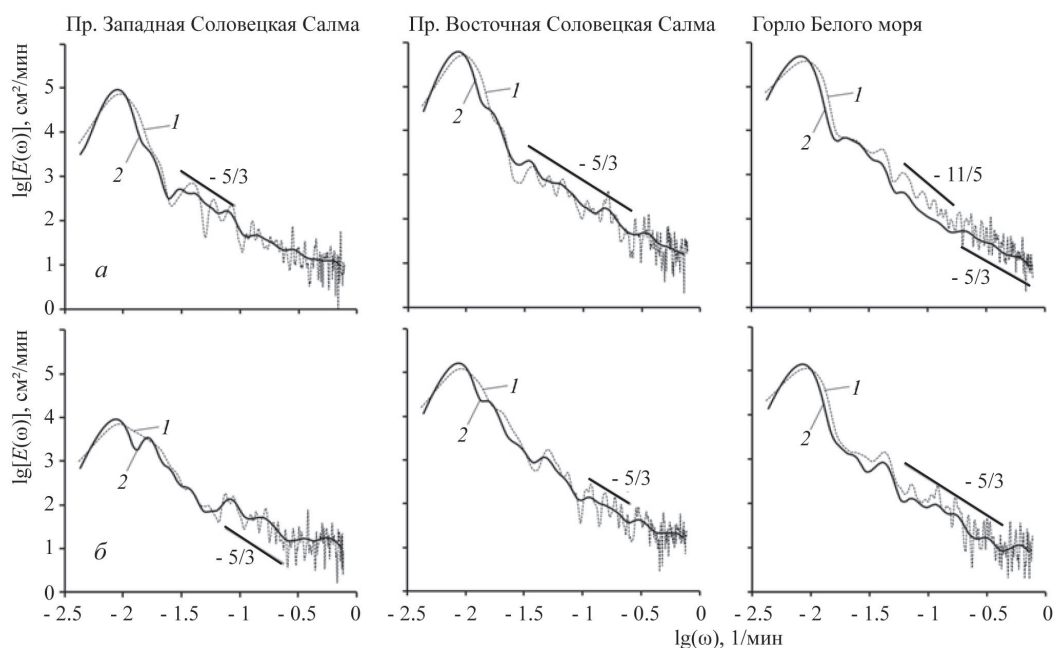


Рис. 3. Спектры меридиональной (U_λ) (а) и широтной (U_φ) (б) пульсаций скорости течения на глубине 20 м, осредненных за весь период наблюдения.
1 – спектр Фурье; 2 – глобальный спектр.

разбиваться на вихри, соизмеримые с размерами неоднородностей рельефа дна, и участков с высокими значениями коэффициента эксцесса (рис. 4, б). Как видно из рис. 4, а, значения получаемых при осреднении величин скоростей существенно зависят от выбранного масштаба осреднения. Эта зависимость полностью исчезает для турбулентных потоков, в которых периоды осреднения будут соответствовать пульсациям с незначимой статистической взаимосвязью. В целом, как показали расчеты, для проливных зон Белого моря трудно указать такое значение масштаба осреднения, при котором все пульсации от поверхности до дна будут полностью осреднены. К примеру, в поверхностных и придонных слоях Горла Белого моря присутствует непрерывный участок энергоснабжения на всем диапазоне периодов сглаживания, поэтому выбор масштаба осреднения для разделения скоростного поля на закономерные и турбулентные части здесь невозможен. Здесь пульсации скоростей нельзя считать случайными, поскольку они определяются закономерным эффектом внешних сил, а именно дезинтеграцией внутреннего прилива и сдвиговой неустойчивостью течений. Иными словами, измерения относятся не к изотропному интервалу спектра турбулентности, а к участку анизотропных вихрей, ответственных за возникновение напряжений Рейнольдса в потоке.

