

УДК 551.466.8

© Г. В. Жегулин<sup>1</sup>, А. В. Зимин<sup>1,2</sup>, А. А. Родионов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН

<sup>2</sup>Российский государственный гидрометеорологический университет  
gleb-jegulin@rambler.ru

## АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В БЕЛОМ МОРЕ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Статья поступила в редакцию 21.07.2015 г., после доработки 29.01.2016.

В ходе экспедиционных работ летом 2012 г. в Белом море в юго-восточной части Горла и Западной и Восточной Соловецких Салмах были выполнены экспериментальные исследования короткопериодной изменчивости поля температуры, имеющей характерные свойства внутренних волн с временными масштабами менее часа. Для кусочно-постоянных и кусочно-экспоненциальных аппроксимаций распределения плотности с глубиной найдены аналитические решения краевой задачи и соответствующие дисперсионные зависимости для внутренних волн. Вычисление собственных функций численным и аналитическим методом произведено для трех моделей распределения плотности: экспоненциальной (линейной), двухслойной и трехслойной. Определены характеристики волн, а также их вертикальные структуры путем вычисления собственных функций для плотностных моделей и численного расчета собственных функций для произвольного распределения плотности. Наименьшее расхождение между численными и аналитическими оценками относится к Восточной Соловецкой Салме. Дисперсионные характеристики внутренних волн для района Горла, полученные аналитическим путем, сильно зависят от оценки частоты Вайселя—Брента. Установлено, что волнами, называемыми нехарактерными, охвачены приповерхностная толща вод в Горле и область в районе слоя скачка плотности в Западной Соловецкой Салме.

**Ключевые слова:** внутренние волны, профиль плотности, дисперсионное соотношение, мода, частота Вайселя—Брента, нехарактерные внутренние волны.

G. V. Zhegulin<sup>1</sup>, A. V. Zimin<sup>1,2</sup>, A. A. Rodionov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg Department of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Russia

<sup>2</sup>Russian State Hydrometeorological University, Saint-Petersburg, Russia

## ANALYSIS OF THE DISPERSION DEPENDENCE AND VERTICAL STRUCTURE OF INTERNAL WAVES IN THE WHITE SEA IN EXPERIMENTAL DATA

Received 21.07.2015, in final from 29.01.2016.

During field work in the summer of 2012 in the White Sea in the south-eastern part of the Throat, and Western and Eastern Solovetsky Salma were carried out experimental studies of short-term variability of the temperature field, having the characteristic properties of internal waves with time scales less than an hour. For piecewise constant and piecewise exponential distribution approximations analytical solutions of the boundary value problem with the depth and density found corresponding dispersion curves for internal waves. The calculation of the eigenfunctions numerical and analytical method produced three density distribution models: exponential (linear), two-layer and three-layer. The characteristics of waves (length, height, period, phase and group velocity), as well as vertical wave structure by calculating its own functions for density models and numerical calculation of the eigenfunctions for an arbitrary density distribution. The smallest difference between the numerical and analytical assessment refers to Eastern Solovetsky Salma. The dispersion characteristics of internal waves for the region Throat derived analytically, are highly dependent on the evaluation of Brunt-Vaisala frequency. It was found that the waves, called uncharacteristic, covered subsurface water column in the neck, and the area in the vicinity of the density of the thermocline in the western Solovetsky Salma.

**Key words:** internal waves, density profile, the dispersion relation, mode, Brunt-Vaisala frequency, uncharacteristic internal waves.

Ссылка для цитирования: Жегулин Г. В., Зимин А. В., Родионов А. А. Анализ дисперсионных зависимостей и вертикальной структуры внутренних волн в Белом море по экспериментальным данным // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 4. С. 47—59.

For citation: Zhegulin G. V., Zimin A. V., Rodionov A. A. Analysis of the dispersion dependence and vertical structure of internal waves in the White Sea in experimental data. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2016, 9, 4, 47—59.

Исследование изменчивости гидрофизических полей на масштабах короткопериодных внутренних волн (КВВ) побуждается как потребностями практики, так и науки. Для создания и эксплуатации различных видов подводной техники существенно знать не только средние параметры гидрофизических полей, но и характеристики их короткопериодной изменчивости. Подобного рода знания нужны специалистам, работающим в области оперативной океанографии, так как качество прогноза гидрофизических полей существенно зависит от того, насколько реальны и статистически обеспечены данные натурных наблюдений. Отсутствие регулярных сведений об изменчивости короткопериодных гидрофизических явлений в контексте описания процессов, происходящих в океане, в целом является общей проблемой физической океанографии, которая не обошла и Белое море.

Основные сведения о характеристиках КВВ в Белом море базируются на результатах контактных наблюдений [1—6]. В этих работах показано, что характеристики внутренних волн (ВВ) существенно отличаются на различных по характеру стратификации вод и рельефа дна участках шельфа. Многие из ВВ, зарегистрированных на шельфе, соответствовали критериям интенсивных внутренних волн (ИВВ) [7, 8]. Регулярность наблюдений КВВ в определенную фазу волны М2 и зависимость количества их проявлений от фазы луны подтверждает вывод о преимущественно приливном характере их образования и показывает постоянность их генерации в Белом море [9, 10]. Районами активной генерации КВВ в Белом море являются зоны фронтов, как структурных, так и стоковых, а также области около проливных зон (с глубинами 30—50 м) с резкими неровностями дна. Вблизи этих зон, в отдельных районах ежегодно отмечались ИВВ, обладающие значительной нелинейностью [11].

Однако все полученные оценки характеристик ВВ основываются только на данных наблюдений, а теоретическое их описание и сопоставление с модельными представлениями для КВВ отсутствует. Заполнению этого пробела и посвящена данная работа.

Задачи данной работы заключались в поиске и сопоставлении аналитического и численного решения краевой задачи на собственные значения, расчете характеристик ВВ, определении типа движения (волны или турбулентность) и в установлении соответствующих дисперсионных зависимостей в случае представления реального профиля плотности в виде совокупности слоев, внутри которых плотность либо постоянна, либо меняется по экспоненте. Отыскание вертикальной структуры ВВ и дисперсионного соотношения является главной задачей кинематического анализа теории внутренних волн.

В линейной постановке рассматривается плоская задача о внутренних гравитационных волнах. Для нескольких кусочно-постоянных и кусочно-экспоненциальных аппроксимаций распределения плотности находятся аналитические решения краевой задачи и соответствующие дисперсионные зависимости. Определяются характеристики ВВ, такие как длина, высота, период, фазовая и групповая скорости, а также вертикальные структуры волн путем вычисления собственных функций для плотностных моделей и численного расчета собственных функций для произвольного распределения плотности.

Внутренние волны, охватывающие весь водный столб, возможны лишь с частотой  $\omega < \omega_1 = N(z)_{\min}$ . Кроме того, в области слоя скачка могут существовать ВВ с частотами  $\omega_1 < \omega < N(z)_{\max}$ . Вне этого слоя  $\omega > N(z)$ , при условии существования слоя, в котором  $N^2(z) - \omega^2 > 0$  [12, 13]. Такие волны, которые имеют свойства ВВ лишь в определенном слое, а вне его затухают экспоненциально, как поверхностные, и не могут принимать далее экстремального значения, называются нехарактерными внутренними волнами [13].

