Erster Haskell-Workshop
im OpenLab Augsburg
github.com/curry-club-aux/haskell-workshop

Curry-Club AUGSBURG
:: ((a, u) → x) → a → u → x

Übungsblatt zu Haskell

Learn You a Haskell for Great Good!

1 Aufwärmübungen in GHCi

Aufgabe 1. *Verschachtelte Tupel*

Benutze die vordefinierten Funktionen `fst :: (a, b) -> a` und `snd :: (a, b) -> b`, um das Textzeichen aus `(1, ('a', "foo"))` zu extrahieren.

Aufgabe 2. *Medianbestimmung*

Sei `xs` eine unsortierte Liste von Zahlen, z. B. `let xs = [3, 7, -10, 277, 89, 13, 22, -100, 1]`. Schreibe einen Ausdruck, der den Median (das Element in der Mitte in einer Sortierung) von `xs` berechnet. Verwende dazu die Funktionen `Data.List.sort`, `length`, `div` und `!!`.

Aufgabe 3. *Der Eulen-Operator erster Ordnung*

Was könnte der Ausdruck `(.) . (.)` bewirken? Finde es heraus mit Hilfe von GHCi!
Hinweis. Du brauchst nicht verstehen, warum der Eulen-Operator funktioniert. Nur, was er tut.

2 Spiel und Spaß mit Listenfunktionen

Aufgabe 4. *Groß- und Kleinschreibung*

a) Verwende `map`, um einen String in eine Liste von Bools zu verwandeln, die angeben, ob das entsprechende Zeichen im String ein Groß- oder Kleinbuchstabe war. Beispielsweise soll bei `"aBCde"` das Ergebnis `[True,False,False,True,True]` sein.
Hinweis. Verwende `isLower :: Char -> Bool` aus `Data.Char`.

b) Schreibe eine Funktion, die für einen String zurückgibt, ob er nur Kleinbuchstaben enthält.

c) Berechne die Anzahl der Kleinbuchstaben in einem gegebenen String.

Aufgabe 5. *Typfehler*

Erkläre den Typfehler, der bei folgendem Ausdruck auftritt: `\x -> x x`

Bemerkung. Es gibt einen tieferen und guten Grund dafür, wieso man die dabei auftretenden „unendlichen Typen“ ablehnt. `http://copilotco.com/mail-archives/haskell-cafe.2006/msg05831.html`

3 Funktionsdefinitionen

Aufgabe 6. *Fizz buzz*

Beim Spiel *Fizz buzz* stehen alle Spieler im Kreis. Reihum wird nun von eins hoch gezählt. Anstatt von Zahlen, die durch drei teilbar sind, muss man jedoch „fizz“ sagen und „buzz“ bei Zahlen, die durch fünf teilbar sind. Ist eine Zahl sowohl durch drei als auch durch fünf teilbar, so sagt man „fizz buzz“. Wer einen Fehler macht, scheidet aus.

Implementiere die unendliche Liste

```
fizzbuzz :: [String]
fizzbuzz = [ "1", "2", "fizz", "4", "buzz", "fizz", "7", "8", "fizz", "buzz"
           , "11", "fizz", "13", "14", "fizz buzz", "16", ...]
```

Aufgabe 7. *Origami*

Implementiere eine Funktion `maximum' :: [Int] -> Int`, die die größte Zahl in einer Liste zurückliefert oder `0`, falls die Liste leer ist oder alle Zahlen negativ sind. Verwende dazu `foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b`.

Aufgabe 8. *Fibonacci-Zahlen*

Die Fibonacci-Folge $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ ist bekanntermaßen rekursiv definiert durch:

> *Die nullte Fibonacci-Zahl ist null, die erste Fibonacci-Zahl ist eins,*
> *jede weitere Fibonacci-Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger.*

a) Verwende diese Definition direkt, um eine Haskell-Funktion `fib :: Int -> Int` zu schreiben, die die n-te Fibonacci-Zahl berechnet.

b) Berechne `fib 35`. Was ist das Problem?

c) Implementiere `fibs :: [Int]`, eine unendliche Liste aller Fibonacci-Zahlen. Lass dir mit `take 100 fibs` die ersten hundert Folgeglieder in GHCi ausgeben.
Hinweis. Du bekommst massig Bonuspunkte, wenn du `zipWith` verwendest.

Aufgabe 9. *Die Collatz-Vermutung*

- Beginne mit irgendeiner natürlichen Zahl $n > 0$.
- Ist n gerade, so nimm als Nächstes $\frac{n}{2}$,
- Ist n ungerade, so nimm als Nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole die Vorgehensweise mit der erhaltenen Zahl.

