

Übungsblatt zu Haskell

Learn You a Haskell for Great Good!

1 Aufwärmübungen in GHCi

Aufgabe 1. Verschachtelte Tupel

Benutze die vordefinierten Funktionen `fst :: (a, b) -> a` und `snd :: (a, b) -> b`, um das Textzeichen aus `(1, ('a', "foo"))` zu extrahieren.

Aufgabe 2. Medianbestimmung

Sei `xs` eine unsortierte Liste von Zahlen, z. B. `let xs = [3, 7, -10, 277, 89, 13, 22, -100, 1]`.
Schreibe einen Ausdruck, der den Median (das mittlere Element in einer Sortierung der Liste) von `xs` berechnet. Verwende dazu `length`, `div` und `!!`.

Aufgabe 3. Der Smiley-Operator erster Ordnung

Was könnte der Ausdruck `(.) . (.)` bewirken? Finde es heraus mit Hilfe von GHCi!

2 Spiel und Spaß mit Listenfunktionen

Aufgabe 4. Groß- und Kleinschreibung

- a) Verwende `map`, um einen String in eine Liste von Booleans zu verwandeln, die angeben, ob das entsprechende Zeichen im String ein Groß- oder Kleinbuchstabe war. Beispielsweise soll bei `"aBCde"` das Ergebnis `[True, False, False, True, True]` sein.

Hinweis. Verwende `isLower :: Char -> Bool` aus `Data.Char`.

- b) Berechne die Anzahl der Kleinbuchstaben in einem gegebenen String.

Aufgabe 5. Typfehler

Erkläre den Typfehler, der bei folgendem Ausdruck entsteht: `\x -> x x`

3 Funktionsdefinitionen

Aufgabe 6. Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Folge 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ist bekanntermaßen rekursiv definiert durch:

*Die nullte Fibonacci-Zahl ist null, die erste Fibonacci-Zahl ist eins,
jede weitere Fibonacci-Zahl ist die Summe ihrer Vorgänger.*

- Verwende diese Definition direkt, um eine Haskell-Funktion `fib :: Int -> Int` zu schreiben, die die n -te Fibonacci-Zahl berechnet.
- Berechne `fib 35`. Was ist das Problem?
- Implementiere `fibs :: [Int]`, eine unendliche Liste aller Fibonacci-Zahlen. Lass dir mit `take 100 fibs` die ersten hundert Folgenglieder in GHCi ausgeben.

Hinweis. Du bekommst massig Bonuspunkte, wenn du `zipWith` verwendest.

Aufgabe 7. Die Collatz-Vermutung

- Beginne mit irgendeiner natürlichen Zahl $n > 0$.
- Ist n gerade, so nimm als Nächstes $\frac{n}{2}$,
- Ist n ungerade, so nimm als Nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole die Vorgehensweise mit der erhaltenen Zahl.

Zum Beispiel erhält man für $n = 19$ die Folge

19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

- Schreibe eine Funktion `collNext :: Int -> Int`, welche Collatz-Iteration durchführt.
- Implementiere die Funktion `collSeq :: Int -> [Int]`, die die Folge der Collatz-Iterierten berechnet: `collSeq 10 = [10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...]`

Die bisher ungelöste Collatz-Vermutung besagt, dass man ausgehend von jeder beliebigen Zahl n irgendwann bei 1 landet.

- Schreibe die Funktion `collTest :: Int -> Bool`, welche die Collatz-Vermutung für eine Eingabe n testet. Falls die Collatz-Vermutung für n falsch sein sollte, so muss die Funktion nicht terminieren.
- Überprüfe die Collatz-Vermutung für alle natürlichen Zahlen kleiner als eine Million.