**Методика выделения внутренних волн по контактными данным.** Экспедиционные исследования проводились с 17 июля по 8 августа 2012 г. в следующих районах Белого моря [14] (рис. 1):

- на границе пролива Восточная Соловецкая Салма и Онежского залива, разделяющего воды залива и Бассейна (станция № 1);
- в проливе Западная Соловецкая Салма (станция № 2);
- на выходе из Горла (станция № 3).

В указанных районах с заякоренного судна в режиме непрерывного сканирования водной толщи с помощью STD-зонда T-90 (Sea & Sun Technology GmbH) были выполнены многочасовые океанографические станции. Глубина в местах проведения работ составляла примерно 30—50 м. Указанные районы были определены на подготовительном этапе по результатам обработки радиолокационных изображений, как основные районы наиболее частых проявлений ВВ на морской поверхности, (в этих регионах было зарегистрировано максимальное количество поверхностных проявлений пакетов КВВ в период с июня по август 2010 г.) [11].

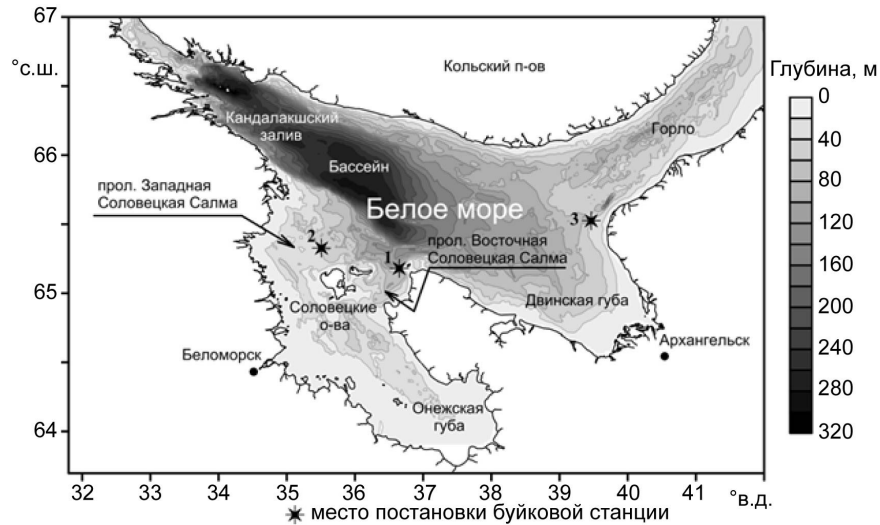


Рис. 1. Карта районов работ по исследованию характеристик внутренних волн.

Характеристики ВВ оценивались по результатам наблюдений за изменчивостью положения термоклина (по экспериментальным данным наблюдалось совпадение в положении термоклина и пикноклина, поэтому в дальнейшем при анализе характеристик ВВ использовались данные по температуре). Вариации положения термоклина во времени позволяют определять высоту и период каждой из проходящей через полигон ВВ по стандартной методике, используемой для описания характеристик поверхностных волн, подробно изложенной в [15]. По этой методике каждая волна выделяется по изменению положения характерной поверхности во времени. В качестве характерной поверхности выбирается изотерма, соответствующая среднему положению термоклина. При этом оценивается высота волны как средняя величина между глубиной залегания переднего и заднего ее склона, и период каждой волны как временной интервал между соседними минимумами залегания изотермы (рис. 2).

**Постановка и решение краевой задачи.** Для исследования вертикальной структуры внутренней волны и расчета параметров ее распространения в случае произвольной стратификации решается краевая задача на собственные значения  $\eta$  (задача Штурма—Лиувилля) с граничными условиями на поверхности  $W_{z=0} = 0$  и дне моря  $W_{z=H} = 0$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \eta W = 0,$$

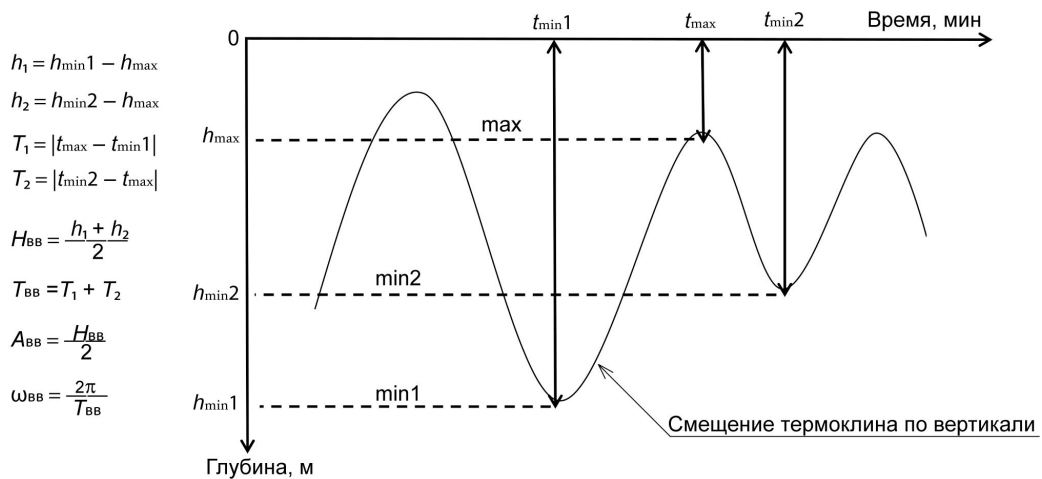


Рис. 2. Метод экспериментального определения характеристик внутренних волн по данным сканирований.  
 $H_{BB}$  — высота ВВ,  $T_{BB}$  — период ВВ,  $A_{BB}$  — амплитуда ВВ,  $\omega_{BB}$  — частота ВВ.

где  $\eta = \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2} k^2$ . В общем случае задача решалась методом конечных разностей [16], однако в случае, когда допустимо задание вертикального профиля плотности в виде простой функции, в частности — экспоненциального или однородного распределения плотности с глубиной, решение находилось аналитически. Ниже для трех типов вертикальных распределений плотности представлены аналитические решения краевой задачи на собственные значения в отсутствие фоновых течений:

1. Экспоненциальное распределение плотности [13, 17]:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{(N_0^2 z g^{-1})}, \quad (1)$$

где  $N_0(z) = \text{const}$ ;  $\rho_0$  — плотность при  $z = 0$ ;  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения. Собственные числа задачи Штурма—Лиувилля  $\eta$  и собственные функции  $W$  представлены в следующем виде:

$$\eta_n = \left( \frac{\pi n}{H} \right)^2, \quad W_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left( \frac{\pi n}{H} z \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $H$  — глубина моря;  $n$  — номер моды.

2. Двухслойная модель [13]. В верхнем слое толщиной  $h$  и нижнем слое толщиной  $H - h$  плотность меняется экспоненциально с глубиной. Для двухслойной модели

$$N(z) = \begin{cases} N = N_1 = \text{const}, & 0 < z < h \\ N = N_2 = \text{const}, & h < z < h + H' \end{cases}$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + (N^2 - \omega^2) v W = 0, \quad v = \frac{k^2}{\omega^2},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — горизонтальное волновое число;  $\lambda$  — длина ВВ. Условия на границах при отсутствии разрыва плотности на внутренних поверхностях раздела, задаются в следующем виде:

$$W_1(0) = W_2(H) = 0;$$

$$W_1(h) = W_2(h), \quad dW_1(h)/dz = dW_2(h)/dz.$$

Решения для слоев имеет следующий вид:

$$\begin{cases} W_1(z) = B \sin \sqrt{v} \beta_1 z \\ W_2(z) = C \cos \sqrt{v} \beta_2 z + D \sin \sqrt{v} \beta_2 z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq h \\ \text{при} \\ h \leq z \leq H \end{matrix}$$

где  $\beta_{1,2}^2 = N_{1,2}^2 - \omega^2$ .