Zum Beispiel erhält man für $n = 19$ die Folge

$$19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

a) Schreibe eine Funktion `collNext :: Int -> Int`, welche Collatz-Iteration durchführt.

b) Implementiere die Funktion `collSeq :: Int -> [Int]`, die die Folge der Collatz-Iterierten berechnet: `collSeq 10 = [10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...]`

Die bisher ungelöste Collatz-Vermutung besagt, dass man ausgehend von jeder beliebigen Zahl n irgendwann bei 1 landet.

c) Schreibe die Funktion `collTest :: Int -> Bool`, welche die Collatz-Vermutung für eine Eingabe n testet. Falls die Collatz-Vermutung für n falsch sein sollte, so muss die Funktion nicht terminieren.

d) Überprüfe die Collatz-Vermutung für alle natürlichen Zahlen kleiner als 100000.

Aufgabe 10. *Die Prelude*

Informiere dich, was folgende Funktionen aus der Standardbibliothek tun, und implementiere so viele wie du willst neu:

```
head, tail, init, last, length, reverse, (++), iterate, map, filter,
intersperse, concat, zipWith, repeat, and, takeWhile, dropWhile, maximum
```

Aufgabe 11. *Pointless/pointfree programming*

Vereinfache folgende Funktionsdefinitionen:

```
multMany a xs = map (\x -> a*x) xs
filterMap f g xs = filter f (map g xs)
```

Aufgabe 12. *Run-Length-Encoding*

Zur effizienten Speicherung von Daten mit vielen Zeichenwiederholungen bietet es sich an, nicht jedes einzelnes Zeichen, sondern Zeichen mit der jeweiligen Anzahl Wiederholungen zu speichern:

```
Prelude> encode ['a', 'a', 'a', 'a', 'b', 'c', 'c', 'a', 'a', 'd', 'e', 'e', 'e', 'e']
[(4, 'a'), (1, 'b'), (2, 'c'), (2, 'a'), (1, 'd'), (4, 'e')]
```

Implementiere die Funktion `encode :: String -> [(Int, Char)]` und die Umkehrfunktion `decode :: [(Int, Char)] -> String`!

Aufgabe 13. *Längste Teilfolge*

Schreibe eine Funktion `longestSubsequence :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`. Diese soll die längste zusammenhängende Unterliste in einer Liste berechnen, für die das übergebene Prädikat vom Typ `a -> Bool` den Wert `True` liefert. Wenn beispielsweise `xs :: [Date]` die Liste der letzten 365 Tage ist, und `p :: Date -> Bool` angibt, ob eine gewisse Benutzerin an einem gegebenen Tag auf GitHub aktiv war, so berechnet `longestSubsequence xs p` die längste Strähne auf GitHub.

Aufgabe 14. *Kettenbrüche*

Jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ kann als *unendlicher Kettenbruch*

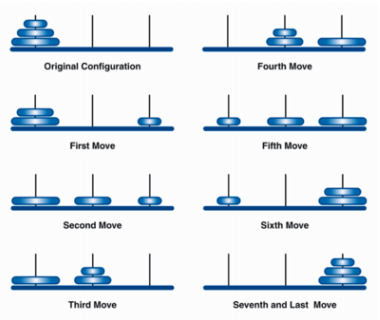
$$r = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots}}}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ geschrieben werden. Überlege dir einen Algorithmus, der die unendliche Folge der b_i's berechnet und implementiere ihn in Haskell. Überprüfe deinen Algorithmus anhand der Kettenbruchentwicklung von π (in Haskell: `pi`).

Hinweis. Du wirst die Funktionen `floor :: Double -> Int` und `fromIntegral :: Int -> Double` brauchen.

Aufgabe 15. *Türme von Hanoi*

Die Aufgabe bei Hanoi ist es, einen Turm von Scheiben von einem Steckplatz zu einem anderen zu transportieren. Dabei darf man nur je eine Scheibe einzeln bewegen und es darf niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. Man hat einen Steckplatz als Zwischenlager zur Verfügung. Implementiere eine Funktion `toh :: Int -> [(Int, Int)]`, welche die Hanoi-Züge (Bewegungen von einzelnen) berechnet, mit denen man einen Turm einer gewissen Größe von Steckplatz 1 zu Steckplatz 3 mit Steckplatz 2 als Zwischenlager bewegen kann.




```
Prelude> toh 3
[(1,3), (1,2), (3,2), (1,3), (2,1), (2,3), (1,3)]
```

Tipp. Definiere eine Hilfsfunktion `moveTower :: Int -> (Int, Int, Int) -> [(Int, Int)]`, sodass `moveTower n (x, y, z)` die nötigen Schritte ausgibt, um n Scheiben von x nach y unter Verwendung von z als Zwischenlager zu bewegen.

Aufgabe 16. *Strikte und nicht-strikte Funktionen*

Eine Haskell-Funktion `f :: A -> B` heißt genau dann *strikt*, wenn sie, angewendet auf einen nicht-terminierenden Ausdruck, selbst nicht terminiert. In Symbolen schreibt man das gerne so: $f\bot = \bot$.