Еще одной показательной мерой инвариантности скоростного поля служит эксцентриситет эллипса рассеяния вектора скорости [42] (рис. 4, в). Чем ближе эксцентриситет эллипса e к 1, который отражает качество зависимости между двумя переменными, тем существеннее функциональная зависимость между горизонтальными пульсациями вектора скорости. Если $e \rightarrow 0$, то эллипс вырождается в окружность, и это будет указывать на абсолютно случайную связь между переменными, или на изотропию. Наименьшие значения эксцентриситета получились для пр. Западная Салма (рис. 4, в), что указывает на максимальную близость турбулентных вихрей к горизонтальной изотропии в этом районе (за исключением верхнего 12-ти метрового слоя) по сравнению с Горлом и пр. Восточная Салма.

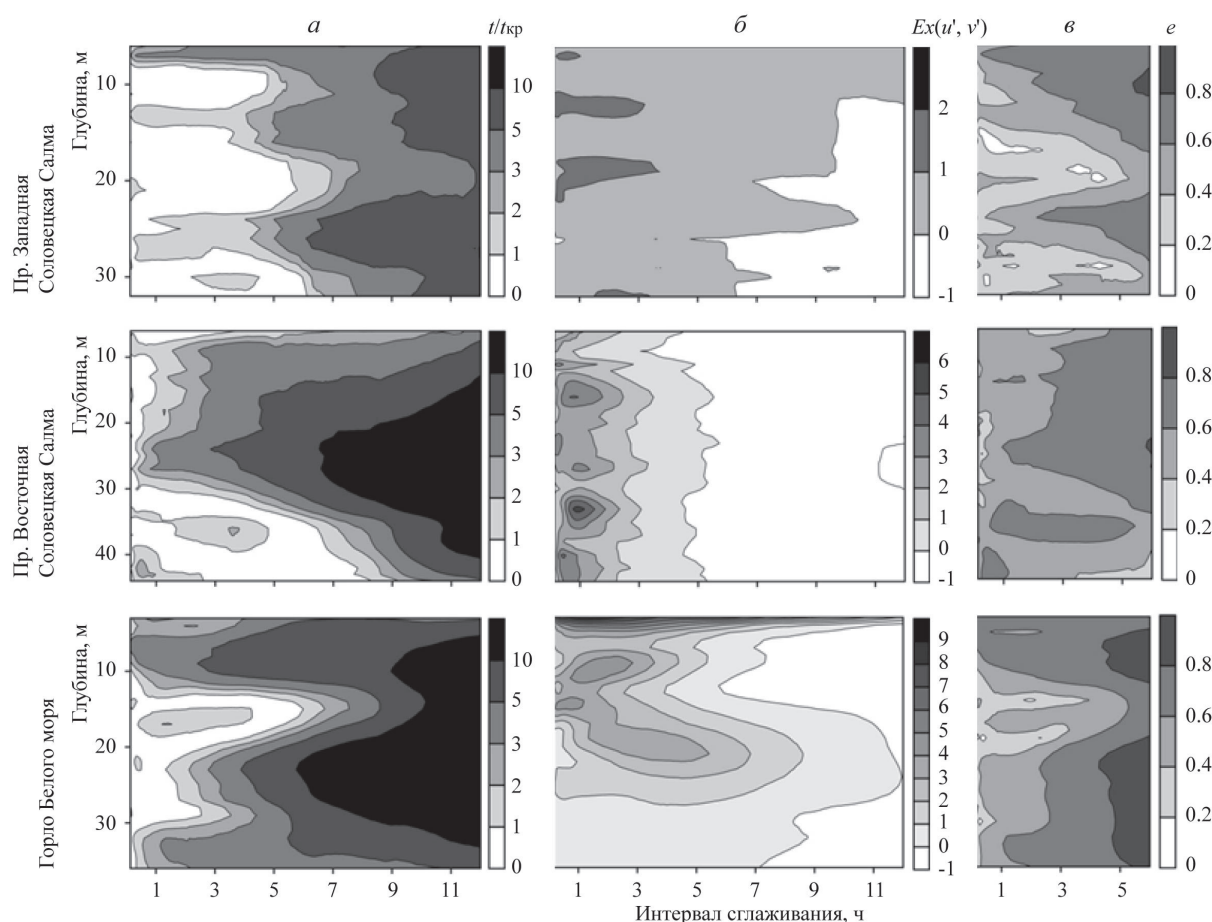


Рис. 4. Зависимость оценки статистической значимости коэффициента корреляции (а), коэффициента эксцесса (б) и эксцентриситета эллипса рассеяния горизонтального вектора пульсационной скорости (в) от временного интервала сглаживания скоростей течения.

