

# 1 Zustandsgrößen und totale Differentiale

## 1.1 Extensive und Intensive Zustandsgrößen

Extensive Zustandsgrößen hängen von der Größe des Systems ab. Intensive Zustandsgrößen sind demgegenüber unabhängig von der Systemgröße.

Tabelle 1: Beispiele für Zustandsgrößen und Einteilung in intensive und extensive

Intensive Zustandsgrößen	Extensive Zustandsgrößen
Molvolumen	Entropie
Temperatur	Stoffmenge
Druck	Volumen
Partialdruck	innere Energie
molare Masse	Enthalpie
Konzentration	Masse
Dichte	
spezifisches Volumen	

## 1.2 Das Volumen eines Zylinders ein totales Differential?

Das Volumen eines Zylinders kann mit

$$V(r, h) = r^2 \pi h \quad (1)$$

berechnet werden. Das totale Differential berechnet sich zu

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_h dr + \left( \frac{\partial V}{\partial h} \right)_r dh = 2r\pi h dr + r^2\pi dh. \quad (2)$$

Um zu überprüfen, ob  $V(r, h)$  eine Zustandsfunktion ist, muss untersucht werden, ob die gemischten zweiten partiellen Ableitungen gleich sind. Auf einem sternförmigen Gebiet gelten dann die Integrabilitätsbedingungen sowie der Satz von Schwarz. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_h V &= 2r\pi \\ \partial_h \partial_r V &= 2r\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Daraus folgt, dass  $\partial_r \partial_h V = \partial_h \partial_r V$  und damit ist  $V(r, h)$  eine Zustandsfunktion.  $\square$

### 1.3 Totales Differential einer exemplarischen Funktion

Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = x^4 + xy \quad (4)$$

und bilden  $J = (\partial_x f(x, y) \quad \partial_y f(x, y)) = (4x^3 + y \quad x)$  sowie die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x, y) & \partial_{yx} f(x, y) \\ \partial_{xy} f(x, y) & \partial_{yy} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Aufgrund der Symmetrie von  $H_f$  ist auf einem sternförmigen Gebiet der Satz von Schwarz erfüllt und damit  $f(x, y)$  eine Zustandsfunktion. Das totale Differential lässt sich schreiben als

$$df(x, y) = (\partial_x f(x, y))_y dx + (\partial_y f(x, y))_x dy = (4x^3 + y) dx + (x) dy, \quad (6)$$

wobei die Einträge der oben angegebenen Jakobi-Matrix eingesetzt wurden.

### 1.4 Das molare Volumen ein totales Differential?

Wir betrachten das totale Differential

$$dV_m = \left( \frac{R}{p} \right)_p dT - \left( \frac{RT}{p^2} \right)_T dp. \quad (7)$$

Die gemischten zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \partial_p \partial_T V_m &= -\frac{R}{p^2} \\ \partial_T \partial_p V_m &= -\frac{R}{p^2} \end{aligned} \quad (8)$$

und damit ist  $V_m$  eine Zustandsfunktion, was wiederum impliziert, dass  $dV_m$  wirklich ein totales Differential ist.

### 1.5 Zusammensetzung eines Gasgemisches

Folgende Daten eines Gasgemisches der drei Komponenten A, B, C sind gegeben:  $p_{Ges.} = 1.00$  bar,  $V_{Ges.} = 1$  m<sup>3</sup>,  $T = 298$  K,  $x_A = 0.3$  und  $p_B = 0.25$  bar. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned} p_A &= x_A \cdot p_{Ges.} \\ \Rightarrow p_C &= p_{Ges.} - p_B - p_A \\ \Rightarrow n_C &= \frac{p_C \cdot V_{Ges.}}{RT} \\ \Rightarrow m_C &= n_C \cdot M_{N_2} = 508.6 \text{ g} \end{aligned} \quad (9)$$

Das Gasgemisch enthält demnach 508.6 g an N<sub>2</sub>.