Aufgabe 8. Die Prelude

Informiere dich, was folgende Funktionen aus der Standardbibliothek tun, und implementiere so viele wie du willst neu:

`head`, `tail`, `init`, `last`, `length`, `reverse`, `(++)`, `map`, `filter`, `intersperse`, `concat`, `zipWith`, `repeat`, `and`, `takeWhile`, `dropWhile`, `maximum`

Aufgabe 9. Pointless/pointfree programming

Vereinfache folgende Funktionsdefinitionen:

```
multMany a xs = map (\x -> a*x) xs
filterMap f g xs = filter f (map g xs)
```

Aufgabe 10. Kettenbrüche

Jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ kann als *unendlicher Kettenbruch*

$$r = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \ddots}}}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ geschrieben werden. Überlege dir einen Algorithmus, der die unendliche Folge der b_i 's berechnet und implementiere ihn in Haskell. Überprüfe deinen Algorithmus anhand der Kettenbruchentwicklung von π (in Haskell: `pi`).

Aufgabe 11. Run-Length-Encoding

Zur effizienten Speicherung von Daten mit vielen Zeichenwiederholungen bietet es sich an, nicht jedes einzelne Zeichen, sondern Zeichen mit der jeweiligen Anzahl Wiederholungen zu speichern:

```
Prelude> encode ['a', 'a', 'a', 'a', 'b', 'c', 'c', 'a', 'a', 'd', 'e', 'e', 'e', 'e']
[(4, 'a'), (1, 'b'), (2, 'c'), (2, 'a'), (1, 'd'), (4, 'e')]
```

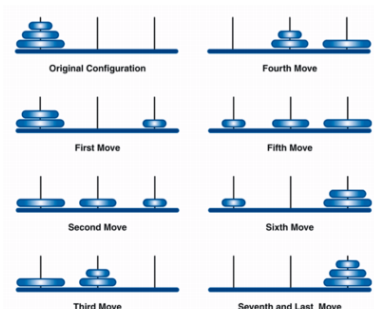
Implementiere die Funktion `encode :: String -> [(Int, Char)]` und die Umkehrfunktion `decode :: [(Int, Char)] -> String!`

Aufgabe 12. Longest subsequence

Schreibe eine Funktion `longestSubsequence :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`. Diese soll die längste zusammenhängende Unterliste in einer Liste berechnen, für die das übergebene Prädikat vom Typ `a -> Bool` den Wert `True` liefert. Wenn beispielsweise `xs :: [Date]` die Liste der letzten 365 Tage ist, und `p :: Date -> Bool` angibt, ob ein gewisser Benutzer an einem gegebenen Tag auf Github aktiv war, so berechnet `longestSubsequence xs p` die längste Strähne auf Github.

Aufgabe 13. Türme von Hanoi

Die Aufgabe bei Hanoi ist es, einen Turm von Scheiben von einem Steckplatz zu einem anderen zu transportieren. Dabei darf man nur je eine Scheibe einzeln bewegen und es darf niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. Man hat einen Steckplatz als Zwischenlager zur Verfügung. Implementiere eine Funktion `toh :: Int -> [(Int, Int)]`, welche die Hanoi-Züge (Bewegungen von einzelnen) berechnet, mit denen man einen Turm einer gewissen Größe von Steckplatz 1 zu Steckplatz 3 mit Steckplatz 2 als Zwischenlager bewegen kann.



```
Prelude> toh 3
[(1,3), (1,2), (3,2), (1,3), (2,1), (2,3), (1,3)]
```

Tipp. Definiere eine Hilfsfunktion `moveTower :: Int -> (Int, Int, Int) -> [(Int, Int)]`, sodass `moveTower n (x, y, z)` die nötigen Schritte ausgibt, um n Scheiben von x nach y unter Verwendung von z als Zwischenlager zu bewegen.

Aufgabe 14. Origami

Implementiere eine Funktion `maximum' :: [Int] -> Int`, die die größte Zahl in einer Liste zurückliefert oder null, falls die Liste leer ist oder alle Zahlen negativ sind. Verwende dazu `foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b`.

4 Eigene Datentypen

Aufgabe 15. Binäre Bäume

Im Folgenden verwenden wir folgende Definition für binäre Bäume, deren Verzweigungsknoten mit Werten vom Typ `Int` dekoriert sind.

```
data Tree = Nil | Fork Int Tree Tree
    deriving (Show)
```

- Schreibe eine Funktion, die die Gesamtzahl Blätter eines Baums berechnet: `numberOfLeaves :: Tree -> Int`
- Schreibe eine Funktion, die die Höchsttiefe eines Baums berechnet.
- Schreibe eine Funktion, die die Int-Werte der Verzweigungsknoten in einer Reihenfolge deiner Wahl als Liste zurückgibt.

