

# Chapitre 24

## Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, on fixe un corps  $K$  (en général,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

### 1 Applications linéaires

#### 1.1 Applications linéaires

##### Définition 1.1 (Applications linéaires)

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Une *application linéaire* de  $E$  vers  $F$  est une application  $f : E \longrightarrow F$  telle que

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

##### Proposition 1.2

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f(0_E) = 0_F$ .

##### Remarque.

Ici aussi, il faut savoir qui sont ces "0".

##### Proposition 1.3 (Caractérisation des applications linéaires)

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Une application  $f : E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

ou encore si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

##### Définition 1.4

1. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications  $K$ -linéaires de  $E$  vers  $F$ .

2. Un *endomorphisme* de  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $E$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .
3. Une *forme linéaire* sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers son corps de base  $K$ . On note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ , appelé *dual* de  $E$ .

**Remarque.**

On a  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ ,  $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ .

**Proposition 1.5 (Image d'une combinaison linéaire)**

L'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la combinaison linéaire des images, *i.e.* si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des vecteurs de  $E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E^n$ , alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

**1.2 Combinaisons linéaires et composition d'applications linéaires****Proposition 1.6**

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel du  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(E, F)$ , *i.e.* les combinaisons linéaires d'applications linéaires sont des applications linéaires.

**Remarque.**

Cela prouve aussi que  $E^*$  et  $\mathcal{L}(E)$  sont des espaces vectoriels.

**Proposition 1.7 (Composition d'applications linéaires)**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ . Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

**Proposition 1.8**

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau.

**Remarques.**

1. Par contre,  $(E^E, +, \circ)$  (ensemble de toutes les fonctions de  $E$  vers  $E$ ) n'est pas un anneau, car la distributivité à gauche nécessite la linéarité des fonctions.
2. Ces propositions permettent de prouver qu'une application est linéaire "par combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires".

## 1.3 Isomorphismes, automorphismes

### Définition 1.9 (Isomorphisme, automorphisme)

1. Un *isomorphisme* de  $E$  vers  $F$  est une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  bijective.
2. Un *automorphisme* de  $E$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $E$ . On note  $GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

### Définition 1.10 (Espaces isomorphes)

Deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme  $f : E \longrightarrow F$ .

### Proposition 1.11

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire bijective. Alors son application réciproque  $f^{-1}$  est linéaire, *i.e.*

$$f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$$

### Proposition 1.12

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Alors  $GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$ , et de plus  $(GL(E), \circ)$  est un sous-groupe du groupe  $(S_E, \circ)$  des permutations de  $E$ .

## 2 Noyau et image

On fixe deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ .

### 2.1 Définitions

#### Définition 2.1 (Noyau, image)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Le *noyau* de  $f$  est  $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(0_F) \subset E$ .
2. L'*image* de  $f$  est  $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \subset F$ .

### Proposition 2.2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

1.  $0_E \in \text{Ker}(f)$ .
2.  $0_F \in \text{Im}(f)$ .

### Proposition 2.3

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

1.  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Remarque.**

On retrouve les techniques déjà vues pour déterminer des sous-espaces vectoriels ! Vérifiez que vous avez bien compris ce que l'on fait. Faut-il des équivalences ? etc...

**Théorème 2.4 (CNS d'injectivité et de surjectivité)**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\},$$

et

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im}(f) = F.$$

**Remarque.**

Ce théorème est très utile pour l'injectivité. Il suffit de déterminer le noyau pour savoir si  $f$  est injective !

**2.2 Quelques résultats sur les noyaux et les images****Proposition 2.5**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g|_{\text{Im}(f)}) = g(\text{Im}(f)).$$

**Proposition 2.6**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ , où  $f^2 = f \circ f$ .

**Proposition 2.7**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f^2 = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

**2.3 Antécédents par une application linéaire****Proposition 2.8**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Le noyau de la restriction  $f|_G : G \longrightarrow F$  de  $f$  à  $G$  est

$$\text{Ker}(f|_G) = \text{Ker}(f) \cap G.$$

**Proposition 2.9**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $y_0 \in \text{Im}(f)$ . Soit  $x_0 \in E$  un antécédent de  $y_0$  par  $f$ . Alors l'ensemble des antécédents de  $y_0$  par  $f$  est

$$x_0 + \text{Ker}(f) = \{x_0 + v \mid v \in \text{Ker}(f)\}$$

(ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ ), *i.e.*  $x \in E$  est un antécédent de  $y$  par  $f$  si et seulement si  $x - x_0$  est dans  $\text{Ker}(f)$ .