Nicht-terminierende Ausdrücke sind zum Beispiel:

- `undefined`
- `error "Division durch Null"`
- `last [0..]`

Keine Beispiele für nicht-terminierende Ausdrücke sind:

- `"abc"`
- `[0..]`
- `['a', undefined, 'b']`

Dass auch die letzten beiden Ausdrücke keine nicht-terminierenden Ausdrücke sind, kann man sich so klarmachen: Mit ihnen kann man prima arbeiten, ohne Endlosschleifen zu produzieren. Zum Beispiel ist `length ['a', undefined, 'b']` kein Fehler, sondern einfach `3` (in das mittlere Element der Liste muss nicht hineingeschaut werden).

Die Funktion `id :: Char -> Char` ist strikt. Der *Robot Monkey Operator*, die Funktion `(:[]) :: Char -> [Char]`, ist es dagegen nicht. In den meisten Programmiersprachen ist jede Funktion strikt, in Haskell jedoch nicht.

Welche der folgenden Funktionen sind strikt, welche nicht?

a) `reverse :: [a] -> [a]`

b) `("abc" ++) :: [Char] -> [Char]`

c) `(++ "abc") :: [Char] -> [Char]`

Aufgabe 17. *Der Fixpunktoperator*

Im Modul `Control.Monad.Fix` ist folgende Funktion vordefiniert (welche noch nichts mit Monaden zu tun hat):

```
fix :: (a -> a) -> a
fix f = let x = f x in x
-- alternative Schreibweise:
-- fix f = x where x = f x
```

Diese Funktion berechnet von einer gegebenen Funktion `f` ihren *kleinsten Fixpunkt* – das ist ein Wert `x :: a`, sodass `f x` gleich `x` ist. Gibt es mehrere solcher Fixpunkte, so berechnet `fix` den „am wenigsten definierten“ (das ist mit „kleinstem“ gemeint). Anschaulich kann man sich `fix f` als `f (f (f (...)))` vorstellen.

a) Was ist `fix ('a':)`?

b) Was ist `fix ("abc" ++)`?

c) Was ist `fix id`? Was ist allgemeiner der kleinste Fixpunkt einer strikten Funktion?

d) Was ist `fix $ \xs -> 0 : 1 : zipWith (+) xs (tail xs)`?

e) Wieso berechnet folgender Code die Fibonacci-Zahlen?

```
fib :: Integer -> Integer
fib = fix $ \fib' n ->
    case n of
        0         -> 0
        1         -> 1
        otherwise -> fib' (n-1) + fib' (n-2)
```

f) Wenn du Spaß an solchen Dingen findest, entziffere auch noch folgenden Code: `fix $ (0:) . scanl (+) 1`

4 Eigene Datentypen

Aufgabe 18. *Binäre Bäume*

Im Folgenden verwenden wir folgende Definition für binäre Bäume, deren Verzweigungsknoten mit Werten vom Typ `Int` dekoriert sind.

```
data Tree = Nil | Fork Int Tree Tree
    deriving (Show)
```

a) Schreibe eine Funktion, die die Gesamtzahl Blätter eines Baums berechnet: `numberOfLeaves :: Tree -> Int`.

b) Schreibe eine Funktion, die die Höchsttiefe eines Baums berechnet.

c) Schreibe eine Funktion, die die Int-Werte der Verzweigungsknoten in einer Reihenfolge deiner Wahl als Liste zurückgibt.

Aufgabe 19. *Binäre Bäume bilden einen Funktor*

a) Verallgemeinere die vorherige Aufgaben auf Bäume, die Werte von einem beliebigen Typ `a` statt `Int` tragen. Vervollständige dazu zunächst folgende Definition:

```
data Tree a = Nil | ...
    deriving (Show)
```

b) Implementiere eine Funktion `tmap :: (a -> b) -> Tree a -> Tree b`.

Aufgabe 20. *Unendliche Bäume*

a) Schreibe eine Funktion `cutOff :: Int -> Tree a -> Tree a`, die eine Maximaltiefe und einen Baum als Argumente nimmt und einen neuen Baum zurückgibt, der sich aus dem gegebenen durch Abschneidung bei der gegebenen Maximaltiefe ergibt.

b) Definiere eine Funktion, die eine unendliche Liste von Werten nimmt und einen Baum zurückgibt, auf dessen Verzweigungsknoten die Elemente der Liste sitzen. Suche dir selbst aus, in welcher Reihenfolge die Listenelemente auf dem Baum platziert werden sollen.

Aufgabe 21. *Der Stern–Brocot-Baum (für Fans von Kettenbrüchen)*

Informiere dich auf Wikipedia über den Stern–Brocot-Baum und implementiere ein Haskell-Programm, dass diesen unendlichen Baum berechnet. Hole dir gegebenenfalls einen (stark spoilernden) Tipp ab.

Aufgabe 22. *Termbäume*

a) Implementiere einen Datentyp für Funktionsterme. Zum Beispiel soll

$$(x \cdot x + 3) - x$$

so repräsentiert werden: `Sub (Add (Mul Var Var) (Lit 3)) Var`.

b) Schreibe eine Funktion `eval :: Exp -> Double -> Double`, die in einem gegebenen Term für die Variable x einen konkreten Wert einsetzt.

c) Schreibe eine Funktion `diff :: Exp -> Exp`, die einen gegebenen Funktionsterm ableitet. Zum Beispiel soll `diff (Mul Var Var)` im Wesentlichen äquivalent sein zu `Mul (Lit 2) Var`.