Собственные значения находятся из трансцендентного уравнения

$$\text{tg} \left( h \sqrt{v(N_1^2 - \omega^2)} \right) = - \frac{\sqrt{N_1^2 - \omega^2}}{\sqrt{N_2^2 - \omega^2}} \text{tg} \left( \sqrt{v(N_2^2 - \omega^2)} [H - h] \right).$$

3. Трехслойная модель [13, 18]. В однородном слое толщиной  $h$  плотность постоянна, в слое скачка толщиной  $\delta$  плотность меняется экспоненциально с глубиной, ниже глубины  $h + \delta$  плотность снова постоянна до глубины  $H$ . Для трехслойной модели

$$N(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < h_1 \\ N_0 = \text{const}, & h_1 < z < h_2 = h_1 + \delta, \\ 0, & h_2 < z \leq H \end{cases}$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + (N^2 - \omega^2) v W = 0, \quad v = \frac{k^2}{\omega^2}.$$

Условия на границах и на внутренних поверхностях раздела задаются в следующем виде:

$$W_1(0) = W_3(H) = 0,$$

$$W_1(h_1) = W_2(h_1), \quad dW_1(h_1)/dz = dW_2(h_1)/dz,$$

$$W_2(h_2) = W_3(h_2), \quad dW_2(h_2)/dz = dW_3(h_2)/dz.$$

Решения для слоев ищется в виде

$$\begin{cases} W_1(z) = A \operatorname{sh} \sqrt{v} \omega z & 0 \leq z \leq h_1 \\ W_2(z) = C \sin \sqrt{v(N^2 - \omega^2)} z + D \cos \sqrt{v(N^2 - \omega^2)} z & \text{при } h_1 \leq z \leq h_2 \\ W_3(z) = E e^{\sqrt{v} \omega z} + F e^{-\sqrt{v} \omega z} & h_2 \leq z \leq H \end{cases}$$

Собственные значения находятся из трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \sqrt{v(N^2 - \omega^2)} \delta = - \frac{\omega \sqrt{v(N^2 - \omega^2)} \operatorname{sh} \sqrt{v} \omega (H - \delta)}{(N^2 - \omega^2) \operatorname{sh} \sqrt{v} \omega h_1 \operatorname{sh} \sqrt{v} \omega (h_2 - H) + \omega^2 \operatorname{ch} \sqrt{v} \omega h_1 \operatorname{ch} \sqrt{v} \omega (h_2 - H)},$$

где  $\delta = h_2 - h_1$ .

Аналитическое дисперсионное соотношение находится из выражения

$$\omega_n^2 = N^2 \left( 1 + \frac{l^2}{k^2} \right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $l = \sqrt{v(N^2 - \omega^2)}$  — вертикальное волновое число.

Длина волны  $\lambda$ , которая априори нам неизвестна, определяется из соотношения

$$\lambda = c_0 T,$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период волны, а  $c_0$  — проекция фазовой скорости внутренних волн на горизонтальную плоскость, которая в простейшем случае, если стратификация считается двухслойной, а термоклин достаточно узок, чтобы его можно было аппроксимировать как границу раздела, а не как слой, определяется выражением

$$c_0 = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k(\rho_1 \operatorname{cth} k h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} k h_2)}}, \quad (2)$$

где  $(\rho_2 - \rho_1)$  — разность плотностей слоев ниже и выше термоклина (под гребнем и над гребнем каждой волны);  $h_2$  — толщина нижнего слоя (под гребнем каждой индивидуально рассматриваемой волны);  $h_1$  — толщина верхнего слоя (над гребнем волны) (рис. 2). Гиперболический котангенс в формуле (2) вычисляется через экспоненту  $\operatorname{cth} x = (e^{2x} + 1)/(e^{2x} - 1)$ , где  $x = k h_1 \vee k h_2$ , следовательно, волновое число  $k$  будет входить в (2) в неявном виде.

При исследовании ВВ различают четыре основных диапазона: *длинные, средние, короткие и очень короткие* [8, 19]. С целью расширения диапазона определения кинематических характеристик ВВ (длины, фазовой и групповой скорости) гиперболические котангенсы можно заменить с точностью до 0,1 их приближенными значениями:

$$\operatorname{cth} k h \approx \begin{cases} \frac{1}{k h}, & 0 < k h \leq 0.4 \quad \lambda \geq 5\pi h, \\ \frac{1}{k h} + \frac{k h}{3}, & \text{при } 0 < k h \leq 2 \quad \text{и } \lambda \geq \pi h, \\ 1, & k h > 2 \quad \lambda < \pi h. \end{cases} \quad (3)$$

Частота и волновое число связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \frac{\Delta \rho}{\rho_1 \operatorname{cth} k h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} k h_2} g k. \quad (4)$$

С учетом (2)—(4), получены модифицированные выражения для горизонтальных проекций фазовой ( $c_0 = \omega/k$ ) и групповой ( $c_{\text{гpx}} = d\omega/dk$ ) скоростей ВВ:

1)  $0 < k h \leq 0.4$  и  $\lambda \geq 5\pi h$ ,  $h = h_1 \vee h_2 \in \operatorname{cth} k h \approx 1/k h$ .

$$c_0 = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1) h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}}, \quad c_{\text{гpx}} = c_0.$$

2)  $0 < k h \leq 2$  и  $\lambda \geq \pi h$ ,  $h = h_1 \vee h_2 \in \operatorname{cth} k h \approx k h^{-1} + 1/3 k h$ .

$$c_0 = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1) - \frac{\omega^2}{3}(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}{\frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2}}} \text{ при } \omega^2 < 3g\Delta\rho(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)^{-1},$$

$$c_{\text{гpx}} = \frac{\frac{\sqrt{g\Delta\rho}}{k^3} \left( \frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2} \right)}{\left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2} \right) + \frac{1}{3}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$3) \{0 < kh_1 \leq 2; \lambda \geq \pi h_1\} \in \text{cth}kh_1 \approx (kh_1)^{-1} + 1/3kh_1; \{kh_2 > 2; \lambda < \pi h_2\} \in \text{cth}kh_2 \approx 1.$$

$$c_0 = 0.5 \left[ \sqrt{\omega^2 h_2^2 \left( \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \right]^2 - \frac{4}{3} \right) + \frac{4g\Delta\rho h_2}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \omega h_2} \right] \text{ при } \omega^2 < \frac{3g\Delta\rho}{\rho_2 h_2}, c_{\text{гpx}} = \frac{\frac{\sqrt{g\Delta\rho}}{k^2} \left( \frac{\rho_2}{kh_2} + \frac{\rho_1}{2} \right)}{\left[ \frac{\rho_2}{k^2 h_2} + \frac{1}{3} \rho_2 h_2 + \frac{\rho_1}{k} \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$4) \{0 < kh_2 \leq 2; \lambda \geq \pi h_2\} \in \text{cth}kh_2 \approx (kh_2)^{-1} + 1/3kh_2; \{kh_1 > 2; \lambda < \pi h_1\} \in \text{cth}kh_1 \approx 1.$$