**Méthode 2.10**

Voici des exemples fréquents qui fournissent une technique générale.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y - z, 2x - z). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 2x - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 2x, y = x\} \\ &= \{(x, x, 2x), x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1, 1, 2). \end{aligned}$$

Montrons que  $\text{Im}(f)$  est  $\mathbb{R}^2$  tout entier. En effet, si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (a, b) \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a + x \\ z = b + 2x \end{cases}$$

qui admet une solution, donc  $(a, b) \in \text{Im}(f)$ . Cette fonction est donc surjective, non injective.

2. Soit  $E$  muni d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $F$  muni d'une base  $(f_1, f_2)$ , et

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 &\longmapsto (x + y - z)f_1 + (2x - z)f_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E, x + y - z = 2x - z = 0\} = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E, z = 2x, y = x\} \\ &= \{xe_1 + xe_2 + 2xe_3, x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(e_1 + e_2 + 2e_3). \end{aligned}$$

Montrons que  $\text{Im}(f)$  est  $F$  tout entier. En effet, si  $af_1 + bf_2 \in F$ , on a pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a + x \\ z = b + 2x \end{cases}$$

qui admet une solution, donc  $af_1 + bf_2 \in \text{Im}(f)$ . Cette fonction est donc surjective, non injective.

3. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y - z, 2x - z, x + y, z). \end{aligned}$$

Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(g) \iff x + y - z = 2x - z = x + y = z = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

donc

$$\text{Ker}(g) = \{(0, 0, 0)\}$$

et  $g$  est injective. Déterminons maintenant  $\text{Im}(g)$ . Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$g(x, y, z) = (a, b, c, d) \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + d = c\} = \{(a, b, c, c - a), a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\left((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\right).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $\mathbb{R}^4$ , et  $g$  n'est pas surjective.

4. Soit  $E$  muni d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $F$  muni d'une base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ , et

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow F \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 &\longmapsto (x + y - z)f_1 + (2x - z)f_2 + (x + y)f_3 + zf_4. \end{aligned}$$

Alors

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \text{Ker}(g) \iff x + y - z = 2x - z = x + y = z = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

donc

$$\text{Ker}(g) = \{0\}$$

et  $g$  est injective. Déterminons maintenant  $\text{Im}(g)$ . Soit  $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F$ . Pour  $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ , on a

$$g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F, a + d = c\} = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + (c - a)f_4, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(f_1 - f_4, f_2, f_3 + f_4)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $F$ , et  $f$  n'est pas surjective.

5. On peut refaire le dernier exemple plus rapidement. Soit  $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F$ . Pour  $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ , on a

$$g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F, a + d = c\} = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + (c - a)f_4, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(f_1 - f_4, f_2, f_3 + f_4)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $F$ , et  $f$  n'est pas surjective. Lorsque  $a = b = c = d = 0$ , le système précédent détermine le noyau, qui est donc  $\{0\}$ .

### 3 Projections, symétries

Dans ce paragraphe, on fixe un  $K$ -espace vectoriel  $E$ .

#### 3.1 Projections, projecteurs

##### Définition 3.1 (Projections, projecteurs)

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . La *projection* (ou le *projecteur*) sur  $A$  parallèlement à  $B$  est l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ a + b &\longmapsto a, \end{aligned}$$

où  $a \in A$  et  $b \in B$ .

**Remarque.**

Cette application est bien définie puisque  $E = A \oplus B$ , donc tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de  $A$  et de  $B$ .

**Proposition 3.2**

1. Soit  $p$  une projection. Alors  $p \in \mathcal{L}(E)$  et  $p \circ p = p$ .
2. Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f = f$ . Alors  $f$  est une projection.

**Remarque.**

$p \circ p = p$  signifie que pour tout  $x \in E$ ,  $p(p(x)) = p(x)$ . Faire une deuxième fois la projection ne change rien.

**Proposition 3.3**

Soit  $p$  une projection. Alors

1.  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$
2.  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .
3.  $\text{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\} = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ .

**Remarque.**

ATTENTION : si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ ,  $f$  n'est pas une projection en général ! De même, en général, pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \neq E$  et  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$ .