Aufgabe 16. Binäre Bäume bilden einen Funktor

- Verallgemeinere die vorherige Aufgaben auf Bäume, die Werte von einem beliebigen Typ `a` statt `Int` tragen. Vervollständige dazu zunächst folgende Definition:

```
data Tree a = Nil | ...
    deriving (Show)
```

- Implementiere eine Funktion `tmap :: (a -> b) -> Tree a -> Tree b`.

Aufgabe 17. Unendliche Bäume

- Schreibe eine Funktion `cutOff :: Int -> Tree a -> Tree a`, die eine Maximaltiefe und einen Baum als Argumente nimmt und einen neuen Baum zurückgibt, der sich aus dem gegebenen durch Abschneidung bei der gegebenen Maximaltiefe ergibt.
- Definiere eine Funktion, die eine unendliche Liste von Werten nimmt und einen Baum zurückgibt, auf dessen Verzweigungsknoten die Elemente der Liste sitzen. Suche dir selbst aus, in welcher Reihenfolge die Listenelemente auf dem Baum platziert werden sollen.

Aufgabe 18. Der Stern-Brocot-Baum (für Fans von Kettenbrüchen)

Informiere dich auf Wikipedia über den Stern-Brocot-Baum und implementiere ein Haskell-Programm, dass diesen unendlichen Baum berechnet. Hole dir gegebenenfalls einen (stark spoilernden) Tipp ab.

Aufgabe 19. Termbäume

- Implementiere einen Datentyp für Funktionsterme. Zum Beispiel soll

$$(x \cdot x + 3) - x$$

so repräsentiert werden: `Sub (Add (Mul Var Var) (Lit 3)) Var`.

- Schreibe eine Funktion `eval :: Exp -> Double -> Double`, die in einem gegebenen Term für die Variable `x` einen konkreten Wert einsetzt.
- Schreibe eine Funktion `diff :: Exp -> Exp`, die einen gegebenen Funktionsterm ableitet. Zum Beispiel soll `diff (Mul Var Var)` im Wesentlichen äquivalent sein zu `Mul (Lit 2) Var`.

Aufgabe 20. Isomorphe Typen

Manche Typen lassen sich verlustfrei ineinander umwandeln, zum Beispiel die folgenden beiden:

```
data Bool    = False | True  -- schon vordefiniert
data Aussage = Falsch | Wahr
```

Man spricht in einem solchen Fall von *zueinander isomorphen Typen*. Die Umwandlungsfunktionen heißen *Isomorphismen* und können in diesem Fall wie folgt definiert werden:

```
iso :: Bool -> Aussage
iso False = Falsch
iso True  = Wahr
```

```
osi :: Aussage -> Bool
osi Falsch = False
osi Wahr   = True
```

Das charakteristische an diesen beiden Funktionen ist, dass `osi . iso == id` und `iso . osi == id`.

Folgende Typen sind jeweils zueinander isomorph. Implementiere auf analoge Weise Funktionen `iso` und `osi`, die das bezeugen!

- a) `(a, b)` versus `(b, a)`
- b) `((a, b), c)` versus `(a, (b, c))`
- c) `(a, Either b c)` versus `Either (a, b) (a, c)`
- d) `a -> (b, c)` versus `(a -> b, a -> c)`
- e) `(a, b) -> c` versus `(a -> b -> c)`

5 Typklassen

Aufgabe 21. Eigene Show-Instanzen

Für Debugging-Zwecke oder auch zum Datenaustausch ist die Show-Klasse nützlich, deren Definition in etwa die folgende ist:

```
class Show a where
  show :: a -> String
```

Bei der Deklaration eines neuen Datentyps hat man die Möglichkeit, mit einer `deriving`-Klausel den Compiler anzuweisen, automatisch eine geeignete Show-Instanz zu generieren:

```
data Tree a = Nil | Fork a (Tree a) (Tree a)
  deriving (Show)
```

In dieser Aufgabe aber sollst du den dafür nötigen Boilerplate-Code von Hand schreiben. Such dir einen Datentyp deiner Wahl aus und schreibe eine individuelle Show-Instanz für ihn.

