LABORATORIO de INGENIERÍA de CONTROL

Práctica 2B: (4-8/Marzo/2022)

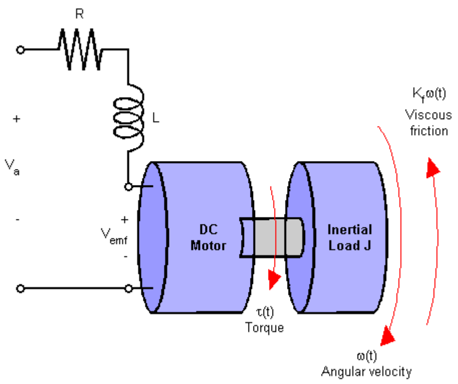
Introducción a la "Control System Toolbox" de Matlab (II)

El objetivo de esta práctica es introducir algunos de los comandos de la *"Control System Toolbox"*, para modelar sistemas de control y obtener sus respuestas dinámicas, comparando aspectos tales como seguimiento de consignas y rechazo de perturbaciones.

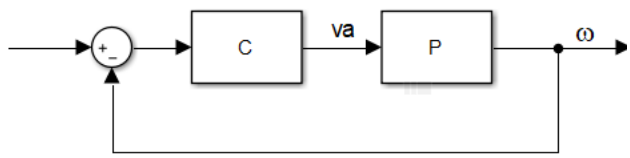
EJERCICIO 1

TRABAJO (1) PREVIO A LA SESIÓN DE LABORATORIO:

En los motores de CC, se controla la velocidad de giro, variando el voltaje aplicado v_a. La planta P(s), formada por el motor y la carga (p.ej., una antena, de inercia J) es de segundo orden:



$$P(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}, \qquad C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$



El sistema en lazo cerrado con un controlador PI es un sistema de tercer orden, con ecuación característica:

$$(s+\alpha)\cdot(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0 \qquad (1)$$

Mediante la selección adecuada de las ganancias K_P, K_I del controlador, los polos de lazo cerrado pueden ser asignados para un comportamiento deseado del sistema si su suma cumple:

$$\sum Polos_{LC} = -a_1 \qquad (2)$$

Se pide:

a) Calcular la ecuación característica del sistema de control: 1+P*C=0
b) Igualando los coeficientes de la ecuación (1) y la calculada en a), probar (2) y encontrar los valores necesarios de las ganancias K_P, K_I del controlador.
c) Comprobar que cumpliéndose (2), si se selecciona un valor de α solución de la ecuación (3), con valor mínimo bajo ciertas condiciones, se cumple (4):

$$\alpha^2 - a_1\alpha + a_2 = 0 \qquad (3), \qquad 2\alpha\zeta\omega_n = a_2 \qquad (4)$$

d) Comprobar que si se cumple (4), $K_I = \alpha K_P$, y por tanto el polo de LC real escogido en el diseño, cancela el cero de LC del Sistema.

TRABAJO (1) EN EL LABORATORIO

El resultado anterior permite realizar un diseño analítico del controlador PI para este tipo de plantas por asignación de los polos en lazo cerrado (5) del sistema, de forma que cumpla ciertos objetivos del transitorio.

$$POLOS\ DE\ LC: \quad (-\alpha, -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) \qquad (5) \qquad t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad S.O. = e^{\frac{-\pi}{tg\theta}}$$

Trabajo Previo 1

a) $1 + P \cdot C = 0$

$P(s) = \dfrac{b}{s^2+a_1 s+a_2}$ | $C(s) = \dfrac{K_p \cdot s + K_I}{s}$

$$1 + \frac{b\,(K_p s + K_I)}{s(s^2+a_1 s+a_2)} = 0$$

$$\frac{s(s^2+a_1 s+a_2) + b(K_p s+K_I) = 0}{s\,(s^2+a_1 s+a_2)}$$

$$\boxed{\begin{gathered} s(s^2+a_1 s+a_2)+b(K_p s+K_I)=0 \\ s^3 + a_1 s^2 + (a_2+bK_p)s + bK_I = 0 \end{gathered}}$$

$s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + \alpha s^2 + 2\zeta\omega_n\alpha s + \omega_n^2\alpha$

$s^3 + s^2(2\xi\omega_n+\alpha) + s(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n\alpha) + \omega_n^2\alpha$

b)

(1) $a_1 = 2\zeta\omega_n + \alpha$

(2) $a_2 + bK_p = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\alpha$

(3) $bK_I = \omega_n^2\alpha$

$\xrightarrow{(3)} K_I = \dfrac{\omega_n^2\alpha}{b}$

$\xrightarrow{(2)} K_p = \dfrac{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\alpha - a_2}{b}$

