LABORATORIO de INGENIERÍA de CONTROL

Práctica 8. (26-29/Abril/2022)

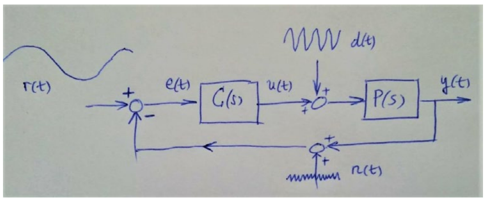
Introducción al Diseño de Controladores: Objetivos de Control.

En esta práctica se analizan con ayuda de Matlab, los distintos objetivos de control para el diseño de controladores.

Ejemplo Control de velocidad de crucero (Material complementario: Objetivos de control)

Consideremos el modelo linealizado de un sistema de control de crucero con planta de primer orden y controlador PI (https://www.cds.caltech.edu/murray/books, Ejemplo 5.11 adaptado):

$$P(s) = \frac{1,3}{s+0,01}, \qquad C(s) = K\frac{s+0,2}{s}$$



La salida *y(t)* en *m/s* es la desviación de velocidad respecto $v_0 = 25m/s \approx 90km/h$. La actuación *u(t)* es la posición del acelerador (su desviación respecto a la posición de crucero) y está físicamente limitada a $|u(t)| \leq 0,5$. La perturbación *d(t)* refleja las fuerzas no modeladas (viento, pendiente, etc.) y está escalada por 100 *Kg* (d = 0,5 equivale a 50*Kg*, etc.). El ruido *n(t)* (*m/s*) proviene de los errores de medida, y la referencia está puesta a cero $r = 0$ (ya que se desea velocidad fija v_0 y desviación $y \approx 0$).

Trabajo previo del alumno (1):

Se pide la lectura y comprensión del material complementario, así como el desarrollo de los cálculos teóricos de los ejemplos 1, 2 y 3.

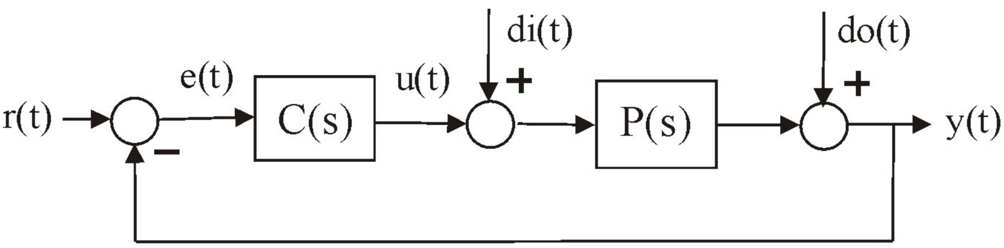
Trabajo (1) del alumno en laboratorio:

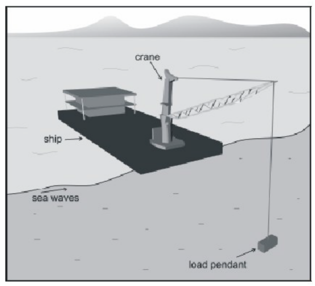
Comprobación y análisis en Matlab de los tres ejemplos. Para ello se debe programar un script de Matlab con las instrucciones que se indican en dicho material.

Ejemplo Control de profundidad de una carga submarina

Trabajo previo del alumno (2):

La figura representa (izqda) el sistema de control de una grúa que regula la profundidad y(t)[m] de una carga submarina (dcha, Neupert et al. ACC Conf. 2008). El oleaje es una perturbación a la salida d_o(t)[m]. La actuación u(t)[m/s] es la velocidad a la que se suelta/recoge el cable. El modelo de la planta es por tanto *P*(s)=1/s.





En este sistema de control con planta *P*(s)=1/s, el controlador es un PI, *C*(s)=*K*(s+1)/s, son nulas *r(t)* y $d_i(t)$, y aparece una perturbación $d_o(t)$. El estado del mar es de olas de 1m y frecuencia 1Hz, por tanto:

$$d_o(t) \approx 0,5\sin(2\pi t)$$

2A) Rechazo de perturbaciones:
1)Obtener la función de transferencia de lazo cerrado G_{de}(s) desde d_o(t) hasta *e*(t) en función de *K*.
2)Frente al oleaje indicado antes, obtener la amplitud *E* de $e(t) \approx E \sin(2\,\pi\,t + \phi_e)$ en régimen permanente, como función de *K*.
3)Particularizar lo anterior para *K*→0 y para *K*→∞, determinando la amplitud *E*[m] en ambos casos, comentando qué consecuencias se tendrían en el sistema de control.