Таким образом, наличие областей с высокими значениями t -критерия Стьюдента и эксцентриситета эллипса рассеяния вектора скорости указывает на анизотропный характер энергоснабжения, что является следствием присутствия упорядоченных колебаний в исследуемом поле скорости.

Полученные оценки эксцесса указывают на отличие в распределении плотности вероятности пульсаций скорости от нормального закона Гаусса, характерного для беспорядочного и хаотического движения турбулентных вихрей. Анализ распределения коэффициента эксцесса в различных точках по глубине в зависимости от интервала сглаживания показал, что распределение вероятностей в основной водной толще на масштабах менее 2 ч будет существенно отличаться от нормального закона. Сравнение результатов, представленных на рис. 4, б показывают, что в пр. Восточная Соловецкая Салма появление пульсаций значительной интенсивности, в целом, равновероятно по всему исследуемому слою, а в Горле появление интенсивных пульсаций скорости наиболее вероятно в верхнем 15-метровом слое. Подобная картина является результатом неполного искусственного подавления энергосодержащих движений в потоке в процессе фильтрации. Энергоснабжение будет усиливаться за счет наложения на течение стратификации при прохождении пакетов короткопериодных внутренних волн [43], что приводит к деформации спектра турбулентности, обуславливаемое действием архимедовых сил. В подобных течениях эксперимент фиксирует значительные по величине коэффициенты эксцесса, которые достаточно четко отражают структуру процесса.

Выше было отмечено, что изолированные особенности поля скоростей течения со значительным запасом энергии хорошо выявляются с помощью локализованного спектрального анализа. Поэтому в качестве примера на рис. 5 приведены результаты спектрального и вейвлет-анализа горизонтальных пульсаций скоростей течения в пр. Восточная Салма на глубине 33 м, сглаженных с периодом 60 мин. Основной вклад в горизонтальный турбулентный обмен здесь вносит механизм генерации короткопериодных внутренних волн, причем преимущественно в меридиональном направлении. Процесс передачи энергии внутренних волн к турбулентным пульсациям в широтном направлении выражен гораздо слабее и меньше сказывается на статистическом режиме флуктуаций скорости меньших масштабов.

Спектры нормированы на среднеквадратическое отклонение σ^2 значений переменной временного ряда пульсаций скорости (рис. 5, а, в). Использование такой нормировки означает, что белый шум в ней будет иметь постоянную спектральную плотность, равную 1 на всех частотах. Оценки достоверности выделяемых пиков на глобальном спектре (рис. 5, в) проводились путем сопоставления с обычным энергетическим Фурье-спектром, также рассчитывались и статистические критерии значимости по отношению к белому шуму [38, 39]. 95%-й доверительный уровень для глобального спектра определялся как произведение фонового спектра на 95%-й перцентиль распределения χ^2 с двумя степенями свободы [39].

Вейвлет-преобразование, одна из сильных сторон которого состоит в возможности анализа структуры неоднородных процессов, показало следующее. В пределах случайной структуры колебаний выделяются два, значительно превышающие уровень белого шума, участка локального спектра мощности в диапазоне масштабов от 60 до 15 мин и протяженностью по времени 10 и 4 ч (рис. 5, а – U_λ). Значения спектральной мощности, не превышающие 95%-й уровень значимости, относятся к искусственно подавленным колебаниям скорости в диапазоне масштабов свыше 60 мин. Для значений масштабов 60–15 мин влияние операции сглаживания ослабляется, и здесь отчетливо наблюдается закономерный спад значений спектральной функции по закону степени -3 (рис. 5, а, в – U_λ). Этот участок спектра формируется под влиянием короткопериодных внутренних волн. В интервале масштабов 15–10 мин спектральная функция хорошо аппроксимируется законом $-5/3$. Эта область спектра изотропна, расположена под кривой 95%-го уровня значимости и принадлежит турбулентному гауссовскому шуму.