Aufgabe 23. *Isomorphe Typen*

Manche Typen lassen sich verlustfrei ineinander umwandeln, zum Beispiel die folgenden beiden:

```
data Bool    = False  | True   -- schon vordefiniert
data Aussage = Falsch | Wahr
```

Man spricht in einem solchen Fall von *zueinander isomorphen Typen*. Die Umwandlungsfunktionen heißen *Isomorphismen* und können in diesem Fall wie folgt definiert werden:

```
iso :: Bool -> Aussage
iso False = Falsch
iso True  = Wahr

osi :: Aussage -> Bool
osi Falsch = False
osi Wahr   = True
```

Das charakteristische an diesen beiden Funktionen ist, dass `osi . iso == id` und `iso . osi == id`.

Folgende Typen sind jeweils zueinander isomorph. Implementiere auf analoge Weise Funktionen `iso` und `osi`, die das bezeugen!

a) `(a, b)` versus `(b, a)`

b) `((a, b), c)` versus `(a, (b, c))`

c) `(a, Either b c)` versus `Either (a, b) (a, c)`

d) `a -> (b, c)` versus `(a -> b, a -> c)`

e) `(a, b) -> c` versus `a -> b -> c`

5 Typklassen

Aufgabe 24. *Eigene Show-Instanzen*

Für Debugging-Zwecke oder auch zum Datenaustausch ist die Show-Klasse nützlich, deren Definition in etwa die folgende ist:

```
class Show a where
    show :: a -> String
```

Bei der Deklaration eines neuen Datentyps hat man die Möglichkeit, mit einer `deriving`-Klausel den Compiler anzuweisen, automatisch eine geeignete Show-Instanz zu generieren:

```
data Tree a = Nil | Fork a (Tree a) (Tree a)
    deriving (Show)
```

In dieser Aufgabe aber sollst du den dafür nötigen Boilerplate-Code von Hand schreiben. Such dir einen Datentyp deiner Wahl aus und schreibe eine individuelle Show-Instanz für ihn.

Aufgabe 25. *Die Monoid-Typklasse*

Das Modul `Data.Monoid` definiert die Monoid-Typklasse:

```
class Monoid a where
    mempty  :: a
    mappend :: a -> a -> a
    mconcat :: [a] -> a
```

Ihr gehören solche Typen an, die eine sog. *Monoidstruktur* tragen. (Wenn du diesen Begriff nicht kennst, dann frag kurz nach!) Das neutrale Element soll durch `mempty` angegeben werden, die Monoidoperation durch `mappend`. Die Funktion `mconcat` soll gleich mehrere Elemente miteinander verknüpfen.[1]

a) Gebe einer Nachimplementierung des Listen-Datentyps, etwa `data List a = Nil | Cons a (List a)` eine Monoid-Instanz. Vergiss nicht, zu Beginn deines Programmtexts mit `import Data.Monoid` die Definition der Monoid-Klasse zu laden.

b) Implementiere folgende Funktion:

```
cata :: (Monoid m) => (a -> m) -> ([a] -> m)
```

Bemerkung. Das ist der Herzstück des Beweises, dass der Monoid der endlichen Listen mit Einträgen aus `a` der *freie Monoid* über `a` ist.

Aufgabe 26. *Sortierung nach mehreren Kriterien*

Oft steht man vor folgendem Problem: Eine Liste von Dingen soll nach mehreren Kriterien sortiert werden. Etwa zunächst nach Nachname, unter gleichen Nachnamen aber nach Vorname und unter gleichem Namen nach Geburtsdatum. Die in Haskell idiomatische Herangehensweise an dieses Problem verwendet … Monoide!

a) Schlage den `Ordering`-Typ nach.

b) Reimplementiere die Funktion

```
comparing :: (Ord a) => (b -> a) -> b -> b -> Ordering
```

aus dem Modul `Data.Ord`. Sie kann zum Beispiel so verwendet werden:

[1] Die Funktionen `mappend` und `mconcat` lassen sich gegenseitig ausdrücken. Fällt dir ein Grund ein, wieso trotzdem beide Funktionen Teil der Klasse sind? Hätte man nicht auch einfach `mconcat` außerhalb der Klasse definieren können?

```haskell
import Data.List

data Person = MkPerson
    { lastName  :: String
    , givenName :: String
    , birthday  :: String
    }
    deriving (Show)

sortPersons :: [Person] -> [Person]
sortPersons = sortBy (comparing lastName)
-- sortBy hat den Typ (a -> a -> Ordering) -> [a] -> [a].
```

c) Trägt ein Typ `a` eine Monoidstruktur, so auch der Typ `e -> a` der Funktionen von `e` nach `a`. Bestätige das, indem du folgenden Code vervollständigst:

```haskell
instance (Monoid a) => Monoid (e -> a) where
    -- ...
```

