Chapitre 27

Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, on fixe un corps commutatif K (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Tous les espaces vectoriels seront des K-espaces vectoriels. On fixe également trois K-espaces vectoriels E, F et G de dimension respective $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et

$$B_E = (e_1, \ldots, e_p), \qquad B_F = (f_1, \ldots, f_n), \qquad B_G = (g_1, \ldots, g_q)$$

des bases de E, F et G.

On rappelle également que $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un K-espace vectoriel de dimension np. En effet, les np matrices élémentaires

$$\left(E_{ij}^{np}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

forment une base de $\mathcal{M}_{np}(K)$.

Enfin, on rappelle que la *base canonique* de K^n est la base

$$\Big((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\Big),$$

et que celle de $K_n[X]$ est

$$\Big(1, X, \ldots, X^n\Big).$$

1 Matrice d'une application linéaire

1.1 Matrices de composantes

Définition 1.1 (Matrice des composantes)

Soit

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E.$$

La *matrice des composantes* de x dans la base B_E est la matrice colonne

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K).$$

Remarque.

La matrice des composantes d'un vecteur dépend bien entendu de la base que l'on considère.

Exemples.

1. Dans la base

$$\big((1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\big)$$

de $\mathbb{R}^3$, le vecteur

$$(-3,4,2)$$

a pour matrice de composantes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

car

$$(-3,4,2) = 2(1,2,3) - 5(1,0,1) + (0,0,1).$$

Dans la base

$$\big((2,-1,0),(2,1,2),(1,1,0)\big),$$

cette matrice est

$$\begin{pmatrix} -8/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

car

$$(-3,4,2) = -\frac{8}{3}(2,-1,0) + (2,1,2) + \frac{1}{3}(1,1,0).$$

Dans la base canonique

$$\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$$

de $\mathbb{R}^3$, sa matrice est

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base

$$\big(1, 1+X, 1+X+X^2\big),$$

le polynôme

$$2 - X + 3X^2 = 3 - 4(1+X) + 3(1+X+X^2)$$

a pour matrice de composantes

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et dans la base canonique

$$(1, X, X^2)$$

de $\mathbb{R}_2[X]$, sa matrice de composantes est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2

L'application
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(K) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B_E}(x) \end{array}$$
est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. On a donc en particulier, si $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$,
$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{Mat}_{B_E}(x) + \mu \mathrm{Mat}_{B_E}(y)$$
et
$$x = y \iff \mathrm{Mat}_{B_E}(x) = \mathrm{Mat}_{B_E}(y).$$

Démonstration.

La linéarité découle des propriétés sur les bases, *cf.* le chapitre sur les espaces vectoriels : les composantes de $\lambda x + \mu t$ sont λ-fois celles de x plus μ-fois celles de y.

De plus, cette application est injective puisque son noyau est réduit à 0, car c'est le seul vecteur dont toutes les composantes sont nulles. C'est donc un isomorphisme puisque les deux espaces ont même dimension. ■

Définition 1.3 (Matrice des composantes d'une famille de vecteurs)

Soient $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_r)$ une famille de vecteurs de E. La *matrice des composantes* de $\mathcal{F}$ dans la base B_E est la matrice
$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{p,r}(K)$$
dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{B_E}(v_j)$. Autrement dit, si
$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant r}},$$
alors a_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ composantes de v_j, ou encore
$$\forall\, j = 1, \ldots, r, \quad v_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i.$$

Exemple.

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la base
$$B = (e_1, e_2, e_3)$$
où $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soient
$$v_1 = (1, 2, 4), \quad v_2 = (-1, -4, -5), \quad v_3 = (3, 4, 9), \quad v_4 = (-2, -2, -2), \quad v_5 = (0, 14, 15).$$
La matrice des composantes de cette famille dans la base B est
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
En effet, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$(x, y, z) = \frac{y}{2} e_1 + (x - \frac{y}{2}) e_2 + (z - x - y) e_3,$$
et donc par exemple
$$v_2 = -2(1, 2, 3) + (1, 0, 1), \qquad v_5 = 7e_1 - 7e_2 + e_3.$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.4 (Matrice d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Sa *matrice relative aux bases* B_E *et* B_F (ou *dans les bases*, ou *par rapport aux bases*) est la matrice

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

des composantes de la famille

$$\big(u(e_1), \dots, u(e_p)\big) = u\big(B_E\big)$$

dans la base B_F, *i.e.*

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_F}\big(u(e_1), \dots, u(e_p)\big) = \mathrm{Mat}_{B_F}\big(u(B_E)\big).$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}},$$

si et seulement si on a pour tout $j = 1, \dots, p$,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

2. Lorsque $E = F$, $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle matrice de u relative à la base B_E la matrice de u relative aux bases B_E et B_E.

