Chapitre 28

Déterminants

On fixe un corps K, deux K-espaces vectoriels E et F, et un entier $n > 0$.

1 Groupes symétriques

Dans ce paragraphe, on se fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Groupe symétrique)

1. Le *groupe symétrique* $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est le groupe des *permutations* de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, *i.e.* le groupe des bijections
$$\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$
muni de la composition des applications. C'est un groupe à $n!$ éléments.

2. Pour $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, la *transposition* $(i\ j) \in \mathcal{S}_n$ est la permutation τ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ définie pour $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ par
$$\tau(x) = x \quad \text{si} \quad x \neq i, j, \quad \tau(i) = j, \quad \tau(j) = i.$$

3. Un *p-cycle* $(p \leqslant n)$ est un élément σ de $\mathcal{S}_n$ pour lequel il existe $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ distincts deux à deux tels que
$$\sigma(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin \{i_1, \ldots, i_p\}, \quad \sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \text{si} \quad k < p, \quad \sigma(i_p) = i_1.$$
On le note $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

4. Le *support* d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}n$ est l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) \neq i\}$.

Remarques.

1. C'est bien un groupe. En effet, on sait que la composition des applications est associative. l'élément neutre est l'application identité et le symétrique d'une bijection

$$f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

est son application réciproque f^{-1}.

2. On omettra un général le symbole $\circ$ de la composition. On notera de manière multiplicative ce groupe, *i.e.* pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, on aura

$$\sigma\sigma' \overset{\text{déf.}}{=} \sigma \circ \sigma'.$$

On parlera alors du produit de σ et σ', en sous-entendant que c'est la composition des permutations dont on parle !

3. Ce groupe est non commutatif si $n \geqslant 3$. En effet, les deux transpositions ne commutent pas puisque

$$(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2) \quad \text{et} \quad (1,3)(1,2) = (1\ 2\ 3).$$

Vérifiez l'image de chaque élément de $\{1, 2, 3\}$ pour démontrer les deux égalités ! Par exemple

$$(1\ 2)(1\ 3)(3) = (1\ 2)(1) = 2 \quad \text{et} \quad (1\ 3\ 2)(3) = 2.$$

Regardez bien les notations. Le (3) signifie qu'on applique la permutation à l'élément 3.

4. On considère souvent $\mathcal{S}_n$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{S}_{n+1}$ de la manière suivante : si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $\sigma(n+1) = n+1$, ce qui fait que σ est alors un élément de $\mathcal{S}_{n+1}$. Ce procédé est injectif, *i.e.* deux éléments distincts de $\mathcal{S}_n$ sont envoyé sur deux éléments distincts de $\mathcal{S}_{n+1}$. Par ce procédé, $\mathcal{S}_n$ est le sous-ensemble de $\mathcal{S}_{n+1}$ des permutations qui fixent $n+1$. Plus rigoureusement, on a en fait une fonction $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n+1}$ injective.

Proposition 1.2 (Décomposition d'un cycle en produit de transpositions)

Soient $a_1, \dots a_p \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts ($2 \leqslant p \leqslant n$). Alors

$$(a_1\ \cdots\ a_p) = (a_1\ a_2) \cdots (a_{p-1} a_p).$$

Lemme 1.3

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\sigma(\text{supp}(\sigma)) = \text{supp}(\sigma)$.

Proposition 1.4 (Permutations à support disjoint)

Deux permutations de $\mathcal{S}_n$ à supports disjoints commutent.

Remarque.

La réciproque est fausse : deux permutations peuvent commuter même si leurs supports ne sont pas disjoint. Par exemple, une permutation commute avec elle-même !

Proposition 1.5

1. Une transposition τ est une involution, *i.e.*

$$\tau^2 = \text{id},$$

ce qui signifie que $\tau^{-1} = \tau$.

2. Le symétrique d'un p-cycle $(i_1 \ \cdots \ i_p)$ est

$$(i_1 \ \cdots \ i_p)^{-1} = (i_p \ i_{p-1} \ \cdots \ i_1) = (i_1 \ \cdots \ i_p)^{p-1},$$

ce qui signifie que $(i_1 \ \cdots \ i_p)^p = \mathrm{id}$.