Da diese Instanz schon in `Data.Monoid` vordefiniert ist, musst du für diese Teilaufgabe den Import von `Data.Monoid` entfernen und die Monoid-Typklasse selbst definieren.

d) Was macht folgender Code? Wieso tut er das? Informiere dich dazu über die Monoid-Instanz von `Ordering` und erinnere dich an die Monoid-Instanz von Funktionstypen.

```haskell
sortBy $ mconcat
    [ comparing lastName
    , comparing firstName
    , comparing birthday
    ]
```

Aufgabe 27. *Endliche Typen*

Manche Typen fassen nur endlich viele Werte, zum Beispiel `Bool` und `Either Bool Bool`. Für solche Typen ist es gelegentlich praktisch, eine vollständige Liste ihrer Werte zu kennen. Aus diesem Grund führen wir folgende Klasse ein:

```haskell
class Finite a where
    elems :: [a]
```

a) Implementiere eine Finite-Instanz für `Bool`.

b) Implementiere folgende allgemeinen Instanzen:

```haskell
instance (Finite a, Finite b) => Finite (a,b)        where ...
instance (Finite a, Finite b) => Finite (Maybe a)    where ...
instance (Finite a, Finite b) => Finite (Either a b) where ...
```

c) Wenn du Lust auf eine Herausforderung hast, dann implementiere auch folgende Instanz. Sie ist für die weiteren Teilaufgaben aber nicht nötig.

```haskell
instance (Eq a, Finite a, Finite b) => Finite (a -> b) where ...
```

d) Implementiere eine Funktion `exhaustiveTest :: (Finite a) => (a -> Bool) -> Bool`.

e) Die Gleichheit zweier Funktionen (vom selben Typ) ist im Allgemeinen nicht entscheidbar, denn zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie auf allen Eingabewerten übereinstimmen. Um das zu überprüfen, muss man im Allgemeinen unendlich viele Fälle in Augenschein nehmen. Wenn der Quelltyp aber endlich ist, geht es doch. Implementiere also:

```haskell
instance (Finite a, Eq b) => Eq (a -> b) where ...
```

Aufgabe 28. *Abzählbare Typen*

Manche Typen sind zwar nicht endlich, aber immer noch *abzählbar*: Das heißt, dass es eine unendliche Liste gibt, in der alle Werte des Typs vorkommen. Zum Beispiel ist der Typ `Integer` abzählbar, denn in der Liste `[0, 1, -1, 2, -2, ...]` kommen alle ganzen Zahlen vor.

a) Definiere nach dem Vorbild der Finite-Typklasse aus der vorherigen Aufgabe eine Countable-Typklasse.

b) Implementiere eine Countable-Instanz von `Integer`.

c) Vervollständige folgenden Code:

```
instance (Countable a, Countable b) => Countable (a,b) where ...
```

d) Vervollständige folgenden Code (schwierig!):

```
instance (Countable a) => Countable [a] where ...
```

Dabei soll `[a]` für den Typ der endlichen Listen mit Werten in `a` stehen – obwohl der Typ `[a]` ja auch unendliche Listen enthält. Solche *sozialen Verträge* sind in Haskell leider gelegentlich nötig – man benötigt abhängige Typen und andere Entwicklungen, um sie vollständig zu vermeiden. Sauberer wäre an dieser Stelle, einen neuen Datentyp `FiniteList a` zu definieren, der isomorph zum gewöhnlichen Listentyp ist, aber den sozialen Vertrag an zentraler Stelle kundtut.

Aufgabe 29. *Überabzählbare Typen*

Diese Aufgabe richtet sich nur an Leute, die das sog. *Cantorsche Diagonalargument* und die *Russelsche Antinomie* kennen. Sorry! Bei Gelegenheit suchen wir eine einführende Referenz.

Wir definieren ein Typalias für Mengen:

```
type Set a = a -> Bool
-- Ist ‘f :: Set a‘, so soll ‘f x == True‘ bedeuten, dass ‘x‘ in
-- der Menge ‘f‘ liegt.
```

a) Setze in diesem Modell die leere Menge, die Universalmenge (welche alle Werte überhaupt enthält) und die Menge, die nur ein bestimmtes Element enthält, um. Welche Voraussetzung an den Typ `a` musst du im letzten Teil stellen?

b) Implementiere folgende Funktionen:

```
member       :: a     -> Set a -> Bool
union        :: Set a -> Set a -> Set a
intersection :: Set a -> Set a -> Set a
complement   :: Set a -> Set a
```

c) Setze die Russelsche Antinomie in Haskell um. Definiere also eine Menge all derjenigen Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Wie äußert sich das paradoxe Verhalten in Haskell?

d) Setze das Cantorsche Diagonalargument in Haskell um. Definiere also eine Funktion

```
cantor :: (a -> Set a) -> Set a
```

die folgendes leistet: Für jede Funktion `f :: a -> Set a` soll `cantor f` eine Menge sein, die nicht im Bild (in der Wertemenge) von `f` enthalten ist.