2B) Rechazo de perturbaciones y moderación del control:
1)Obtener la función de transferencia de lazo cerrado G_{du}(s) desde d_o(t) hasta *u*(t) en función de *K*.
2)Frente al oleaje indicado arriba, obtener la amplitud *U* de $u(t) \approx U \sin(2\,\pi\,t + \phi_u)$ en régimen permanente, como función de *K*.
3)Particularizar lo anterior para *K*→0 y para *K*→∞, determinando la amplitud *U* [m/s] en ambos casos, comentando qué consecuencias se tendrían en el sistema de control.

Trabajo (2) del alumno en laboratorio:

En el sistema de control de profundidad con planta *P*(s)=1/s, controlador PI *C*(s)=*K*(s+1)/s, son nulas *r(t)* y $d_i(t)$, y aparece una perturbación $d_o(t)$. El estado del mar es de olas de 2*D_0 m y frecuencia f_i Hz, por tanto:

$$d_o(t) \approx D_0 \sin(2\,\pi\,f_i\,t)$$

Se pide el análisis y cálculo en Matlab de los apartados 2A y 2B. Para ello se debe programar un script de Matlab que responda a las siguientes cuestiones:

1)Obtener las funciones de transferencia de lazo cerrado G_{de}(s) desde d_o(t) hasta *e*(t) y G_{du}(s) desde d_o(t) hasta *u*(t) para los tres valores de *K* =4*pi^2*[0.01 0.1 1]

2)Frente al oleaje indicado antes, obtener la amplitud *E* de $e(t) \approx E \sin(2\,\pi\,f_i\,t + \phi_e)$ y la amplitud *U* de $u(t) \approx U \sin(2\,\pi\,f_i\,t + \phi_u)$ en régimen permanente, para los tres valores de *K* indicados y en las tres frecuencias f_i =[0.1 1 10]. Entregar al profesor/a una tabla con los valores obtenidos para *E* y otra para *U*.

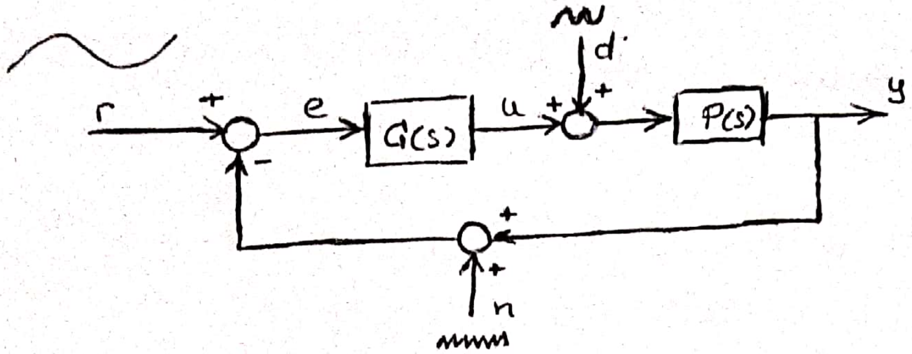
3)Representar los diagramas de Bode de módulo para los tres valores de ganancia *K*. Entregar un análisis razonado de las consecuencias que se tendrían en el sistema de control en las distintas frecuencias f_i indicadas.

El *script* tendrá las siguientes instrucciones al inicio:

```
clear all; close all;
dni =     ; % Números del DNI del alumno
rng(dni);

D0=0.5+0.4*(rand-0.5);       % Amplitud de la señal do(t)
K=4*pi^2*[0.01, 0.1, 1];     % Valores de ganancia del controlador C(s)=K(s+1)/s
f_i=[0.1 1 10];              % Valores de frecuencia Hz
w = 2*pi*f_i;
```