Remarques.

1. Attention : il n'y a pas une seule matrice d'une application linéaire ! Il y en a une pour chaque couple de bases de E et F.
2. Il faut bien comprendre que la j-ème colonne contient les composantes de $u(e_j)$, et plus précisément, la composante de $u(e_j)$ devant e_i est a_{ij}.

Exemples.

1. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 2x + y, x - 3y) \end{array}$$

Déterminons sa matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Elle a 3 lignes (dimension de l'espace d'arrivée) et 2 colonnes (dimension de l'espace de départ). On a

$$f((1, 0)) = (1, 2, 1), \qquad f((0, 1)) = (-1, 1, -3),$$

donc la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

car on met en colonne les composantes de $f\big((1, 0)\big)$ et $f\big((0, 1)\big)$.

2. Soient $B = \big((1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\big)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \big((1,1),(1,0)\big)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+2z) \end{array}.$$

Déterminons $\operatorname{Mat}_{B,B'}(u)$, qui a 2 lignes (dimension de l'espace d'arrivée) et 3 colonnes (dimension de l'espace de départ). On a

$$\begin{aligned} u((1,2,3)) &= (6,5) = 5(1,1) + (1,0), \\ u((1,0,1)) &= (2,3) = 3(1,1) - (1,0), \\ u((0,0,1)) &= (1,2) = 2(1,1) - (1,0) \end{aligned}$$

donc en mettant les composantes en colonnes, on obtient

$$\operatorname{Mat}_{B,B'}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On considère les bases canoniques

$$B = (1, X, X^2, X^3) \quad \text{et} \quad B' = (1, X, X^2)$$

de $K_3[X]$ et $K_2[X]$. La matrice de la dérivation Δ relative à ces deux bases est

$$\begin{array}{ccc} K_3[X] & \longrightarrow & K_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est

$$\operatorname{Mat}_{B,B'}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(pourquoi 3 lignes et 4 colonnes ?). En effet,

$$\Delta(1) = 0, \quad \Delta(X) = 1, \quad \Delta(X^2) = 2X, \quad \Delta(X^3) = 3X^2.$$

On met alors les composantes en colonne, ce qui donne la matrice annoncée.

Si on considère la base

$$B'' = \big(1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\big)$$

de $\mathbb{R}_3[X]$, la matrice de Δ relative aux bases B'' et B' est

$$\operatorname{Mat}_{B'',B'}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a par exemple $\Delta(1+X+X^2) = 1+2X$, ce qui donne la troisième colonne. Faîtes le pour les autres !

4. La matrice de id_E relative à la base $\mathcal{B}_E$ est I_p. En effet, $\mathrm{id}_E(e_k) = e_k$, dont la matrice des composantes dans $\mathcal{B}_E$ est la colonne avec que des 0, sauf à la ligne k, où il y a un 1.

5. Soient A et B des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et p la projection sur A et parallèlement à B. Soit $r = \dim(A)$. Soit $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de A, et $(u_{r+1}, \ldots, u_p$ une base de B ($\dim(B) = \dim(E) - \dim(A) = p - r$). Alors $B = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E. Déterminons $\mathrm{Mat}_B(p)$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on a $p(u_j) = u_j$, et pour $j \geqslant r+1$, $p(u_j) = 0$, donc

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque.

On dit souvent que *les colonnes de A forment une famille génératrice de Im(f)*. C'est un abus de language, qui signifie les vecteurs de F dont les composantes sont données par les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 1.5

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(K) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tous $u, u' \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda, \lambda' \in K$, on a

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(\lambda u + \lambda' u') = \lambda \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) + \lambda' \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u')$$

et

$$u = u' \iff \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u').$$

Démonstration.

Facultative. Faîtes-la si vous êtes à l'aise. ∎

Remarques.

1. La matrice d'une application linéaire dépend des bases de E et F que l'on considère.
2. Cet isomorphisme n'existe qu'une fois des bases de E et F fixées.
3. On en déduit que $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-espace vectoriel de dimension np.