e) Bonusfrage zum Grübeln: Die vorherige Teilaufgabe zeigt, dass es in Haskell überabzählbare Typen gibt. Andererseits ist die Menge der Haskell-Programme abzählbar. Wie passt das zusammen?

f) Literatur dazu: ein toller Blog-Post von sigfpe. `http://blog.sigfpe.com/2008/01/type-that-should-not-be.html`

6 Die IO-Monade und andere Monaden

Aufgabe 30. *IO-Stringmanipulation*

Schreibe ein Programm, das eine Zeichenkette einliest und diese ruckwärts wieder ausgibt. Die Funktion `reverse :: [a] -> [a]` könnte hilfreich sein, wenn du dir sie nicht selbst schreiben willst.

Aufgabe 31. *Überprüfung von Nutzereingaben*

Schreibe ein Programm, das den Benutzer solange nach einer Zahl fragt, bis dieser eine Zahl angibt, die durch 3 teilbar ist. Erinnere dich an die Typklasse `Read`!

Aufgabe 32. *Monadische Schleifen*

a) Schreibe eine Funktion, die eine gegebene IO-Aktion (oder eine andere Art Aktion) eine gewisse Anzahl von Malen wiederholt. Die Typsignatur sollte also `replicateM :: Int -> [IO a] -> IO [a]` (oder allgemeiner `replicateM :: (Monad m) => Int -> [m a] -> m` – erinnere dich, dass `IO` eine Instanz von `Monad` ist!) sein.

b) Schreibe eine Funktion `forM :: (Monad m) => [a] -> (a -> m b) -> m [b]` die das tut, was ihr Name und ihre Typsignatur versprechen.

c) Schreibe eine Funktion, die es erlaubt, eine IO-Aktion (oder eine andere Art Aktion) unendlich oft zu wiederholen. Die Typsignatur sollte `forever :: (Monad m) => m a -> m b` sein. Erinnere dich, dass `IO` eine Instanz von `Monad` ist!

Aufgabe 33. *Zahlenratespiel*

Schreibe ein Programm, das versucht eine Zahl zwischen 0 und 100 zu erraten, die sich die Nutzerin oder der Nutzer ausgedacht hat. Der Nutzende soll jeweils bei jedem Rateversuch angeben, ob die geratene Zahl kleiner oder größer als die tatsächliche ist. Du kannst das Problem mit einer binären Suche lösen.

Aufgabe 34. *Die Reader-Monade*

Gelegentlich muss ein bestimmter Werte durch viele Funktionen gefädelt werden, zum Beispiel ein Wert, der globale Konfigurationsoptionen enthält:

```
f :: Config -> Int -> Char -> Bool -> Mumble
f config x y z = ...g config x......h config y......z...

g :: Config -> Int -> Gabambel
g config x     = ...x...

h :: Config -> Char -> Rainbow
h config y     = ...p config y......y...

p :: Config -> Char -> Lollipop
p config y     = ...y...
```

Vielleicht findest du das nervig. Informiere dich über die Reader-Monade, mit der man das vermeiden kann. Die neuen Typsignaturen lauten dann:

```
f :: Int -> Char -> Bool -> Reader Config Mumble
g :: Int -> Reader Config Gabambel
h :: Char -> Reader Config Rainbow
p :: Char -> Reader Config Lollipop
```

Durch Verwendung von Typsynonymen, wie `type R = Reader Config`, könnte man den Code noch übersichtlicher gestalten. Zugriff auf den aktuellen Wert der implizit mitgeführten Konfiguration erhält man mit `ask :: Reader Config Config`:

```
foo :: FairyTale -> Reader Config MyLittlePony
foo x = do
    config <- ask
    let y = ...x...
    ...x...
    return ...
```

7 Ideen für größere Projekte

Aufgabe 35. *Unicode-Smileys*

Schreibe eine Funktion `replaceSmileys :: String -> String`, die alle „:-)“ durch deinen liebsten Unicode Smiley ersetzt. Auf unicode-table.com kannst du dir jeden Unicode-Smiley kopieren.

Wenn du die `IO`-Monade schon kennst, kannst du diese in einem Programm verwenden, das einen Text einliest und mit dieser Funktion alle Smileys ersetzt und den entstandenen Text ausgibt.