Comprobación (2) $(s+\alpha)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm\sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2\cdot 1} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2(\zeta^2-1)}}{2\cdot 1} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$s_3 = -\alpha$

$$\underbrace{-\alpha}_{s_3}\ \underbrace{-\zeta\omega_n + \cancel{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}_{s_2}\ \underbrace{-\zeta\omega_n - \cancel{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}_{s_1} = \boxed{-\alpha - 2\zeta\omega_n = -a_1}$$

b (2)

c)

$\alpha^2 - a_1\alpha + a_2 = 0$ (3)

$2\alpha\zeta\omega_n = a_2$ (4)

(3) $\alpha = \dfrac{-a_1 \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

$\rightarrow \dfrac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

$\rightarrow \dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \alpha \leftarrow$ Valor mínimo

$-\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = 2\alpha - a_1 \rightarrow \cancel{a_1^2} - 4a_2 = 4\alpha^2 - 4\alpha a_1 + \cancel{a_1^2}$

$-\cancel{4}a_2 = \cancel{4}\alpha^2 - \cancel{4}\alpha a_1$

$-a_2 = \alpha^2 + \alpha(-a_1)$

$-a_2 = \alpha^2 + \alpha(-\alpha - 2\zeta\omega_n)$

$-a_2 = \cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha^2} - 2\zeta\omega_n\alpha$

$$\boxed{a_2 = 2\zeta\omega_n\alpha}$$

d)

$2\alpha\zeta\omega_n = a_2$ (4)

$K_I = \alpha K_p$

(i) $K_I = \dfrac{\omega_n^2\alpha}{b}$

(ii) $K_p = \dfrac{\omega_n^2 + \cancel{2\zeta\omega_n\alpha} - \cancel{2\zeta\omega_n\alpha}}{b}$

Divido (i) ÷ (ii)

$$\rightarrow \frac{K_I}{K_p} = \frac{\omega_n^2\alpha / b}{\omega_n^2 / b} \Rightarrow \boxed{K_I = \alpha K_p}$$

Se indican a continuación unas reglas de diseño de un PI en serie con la planta $P(s)$ que aseguran un t_s mínimo para cierta S.O. impuesta:

- Comprobar condiciones para la aplicación del método: $b, a_1, a_2 > 0, \quad a_1^2 \geq 4a_2$
- Fijar el valor de S.O.
- Calcular el amortiguamiento del par de polos complejos de LC que cumplen S.O.
- Dados los valores a_1, a_2 de la función de transferencia de la planta P(s), calcular el valor α del polo de LC real según la fórmula $\alpha = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$. Comprobar que se cumple: $0 < \alpha \leq a_1$
- Calcular la frecuencia natural del par de polos complejos de LC. que cumplen la condición $\sum Polos_{LC} = -a_1$
- Calcular el tiempo de establecimiento t_s que presentará la salida del sistema
- Calcular las ganancias K_P, K_I del controlador según resultado obtenido en el ejercicio previo
- Calcular la función de transferencia del controlador PI.

Se pide:
A) Programar un *script* de *Matlab* que desarrolle las reglas de diseño descritas anteriormente y realice el cálculo del controlador C2 para la planta P(s), formada por el motor y la carga:

$$P(s) = \frac{10}{s^2 + 14s + 47} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}, \qquad C_2(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

si se fija una sobreoscilación permitida S.O. = 1%

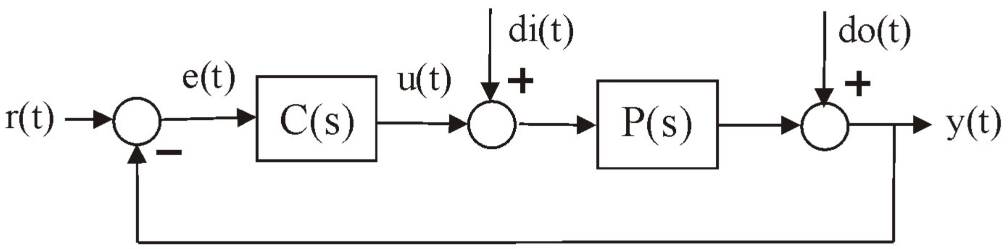
B) Como continuación del script de la práctica 2a, y siguiendo el mismo esquema de control en lazo cerrado con relimentación, pero sustituyendo C=K/s por C2 =(K_P*s+K_I)/s, calcular la matriz G2 del sistema de control con dos entradas/dos salidas.