Corollaire 1.6

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $u = v \iff \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(v)$.

Corollaire 1.7 (Isomorphisme Canonique)

L'application

$$\mathcal{L}(K^p, K^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

qui à une application linéaire $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ associe sa matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n, est un isomorphisme, appelé isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$, sa matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n s'appelle la *matrice canoniquement associée à u*.

Réciproquement, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, l'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ dont la matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n est A s'appelle *l'application linéaire canoniquement associée à A*.

En particulier, si $p = n$, on a un isomorphisme $\mathcal{L}(K^n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$, et on parle alors *d'endomorphisme* canoniquement associé à une matrice.

Démonstration.

Conséquence immédiate de la proposition 1.5. ■

Remarque.
On verra qu'à l'usage ce corollaire est très utile. Il permettra de transformer un problème matriciel en problème d'application linéaire et vice-versa par *identification* de ces espaces.

Exemples.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

L'application linéaire canoniquement associée à A est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x - y + t, x + y - z - 2t, -3x + 2z + t), \end{array}$$

puisque

$$f((1,0,0,0)) = (2,1,-3), \quad f((0,1,0,0)) = (-1,1,0), \quad f((0,0,1,0)) = (0,-1,2), \quad , f((0,0,0,1)) = (1,-2,1).$$

2. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (x - y, 2x - y, 2x + 3y, x + y). \end{array}$$

La matrice canoniquement associée à f est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}),$$

puisque $f((1,0)) = (1,2,2,1)$ et $f((0,1)) = (-1,-1,3,1)$.

1.3 Propriétés

Proposition 1.8

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, $y = u(x) \in F$, et

$$A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(K), \qquad X = \mathrm{Mat}_{B_E}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(K), \qquad Y = \mathrm{Mat}_{B_F}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

Alors

$$Y = AX.$$

Démonstration.

Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad , Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}},$$

alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}.$$

Or,

$$y(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right) f_i,$$

ce qui prouve que la matrice Y a pour $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij},$$

i.e. la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX. ■

Remarque.

Cette formule permet de facilement calculer les composantes de l'image d'un vecteur grâce à la matrice de l'application linéaire.

Exemples.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associée à A (rappelez-vous, cela signifie que la matrice de f relatives aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est A). Notons B_3 et B_2 les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y, z)$. Alors $\mathrm{Mat}_{B_3}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc

$$\mathrm{Mat}_{B_2}(f(u)) = A \times \mathrm{Mat}_{B_3}(u) = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ -x + 3y + 2z \end{pmatrix},$$

et comme B_2 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc $f((x, y, z)) = (2x + y - z, -x + 3y + 2z)$.

2. Déterminons $f((x,y,z))$, où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est donnée par sa matrice

$$A = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

où B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \big((2,1,0,4),(1,1,1,1),(0,-1,0,1),(1,0,0,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Notez que la taille de la matrice est bonne : 4 lignes (espace d'arrivée de dimension 4), et 3 colonnes (espace de départ de dimension 3). Soit $u = (x,y,z)$. Alors $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ car B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_B(u) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5z \\ -y+z \\ x+4y+z \\ 3x+7y+z \end{pmatrix}.$$

On a donc les composantes de $f(u)$ dans la base B'. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(u) &= (2x+5z)(2,1,0,4) + (-y+z)(1,1,1,1) + (x+4y+z)(0,-1,0,1) + (3x+7y+z)(1,0,0,0) \\ &= (7x+6y+12z, x-5y+5z, -y+z, 9x+3y+22z) \end{aligned}$$

3. Soit $B = \big((1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\big)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \big((1,1),(1,0)\big)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+2z) \end{array},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sa matrice relatives aux bases B et B' (calcul fait dans un exemple précédent). Soit $u = (-3,4,2)$. Alors $X = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f(u)) = AX \overset{\text{calcul}}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que $f(u) = -3(1,1) + 6(1,0) = (3,-3)$ (point très important à bien comprendre).