$$c_0 = 0.5 \left[ \sqrt{\omega^2 h_2^2 \left( \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \right]^2 - \frac{4}{3} \right) + \frac{4g\Delta\rho h_2}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \omega h_2} \right] \text{ при } \omega^2 < \frac{3g\Delta\rho}{\rho_2 h_2}, c_{\text{гpx}} = \frac{\frac{\sqrt{g\Delta\rho}}{k^2} \left( \frac{\rho_2}{kh_2} + \frac{\rho_1}{2} \right)}{\left[ \frac{\rho_2}{k^2 h_2} + \frac{1}{3} \rho_2 h_2 + \frac{\rho_1}{k} \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$5) kh > 2 \text{ и } \lambda < \pi h, h = h_1 \vee h_2 \in \text{cth}kh \approx 1.$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{g\Delta\rho}{k(\rho_1 + \rho_2)}}, c_{\text{гpx}} = c_0/2.$$

В силу связи групповой и фазовой скоростей через тангенс угла наклона волнового вектора к горизонтальной плоскости [17, 18] и функциональной зависимости от номера моды, можно сконструировать еще одно дисперсионное соотношение

$$c_{\text{гpx}}/c_0 = l^2 (k^2 + l^2)^{-1} = \left( 1 + \frac{k^2}{l^2} \right)^{-1}, \quad (5)$$

в котором  $c_0 = N/\sqrt{k^2 + l^2}$ , а  $c_{\text{гpx}} = Nl^2 (k^2 + l^2)^{-3/2}$ . В дисперсионное соотношение (5), сформированное из горизонтальных проекций групповой и фазовой скоростей, не входит  $N$ , что может являться преимуществом для более точного определения модовой структуры ВВ для случая экспоненциального распределения плотности в силу того, что невозможно абсолютно точно аппроксимировать реальную плотностную стратификацию и эмпирические оценки частоты плавучести не всегда с желаемой точностью совпадают с модельными.

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Для каждой реализации по экспериментальным данным определялись осредненные по времени профили фоновой стратификации. На рис. 3 (а, г, ж) представлены модельный (пунктирная линия) и экспериментальный (сплошная линия) профили плотности. Из рисунка видно, что, к примеру, эмпирический профиль плотности на станции № 1 (пр. Восточная Соловецкая Салма) хорошо аппроксимируется экспоненциальной функцией вида (1), а на станциях № 2 (пр. Западная Соловецкая Салма) и № 3 (Горло) распределение плотности представляется в виде суммы слоев, внутри которых плотность либо постоянна, либо меняется по экспоненте.

На рис. 3 (в, е, и) изображены вертикальные профили частоты Вьяйсяля—Брента, вычисленные по заданному вертикальному распределению плотности воды. Справа от распределения плотности на рис. 3 (б, д, з) изображены вертикальные профили чисел Кокса [20, 21], которые позволяют определить тип движения (волны или турбулентность) во всей исследуемой водной толще. Число Кокса определяется из выражения



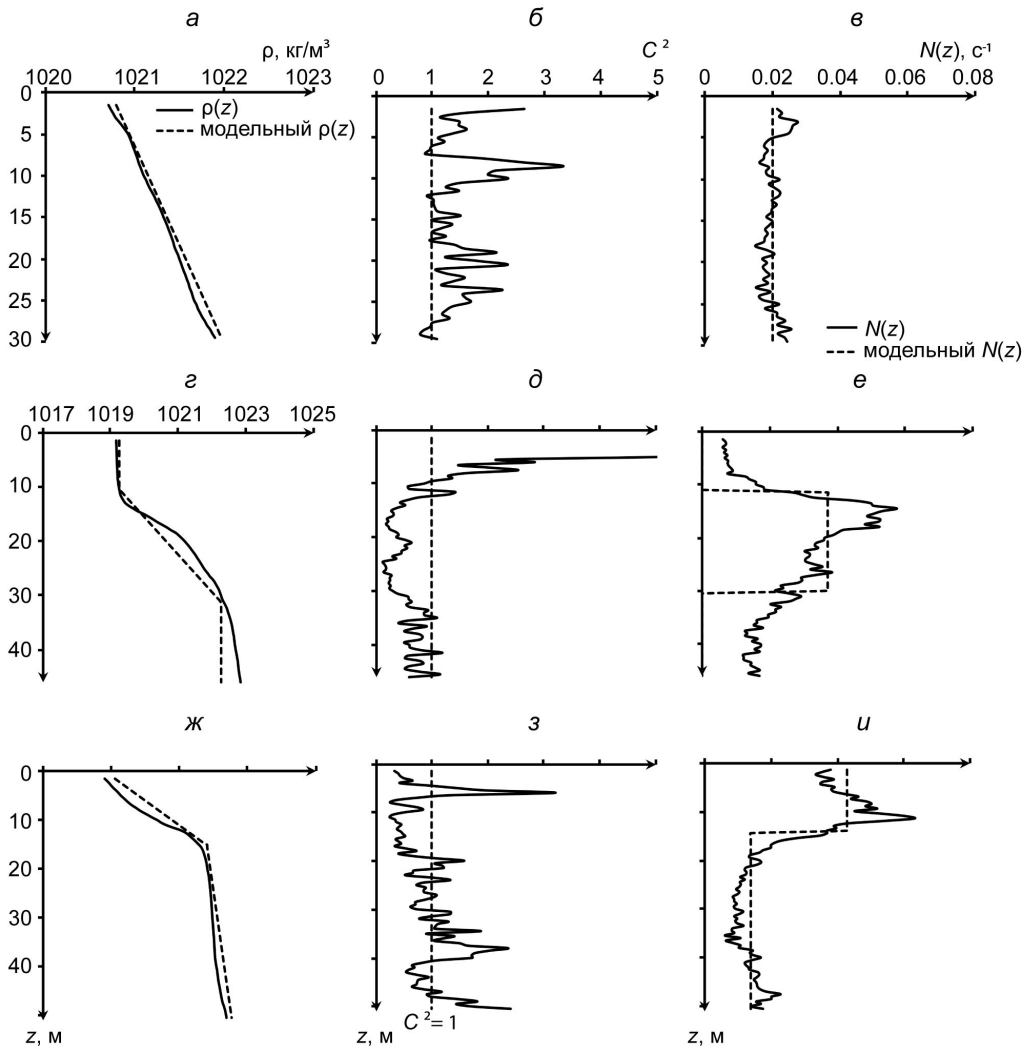


Рис. 3. Вертикальные профили плотности (а, г, ж), чисел Кокса (б, д, з) и частоты Вайсяля—Брента (в, е, и), рассчитанные по данным сканирования на станциях № 1 (а, б, в), № 2 (г, д, е) и № 3 (ж, з, и) и на основе одной из трех моделей распределения плотности с глубиной (а — экспоненциальная; б — трехслойная; в — двухслойная).

$$C^2(z) = \overline{\left(\frac{dT'}{dz}\right)^2} / \left(\frac{d\bar{T}}{dz}\right)^2,$$

где  $T'(z) = T(z) - \bar{T}(z)$  — отклонение температуры от среднего значения на горизонте  $z$ , а осреднение проводится по ансамблю значений  $T_i(z)$ , где  $i$  — номер зондирования.