**Méthode 3.4 (Montrer qu'une application est une projection)**

On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour montrer que  $f$  est une projection, on montre que  $f \circ f = f$ . On détermine alors  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , ce qui donne les éléments caractéristiques de la projection.

## 3.2 Symétries

**Définition 3.5 (Symétries)**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . La symétrie par rapport à  $A$  et parallèlement à  $B$  est l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ a + b &\longmapsto a - b, \end{aligned}$$

où  $a \in A$  et  $b \in B$ .

**Remarque.**

Cette application est bien définie puisque  $E = A \oplus B$ , donc tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de  $A$  et de  $B$ .

**Proposition 3.6**

1. Soit  $s$  une symétrie. Alors  $s \in GL(E)$ , *i.e.*  $s$  est un automorphisme de  $E$ , et  $s$  est une involution de  $E$ , *i.e.*  $s \circ s = \text{id}_E$ .
2. Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f \circ f = \text{id}_E$ . Alors  $s$  est une symétrie.

**Proposition 3.7**

Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . Alors

1.  $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .
2.  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .

**Remarque.**

Rappelons que  $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = \{x \in E, s(x) = x\}$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \{x \in E, s(x) = -x\}$ .

**Proposition 3.8**

Soient  $p, s \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $s = 2p - \text{id}_E$ . Alors :

1.  $s$  est une symétrie si et seulement si  $p$  est une projection.
2. Si  $s$  est une symétrie et  $p$  est une projection, alors  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ , *i.e.*  $s$  et  $p$  ont même éléments caractéristiques.

**Méthode 3.9 (Montrer qu'une application est une symétrie)**

On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour montrer que  $f$  est une symétrie, on montre que  $f \circ f = \text{id}_E$ . On détermine alors  $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ , ce qui donne les éléments caractéristiques de la symétrie.

## 4 Image d'une famille libre/génératrice, d'une base par une application linéaire

Dans ce paragraphe, on fixe deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . Tout se passe comme les familles finies, puisqu'on a toujours des familles à support fini. Entraînez-vous !

**Proposition 4.1**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u(\text{vect}(e_i)_{i \in I}) = \text{vect}(u(e_i))_{i \in I}$ .

**Corollaire 4.2**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. La famille  $(u(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$ .



2. L'application  $u$  est surjective si et seulement si  $(u(e_i))_{i \in I}$  engendre  $F$ .

**Proposition 4.3**

1. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ . Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, alors la famille  $(u(e_i))_{i \in I}$  est libre.
2. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Alors  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, si et seulement si la famille  $(u(e_i))_{i \in I}$  est libre.

**Corollaire 4.4**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est un isomorphisme si et seulement si la famille  $(u(e_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .

**Théorème 4.5 (Prolongement par linéarité)**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de vecteurs de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i.$$

## 5 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce §,  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$ . L'espace vectoriel  $F$  n'est pas nécessairement de dimension finie.

### 5.1 Image d'une famille libre, génératrice. Image d'une base

Dans ce paragraphe, il faut comprendre le comportement d'une application linéaire sur une combinaison linéaire. Les démonstrations sont importantes pour cette compréhension.

**Proposition 5.1**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. L'image d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
2. L'image d'une base de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .

**Proposition 5.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $f$  est injective, l'image d'une famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ , et  $\dim(E) \leq \dim(F)$ .
2. Si  $f$  est surjective, l'image d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$ , et  $\dim(E) \geq \dim(F)$  (et en particulier  $F$  est de dimension finie).
3. Si  $f$  est bijective, l'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$ , et  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Remarques.**

1. On peut bien entendu utiliser cette proposition par contraposée. Si  $f \in \mathcal{C}(E, F)$ , et  $\dim(E) > \dim(F)$ , alors  $f$  ne peut pas être injective, et si  $\dim(E) < \dim(F)$ , alors  $f$  ne peut pas être surjective.
2. Cette proposition n'est qu'une implication. Elle ne dit bien entendu pas que si  $\dim(E) \leq \dim(F)$ , toutes les applications linéaires entre  $E$  et  $F$  sont injectives!!

**Théorème 5.3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. La fonction  $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre dans  $F$ .
2. La fonction  $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$ .
3. La fonction  $f$  est un isomorphisme si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

**Méthode 5.4**

Pour montrer qu'une application linéaire est surjective, on peut montrer que l'image d'une base est une famille génératrice de l'espace d'arrivée.