Théorème 1.6

Toute permutation est un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

Méthode 1.7

Pour décomposer une permutation σ en produit de cycles à supports deux à deux disjints, on regarde la suite finie $(1, \sigma(1), \ldots, \sigma^i(1))$, avec $\sigma^{i+1}(1) = 1$. Cela donne un premier cycle. Puis on choisit le plus petit entier qui n'est pas dans cette suite, et on recommence. Par exemple avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On part de 1, dont l'image est 3, dont l'image est 1 : cala nous donne le cycme (1 3). Puis on part de 2, dont l'image est 5, dont l'image est 4, dont l'image est 2 : cela donne le cycle (2 5 4), et finalement $\sigma = (1\ 3)(2\ 5\ 4) = (2\ 5\ 4)(1\ 3)$.

Proposition 1.8

Toute permutation est un produit de transposition.

Méthode 1.9

Voici sur l'exemple $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ une méthode générale pour décomposer une permutation σ en transpositions. On part du plus petit entier dans le support. Ici, c'est 1. Son image est 3, et son image est 1 : cela donne la transposition (1 3). L'entier suivant qui est dans le support est 2. Son image est 5, dont l'image est 7, dont l'image est 6, dont l'image est 2 : cela donne le produit (2 5)(5 7)(7 6). Et finalement $\gamma = (1\ 3)(2\ 5)(5\ 7)(7\ 6)$. Vérifiez !

1.2 Signature

Définition 1.10 (Signature)

La signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)},$$

où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ, *i.e.* le nombre de couples (i, j) tels que

$$1 \leqslant i < j \leqslant n \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Une permutation est *paire* si sa signature est 1, *impaire* sinon.

Proposition 1.11

Pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Proposition 1.12

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Corollaire 1.13

La signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$ ($p \geqslant 2$).

1.3 Groupe alterné

Définition 1.14 (Groupe alterné)

Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ des permutations paires, *i.e.* le noyau de la signature.

Proposition 1.15

Soit $\tau \in \mathcal{S}_n$ une permutation impaire (par exemple une transposition). Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \{\text{permutations impaires}\} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\tau \end{array}$$

est une bijection.

Corollaire 1.16

$\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

2 Applications multilinéaires

On fixe dans ce paragraphe un corps K, deux K-espaces vectoriels E et F, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.1 (Applications multilinéaires)

1. Une *application n-linéaire* de E dans F est une application

$$f : E^n \longrightarrow F$$

telle que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in E$, tout $i = 1, \ldots, n$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

soit linéaire, *i.e.* pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in K$,

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda x + \mu y, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \lambda f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) + \mu f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

2. Une *forme n-linéaire* sur E est une application n-linéaire de E dans K.

Méthode 2.2

Il faut remarquer que si f est n-linéaire, le calcul de $f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ se passe comme un développement d'un produit (et de même en remplaçant $x_k + y_k$ par une somme quelconque). Par exemple, si f est bilinéaire, $x, y \in E$ et $a_{ij} \in K$ (pour $i, j = 1, 2$, on a

$$f(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y) = a_{11_{a_{12}}} f(x, x) + a_{11}a_{22} f(x, y) + a_{21}a_{12} f(y, x) + a_{21}a_{22} f(y, y).$$

Comparez avec le produit $(a_{11}x + a_{21}y) \times (a_{12}x + a_{22}y)$ si tous ces variables sont des réels.

On peut faire de même avec une application trilinéaire et trois vecteurs. Le développement donne 3^3 termes.

Définition 2.3 (Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques, alternées)

Soit f une application n-linéaire de E dans F. Alors

1. f est *symétrique* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$, tous $i, k = 1, \dots, n$, on a

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

ou autrement dit, si pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a

$$f(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}) = f(a_1, \dots, a_n).$$

2. f est *antisymétrique* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$, on a pour $i \neq k$

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

ou autrement dit, si pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a

$$f(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}) = -f(a_1, \dots, a_n).$$

3. f est *alternée* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$, on a pour $i \neq k$,

$$a_i = a_k \Longrightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Remarque.

Cette définition s'applique bien entendu également aux formes n-linéaires, cas particulier des application n-linéaires.

Proposition 2.4

Soit f une application n-linéaire de E vers F, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $a_1, \dots, a_n \in E$. Alors

$$f(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \begin{cases} \varepsilon(\sigma) f(a_1, \dots, a_n) \text{ si } f \text{ est antisymétrique,} \\ \\ f(a_1, \dots, a_n) \text{ si } f \text{ est symétrique.} \end{cases}$$

Proposition 2.5

Une application n-linéaire alternée est antisymétrique, et si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, la réciproque est vraie.