По значению и изменчивости числа Кокса можно судить о степени вклада резонансных взаимодействий ВВ и турбулентности в формирование температурных неоднородностей. Вертикальной пунктирной линией  $C^2 = 1$  обозначена граница, разделяющая процессы по классификации взаимодействия. При  $C^2 > 1$  процесс характеризуется сильными нелинейными взаимодействиями и может интерпретироваться как турбулентность. При  $C^2 < 1$  время резонансных взаимодействий велико, и можно предположить, что температурные неоднородности в этом случае образуются в результате движений, обусловленных внутренними волнами. Значения  $C^2$ , близкие к единице, свидетельствуют о слабой «микроструктурной активности» и о малой интенсивности турбулентности [20]. Случай  $C^2 \ll 1$  соответствует линейным (длинным) ВВ.

Оценки параметра  $C^2$  показали, что, к примеру, в пределах слоя 15—30 м в пр. Западная Соловецкая Салма (станция № 2) (рис. 3, д) выполняется условия слабых взаимодействий ( $C^2 = 0.1 \div 0.5$ ), что соответствует линейным ВВ. Кроме того, можно отметить, что практически вся водная толща охвачена ВВ, кроме верхнего 10-ти метрового слоя. В пр. Восточная Соловецкая Салма (станция № 1) (рис. 3, б)

на глубинах 7 и 15—17 м, а также в придонном слое имеет место слабая микроструктурная активность ( $C^2 \approx 1$ ), что может соответствовать короткопериодным ИВВ, на остальных глубинах  $C^2 > 1$ , что указывает на развитие интенсивного турбулентного перемешивания слоев. В подобных условиях повышается вероятность появления более высоких мод [12]. Выполнение условий слабых взаимодействий в приповерхностном слое (станция № 3, Горло, рис. 3, з) является следствием примыкания термоклина к поверхности. Значения чисел Кокса в диапазоне глубин 20—40 м преимущественно больше единицы, что указывает на генерацию температурных флуктуаций за счет вклада вертикальной турбулентности.

По данным сканирования на многочасовых станциях за весь период наблюдений регистрировались ВВ с периодом, не превышающем 20—30 мин. Структура низших вертикальных мод рассчитывалась для ВВ периода 20 мин, поскольку для волн с периодом свыше 20 мин структура моды не меняется. На рис. 4 показаны вертикальные моды ВВ для трех районов: 1) в пр. Восточная Соловецкая Салма (рис. 4, а); 2) в пр. Западная Соловецкая Салма (рис. 4, б) и 3) Горло (рис. 4, в). Видно, что расположения максимумов 1-й, 2-й и 3-й моды вертикальной скорости, где можно ожидать наибольшего смещения изопикн, практически полностью совпадают с расположением максимумов собственных функций, полученных в ходе численного решения краевой задачи. Минимальная разница между аналитическим и численным решением соответствует станции № 1 (рис. 4, а), что говорит о наиболее качественной аппроксимации исходного профиля плотности аналитической функцией. В пр. Западная Соловецкая Салма и в Горле, где распределение плотности соответствует трехслойной (рис. 4, б) и двухслойной модели (рис. 4, в), максимумы 1-й моды практически совпадают с горизонтом максимума частоты плавучести, т. е. максимальное смещение изопикн будет происходить в границах слоя скачка. Во всех трех пунктах наблюдения вся толща воды охвачена ВВ, т. к. уменьшение амплитуд ВВ происходит практически линейно, а следовательно верно утверждение  $\omega < \omega_1 = N(z)_{\min}$ .

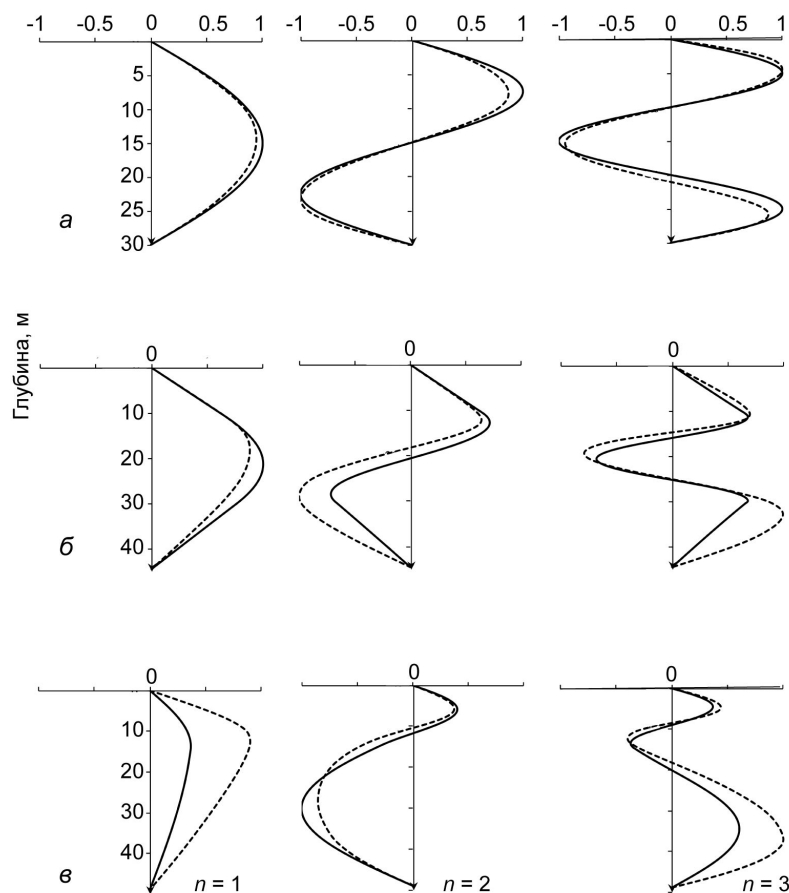


Рис. 4. Графическое изображение первых трех нормализованных вертикальных мод внутренних волн периода 20 мин для однослойной модели (а, ст. № 1), трехслойной модели (б, ст. № 2) и двухслойной (в, ст. № 3).  $n$  — номер моды; сплошная линия — численное решение, пунктирная линия — аналитическое решение краевой задачи.



Как уже отмечено выше, точность определения дисперсионного соотношения зависит от близости модели вертикального профиля плотности к эмпирическим оценкам. Чем сложнее профиль, т.е. когда не представляется возможным с достаточной достоверностью отнести его к одному из трех рассматриваемых в настоящей работе моделей вертикальных распределений плотности, тем выше вероятность допустить неточность в аналитической оценке «модовой структуры» ВВ. Кроме того, начиная с частот  $\omega = N_{\max}/2$ , где скорость распространения внутренних волн уже не может не зависеть от  $k$ , и более вплоть до  $\omega \sim N_{\max}$ , может иметь место существенный разброс дисперсионных характеристик с выходом за область, ограничивающую существование ВВ в слое скачка.