Таким образом, данные измерений указывает на возможность выделения в Белом море интервалов временных масштабов усиленного энергоснабжения от нестационарных и упорядоченных внешних источников, а также интервалов масштабов с малой плотностью энергии.

Ниже на рис. 6 приведены зависимости коэффициентов горизонтального турбулентного обмена от масштаба осреднения скоростей течения с учетом исключения анизотропного влияния внешних источников на структуру потока (заштрихованная область).

Расчеты по формулам Эртеля показали довольно сложную изменчивость коэффициентов турбулентного обмена с глубиной в зависимости от периода осреднения скоростей течения. Для исследуемых проливных зон Белого моря выбор интервала сглаживания, при котором осредненные движения будут полностью подавляться во всем исследуемом слое, оказался затруднительным вследствие

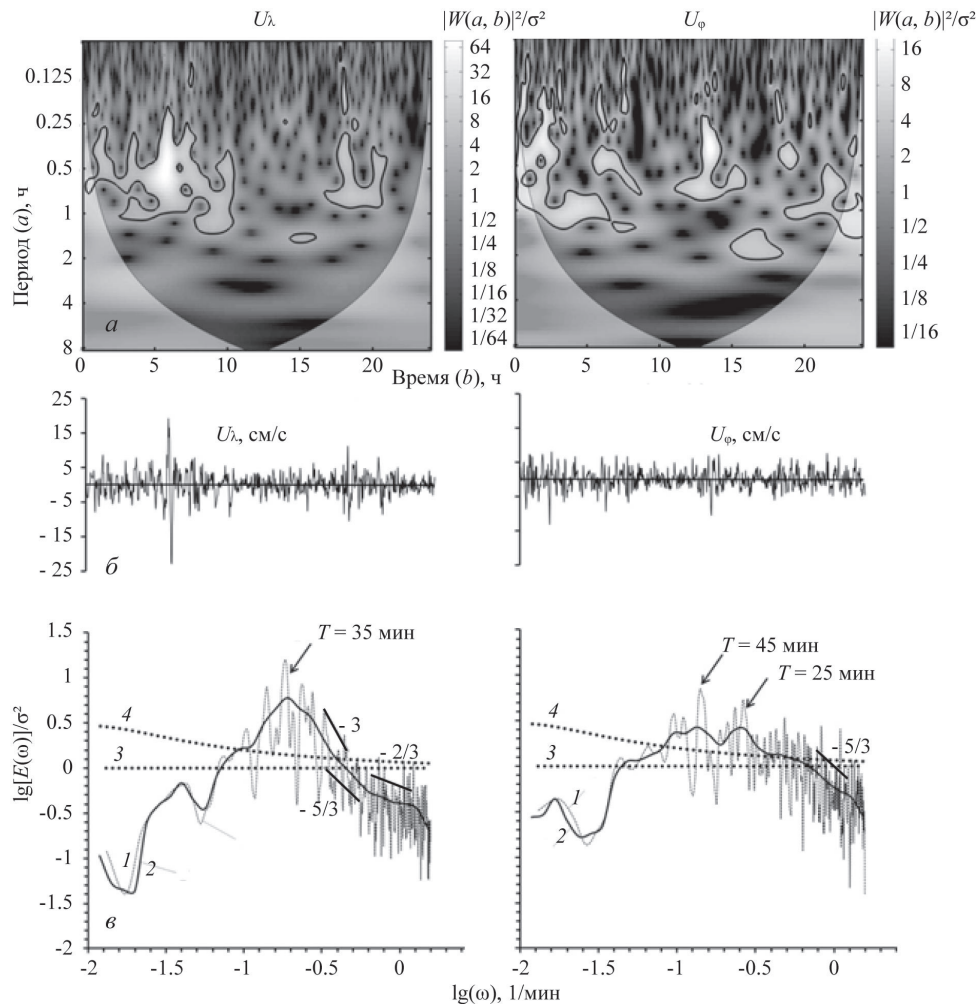


Рис. 5. Вейвлет-анализ меридиональной (U_λ) и широтной (U_ϕ) пульсаций скорости течения в пр. Восточная Соловецкая Салма на глубине 33 м, осредненных за период 60 мин.
 a — нормированный локальный вейвлет-спектр мощности. Сплошные линии отделяют область краевых эффектов. Контур, отмеченный жирной линией, соответствует 95%-му уровню значимости по отношению к белому шуму;
 b — анализируемый сигнал пульсаций скорости; $в$ — нормированные Фурье и глобальный спектры мощности.
 1 — спектр Фурье, 2 — глобальный спектр, 3 — спектр белого шума, 4 — 95%-й дополнительный уровень.