Aufgabe 36. *Einfache Verschlüsselung*

Implementiere einen einfachen Verschlüsselungsalgorithmus deiner Wahl, etwa:

a) Die Cäsarverschlüsselung, also Verschiebung des Alphabets: `rot :: Integer -> String -> String`. Die Implementation soll folgendes Gesetz erfüllen: `rot (-n) (rot n "foobar") == "foobar"`. Benutze bei der Implementation entweder `chr :: Int -> Char` und `ord :: Char -> Int` aus `Data.Char` oder eine Liste des Alphabets, wie `['A'..'Z'] ++ ['a'..'z'] :: [Char]`. In beiden Fällen kann dir der Modulooperator `a `mod` b` helfen. Beachte die Backticks! Beispiel: `rot 3 "hallo"` evaluiert zu `"kdoor"`.

b) Die Vigenèreverschlüsselung. Die funktioniert wie die Cäsarverschlüsselung, nur dass es mehrere SSchlüssel”(`Integer`) gibt, für jeden `Char` einen: `vigenère :: [Integer] -> String -> String`. Sollten die `Integer` nicht ausreichen, wird wieder beim ersten angefangen. Nützlich ist die Funktion `cycle :: [a] -> [a]`, die aus einer Liste eine unendliche macht, indem sie immer wieder wiederholt wird. Beispiel: `vigenère [1,2,3] "hallo"` evaluiert zu `"icomq"`.

Aufgabe 37. *Häufigkeitsanalyse auf Listen*

Schreibe eine Funktion `freqAn : Eq a => [a] -> [(a, Int)]`, die eine Liste von Tupeln aus einem Element der Eingabeliste und dessen Häufigkeit zurückgibt. Zum Beispiel wäre `freqAn "Hallo" == [('H', 1), ('a', 1), ('l', 2), ('o', 1)]`, wobei die Sortierung egal ist.

Aufgabe 38. *Kleine interaktive Konsolenspiele*

Wenn du schon besser mit IO in Haskell vertraut bist, versuche kleine Konsolenspiele, wie Hangman, Vier gewinnt oder Tic-Tac-Toe, zu implementieren!

Aufgabe 39. *Ein Zahlenrätsel*

Wie muss man die Zahlen 1, 3, 4 und 6 mit Klammern und den Operatoren `+ * - /` ergänzen, damit das Ergebnis 24 ist? Die Zahlen dürfen und müssen dabei alle genau einmal verwendet werden. Sie können aber in einer beliebigen Reihenfolge auftreten. Denkbar wäre also etwa die Lösung `3+((1-4)/6)`, aber dieser Term hat den Wert 2,5.

Schreibe ein Haskell-Programm, das für dich die Lösung findet! Ein mögliches Vorgehen ist folgendes.

a) Definiere einen Datentyp `Exp` von Termen zu definieren. Das Beispiel könnte dabei durch `Add (Lit 3) (Div (Sub (Lit 1) (Lit 4)) (Lit 6))` ausgedrückt werden.

b) Schreibe eine Funktion `eval :: (Fractional a) => Exp a -> a`.

c) Schreibe eine Funktion `groups :: [a] -> [([a],[a])]`, die folgendes leistet: Gegeben eine Liste, berechnet alle Möglichkeiten, diese Liste in zwei Teile zu zerlegen: einen vorderen und einen hinteren. Zum Beispiel:

```
Prelude> groups "abc"
[("abc",""),("ab","c"),("a","bc"),("","abc")]
```

d) Schreibe eine Funktion `arb :: [a] -> [Exp a]`, die folgendes leistet: Gegeben eine Liste `xs` von (zum Beispiel) Zahlen, gibt eine Liste von allen Termbäumen zurück, an deren Blättern (in genau der gegebenen Reihenfolge) die Zahlen aus `xs` stehen. Alle Zahlen müssen verwendet werden, und zwar jeweils genau einmal.

e) Importiere oder reimplementiere die Funktion `permutations :: [a] -> [[a]]` aus `Data.List`.

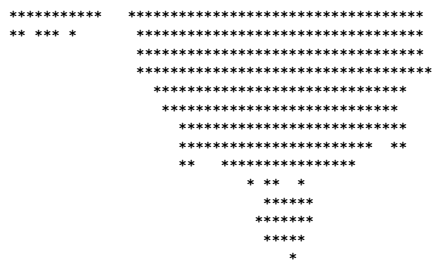
f) Füge alle Puzzleteile zusammen.

Aufgabe 40. *Das Apfelmännchen-Fraktal*

a) Informiere dich zunächst auf Wikipedia, wie man das Apfelmännchen-Fraktal theoretisch berechnet.

b) Implementiere die komplexen Zahlen in Haskell. Wenn du diesen Schritt überspringen möchtest, dann importiere einfach `Data.Complex`. Andernfalls definiere einen eigenen Datentyp für komplexe Zahlen und versehe ihn mit einer Num-Instanz.

c) Schreibe ein Haskell-Programm, das das Apfelmännchen-Fraktal in glorreicher 80x25-Auflösung plottet.