На рис. 5 представлены дисперсионные соотношения для первых двух волновых мод. Кругами на рис. 5, (а, г, ж, к) отмечены экспериментальные оценки дисперсионного соотношения  $\omega = \omega(k)$ , где  $\omega$  — частота ВВ в пикноклине, которая рассчитывалась на основе предварительного визирования глубин залегания изотермы на каждый момент времени по трем точкам волны: гребень, ложбина переднего и заднего склона. Прямыми пунктирными линиями обозначено положение  $\omega = N_{\max}$  и  $T_{\omega = N_{\max}}$ , где  $N_{\max}$  — модельная оценка частоты плавучести. Шкала частот ВВ ограничена максимумом частоты ВВяйсяля  $N_{\max}$ . Характерная расчетная величина  $N_{\max}$  имеет порядок  $10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , что в нашем случае соответствует периоду  $T(\omega = N_{\max}) = 2\pi/N_{\max}$  равному 5.2 мин (ст. № 1), 2.8 мин (ст. № 2), 2.5 мин (ст. № 3, верхний слой) и 7 мин (ст. № 3, нижний слой). При  $\omega > N_{\max}$ , согласно модельным оценкам, ВВ не могут существовать. Однако на станции № 1 (рис. 5, а, в) примерно половина зарегистрированных ВВ не соответствует критерию своего существования. Иначе говоря, ВВ с периодом, сравнимым с  $T(\omega = N_{\max})$  и длиной менее 50 м могут быть не характерными для района станции № 1 или, вероятнее всего, не являться ВВ, если их частота превосходит экспериментальную оценку локальной частоты плавучести.

На рис. 5 (б, д, з, л) представлена зависимость периода ВВ от длины. Видно, что она носит фактически линейный характер для всех трех районов. Величина коэффициента детерминации  $R^2 = 0.99$  целиком указывает на то, что уравнение линейного тренда, приведенное на рисунках, практически полностью соответствует экспериментальным оценкам характеристик ВВ, т.е., зная период ВВ, можно приближенно оценить ее длину для рассматриваемого района.

На рис. 5 (в, е, и, м) в графическом виде приведены и экспериментальные оценки соотношения горизонтальных проекций фазовой и групповой скоростей ВВ для первых двух мод. К примеру, согласно дисперсионной зависимости для станции № 3 (рис. 5, м, и), эмпирические оценки дисперсионного соотношения сильно расходятся с численными, а следовательно, неудовлетворительно описываются применяемыми в настоящей работе модельными подходами.

Полученные аналитическим путем дисперсионные характеристики для первой и второй мод ВВ сильно зависимы от оценок частоты ВВяйсяля—Брента, которая приравнивается к нулю, если плотность постоянна или мало меняется с глубиной, и постоянна в случае экспоненциального закона стратификации.

На рис. 5 также приведены оценки дисперсионных характеристик ВВ, полученные численным методом. Наименьшее расхождение между численными и аналитическими оценками относится к пр. Восточная Салма (рис. 5, а, в), в силу минимальных, по сравнению с другими районами, отклонений профиля ВВяйсяля—Брента от  $N(z) = \text{const}$ , а также в силу независимости дисперсионных оценок от частоты плавучести в случае нахождения дисперсионного соотношения через горизонтальные проекции групповой и фазовой скоростей (рис. 5, в).

Для пр. Западная Салма также выявлено хорошее согласие теории и эксперимента, согласно дисперсионным оценкам по частоте (рис. 5, г). По данным соотношения групповой и фазовой скорости (рис. 5, е), 2-я аналитическая мода не совпадает со 2-й численной. Все зарегистрированные колебания с периодом до 30 мин в пр. Западная Салма являются внутренними волнами, которые принадлежат 1-й моде и имеют дисперсионное соотношение.

Что же касается района Горла (рис. 5, к, м), то разложение структуры поля ВВ по модам не дает какой-либо удовлетворительной сравнительной оценки, в особенности для нижнего слоя, в котором дисперсионные характеристики плохо описываются модельными подходами, а также наблюдается расхождение между численным и аналитическим представлением дисперсионного соотношения, т.к. форма собственных функций в этом случае будет сильно зависеть от вида функции  $N(z)$ . Также не исключается влияние течения, не учитывающееся в приближении гидростатики, на форму численных и аналитических кривых  $c_{\text{гр}}/c_0$  (рис. 5, и, м), а соответственно и на разброс дисперсионных оценок относитель-