мультимасштабности движений и высокой дискретности измерений характеристик течения. Решение данной проблемы возможно, если, соответственно, уменьшить интервал аппаратного осреднения и временной интервал сглаживания, используя ADCP в режиме 12-й моды [44]. Эта мода позволяет проводить непрерывные измерения скорости течения с дискретностью в 1 с.

Источником снабжения энергией на вертикали наблюдения при данном конкретном периоде осреднения являются как непрерывные упорядоченные процессы (приливные колебания, реверсивность потока), так и нестационарные (дезинтеграция внутреннего прилива, бароклинные течения). Значения коэффициентов обмена в направлении потока изменяются в пределах: от 10^2 до $9 \cdot 10^4$ $\text{см}^2/\text{с}$ для пр. Западная Соловецкая Салма, от 10^2 до $4 \cdot 10^5$ $\text{см}^2/\text{с}$ для пр. Восточная Соловецкая Салма и от 10^2 до $8 \cdot 10^5$ $\text{см}^2/\text{с}$ для Горла Белого моря.

Каждый новый период осреднения будет приводить к новым значениям A_x и A_y , которые различаются между собой в 1—3 раза (рис. 6, A_x / A_y). Как следует из рисунка, поле пульсаций вектора скорости в основном анизотропно, поскольку отношение A_x / A_y преимущественно больше 1, т. е. вдоль потока турбулентный обмен наиболее интенсивен. Исключением является область полного подавления энергосодержащих движений, заштрихованные в клетку, внутри которых $A_x \approx A_y$. Здесь процесс турбулентного обмена можно рассматривать как изотропный. Площадь этих зон максимальна в пр. Западная Соловецкая Салма для центральных областей потока (рис. 6, A_x / A_y).