Plus généralement, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x,y,z) = \frac{y}{2}(1,2,3) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0,1) + (z-x-y)(0,0,1),$$

donc

$$\mathrm{Mat}_B((x,y,z)) = \begin{pmatrix} y/2 \\ x-y/2 \\ z-x-y \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{B'}\big(f((x,y,z))\big) = A \times \mathrm{Mat}_B((x,y,z)) = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 2y-z \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$f((x,y,z)) = (x-y+2z)(1,1) + (2y-z)(1,0) = (x+y+z, x-y+2z).$$

4. La dérivation
$$\begin{array}{ccc} K_3[X] & \longrightarrow & K_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
a pour matrice relative aux bases
$$B'' = \big(1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\big) \quad \text{et} \quad B' = (1+X+X^2, 1+X, 1)$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
(pourquoi ? Retrouvez le calcul !). Soit $P = 10 + 9X + 7X^2 + 4X^3$. Alors
$$P = 1 + 2(1+X) + 3(1+X+X^2) + 4(1+X+X^2+X^3),$$
donc
$$\mathrm{Mat}_{B''}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Son image $P' = \Delta(P)$ a donc pour composantes dans la base canonique B' la matrice
$$A \times \mathrm{Mat}_{B''}(P) = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$
ce qui signifie que
$$P' = 12(1+X+X^2) + 2(1+X) - 5 = 12X^2 + 14X + 9.$$
Plus généralement, si
$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 = d(1+X+X^2+X^3) + (c-d)(1+X+X^2) + (b-c)(1+X) + (a-b),$$
on a
$$A \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d \\ 2c-3d \\ b-2c \end{pmatrix},$$
ce qui signifie que
$$\Delta(P) = 3d(1+X+X^2) + (2c-3d)(1+X) + (b-2c) = b + 2cX + 3dX^2.$$

Proposition 1.9

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors
$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(v) \times \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u).$$

Démonstration.

Notons
$$A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(v) = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$
Remarquons que ces deux matrices peuvent être multipliées puisque le nombre de colonne de la première est égal au nombre de ligne de la deuxième, soit $n = \dim(F)$. Soit $1 \leqslant j \leqslant p$. Alors
$$v\circ u(e_j) = v\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v(f_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\left(\sum_{k=1}^q b_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}\right) g_k.$$
Ceci prouve que la $j^{\text{ème}}$ colonne de
$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(v\circ u)$$
est la $j^{\text{ème}}$ colonne de BA, prouvant le résultat annoncé. ■

Remarque.

Faîtes très attention à ne pas faire d'erreur dans cette formule. L'ordre d'apparition de B_E et B_G est inversé dans un membre par rapport à l'autre ! Mais par contre, B_E est toujours la base de l'espace de départ, et B_G celle de l'espace d'arrivée.

Exemple.

Soit
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2x+y, x-2y) \end{array}.$$
Notons B_2 et B_3 les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathrm{Mat}_{B_2,B_3}(g\circ f)$. On a :
$$f((1,0)) = (2,1), \quad f((0,1)) = (-1,3),$$
donc
$$\mathrm{Mat}_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
(pourquoi de taille $(2,2)$? Pourquoi une seule base B_2 ?). Puis
$$g((1,0)) = (1,2,1), \quad g((0,1)) = (-1,1,-2),$$
donc
$$\mathrm{Mat}_{B_2,B_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
(vérifiez la taille ! !). On en déduit que
$$\mathrm{Mat}_{B_2,B_3}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{B_2,B_3}(g)\times \mathrm{Mat}_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

2 Le groupe $GL_n(K)$

Proposition 2.1

Si $p = n$ (*i.e.* $\dim(E) = \dim(F)$), $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u)$ est inversible, et dans ce cas
$$\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u)\right)^{-1}.$$

Démonstration.

Facultative. Faîtes-la si vous allez vite ! ∎

Proposition 2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que
$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ AX = 0 \Longrightarrow X = 0.$$
Alors A est inversible.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(K^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. La condition vérifiée par A se traduit par
$$\forall\, x \in K^n,\ u(x) = 0 \Longrightarrow x = 0,$$
i.e. $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc u est injective, donc un isomorphisme puisque K^n est de dimension finie. ∎

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.7 du chapitre **??**. On redonne quand même l'énoncé.

Proposition 2.3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$.

Démonstration.