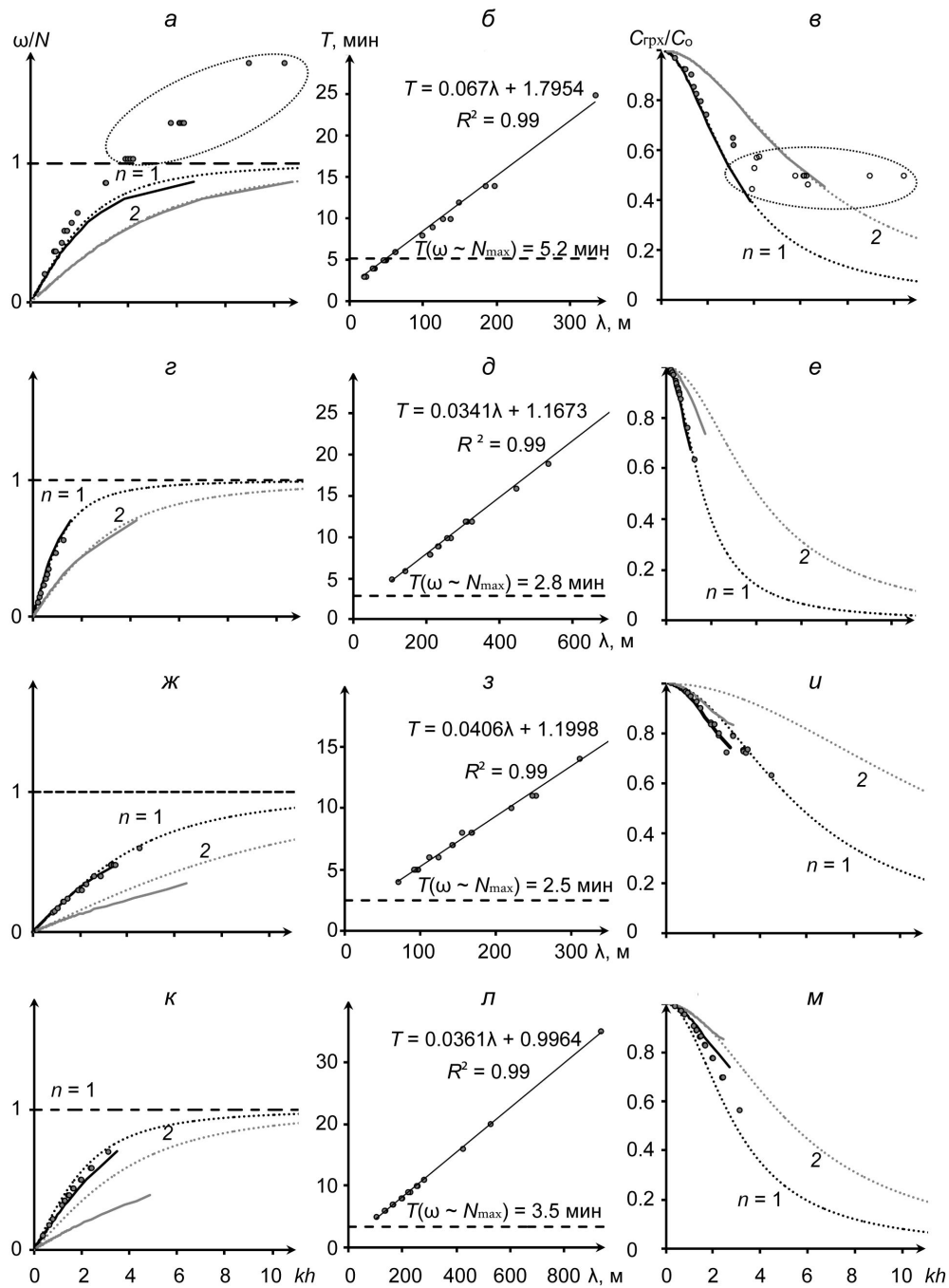


Рис. 5. Дисперсионные характеристики ВВ и графики зависимости периода ( $T$ ) от длины ВВ ( $\lambda$ ).  
 а, б, в — пр. Восточная Салма, станция № 1; г, д, е — пр. Западная Салма, станция № 2; ж, з, и — Горло, станция № 3 (верхний слой); к, л, м — Горло, станция № 3 (нижний слой). Сплошными линиями представлено численное, пунктирными — аналитическое решение краевой задачи на собственные значения;  $n$  — номер моды; кружками отмечены экспериментальные оценки дисперсионного соотношения.

но функциональных модовых линий, построенных по численному методу (рис. 5, и). Следовательно, для режима стратификации Горла предпочтительнее находить дисперсионное соотношение через оценки  $\omega/N_m$  и численным путем, поскольку из рис. 5, (ж, к) следует, что он дает более удовлетворительное согласие с экспериментальными оценками, которые, согласно результатам расчетов, практически все соответствуют 1-й моде.

Пунктиром на рис. 5 (а, в, к, м) обведены дисперсионные оценки колебаний, частоты которых превышают модельные оценки частоты плавучести. Согласно выражению  $[N^2(z) - \omega^2] > 0$ , подобные колебания не являются ВВ. Однако выполнение критерия существования для средних и коротких ВВ в рамках

теоретических моделей представляется несколько неоднозначным, т. к. подобными ВВ может быть охвачена не вся водная толща, а либо приповерхностная, или область в районе слоя скачка плотности. Также, обращая внимание на рис. 5, в, отчетливо видно, что разброс характеристик указывает на отсутствие четкой связи между волновым вектором и частотой в выделенной пунктиром зоне, характерной для волн с дисперсией. Искажение дисперсионной структуры ВВ, проявляющаяся в виде отсутствия функциональной зависимости между волновым вектором и частотой, может быть связано не только с турбулентностью и влиянием горизонтальных течений на дисперсионные свойства ВВ и форму их собственных мод, а также с нехарактерными ВВ, которые существуют только за счет вынуждающей силы (поверхностных волн и течений). Причем амплитуда этих колебаний вне области существования ВВ, свойства которых описываются стандартными волновыми уравнениями, убывает по экспоненте (рис. 6). В случае волн, длинных по сравнению с волнами, находящимися внутри выделенной пунктиром области рис. 5, в, м это уменьшение происходит квазилинейно (рис. 6). Однако для района пр. Восточной Соловецкой Салмы, где отклонения профиля  $N(z)$  от модельных оценок не существенно, а вертикальное распределение значений чисел Кокса (рис. 3, б) свидетельствует о существенном вкладе турбулентных процессов в генерацию температурных пульсаций, колебания с частотой, большей, чем  $N(z) = \text{const}$ , по всей видимости, являются не ВВ, а турбулентностью.

Из рис. 6 видно, что ВВ с частотами  $\omega = \omega_1$  и периодом свыше 20 мин охватывают весь водный столб. Соответственно, волны с частотой  $\omega = \omega_2$  являются нехарактерными, т. е. имеют характер внутренних в пределах слоя  $\Delta h$ , локализованном в районе скачка плотности, поскольку только в нем они имеют максимальную амплитуду. Вне этого слоя  $\omega_2 > N(z)$ , при этом амплитуда  $W(z)$  уменьшается по экспоненте. На профиле чисел Кокса (рис. 3, д) этот участок глубин характеризуется наличием внутреннего волнения, причем из рис. 5, е видно, что все колебания в районе термоклина, относятся к ВВ 1-й моды, а волны с периодом менее 10 мин уже являются нехарактерными для пр. Западная Салма. На станции № 3, что в Горле Белого моря (рис. 6, б) волна с частотой  $\omega = \omega_2$ , а также волны с периодом 3—6 мин и длиной менее 100 м имеют характер внутренних только в верхнем 15-метровом слое и максимальную амплитуду на глубине 10 м. Не исключено, что механизмом возникновения таких волн могут служить интерференционные явления вследствие резонансного обмена энергией с поверхностными волнами.

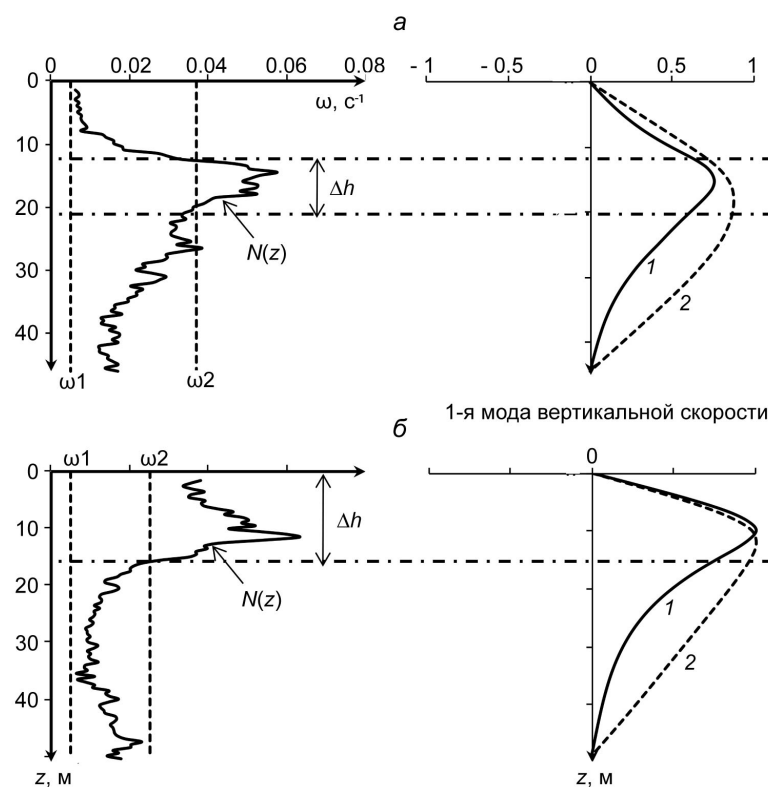


Рис. 6. Изменение  $N(z)$  с глубиной и профили вертикальной скорости для 1-й моды ВВ  $W(z, \omega_1)$  — 1 и нехарактерной ВВ  $W(z, \omega_2)$  — 2 для станции № 2 (а) и станции № 3 (б).