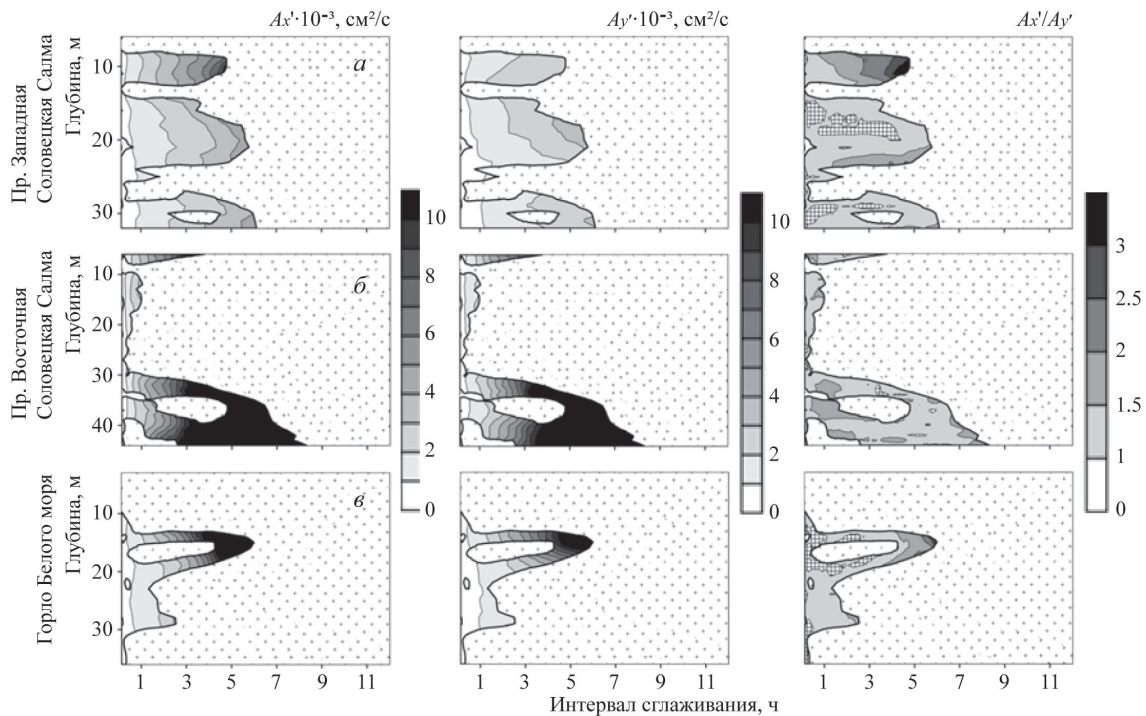


Рис. 6. Вертикальное распределение значений коэффициентов горизонтального турбулентного обмена в зависимости от периода осреднения скоростей течения (A_x — по течению; A_y — в направлении, нормальном к потоку).

Крестиком заштрихована область анизотропного влияния на структуру потока со стороны упорядоченных внешних источников энергоснабжения, а клеткой — зона изотропии, где $A_x/A_y \approx 1$.

Степень близости поля пульсаций к горизонтальной изотропии определяется также по значению эксцентриситета эллипса рассеяния вектора скорости (рис. 4, в). Степень горизонтальной анизотропии турбулентных пульсаций, на режим которых не сказывается влияние внешних стационарных источников или оно незначительно, будет нарастать с увеличением масштабов пульсаций. Наибольшая анизотропия наблюдается в верхнем 12-метровом слое в пр. Западная Салма, где $A_x/A_y > 3$. Наиболее сильное изменение коэффициентов обмена с ростом периода осреднения скоростей происходит в пр. Восточная Салма во всем диапазоне глубин.

В целом, как показали расчеты, для проливных зон Белого моря трудно указать такое значение масштаба осреднения, при котором пульсации скоростей течения от поверхности до дна будут полностью осреднены. Если упорядоченные движения могут быть легко устранены с помощью скользящей фильтрации, то выделение локальных эффектов представляет собой довольно серьезную задачу, для решения которой применялась методика локализованного спектрального анализа.

Полученные результаты указывают на возможность выделения в Белом море интервалов временных масштабов притока энергии от упорядоченных энергосодержащих движений (колебания с приливными частотами M_2 , M_4 и M_6 , механизм регулярной перестройки течений, придонное трение) и нестационарных внешних источников (бароклинные течения, дезинтеграция внутреннего прилива, короткопериодные внутренние волны).

На основе экспериментальных исследований с помощью акустического профилографа ADCP WHS-300 в проливных зонах Белого моря установлено, что коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и степень анизотропии возрастают с увеличением периода осреднения скоростей течения. Расчеты по формулам Эртеля с учетом исключения анизотропного влияния внешних источников энергии на структуру потока и поверхностных ветро-волновых процессов показали, что значения коэффициентов турбулентной вязкости вдоль течения изменяются в пределах: от 10^2 до $9 \cdot 10^4$ $\text{см}^2/\text{с}$ для пр. Западная Соловецкая Салма, от 10^2 до $4 \cdot 10^5$ $\text{см}^2/\text{с}$ для пр. Восточная Соловецкая Салма и от 10^2 до

$8 \cdot 10^5$ см²/с для Горла Белого моря. В направлении, нормальном к потоку, коэффициент обмена оказался в 1—3 раза меньше, чем вдоль потока. При определенных периодах осреднения скоростей течения, преимущественно для центральных областей потока, турбулентность изотропна.