**Théorème 5.5 (Prolongement par linéarité)**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , et soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $F$ . Il existe une et une seule application linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \varphi(e_k) = v_k.$$

De plus, pour tout  $x \in E$  de composantes  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k v_k.$$

En particulier, si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$f = g \iff f(e_k) = g(e_k) \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

*i.e.* une application linéaire est caractérisée par les images des vecteurs d'une base de  $E$ .

**Méthode 5.6**

Pour montrer que deux applications linéaires sont égales, il suffit de montrer qu'elles sont égales sur une base.

**Méthode 5.7**

Ce théorème nous permet de définir une application linéaire qu'en donnant l'image d'une base. Par exemple, on peut définir une application linéaire  $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  par

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0, 0) &= (2, 3, 1, 4), & f(0, 1, 0, 0, 0) &= (-1, 2, -3, 4), & f(0, 0, 1, 0, 0) &= (3, 3, -6, 0), \\ f(0, 0, 0, 1, 0) &= (1, 2, 3, 4), & f(0, 0, 0, 0, 1) &= (-2, 0, 2, 0). \end{aligned}$$

Que vaut alors  $f((x, y, z, t, w))$  ? On écrit que

$$(x, y, z, t, w) = x(1, 0, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 0, 1),$$

donc par linéarité de  $f$ , on a

$$\begin{aligned} f((x, y, z, t, w)) &= xf((1, 0, 0, 0, 0)) + yf((0, 1, 0, 0, 0)) + zf((0, 0, 1, 0, 0)) + tf((0, 0, 0, 1, 0)) + wf((0, 0, 0, 0, 1)) \\ &= x(2, 3, 1, 4) + y(-1, 2, -3, 4) + z(3, 3, -6, 0) + t(1, 2, 3, 4) + w(-2, 0, 2, 0) \\ &= (2x - y + 3z + t - 2w, 3x + 2y + 3z + 2t, x - 3y - 6z + 3t + 2w, 4x + 4y + 4t) \end{aligned}$$

### Corollaire 5.8

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Un espace vectoriel  $F$  est isomorphe à  $E$  si et seulement s'il est de dimension finie et  $\dim(F) = \dim(E)$ . En particulier, tout  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $K^n$ .

### Remarque.

Attention, si  $\dim(E) = \dim(F)$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , il n'y a aucune raison pour que  $f$  soit bijective !

## 5.2 Théorème du rang

### Définition 5.9 (Rang)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Le *rang* de  $f$  est la dimension de  $\text{Im}(f)$ .

### Proposition 5.10

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et . Alors

1.  $\text{rang}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$ .
2. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $\text{rang}(f) = \text{rang}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

### Proposition 5.11

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $f$  est injective si et seulement si  $\text{rang}(f) = \dim(E)$ .
2.  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{rang}(f) = \dim(F)$ .

### Proposition 5.12 (Conservation du rang par les injections/surjections)

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Si  $f$  est surjective,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g)$ .
2. Si  $g$  est injective,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f)$ .

### Corollaire 5.13 (Conservation du rang par les isomorphismes)

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Si  $f$  est un isomorphisme,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g)$ .
2. Si  $g$  est un isomorphisme,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f)$ .

**Théorème 5.14 (Théorème du rang)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f).$$

**Méthode 5.15**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , on peut, au choix :

1. Résoudre pour tout  $y \in F$  l'équation  $y = f(x)$  d'inconnue  $x \in E$ . Les  $y$  pour lesquels on a au moins une solution donnent l'image. Le cas  $y = 0$  donne le noyau.

**ou**

2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue  $x \in E$  pour obtenir le noyau. Déterminer alors  $\dim(\text{Ker}(f))$ , puis  $\text{rang}(f)$  grâce au théorème du rang. Enfin, on détermine  $\text{rang}(f)$ -vecteurs dans  $\text{Im}(f)$  linéairement indépendants pour obtenir une base de  $\text{Im}(f)$ . Souvent, on les choisit parmi l'image d'une base de  $E$ .

**Théorème 5.16**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Ce résultat est vrai en particulier lorsque  $F = E$ , *i.e.* pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

**Remarque.**

Attention : ce théorème ne dit PAS que si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, et  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors  $f$  est injective et  $f$  surjective et  $f$  bijective. Il dit que SI  $f$  est l'un des trois, alors elle est les deux autres...