On considère $u, v \in \mathcal{L}(K^n)$ canoniquement associés à A et B. On a donc
$$u \circ v = \mathrm{id}_{K^n},$$
donc v est injective et u surjective, donc u et v sont bijectives car K^n est de dimension finie, donc A est inversible d'après la proposition 2.1. ∎

Proposition 2.4

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E (avec $p = \dim(E)$). Alors $\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F})$ est inversible si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire associée à A dans la base B_E de E. Alors A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme, donc si et seulement si l'image de la base B_E est une base de E. Or, l'image de B_E est exactement la famille $\mathcal{F}$. ∎

Remarque.
Attention, le nombre de vecteurs doit être égal à la dimension de E, sinon la matrice n'est même pas carrée.

Exemple.

La famille $\mathcal{F} = \big((1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Soit

$$A = \mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(où B est la base canaonique de $\mathbb{R}^3$). On vérifie que $\mathrm{rang}(A) = 3$, donc $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 Formules de changement de base

Définition 3.1

Soient B et B' deux bases de E. La *matrice de passage* $P_{B,B'}$ de B à B' est la matrice des composantes de la famille B' dans la base B, *i.e.*

$$P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_B(B') \in \mathcal{M}_p(K),$$

ou encore la $j^{\text{ème}}$ colonne de $P_{B,B'}$ contient les composantes du $j^{\text{ème}}$ vecteur de B' dans la base B.

Remarque.

On parle de l'ancienne base (B), et de nouvelle base (B'), et $P_{B,B'}$ exprime la nouvelle base dans l'ancienne.

Exemples.

1. Soient

$$B = \big((1,2),(2,0)\big) \quad \text{et} \quad B' = \big((3,-2),(5,-1)\big)$$

deux bases de K^2. On a

$$(3,-2) = -(1,2) + 2(2,0) \quad \text{et} \quad (5,-1) = -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{11}{4}(2,0),$$

donc

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 11/4 \end{pmatrix}.$$

2. Si B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$B' = \big((2,3,-1),(2,-1,2),(1,1,0)\big),$$

alors

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2

Avec les notations de la définition 3.1, les matrices $P_{B,B'}$ et $P_{B',B}$ sont inversibles et

$$P_{B',B} = P_{B,B'}^{-1}.$$

De plus, si B'' est une troisième base de E, on a

$$P_{B,B''} = P_{B,B'}P_{B',B''}.$$

Démonstration.

Il s'agit de remarquer que $P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$ et $P_{B',B} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E)$. En effet, par définition, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$ $(j = 1,\dots,p)$ sont les composantes dans la base B de l'image par id_E du $j^{\text{ème}}$ vecteur de B', *i.e.* les composantes du $j^{\text{ème}}$ vecteur lui-même.

On en déduit le premier point d'après la proposition 2.1 (car $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$) :

$$P_{B',B} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)\Big)^{-1} = P_{B,B'}^{-1}.$$

Pour la deuxième affirmation, il suffit d'utiliser 1.9 :

$$P_{B,B''} = \mathrm{Mat}_{B'',B}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{B'',B}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)\mathrm{Mat}_{B'',B'}(\mathrm{id}_E) = P_{B,B'}P_{B',B''}.$$

■

Exemples.

1. Reprenons le premier exemple ci-dessus. On a

$$P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} -11/7 & -2/7 \\ 8/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$(1,2) = -\frac{11}{7}(3,-2) + \frac{8}{7}(5,-1) \quad \text{et} \quad (2,0) = -\frac{2}{7}(3,-2) + \frac{4}{7}(5,-1).$$

2. Pour le deuxième exemple : l'inverse de la matrice $P_{BB'}$ est

$$P_{B'B} = P_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(0,1,0) = -2(2,3,-1) - (2,-1,2) + 6(1,1,0)$.

3. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $B' = \big((1,2,3),(1,0,1),(2,1,1)\big)$, $B'' = \Big((2,-1,0),(2,1,2),(1,1,0)\Big)$. On cherche $P_{B',B''}$. On a

$$P_{B',B''} = P_{B',B}P_{B,B''} = P_{B,B'}^{-1}P_{B,B''}.$$

Or,

$$P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{B,B''} = \mathrm{Mat}_B(B'') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc (je vous laisse faire les calculs)

$$P_{B'B} = P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$P_{B',B''} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 0 \\ 7/4 & 3/4 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.3

Avec les notations de la définition 3.1 :

1. Si $x \in E$, et si X (resp. X') sont les composantes de x dans la base B (resp. B'), alors

$$X = P_{B,B'} X'.$$

2. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = P_{B,B'} \mathrm{Mat}_{B'}(\mathcal{F}).$$

Démonstration.

