Chapitre 24

Prop 2.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E;
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

Démo :

1. On a $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$

   Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$

   $$\text{Si} \quad \begin{array}{l} x, x' \in Kef(f) \\ \lambda, \lambda' \in K \end{array}$$

   $$\text{Alors } f(\lambda x + \lambda' x') \begin{array}{l} = \lambda f(x) + \lambda' f(x') \\ = \lambda 0 + \lambda' 0 \\ = 0 \end{array}$$

   Donc $\lambda x + \lambda' x' \in \mathrm{Ker}(f)$

   Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E.

2. On a $0_F \in \mathrm{Im}(f)$

   Donc $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$

   $$\text{Soient} \quad \begin{array}{l} y, y' \in \mathrm{Im}(f) \\ \lambda, \lambda' \in K \\ \ x, x' \in \mathrm{Ker}(f) \text{ tq } \quad \begin{array}{l} y = f(x) \\ y' = f(x') \end{array} \end{array}$$

   $$\text{Alors } \lambda y + \lambda' y' \begin{array}{l} = \lambda f(x) + \lambda' f(x') \\ = f(\lambda x + \lambda' x') \in \mathrm{Im}(f) \end{array}$$

   Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

Théo 2.4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

f injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$

et

f surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = F$

Démo :

<u>f injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$</u>

Si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$

Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) - f(x')$

Mque $x = x'$

On a $f(x) - f(x') = 0$

Donc $f(x - x') = 0$

Donc $x - x' \in \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

Donc $x - x' = 0$

Réciproque :

Si f est injective

On sait que $0 \in \operatorname{Ker}(f)$ (car f est linéaire)

Mais si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0 = f(0)$

Par injectivité, $x = 0$ et $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

<u>f surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = F$</u>

C'est général, rien à voir avec l'algé linéaire.

Prop 2.6

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

$$\text{Alors} \quad \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \\ \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \end{array} \quad \text{où } f^2 = f \circ f$$

Démo :

$\underline{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$

$$\begin{aligned} \text{Alors } y &= f^2(x) \\ &= f(f(x)) \end{aligned} \quad \text{où } x \in E$$

Donc $y = \mathrm{Im}(f)$

$\underline{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f^2 &= f(f(x)) \\ &= f(0) && \text{où f linéaire} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$