Maths : Asymptotic comparison

1 Definitions :

(u_n) est dominée par (v_n) :

$$u_n = O(v_n) \;\Leftrightarrow\; \exists(M,m) \in \mathbb{C} \;\Big|\; m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

(u_n) est négligeable devant (v_n) :

$$u_n = o(v_n) \;\Leftrightarrow\; \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(u_n) est équivalente à (v_n) :

$$u_n \sim v_n \;\Leftrightarrow\; \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

2 Proprieties :

2.1

$\forall l \in \mathbb{R}^*, \quad u_n \sim l \;\Leftrightarrow\; u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l, \quad (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \Rightarrow u_n u'_n \sim v_n v'_n$

$u_n \sim v_n \;\Leftrightarrow\; u_n - v_n = o(v_n)$

2.2 Sums

$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n + v_n \sim v_n$

$$\begin{aligned}
\square\; u_n = o(v_n) \quad &\Rightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{u_n + v_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\
&\Rightarrow \quad u_n + v_n \sim v_n \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_n \sim \lambda w_n \\ v_n \sim \mu w_n \\ \lambda + \mu \neq 0 \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \sim (\lambda + \mu) w_n$$

$$\begin{aligned}
\square \begin{cases} u_n \sim \lambda w_n \\ v_n \sim \mu w_n \\ \lambda + \mu \neq 0 \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} u_n = \lambda w_n + o(w_n) \\ v_n = \mu w_n + o(w_n) \\ \lambda + \mu \neq 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} u_n + v_n = (\lambda + \mu) w_n + o(w_n) \\ \lambda + \mu \neq 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad u_n + v_n \sim (\lambda + \mu) w_n \quad \blacksquare
\end{aligned}$$