Pour démontrer le premier point, on reprend la même idée : $P_{B,B'}$ est la matrice de id_E relative aux bases B' et B, donc $P_{B,B'}X'$ sont les composantes dans B de l'image par id_E du vecteur dont les composantes dans B' sont X', *i.e.* x !

Une autre méthode consiste à faire le calcul : notons $B = (e_1, \dots, e_p)$, $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$, $P_{B,B'} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et soit $x \in E$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$.

Alors la ligne i de PX' est $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x'_j$, et

$$\sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x'_j \Big) e_i = \sum_{j=1}^{p} x'_j \Big(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i \Big) = \sum_{j=1}^{p} x'_j e'_j = x$$

(par définition de $P_{B,B'}$), ce qui prouve que $P_{B,B'}X'$ est la matrice des composantes de x dans B, *i.e.* $P_{B,B'}X' = X$.

Le deuxième point se démontre en remarquant que cette formule se regarde colonne par colonne : si on note C_j et C'_j les $j^{\text{ème}}$ colonnes de $\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Mat}_{B'}(\mathcal{F})$, alors C_j et C'_j sont les composantes dans B et B' de v_j, donc

$$C_j = P_{B,B'} C'_j,$$

d'où le résultat. ■

Remarques.

1. On parle d'anciennes et de nouvelles composantes.
2. Attention au piège : $P_{B,B'}$ exprime la nouvelle base dans l'ancienne, mais

$$X = P_{B,B'} X'$$

exprime les anciennes composantes en fonction des nouvelles.

Exemple.

Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $B' = ((2,1),(3,-1))$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Mat}_{B'}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_B(x) = P_{B,B'}\mathrm{Mat}_{B'}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que $x = (-1,2)$.

Théorème 3.4 (Formule de changement de base)

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, B'_E et B'_F des bases de E et F,

$$P = P_{B_E,B'_E}, \qquad Q = P_{B_F,B'_F}, \qquad A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u), \qquad A' = \mathrm{Mat}_{B'_E,B'_F}(u).$$

Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B'_E une base de E, $P = P_{B_E,B'_E}$, $A = \mathrm{Mat}_{B_E}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B'_E}(u)$. Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Démonstration.

Il suffit bien entendu de démontrer le 1. On a

$$P = \mathrm{Mat}_{B'_E,B_E}(\mathrm{id}_E), \qquad Q^{-1} = \mathrm{Mat}_{B_F,B'_F}(\mathrm{id}_F),$$

donc d'après la proposition 1.9

$$\begin{aligned} Q^{-1}AP &= \mathrm{Mat}_{B_F,B'_F}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \times \mathrm{Mat}_{B'_E,B_E}(\mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{B_F,B'_F}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{B'_E,B_F}(u \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{B'_E,B'_F}(\mathrm{id}_F \circ u \circ \mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{B'_E,B'_F}(u) = A'. \end{aligned}$$

Une autre démonstration est la suivante : si $x \in E$, X, X' ses composantes dans B_E, B'_E, et Y, Y' les composantes de $u(x)$ dans B_F, B'_F. Il suffit de montrer que

$$Q^{-1}APX' = Y'.$$

Mais $PX' = X$, et $AX = Y$, et $Q^{-1}Y = Y'$. ■

Exemples.

1. Soient $B = \big((1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\big)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et B' la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+2z) \end{array}.$$

Alors

$$f((1,2,3)) = (6,5), \qquad f((1,0,1)) = (2,3), \qquad f((0,0,1)) = (1,2),$$

donc

$$A = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit également $B'' = \big((1,1),(1,0)\big)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de f relative aux bases B et B'' est alors

$$P_{B',B''}^{-1} A P_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$u((x,y,z)) = (x-y, x+z, x-2y+z),$$

B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \Big((2,3,-1),(2,-1,2),(1,1,0)\Big)$. La matrice A de u dans B est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$P = P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

donc la matrice A' de u dans la base B' est

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 11 & -20 & 1 \\ 3 & -7 & 0 \\ -29 & 57 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par exemple que

$$u((2,-1,2)) = (3,4,6) = -20(2,3,-1) - 7(2,-1,2) + 57(1,1,0).$$

4 Trace d'un endomorphisme

Proposition 4.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))$.