Aufgabe 22. Die Monoid-Typklasse

Das Modul `Data.Monoid` definiert die Monoid-Typklasse:

```
class Monoid a where
  mempty  :: a
  mappend :: a -> a -> a
  mconcat :: [a] -> a
```

Ihr gehören solche Typen an, die eine sog. *Monoidstruktur* tragen. (Wenn du diesen Begriff nicht kennst, dann frag kurz nach!) Das neutrale Element soll durch `mempty` angegeben werden, die Monoidoperation durch `mappend`. Die Funktion `mconcat` soll gleich mehrere Elemente miteinander verknüpfen.¹

- a) Gebe einer Nachimplementierung des Listen-Datentyps, etwa `data List a = Nil | Cons a (List a)` eine Monoid-Instanz. Vergiss nicht, zu Beginn deines Programmtexts mit `import Data.Monoid` die Definition der Monoid-Klasse zu laden.

- b) Implementiere folgende Funktion:

```
cata :: (Monoid m) => (a -> m) -> ([a] -> m)
```

Aufgabe 23. Sortierung nach mehreren Kriterien

Oft steht man vor folgendem Problem: Eine Liste von Dingen soll nach mehreren Kriterien sortiert werden. Etwa zunächst nach Nachname, unter gleichen Nachnamen aber nach Vorname und unter gleichem Namen nach Geburtsdatum. Die in Haskell idiomatische Herangehensweise an dieses Problem verwendet ... Monoide!

- a) Schlage den `Ordering`-Typ nach.

- b) Reimplementiere die Funktion

```
comparing :: (Ord a) => (b -> a) -> b -> b -> Ordering
```

aus dem Modul `Data.Ord`. Sie kann zum Beispiel so verwendet werden:

```
import Data.List
```

```
data Person = MkPerson
  { lastName  :: String
  , givenName :: String
  , birthday  :: String
  }
deriving (Show)
```

```
sortPersons :: [Person] -> [Person]
sortPersons = sortBy (comparing lastName)
```

```
-- sortBy hat den Typ (a -> a -> Ordering) -> [a] -> [a].
```

- c) Trägt ein Typ `a` eine Monoidstruktur, so auch der Typ `e -> a` der Funktionen von `e` nach `a`. Bestätige das, indem du folgenden Code vervollständigst:

```
instance (Monoid a) => Monoid (e -> a) where
  -- ...
```

Da diese Instanz schon in `Data.Monoid` vordefiniert ist, musst du für diese Teilaufgabe den Import von `Data.Monoid` entfernen und die Monoid-Typklasse selbst definieren.

- d) Was macht folgender Code? Wieso tut er das? Informiere dich dazu über die Monoid-Instanz von `Ordering` und erinnere dich an die Monoid-Instanz von Funktionstypen.

```
sortBy $ mconcat
  [ comparing lastName
  , comparing firstName
```

¹Die Funktionen `mappend` und `mconcat` lassen sich gegenseitig ausdrücken. Fällt dir ein Grund ein, wieso trotzdem beide Funktionen Teil der Klasse sind? Hätte man nicht auch einfach `mconcat` außerhalb der Klasse definieren können?

```
, comparing birthday
]
```

Aufgabe 24. Endliche Typen

Manche Typen fassen nur endlich viele Werte, zum Beispiel `Bool` und `Either Bool Bool`. Für solche Typen ist es gelegentlich praktisch, eine vollständige Liste ihrer Werte zu kennen. Aus diesem Grund führen wir folgende Klasse ein:

```
class Finite a where
  elems :: [a]
```

a) Implementiere eine Finite-Instanz für `Bool`.