Proposition 2.6

Soit f une forme p-linéaire alternée sur E, et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

1. Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée, alors

$$f(u_1, \dots, u_p) = 0.$$

2. $f(u_1, \dots, u_p)$ reste inchangée si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

3 Déterminants

Dans ce chapitre, on suppose que $\dim(E) = n$. Cette hypothèse est **fondamentale** pour ce qui suit.

Théorème 3.1 (Déterminant dans une base de n vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Il existe une unique forme n-linéaire alternée notée $\text{dét}_{\mathcal{B}}$ sur E telle que

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

2. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\text{dét}_{\mathcal{B}}$.

3. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E et $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$. Alors

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Remarque.

Dans chaque produit $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$, tous les indices apparaissent une et une seule fois, pour l'indice ligne, et pour l'indice colonne.

Proposition 3.2

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\text{dét}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) \text{dét}_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}\right) = 1$.

Théorème 3.3 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, on a

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right) = \text{dét}_{\mathcal{B}'}\left(f(\mathcal{B}')\right).$$

Ce scalaire, indépendant de toute base, est le *déterminant de f*, et on le note $\text{dét}(f)$.

2. Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$, et toute base $\mathcal{B}$ de E, on a

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\left(f(x_1), \ldots, f(x_n)\right) = \text{dét}(f)\, \text{dét}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Définition 3.4 (Déterminant d'un matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Le déterminant de A (noté $\text{dét}(A)$) est le déterminant dans la base canonique de K^n de ses vecteurs colonnes, *i.e.* si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,

$$\text{dét}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Remarque.

Il faut justifier cette égalité : on applique le théorème 3.1(3) car A est la matrice des composantes de ses colonnes dans la base canonique de K^n.

Notation : Le déterminant d'une matrice se note avec des barres verticales à la place des parenthèeses. Par exemple :

$$\text{dét}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 7 & -5\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 7 & -5\end{vmatrix}.$$

Proposition 3.5 (Déterminant de taille 2)

Soit $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Alors $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$.

Méthode 3.6 (Déterminant de taille 3 : règle de Sarrus)

ATTENTION : technique uniquement valable pour les déterminants de taille 3 !!

Voici une façon de retrouver le déterminant d'une matrice carrée de taille 3

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

On recopie les deux lignes premières lignes sous la matrice, pour obtenir

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

On a 3 "diagonales principales"

$$\begin{pmatrix}a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ & a_{12} & a_{13}\\ & & a_{23}\end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

On a aussi 3 "diagonales secondaires"

$$\begin{pmatrix} & & a_{13}\\ & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & & \end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}.$$

On soustrait alors cette deuxième somme à la première, pour obtenir le déterminant :

$$\Big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\Big) - \Big(a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}\Big).$$

On avait obtenu cela dans les exemples après le théorème 3.1.

Théorème 3.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$.

Théorème 3.8

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det(A),$$

i.e. le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(A).$$

Remarque.

Attention : si on considère la matrice A d'un endomorphime f relative à deux bases différentes au départ et à l'arrivée, alors $\det(A) \neq \det(f)$!

Méthode 3.9

Nous avons donc trois déterminants :

1. Le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace de dimension n (théorème 3.1).

2. Le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (théorème 3.3).

3. Le déterminant d'une matrice carrée (définition 3.4).

Ces trois déterminants sont liés par le théorème 3.8. En pratique, pour calculer un déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme, on passe par ce théorème pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Et pour cela, on utilisera les résultats du paragraphe 5.

4 Propriétés des déterminants

Dans ce paragraphe, on suppose toujours que $\dim(E) = n$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, sauf mention explicite du contraire.

Proposition 4.1

On a

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff \text{dét}\Big(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)\Big) \neq 0.$$

Proposition 4.2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. On a

1. $\text{dét}(f \circ g) = \text{dét}(g \circ f) = \text{dét}(f)\,\text{dét}(g)$ et $\text{dét}(AB) = \text{dét}(BA) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)$.

2. L'endomorphisme f est un isomorphisme si et seulement si $\text{dét}(f) \neq 0$ et alors

$$\text{dét}(f^{-1}) = \big(\text{dét}(f)\big)^{-1}.$$

De même, la matrice A est inversible si et seulement si $\text{dét}(A) \neq 0$ et alors

$$\text{dét}(A^{-1}) = \big(\text{dét}(A)\big)^{-1}.$$

3. Si $\lambda \in K$, on a

$$\text{dét}(\lambda f) = \lambda^n\,\text{dét}(f), \qquad \text{dét}(\lambda A) = \lambda^n\,\text{dét}(A).$$

Proposition 4.3

1. Le déterminant d'une matrice carrée ne change pas si à un colonne (resp. une ligne) on ajoute une combinaison linéaire des **autres**.