Démonstration.

Notons A et A' resp. les matrices de f relatives aux bases B et B'. Soit $P = P_{B,B'}$. Alors $A' = P^{-1}AP$, donc $\operatorname{tr}(A') = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$. ■

Définition 4.2 (Trace d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace $\operatorname{tr}(f)$ de f par la trace de sa matrice relative à n'importe qu'elle base.

Exemples.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f((x,y)) = (x-2y, 2x+3y)$. La matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

dont la trace vaut 4, donc $\operatorname{tr}(f) = 4$.

2. La trace de l'identité vaut toujours $\dim(E)$, puisque sa matrice relative à n'importe quelle base est la matrice unité de taille $\dim(E)$.

Proposition 4.3

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in K$. Alors $\operatorname{tr}(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{tr}(f) + \mu \operatorname{tr}(g)$, *i.e.* la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 4.4 (Trace d'une projection)

Soit p une projection de E. Alors $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rang}(p)$.

Démonstration.

On considère une base B de E obtenue par l'union d'une base de $\operatorname{Im}(p)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(p)$ (possible car $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$). Si $x \in \operatorname{Im}(p)$, on a $p(x) = x$ (p est une projection), donc la matrice de p dans B est

$$\operatorname{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\dim(\operatorname{Im}(p))$ "1" sur la diagonale, donc la trace vaut bien $\operatorname{rang}(p)$. ■

Proposition 4.5 (Trace d'une symétrie)

Soit s une symétrie de E. Alors $\operatorname{tr}(s) = \dim(\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)) - \dim(\operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E))$.

Proposition 4.6

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$.

Remarque.
Attention : $\operatorname{tr}(f \circ g) \neq \operatorname{tr}(f)\operatorname{tr}(g)$! !

5 Rang d'une matrice

5.1 Définitions

Rappelons la définition déjà vue :

Définition 5.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes vues comme vecteurs de K^n. Le *rang colonnes* de M est l'entier

$$\operatorname{rang}(M) = \dim(\operatorname{vect}(C_1, \ldots, C_p)) = \operatorname{rang}(C_1, \ldots, C_p).$$

De même pour le rang lignes, mais dans K^p.

Exemples.

1. On a

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

puisque les colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^3$.

2. On a

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

En effet $C_2 = C_1 + C_3$ et $C_4 = C_3 - C_1$ donc

$$\operatorname{vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \operatorname{vect}(C_1, C_3)$$

qui est un espace de dimension deux puisque C_1, C_3 sont linéairement indépendants.

Proposition 5.2

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Alors

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{rang}\Big(\operatorname{Mat}_{B_E}(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}\Big(\operatorname{Mat}_{B_E, B_F}(u)\Big).$$

Démonstration.

Facultative. À faire si vous êtes à l'aise.

Montrons le point 1. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} K^p & \longrightarrow & E \\ (t_1, \ldots, t_p) & \longmapsto & \sum_{j=1}^p t_j e_j. \end{array}$$

C'est un isomorphisme puisqu'envoie la base canonique de K^p sur la base B_E de E. Par définition de $\operatorname{Mat}_{B_E}(x_1, \ldots, x_p)$, si C_j est sa $j^{\text{ème}}$ colonne, alors

$$f(C_j) = x_j \quad \text{donc} \quad f(\operatorname{vect}(C_1, \ldots, C_n)) = (\operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_n)),$$

qui sont deux espaces de même dimension puisque f est un isomorphisme.

Le point 2 est une conséquence du 1, car par définition le rang de u n'est rien d'autre que la dimension de

$$\mathrm{vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p)),$$

donc le rang de

$$\mathrm{Mat}_{B_F}\left(u(e_1), \ldots, u(e_p)\right) = \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u).$$

■

Corollaire 5.3

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(K)$ est inversible si et seulement si son rang colonne est p.

Démonstration.

On raisonne en considérant l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(K^p)$ canoniquement associée à A, qui est inversible si et seulement si u est bijectif donc si et seulement si u est surjectif (puisque K^p est de dimension finie), donc si et seulement si le rang de u est p, donc si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = p$ par la proposition 5.2. ■

5.2 Rang et manipulations élémentaires

Proposition 5.4

1. Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.
2. Les maniupulations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice.