Анализ натурных данных с применением используемого в настоящей работе метода позволил расширить представления о турбулентном обмене вод Белого моря. Полученные сведения следует учитывать при разработке и верификации численных моделей динамики водных масс и при исследовании процессов распространения примесей, химических и биологических компонентов.

Данная работа частично была выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 15-05-04639_а.

Литература

1. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
2. Озмидов Р. В. Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М.: Наука, 1968. 200 с.
3. Исследование океанической турбулентности / Под ред. Р. В. Озмидова. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. Lueck R. G. Oceanic velocity microstructure measurements in the 20th century / R.G. Lueck, F. Wolk, H. Yamazaki // Journal of Oceanography. 2002. V. 58. P. 153—174.
5. Доронин Ю. П. Физика океана. СПб., 2000. 296 с.
6. Море / Пер. с англ. Л.: Гидрометеиздат, 1965. 465 с.
7. Jongen T., Marx Y. P. Design of an unconditionally stable, positive scheme for the k-ε and two-layer turbulence models // Comp. Fluids. 1997. V. 26, N 5. P. 469—487.
8. Xu D., Leschziner M. A., Khoo B. C., Shu C. Numerical prediction of separation and reattachment of turbulent flow in axisymmetric diffuser // Comp. Fluids. 1997. V. 26, N 4. P. 417—423.
9. Кузьминов А. В., Лапин В. Н., Черный С. Г. Метод расчета течений несжимаемой жидкости на основе двухслойной (k-ε)-модели // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 73—86.
10. Orszag S. A., Yakhot V., Flannery W. S., Boysan F., Choudhury D., Maruzewski J., Patel B. Renormalization group modeling and turbulence simulations // International conference on near-wall turbulent flows, Tempe, Arizona, 1993.
11. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J. A new k-ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — Model development and validation // Computers fluids. 1995. N 24 (3). P. 227—238.
12. Журбас В. М., Зацепин А. Г., Григорьева Ю. В. Циркуляция вод и характеристики разномасштабных течений в верхнем слое Черного моря по дрейферным данным // Океанология. 2004. Т. 44, № 1. С. 34—48.
13. Oh I. S., Zhurbas V., Park W. Estimating horizontal diffusivity in the East Sea (Sea of Japan) and the northwest Pacific from satellite-tracked drifter data // J. G. Res. 2000. V. 105, № C3. P. 6483—6492.
14. Richardson P. L. Drifting below the surface, floats reveal energetic masses of swirling water that transport salt and energy // Americ. Scien. 1993. V. 81. P. 261—271.
15. Zhurbas V., Oh I. S. Lateral diffusivity and Lagrangian scales in the Pacific ocean as derived from drifter data // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, № C5. P. 101—105.
16. Пумтербарг Л. И. Динамика и прогноз крупномасштабных аномалий температуры поверхности океана. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 201 с.
17. Armi L., Stommel H. Four views of a portion of the North Atlantic subtropical gyre // J. Phys. Oceanogr. 1983. V. 13. P. 828—857.
18. Booth D. A. Horizontal dispersion in the northeast Atlantic // J. Deep-Sea Res. 1988. V. 35, № 12. P. 1937—1951.
19. Cunningham S. A., Haine T. W. N. Labrador sea water in the Eastern North Atlantic. Part II: Mixing dynamics and the advective-diffusive balance // J. Phys. Oceanogr. 1995. V. 25. P. 666—678.
20. Jenkins W. J. 3H and 3He in the beta triangle: observations of gyre ventilation and oxygen utilization rates // J. Phys. Oceanogr. 1987. V. 17. P. 763—783.
21. Howarth M. J., Souza A. J. Reynolds stress observations in continental shelf seas // Deep-Sea Res II. 2005. V. 52, № 6. P. 1075—1086.
22. Souza A. J., Howarth M. J. Estimates of Reynolds stress in a highly energetic shelf sea // Ocean Dynamics. 2005. V. 55, № 3. P. 490—498.
23. Ralston D. K., Stacey M. T. Shear and turbulence production across subtidal channels // J. Mar. Res. 2006. V. 64, № 1. P. 147—171.
24. Lu Y., Lueck R. G. Using a broadband ADCP in a tidal channel. Part II: Turbulence // J. Atmos. Oceanic Technol. 1999. V. 16, № 11. P. 1568—1579.
25. Rippeth T. P., Williams E., Simpson J. H. Reynolds stress and turbulent energy production in a tidal channel // J. Phys. Oceanogr. 2002. V. 32, № 6. P. 1242—1251.
26. Жегулин Г. В., Зимин А. В. Характеристики турбулентных процессов в шельфовом районе Белого моря по данным натурных наблюдений // Тр. XII Всероссийской конф. «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб., 2014. С. 212—215.
27. Жегулин Г. В., Зимин А. В. Оценки горизонтального турбулентного обмена в Белом море по данным наблюдений // Труды XI Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2012. С. 274—277.
28. Lorke A., Wuest A. Application of coherent ADCP for turbulence measurements in the bottom boundary layer // J. Atmosph Ocean. Technol. 2005. V. 22, № 6. P. 1821—1828.
29. Ertel H. Tensorielle Theorie der Turbulenz // Ann. D. Hydr. U. Marit. Met. N. 5. H. Y., 1937. P. 193—205.
30. Жданов А. А., Гранин Н. Г., Гнатовский Р. Ю., Блинов В. В. Горизонтальный макротурбулентный обмен и скорость диссипации турбулентной энергии в пелагиали озера Байкал // География и природные ресурсы. 2009. № 1. С. 55—60.