Nota: instrucciones de Matlab útiles son *evalfr*, *abs*, *bodemag*



$P(s) = \frac{1'3}{s+0'01}$

$C(s) = K \cdot \frac{s+0'2}{s}$

$C(j\omega) = \frac{K(j\omega+0'2)}{j\omega}$

$|C(j\omega)| = \frac{K\sqrt{\omega^2+0'2^2}}{\omega}$

m/s
$y(t)$ ← Desviación de velocidad

$V_0 = 25\ m/s \approx 90\ Km/h$

$u(t) =$ ← Limitada a $|u(t)| \leq 0'5$ $\quad -0'5 \leq u(t) \leq 0'5$ ← Posición del acelerador

$d(t) = 100 Kg$ ← Perturbación

$d = 0'5 \rightarrow 50 Kg$

n ← Ruido

$r = 0$ (se desea $V_0 = cte$ y $y \approx 0$)

(Tr Pr 1) → Desarrollo de los cálculos teóricos de los ejemplos 1, 2 y 3

Ejemplo 1 → Rechazo de perturbaciones

→ Si queremos vehículo a $V cte = 90 Km/h \Rightarrow y(t) \approx 0$

$f_d = 0'1\ Hz \rightarrow \omega_d = 2\pi f_d = 0'628\ rad/s$

→ La amplificación o atenuación de la velocidad del viento sobre la velocidad de crucero se mide con $|G_{yd}(j\omega_d)|$

→ Un buen rechazo de atenuación $\Rightarrow |C(j\omega_d)| \uparrow\uparrow$

1a) Valor $|G_{yd}(j\omega)|$ en función de K

$$G_{yd}(s) = \frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{1'3}{s+0'01}}{1+\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = \frac{1'3\ s}{s^2+0'01s+1'3Ks+0'26K} = \frac{1'3\ s}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K}$$

$$G_{yd}(j\omega) = \frac{1'3\ j\omega_d}{-\omega_d^2+(0'01+1'3K)j\omega_d+0'26K} \rightarrow |G(j\omega_d)| = \frac{1'3\omega_d}{\sqrt{(-\omega_d^2+0'26K)^2+(0'01+1'3K)^2\omega_d^2}}$$

1b) Valor $|G_{yd}(j\omega_d)|$ con $K = 0'5$

$$|G_{yd}(j\omega_d)|_{\substack{\omega_d = 0'628 \\ K=0'5}} = 1'6606$$

$$|G_{yd}(j\omega_d)|_{dB} = 4'405 dB$$

→ De la simulación:

Una ganancia (K) de 1 nos da una respuesta con un módulo inferior a 0dB

1c) Efecto del viento de ± 50Kg ($Ad = 0'5$) sobre la velocidad de crucero (90Km/h)

→ De lo anterior sacamos:

$d(t) = Ad \operatorname{sen}(\omega d t)$ ⟶ con $Ad = 0'5$

$y(t)$ → desviación respecto a la velocidad de crucero

$y(t) = A_y \operatorname{sen}(\omega d t + \phi_y)$ ⟶ con $A_y = Ad\,|G_{yd}(j\omega d)| = 0'5 \cdot 1'6606 = 0'8303\ m/s \simeq 3Km/h$

→ El control de crucero oscila ± 3Km/h ⟹ $\boxed{87\frac{Km}{h} \leq V_0 \leq 93\frac{Km}{h}}$

Ejemplo 2 → Rechazo de perturbaciones y moderación del control $d(t) \dashrightarrow u(t)$

→ Se desea que la aparición de perturbaciones $d(t)$ no afecte mucho a la señal de actuación $u(t)$ ⟹ Rechazo perturbaciones + moderación de control $u(t)$

$\omega d = 0'628\ rad/s$

$$G_{ud}(s) = \frac{-CP}{1+CP} = \frac{-\dfrac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}}{1+\dfrac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = \frac{-1'3K(s+0'2)}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K}$$

$$G(j\omega d) = \frac{-1'3K(j\omega+0'2)}{-\omega^2+(0'01+1'3K)j\omega+0'26K}$$

$$|G(j\omega d)| = \frac{1'3K\sqrt{0'2^2+\omega_d^2}}{\sqrt{(-\omega_d^2+0'26K)^2+(0'01+1'3K)^2\omega_d^2}}$$

→ De la simulación ⟵ Sólo para entenderme yo.

$Au = |G_{ud}(j\omega d)|\,Ad$

$\omega d \simeq 0'6$ → la mejor respuesta es $K = 0'1$ pero presenta un máximo de resonancia en $\omega r = 0'14\ rad/s$ de casi 4dB ≈ Amplificación = $\underline{1'6}$ ⊛

Entonces, si la perturbación baja de $\omega = 0'14\ rad/s$, siendo $Ad = 0'5$ (±50Kg) la señal $u(t)$ oscilará con una amplitud $Au = 0'5 \cdot \underline{1'6} = 0'8$.