Théorème 5.5

Soient $r, p, n \in \mathbb{N}^*$, $n, p \geqslant r$, $a_1, \ldots, a_r$ **des réels non nuls**, et $A \in \mathcal{M}_{n-r,p-r}$. Alors

$$\mathrm{rang}\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_1 & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_r & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & A & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \end{array}\right) = r + \mathrm{rang}(A),$$

où les $\star$ désignent des éléments quelconques.

Démonstration.

Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes, que l'on considère comme des vecteurs de K^n.

Soit également $q = p - r$, et écrivons que pour $k = 1, \ldots, q$, on a $C_{r+k} = v_k + w_k$, où v_k a ses $n - r$ dernières composantes nulles, et w_k a ses r premières composantes nulles (*i.e.* v_k n'a aucun coefficient de A, et w_k n'a que les coefficients de A). On a :

$$\mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_p) = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r, v_1 + w_1, \ldots, v_q + w_q) = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r, w_1, \ldots, w_q).$$

En effet, pour k entre 1 et q, on a $v_k \in \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r)$ puisque $(C_1, \ldots, C_r)$ engendre le sous-espace vectoriel de K^n des vecteurs dont les $n-r$ dernières composantes sont nulles (car $a_1, \ldots, a_r$ sont tous non nuls). On en déduit que

$$v_k + w_k = w_k + \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik} C_i,$$

où $\lambda_{ik} \in K$. Mais un sous-espace engendré par une famille de vecteurs ne change pas lorsqu'à un vecteur (w_k) on a ajoute une combinaison des autres (v_k), d'où l'égalité annoncée.

Mais

$$\mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r) \cap \mathrm{vect}(w_1, \ldots, w_q) = \{0\},$$

puisque les r premières composantes des w_i sont nulles, et les $n-r$ dernières composantes des C_i ($i \leqslant r$) aussi. On a donc

$$\mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_p) = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r, w_1, \ldots, w_q) = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r) \oplus \mathrm{vect}(w_1, \ldots, w_q),$$

donc

$$\mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_p)) = \dim(\mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_r)) + \dim(\mathrm{vect}(w_1, \ldots, w_q)) = r + \mathrm{rang}(A).$$

■

Exemple.

On utilise les propositions 5.4 et 5.5 conjointement pour calculer le rang d'un matrice en la transformant grâce à des manipulations élémentaires en une matrice du type de la proposition 5.5. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 41 \end{pmatrix},$$

donc le rang est 3. C'est une technique qu'on a déjà utilisée pour résoudre les systèmes linéaires, sauf qu'ici on peut faire à la fois des manipulations sur les lignes et sur les colonnes.

5.3 Matrice J_r

Définition 5.6

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $r \leqslant \min(n, p)$, on définit la matrice

$$J_r^{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K),$$

avec exactement r 1 sur la diagonale.

Proposition 5.7

Le rang de $J_r^{n,p}$ est r.

Démonstration.

C'est clair d'après la proposition 5.5. Ou tout simplement les r premières colonnes sont linéairement indépendantes, et les autres nulles. ∎

Proposition 5.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $r \leqslant \min(n,p)$. Alors le rang de A est r si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(K)$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ telles que
$$A = QJ_rP.$$

Démonstration.

Sens direct : si de telles matrices P et Q existent, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(J_r) = r$ d'après les propositions 5.4 et 5.7.

Réciproquement, si A est de rang r, soit $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ canoniquement associée à A. Soit E_0 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans K^p :
$$K^p = E_0 \oplus \mathrm{Ker}(u).$$
D'après le théorème du rang, on a
$$\dim(E_0) = \mathrm{rang}(u) = r.$$
Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de E_0 et $(v_{r+1}, \ldots, v_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, et notons
$$B = (v_1, \ldots, v_p)$$
qui est une base de K^p. Or, $u|_{E_0}$ est injective, donc la famille
$$(w_1 = u(v_1), \ldots, w_r = u(v_r)$$
est libre. Complétons la en une base
$$C = (w_1, \ldots, w_n)$$
de K^n. La matrice de u relative aux bases B et C est alors J_r, et d'après le théorème 3.4, on prouve la proposition. ∎

Proposition 5.9

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors
$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA),$$
ou encore les rangs colonnes et lignes sont égaux.

Démonstration.

Facultative. Faîtes-la si vous êtes à l'aise.

Cela découle de ${}^tJ_r = J_r$. ∎