b) Implementiere folgende allgemeinen Instanzen:

```
instance (Finite a, Finite b) => Finite (a,b)      where ...
instance (Finite a, Finite b) => Finite (Maybe a)  where ...
instance (Finite a, Finite b) => Finite (Either a b) where ...
```

c) Wenn du Lust auf eine Herausforderung hast, dann implementiere auch folgende Instanz. Sie ist für die weiteren Teilaufgaben aber nicht nötig.

```
instance (Eq a, Finite a, Finite b) => Finite (a -> b) where ...
```

d) Implementiere eine Funktion `exhaustiveTest :: (Finite a) => (a -> Bool) -> Bool`.

e) Die Gleichheit zweier Funktionen (vom selben Typ) ist im Allgemeinen nicht entscheidbar, denn zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie auf allen Eingabewerten übereinstimmen. Um das zu überprüfen, muss man im Allgemeinen unendlich viele Fälle in Augenschein nehmen. Wenn der Quelltyp aber endlich ist, geht es doch. Implementiere also:

```
instance (Finite a, Eq b) => Eq (a -> b) where ...
```

Aufgabe 25. Abzählbare Typen

Manche Typen sind zwar nicht endlich, aber immer noch *abzählbar*: Das heißt, dass es eine unendliche Liste gibt, in der alle Werte des Typs vorkommen. Zum Beispiel ist der Typ `Integer` abzählbar, denn in der Liste `[0, 1, -1, 2, -2, ...]` kommen alle ganzen Zahlen vor.

a) Definiere nach dem Vorbild der Finite-Typklasse aus der vorherigen Aufgabe eine Countable-Typklasse.

b) Implementiere eine Countable-Instanz von `Integer`.

c) Vervollständige folgenden Code:

```
instance (Countable a, Countable b) => Countable (a,b) where ...
```

d) Vervollständige folgenden Code (schwierig!):

```
instance (Countable a) => Countable [a] where ...
```

Dabei soll `[a]` für den Typ der endlichen Listen mit Werten in `a` stehen – obwohl der Typ `[a]` ja auch unendliche Listen enthält. Solche *sozialen Verträge* sind in Haskell leider gelegentlich nötig – man benötigt abhängige Typen und andere Entwicklungen, um sie vollständig zu vermeiden. Sauberer wäre an dieser Stelle, einen neuen Datentyp `FiniteList a` zu definieren, der isomorph zum gewöhnlichen Listentyp ist, aber den sozialen Vertrag an zentraler Stelle kundtut.

Aufgabe 26. Überabzählbare Typen

Diese Aufgabe richtet sich nur an Leute, die das sog. *Cantorsche Diagonalargument* und die *Russellsche Antinomie* kennen. Sorry! Bei Gelegenheit suchen wir eine einführende Referenz.

Wir definieren ein Typalias für Mengen:

```
type Set a = a -> Bool
```

```
-- Ist 'f :: Set a', so soll 'f x == True' bedeuten, dass 'x' in
-- der Menge 'f' liegt.
```

- a) Setze in diesem Modell die leere Menge, die Universalmenge (welche alle Werte überhaupt enthält) und die Menge, die nur ein bestimmtes Element enthält, um. Welche Voraussetzung an den Typ `a` musst du im letzten Teil stellen?

- b) Implementiere folgende Funktionen:

```
member      :: a      -> Set a -> Bool
union       :: Set a -> Set a -> Set a
intersection :: Set a -> Set a -> Set a
complement  :: Set a -> Set a
```

- c) Setze die Russellsche Antinomie in Haskell um. Definiere also eine Menge all derjenigen Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Wie äußert sich das paradoxe Verhalten in Haskell?

- d) Setze das Cantorsche Diagonalargument in Haskell um. Definiere also eine Funktion

```
cantor :: (a -> Set a) -> Set a
```

die folgendes leistet: Für jede Funktion `f :: a -> Set a` soll `cantor f` eine Menge sein, die nicht im Bild (in der Wertemenge) von `f` enthalten ist.

- e) Bonusfrage zum Grübeln: Die vorherige Teilaufgabe zeigt, dass es in Haskell überabzählbare Typen gibt. Andererseits ist die Menge der Haskell-Programme abzählbar. Wie passt das zusammen?