31. *Верболов В. И.* О коэффициентах горизонтального макротурбулентного обмена в прибрежной зоне Южного Байкала // Течения и диффузия вод Байкала. Л.: Наука, 1970. С. 122—131.
32. *Алексеев Л. П.* Изучение и методы расчета крупномасштабной турбулентности глубоководного водоема. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 128 с.
33. *Тимофеев В. Т., Панов В. В.* Косвенные методы выделения и анализа водных масс. Л.: Гидрометеиздат, 1962. 352 с.
34. *Штокман В. Б.* Избранные труды по физике моря. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 336 с.
35. *Зимин А. В., Родионов А. А., Жегулин Г. В., Здороненков Р. Э., Романенков Д. А., Шевчук О. И., Родионов М. А.* Исследования короткопериодной изменчивости гидрофизических полей в Белом море в июле-августе 2012 года с научно-исследовательского судна «Эколог» // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5, № 3. С. 85—88.
36. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
37. *Астафьева Н. М.* Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145—1170.
38. *Короновский А. А.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения / А. А. Короновский, А. Е. Храмов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.
39. *Torrence C.* A Practical Guide to Wavelet Analysis / C. Torrence, G. P. Compo // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. V. 79. P. 61—78.
40. *Витязев В. В.* Вейвлет-анализ временных рядов. Учеб. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 2001. 58 с.
41. *Жегулин Г. В., Зимин А. В.* Применение непрерывного вейвлет-преобразования для выделения внутренних волн и турбулентности // Тр. IV Научно-технической конференции молодых ученых и специалистов «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб., 2015. С. 213—217.
42. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: «Высшая школа», 2000. 480 с.
43. *Коняев К. В., Сабинин К. Д.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
44. *Коротенко К. А., Сенчев А. В.* Исследование турбулентности в приливной прибрежной зоне // Океанология. 2011. Т. 51, № 3. С. 418—431.