Вернемся снова к станции № 1 и к рис. 5, в, на котором пунктиром очерчена область, внутри которой колебания не имеют функциональной связи между волновым вектором и частотой. Выше было отмечено, что на глубинах 7 м и 15—17 м имеет место слабая микроструктурная активность, что также указывает на присутствие КВВ и на начальную стадию проявления механизмов развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца, в результате которой образуется тонкая микроструктура [12, 21, 22]. Кроме того, нелинейные межмодовые взаимодействия в поле ВВ, усиливающиеся при наличии тонкой структуры поля плотности, приводят к потоку энергии в высшие моды и тем самым увеличивают вероятность неустойчивости ВВ и генерацию турбулентности. В случае слабого взаимодействия движение представляет собой взаимодействующие свободные ВВ с определенным дисперсионным соотношением (пр. Западная Соловецкая Салма, станция № 2). Для сильного взаимодействия свойственно нарушение функциональной зависимости между волновыми числами и частотой (пр. Восточная Соловецкая Салма, станция № 1) и движение, для которого характерно отсутствие определенного дисперсионного соотношения, становится турбулентным.

\*\*\*

В ходе работы детально изучена модовая структура поля ВВ в отсутствие фоновых течений и их дисперсионные свойства. За все время наблюдений регистрировались колебания с периодом, не превышающем 20—30 мин и длиной, согласно результатам расчетов, от 50 до 500 м. Между периодом и длиной ВВ выявлена линейная зависимость. Вычисление собственных функций численным и аналитическим методом произведено для трех моделей распределения плотности: экспоненциальной (линейной), двухслойной и трехслойной. Установлено, что в случае линейного распределения плотности для определения дисперсионных характеристик ВВ предпочтительнее использовать дисперсионное соотношение, выражаемое через групповую и фазовую скорости (пр. Восточная Соловецкая Салма). Для пр. Западная Соловецкая Салма выявлено хорошее соответствие между аналитическим и численным методом для 1-й моды, согласно представлению дисперсионного соотношения через оценки  $\omega/N_m$  и  $c_{грх}/c_0$ . Наименьшее расхождение между численным и аналитическим решением краевой задачи установлено в пр. Восточная Соловецкая Салма.

Дисперсионные характеристики ВВ для района Горла Белого моря, полученные аналитическим путем, сильно зависят от модельной оценки частоты Вайсяля—Брента и расходятся с численными, а следовательно, неудовлетворительно описываются трехслойной моделью распределения плотности. Поэтому, для режима стратификации Горла предпочтительнее находить дисперсионное соотношение через оценки  $\omega/N_m$  и численным путем, поскольку он дает более удовлетворительное согласие с экспериментальными значениями, которые, согласно результатам расчетов, практически все соответствуют 1-й моде.

Искажение дисперсионной структуры ВВ, проявляющаяся в виде отсутствия функциональной зависимости между волновым вектором и частотой, связано с влиянием турбулентности на формирование температурных колебаний. Установлено, что в случае если частота ВВ сравнима или превышает модельные оценки частоты плавучести, то подобными волнами, называемые нехарактерными, охвачена не вся водная толща, а либо приповерхностная в Горле, или область в районе слоя скачка плотности в пр. Западная Соловецкая Салма.

Значения чисел Кокса по данным измерений оказались наибольшими в пр. Восточная Соловецкая Салма. Это свидетельствует о существенном вкладе турбулентных процессов в формирование температурных флуктуаций, что также находит отражение в отсутствие связи между волновым вектором и частотой. Минимальные значения чисел Кокса получились для пр. Западная Соловецкая Салма, поэтому температурные неоднородности здесь преимущественно образуются в результате движений, обусловленных внутренними волнами.

*Данная работа частично была выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 15-05-04639\_а.*

### Литература

1. Зимин А. В., Родионов А. А., Жегулин Г. В. Короткопериодные внутренние волны на шельфе Белого моря: сравнительный анализ наблюдений в различных районах // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 3. С. 19—33.
2. Зимин А. В. Внутренние волны на шельфе Белого моря по данным натурных наблюдений // *Океанология*. 2012. Т. 52, № 1. С. 16—25.
3. Родионов А. А., Семенов Е. В., Зимин А. В. Развитие системы мониторинга и прогноза гидрофизических полей морской среды в интересах обеспечения скрытности и защиты кораблей ВМФ // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2012. Т. 5, № 2. С. 89—108.

4. *Серебряный А. Н., Пака В. Т., Корж А. О.* Исследование с помощью ADCP течений и внутренних волн в Белом море // Геология морей и океанов: Матер. XVIII междуна. науч. конф. (школы) по морской геологии. М.: ГЕОС, 2009. Т. III. С. 245—250.
5. *Зимин А. В.* Экспериментальные исследования изменчивости гидрофизических полей на шельфе Белого моря в районах с различной вертикальной структурой вод // Система Белого моря. Том II: Водная толща и взаимодействующие с ней атмосфера, криосфера, речной сток и биосфера. М.: Научный мир, 2012. С. 392—410.
6. *Жегулин Г. В., Зимин А. В.* Расчет дисперсионных характеристик внутренних волн в Белом море по данным наблюдений 2012 г. // Сборник докладов Третьей объединенной конференции молодых ученых и специалистов «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб., 2013. С. 308—312.
7. *Сабинин К. Д., Серебряный А. Н.* «Горячие точки» в поле внутренних волн в океане // Акустический журн. 2007. Т. 53, № 3. С. 410—436.
8. *Коняев К. В., Сабинин К. Д.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
9. *Зимин А. В., Романенков Д. А., Козлов И. Е., Шапрон Б., Родионов А. А., Атаджанова О. А., Мясоедов А. Г., Коллар Ф.* Короткопериодные внутренние волны в Белом море: оперативный подспутниковый эксперимент летом 2012 г. // Исслед. Земли из космоса. 2014. № 3. С. 41—55.
10. *Зимин А. В., Романенков Д. А., Родионов А. А., Жегулин Г. В., Родионов М. А.* Экспедиционные исследования короткопериодной изменчивости гидрофизических полей Белого моря в августе 2013 г. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 1. С. 85—92.
11. *Зимин А. В., Козлов И. Е., Атаджанова О. А., Шапрон Б.* Мониторинг короткопериодных внутренних волн в Белом море // Исследование Земли из космоса. 2015. № 5. С. 51—61.
12. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969. 267 с.
13. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
14. *Зимин А. В., Родионов А. А., Здореннов Р. Э., Романенков Д. А., Шевчук О. И., Родионов М. А., Жегулин Г. В.* Исследования короткопериодной изменчивости гидрофизических полей в белом море в июле-августе 2012 г. с научно-исследовательского судна «Эколог» // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5, № 3. С. 85—88.
15. *Валерианова М. В., Жуков Л. А.* Практические работы по курсу «Общая океанология». Л.: Ленинградский гидрометеорологический институт, 1974. 93 с.
16. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 501 с.
17. *Некрасов А. В., Пелиновский Е. Н.* Практикум по динамике океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 317 с.
18. *Физика океана. В 2 т. Т. 2. Гидродинамика океана / Под ред. Монина А. С. М.: Наука, 1978. 455 с.*
19. *Степанюк И. А.* Методы измерений характеристик морских внутренних волн. СПб.: изд. РГГМУ, 2002. 138 с.
20. *Монин А. С., Озмидов Р. В.* Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
21. *Дыкман В. З., Киселева О. А.* О взаимосвязи тонкой структуры, внутренних волн и мелкомасштабной турбулентности // Океанология. 1981. Т. 21, № 4. С. 605—612.
22. *Китайгородский С. А., Миропольский Ю. З., Филлюшкин Б. Н.* О различении внутренних волн и турбулентности по данным о флуктуациях температуры в океане // Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9, № 3. С. 272—292.