2. Le déterminant d'une matrice carrée est multiplié par -1 si on échange deux colonnes ou deux lignes.

3. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si deux colonnes ou deux lignes sont égales.

4. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si une colonne (resp. ligne) est combinaison linéaire des autres.

5. Si on multiplie une colonne ou une ligne par $\lambda \in K$, le déterminant est multiplié par λ.

Remarques.

1. Attention, on ne peut pas remplacer une ligne L_i par $\lambda L_i + \cdots$!
2. Le point 5 nous permet de factoriser une ligne ou une colonne par un scalaire non nul.

5 Développement suivant une ligne ou une colonne

Dans ce paragraphe on se concentre sur le calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée. Le théorème 3.8 permet alors de calculer le déterminant d'un endomorphisme et d'une famille de vecteurs.

ATTENTION : La plupart du temps, vous aurez à calculer des déterminants de matrices qui dépendent d'un ou de plusieurs paramètres, et on cherchera à savoir à quelle(s) condition(s) ce déterminant est nul. On cherchera donc absolument à obtenir une forme factorisée du déterminant. En particulier, pour un déterminant de taille 3, la règle de Sarrus ne servira que pour un détermiant numérique.

Proposition 5.1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(K),$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$, $a_{11} \in K$ et $\star$ désigne n'importe quel élément de K. Alors

$$\text{dét}(A) = a_{11}\,\text{dét}(A').$$

En particulier, si A est une matrice triangulaire (ou diagonale),

$$\text{dét}(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Définition 5.2 (Mineur, cofacteur)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Le *mineur* de a_{ij} est le déterminant Δ_{ij} de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

2. Le *cofacteur* de a_{ij} est $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Théorème 5.3 (Développement suivant une ligne/colonne)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Pour tout $j = 1, \ldots n$, on a

$$\text{dét}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} \quad \text{(Développement suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne).}$$

2. Pour tout $i = 1, \ldots n$, on a

$$\text{dét}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} \quad \text{(Développement suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne).}$$

6 Applications

6.1 Comatrice

Définition 6.1 (Comatrice)

La *comatrice* de A est sa matrice des cofacteurs, *i.e.* la matrice $\text{co}(A) = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$ avec

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Proposition 6.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors
$$A\,{}^t\mathrm{co}(A) = {}^t\mathrm{co}(A)A = \mathrm{dét}(A)I_n.$$
En particulier, si A est inversible, on a
$$A^{-1} = (\mathrm{dét}(A))^{-1}\,{}^t\mathrm{co}(A).$$

6.2 Formules de Cramer

Définition 6.3 (Système de Cramer)

Un *système de Cramer* est un système linéaire à n équations et n inconnues qui admet une et une seule solution, *i.e.* un système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, où $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $A \in GL_n(K)$.

Proposition 6.4

Soit $A \in GL_n(K)$ et S le système
$$AX = B,$$
(c'est un *système de Cramer*), où $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. L'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de ce système vérifie pour tout $j = 1, \ldots, n$
$$x_j = \frac{\mathrm{dét}(A_j)}{\mathrm{dét}(A)},$$
où A_j est la matrice obtenue en remplaçant dans A la $j^{\text{ème}}$ colonne par B.

Remarque.

Cette proposition ne sert quasiment jamais pour une résolution pratique, sauf pour $n = 2$ et peut-être $n = 3$, mais jamais au-delà car les calculs sont trop nombreux (calculs de $n+1$ déterminants de taille n). L'utilité est plus théorique, quand on veut par exemple étudier la continuité d'une solution par rapport aux coeffcients.

7 Compétences

1. Un déterminant n'existe que pour une matrice carrée.
2. Calcul effectif d'un déterminant. Cas de matrices avec des paramètres : on cherche une forme factorisée, par exemple en développant par rapport une ligne/colonne.
3. Connaître le lien déterminant d'une application linéaire/d'une matrice.
4. Lien déterminant/isomorphisme.
5. Déterminer une cns pour qu'une application linéaire donnée par une matrice qui dépend d'un paramètre soit un isomorphisme.
6. Calcul effectif du rang d'une matrice par manipulation sur les lignes et les colonnes. Discussion quand on arrive à une forme triangulaire.