6 Ideen für größere Projekte

Aufgabe 27. Ein Zahlenrätsel

Wie muss man die Zahlen 1, 3, 4 und 6 mit Klammern und den Operatoren `+` `*` `-` `/` ergänzen, damit das Ergebnis 24 ist? Die Zahlen dürfen und müssen dabei alle genau einmal verwendet werden. Sie können aber in einer beliebigen Reihenfolge auftreten. Denkbar wäre also etwa die Lösung `3+((1-4)/6)`, aber dieser Term hat den Wert 2,5.

Schreibe ein Haskell-Programm, das für dich die Lösung findet! Ein mögliches Vorgehen ist folgendes.

- a) Definiere einen Datentyp `Exp` von Termen zu definieren. Das Beispiel könnte dabei durch `Add (Lit 3) (Div (Sub (Lit 1) (Lit 4)) (Lit 6))` ausgedrückt werden.
- b) Schreibe eine Funktion `eval :: (Fractional a) => Exp a -> a`.
- c) Schreibe eine Funktion `groups :: [a] -> [[a],[a]]`, die folgendes leistet: Gegeben eine Liste, berechnet alle Möglichkeiten, diese Liste in zwei Teile zu zerlegen: einen vorderen und einen hinteren. Zum Beispiel:


```
> groups "abc"
[("abc", ""), ("ab", "c"), ("a", "bc"), ("", "abc")]
```

- d) Schreibe eine Funktion `arb :: [a] -> [Exp a]`, die folgendes leistet: Gegeben eine Liste `xs` von (zum Beispiel) Zahlen, gibt eine Liste von allen Termbäumen zurück, an deren Blättern (in genau der gegebenen Reihenfolge) die Zahlen aus `xs` stehen. Alle Zahlen müssen verwendet werden, und zwar jeweils genau einmal.
- e) Importiere oder reimplementiere die Funktion `permutations :: [a] -> [[a]]` aus `Data.List`.
- f) Füge alle Puzzleteile zusammen.

7 Die IO-Monade und andere Monaden

Aufgabe 28. IO-Stringmanipulation

Schreibe ein Programm, das eine Zeichenkette einliest und diese rückwärts wieder ausgibt. Die Funktion `reverse :: [a] -> [a]` könnte hilfreich sein, wenn du dir sie nicht selbst schreiben willst.

Aufgabe 29. Überprüfung von Nutzereingaben

Schreibe ein Programm, das den Benutzer solange nach einer Zahl fragt, bis dieser eine Zahl angibt, die durch 3 teilbar ist. Erinnere dich an die Typklasse `Read`!

Aufgabe 30. Monadische Schleifen

- a) Schreibe eine Funktion, die eine gegebene IO-Aktion (oder eine andere Art Aktion) eine gewisse Anzahl von Malen wiederholt. Die Typsignatur sollte also `replicateM :: Int -> [IO a] -> IO [a]` (oder allgemeiner `replicateM :: (Monad m) => Int -> [m a] -> m` – erinnere dich, dass `IO` eine Instanz von `Monad` ist!) sein.
- b) Schreibe eine Funktion `forM :: (Monad m) => [a] -> (a -> m b) -> m [b]` die das tut, was ihr Name und ihre Typsignatur versprechen.
- c) Schreibe eine Funktion, die es erlaubt, eine IO-Aktion (oder eine andere Art Aktion) unendlich oft zu wiederholen. Die Typsignatur sollte `forever :: (Monad m) => m a -> m b` sein. Erinnere dich, dass `IO` eine Instanz von `Monad` ist!

Aufgabe 31. Zahlenratespiel

Schreibe ein Programm, das versucht eine Zahl zwischen 0 und 100 zu erraten, die sich die Nutzerin oder der Nutzer ausgedacht hat. Der Nutzende soll jeweils bei jedem Rateversuch angeben, ob die geratene Zahl kleiner oder größer als die tatsächliche ist. Du kannst das Problem mit einer binären Suche lösen.