Aufgabe 41. *Das ungetypte Lambda-Kalkül*

a) Informiere dich auf Wikipedia, was das ungetypte Lambda-Kalkül ist. Verwende folgende Definition, um Terme des Lambda-Kalküls in Haskell abzubilden:

```haskell
type Name = String  -- nur ein Typsynonym
data Exp
    = App Exp  Exp
    | Lam Name Exp
    | Var Name
    deriving (Show)
```

Die Identitätsfunktion `\x -> x` wird dann durch `Lam "x" (Var "x")` dargestellt. Die Funktion `\f -> \x -> f x` durch `Lam "f" $ Lam "x" $ App (Var "f") (Var "x")`.

b) Mache dich mit dem Modul `Data.Map` vertraut. Es wird meistens *qualifiziert* importiert: `import qualified Data.Map as M`

c) Implementiere einen Evaluator für das ungetypte Lambda-Kalkül, also eine Funktion `eval :: Env -> Exp -> Exp`. Dabei ist `Env` ein weiteres Typsynonym, das den Typ der mitzuschleppenden *Umgebung* angibt:

```haskell
type Env = M.Map Name Exp
```

d) Bewundere die Schönheit des Y-Kombinators.

e) Reimplementiere den Evaluator unter Benutzung der Reader-Monade. Die Typsignatur von `eval` soll dann `Exp -> Reader Env Exp` sein.

Aufgabe 42. *Das Programm, das nicht sein darf*

Sei `f :: [Bool] -> Bool` ein Prädikat über unendliche Listen von Bools. Wäre es nicht toll, wenn es ein Programm gäbe, das herausfindet, ob es eine Bitfolge gibt, auf der `f` `True` liefert? Und wenn ja, eine solche Bitfolge auch noch berechnet? Scheint das angesichts der Tatsache, dass es doch (sogar übabzählbar) unendlich viele Bitfolgen gibt, unmöglich?

Folgendes Programm leistet das Gewünschte. Entziffere es. Die Auflösung gibt es auf `http://math.andrej.com/2007/09/28/seemingly-impossible-functional-programs/`, aber versuch es zuerst ohne zu spicken (Achtung, schwer!).

```haskell
-- ‘epsilon f‘ ist eine Bitfolge, auf der ‘f‘ True ist, falls eine solche
-- existiert. Andernfalls ist ‘epsilon f‘ irgendeine Bitfolge.
epsilon :: ([Bool] -> Bool) -> [Bool]
epsilon f = if f xs then xs else ys
    where
    xs = False : epsilon (f . (False:))
    ys = True  : epsilon (f . (True:))

-- Falls ‘f‘ auf jeder Bitfolge False ist, ist ‘exists f‘ gleich ‘Nothing‘.
```

```haskell
-- Ansonsten ist ‘exists f‘ gleich ‘Just xs‘, wobei ‘xs‘ eine Bitfolge ist,
-- auf der ‘f‘ True ist.
exists :: ([Bool] -> Bool) -> Maybe [Bool]
exists f = if f x then Just x else Nothing
    where x = epsilon f
```

In Aktion sieht das Programm zum Beispiel so aus:

```haskell
Prelude> exists $ \xs -> False
Nothing
Prelude> exists $ \xs -> True
Just [False,False,False,False,...]
Prelude> exists $ \xs -> xs !! 1 && xs !! 2
Just [False,True,True,False,...]
```

Aufgabe 43. *Ein eigenes assoziatives Datenfeld*

Ein assoziatives Datenfeld oder schlicht ‘Map‘ könntest du schon kennen. Es erlaubt innerhalb einer Datenstruktur Beziehungen zwischen einem Wert vom Typ `k` (dem Key) und einem anderem Wert vom Typ `v` (dem Value) zu speichern.

Definiere dir deinen eigenes `Map k v` als Binären Suchbaum. Jede `Fork` enthält einen *Key* (Typ `k`) und ein *Value* (Typ `v`). Im linken Kindbaum befinden sich alle Key-Value-Paare, für die gilt $key < aktuellerKey$. Im rechten Kindbaum gilt umgekehrt: $key > aktuellerKey$. Auf Basis dieser Eigenschaften kannst du die folgende Programmierschnittstelle für das `Map` implementieren.

```haskell
-- Unser Map-Typ als Binärer Baum.
data Map k v = Fork k v (Map k v) (Map k v)
             | Nil deriving (Show)

-- Ein konstantes Map ohne Inhalte
empty :: Map k v
empty = Nil

-- Fügt eine Beziehung zu einem Map hinzu
insert :: Ord k => k -> v -> Map k v -> Map k v

-- Entfernt eine Beziehung aus dem Map
delete :: Ord k => k -> Map k v -> Map k v

-- Schaut ein Element auf Basis eines Schlüssels nach
lookup :: Ord k => k -> Map k v -> Maybe v

-- Nimmt eine Liste von Tupeln und erstellt ein Map mit diesen als Relationen
fromList :: Ord k => [(k, v)] -> Map k v
```

Implementiere nun diese Schnittstelle! Dann überlege dir, wie man `Map`s am Besten vergleicht. Danach implementiere `instance Eq (Map k v)`. Du musst `import Prelude hiding (lookup)` am Anfang deiner Datei hinzufügen, damit du keine Namenskonflikte bekommst.

Bonusbinärpunkt: Mache dich schlau, wie man eigene Operatoren in Haskell definiert. Dann definiere den Operator `!` als alias für `lookup`.