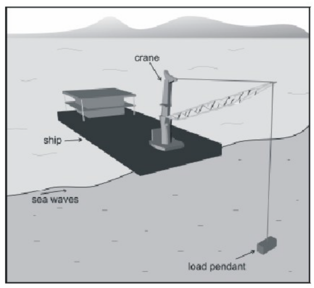
C) Comparación de los sistemas de control (con C, C2) en LC:

Figura 4: Simulación con las dos entradas actuando en las dos salidas (G y G2 superpuestos)

EJERCICIO 2

TRABAJO (2) PREVIO A LA SESIÓN DE LABORATORIO:





La figura representa (izqda) el sistema de control de una grúa que regula la profundidad y(t)[m] de una carga submarina (dcha, Neupert et al. ACC Conf. 2008). El oleaje es una perturbación a la salida d_o(t)[m]. La actuación u(t)[m/s] es la velocidad a la que se suelta/recoge el cable. El modelo de la planta es por tanto $P(s)=1/s$. En el sistema anterior se decide usar un PD con derivada filtrada:

$$C(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + s/N} = \frac{A\,s + B}{(s + N)}$$

Conectando este C(s) con P(s)=1/s se tiene un lazo cerrado de segundo orden de formato:

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{(p_1 p_2/c)(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

a) Obtener los coeficientes *A,B* en función de los parámetros K_p, K_d, N del PD.
b) Como *T(s)* tiene tres raíces (polos $-p_1, -p_2$, cero $-c$) y hay tres parámetros *A,B,N*, se pueden ajustar estos para colocar aquellos donde se desee. Calcular *A,B,N* para que el lazo cerrado tenga p_1=1(dominante) y p_2=11, c=10.

TRABAJO (2) EN EL LABORATORIO

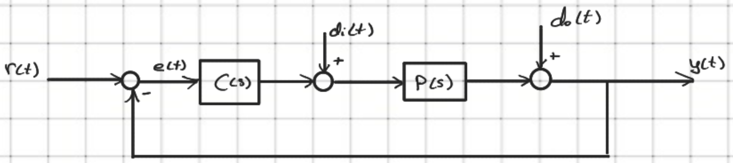
El resultado anterior permite realizar un diseño analítico de un controlador PD con derivada filtrada para este tipo de plantas.

Se pide:
Programar un script de Matlab para el sistema de control anterior, que dada la planta P(s)=1/s, y seleccionando polos/cero de lazo cerrado en:

```
dni=…(nºs DNI alumno); rng(dni);
p1=1+0.2*(rand-0.5); p2=11+0.2*(rand-0.5); c=10+0.2*(rand-0.5);
```

calcule los parámetros A,B,N (en función de p_1, p_2, c) y en función de éstos, K_p,K_d,N del controlador PD. Calcular la respuesta a escalón unitario del sistema de control en lazo cerrado (do=di=0).

Trabajo Previo 2



$$C(s) = K_p + \frac{K_d\, s}{1+ s/N} = \frac{A s + B}{s + N}$$

$$P(s) = 1/s$$

→ Se obtiene un lazo cerrado de segundo orden de formato:

$$T(s) = \frac{C(s)\,P(s)}{1+C(s)\,P(s)} = \frac{\left(\frac{p_1 p_2}{c}\right)(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

a)

$$C(s) = K_p + \frac{K_d\, s}{1+ s/N} = \frac{K_p + \frac{K_p s}{N} + K_d s}{1+ s/N} = \frac{K_p N + K_p s + K_d N s}{N+s} = \frac{(K_p + K_d N)\, s + K_p N}{N+s} = \frac{A s + B}{s+N} \quad \begin{cases} A = K_p + K_d N \\ B = K_p N \end{cases}$$

b)

$$T(s) = \frac{\frac{As+B}{s+N}\,\frac{1}{s}}{1+\frac{As+B}{s+N}\,\frac{1}{s}} = \frac{As+B}{s(s+N)+As+B} = \frac{As+B}{s^2 + (N+A)s + B}$$

$$T(s) = \frac{\frac{p_1 p_2}{c} s + p_1 p_2}{s^2 + (p_2+p_1)s + p_1 p_2}$$

$$\begin{cases} A = \frac{p_1 p_2}{c} = \frac{1\cdot 11}{10} \rightarrow \boxed{A = 1'1} \\ N + A = p_2 + p_1 \rightarrow N = 11 + 1 - 1'1 \rightarrow \boxed{N = 10'9} \\ B = p_1 p_2 \rightarrow \boxed{B = 11} \end{cases}$$