Como la amplitud del pedal está limitada a $|u(t)| \leq 0'5$, una ganancia de 0'1 hará que el servo del pedal sature en los topes.

Ejemplo 3 → Inmunidad al ruido y moderación de control

→ Se desea estudiar el comportamiento $n(t) \longrightarrow u(t)$ → Impacto del ruido $n(t)$ sobre el actuador $u(t)$.

→ En frecuencia:

$$n(t) = A_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \longrightarrow u(t) = A_u \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi_u)$$

3a) ¿$G_{un}(s)$?

$$G_{un} = \frac{-C}{1+CP} = \frac{\frac{-K(s+0'2)}{s}}{1+\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = \frac{\overbrace{-K(s+0'2)(s+0'01)}^{s^2+(0'01+0'2)s+0'002}}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K}$$

3b) ¿$|G_{un}(j\omega_n)|$?

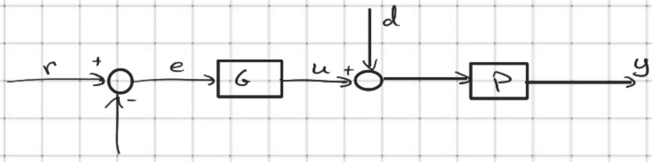
$$G_{un}(j\omega_n) = \frac{-K(-\omega_n^2+0'21j\omega_n+0'002)}{-\omega_n^2+(0'01+1'3K)j\omega_n+0'26K}$$

$$|G_{un}(j\omega_n)| = \frac{K\sqrt{(-\omega_n^2)^2+(0'21\omega_n)^2+0'002^2}}{\sqrt{(-\omega_n^2+0'26K)^2+(0'01+1'3K)^2\omega_n^2}}$$

3c) $\left.\begin{array}{l}\omega_n = 100 \text{ rad/s } (16\text{Hz}) \\ K = 0'5\end{array}\right\} |G_{un}(j\omega_n)|_{\omega_n}$

$$|G_{un}(j\omega_n)| \simeq 0'5$$

$$|G_{un}(j\omega_n)|_{dB} = 20\log(0'5) = -6\text{dB}$$



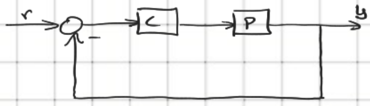
$P(s) = \frac{1'3}{s+0'01}$

$C(s) = K \; \frac{s+0'2}{s}$

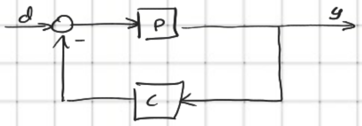
Ejercicio 1

1a)

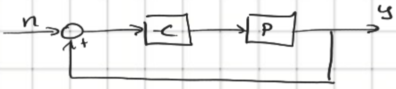
$Y(s) = \frac{C(s)\,P(s)}{1+C(s)\,P(s)} R(s)$



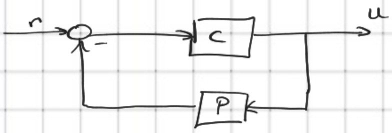
$Y(s) = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} D(s)$



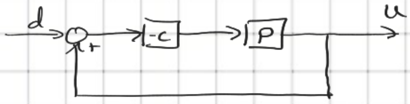
$Y(s) = \frac{-C(s)\,P(s)}{1+C(s)P(s)} N(s)$



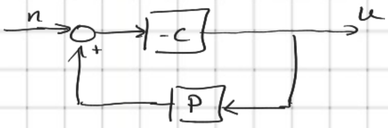
$U(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)} R(s)$



$U(s) = \frac{-C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} D(s)$



$U(s) = \frac{-C(s)}{1+C(s)P(s)} N(s)$



1b)

$E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+C(s)P(s)}}_{G_{er}(s)} R(s) + \underbrace{\frac{-P(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{ed}(s)} D(s) + \underbrace{\frac{-1}{1+C(s)P(s)}}_{G_{en}(s)} N(s)$

Ejercicio 2

→ Inmunidad al ruido $|G_{yn}(j\omega_n)| \approx 0 \rightarrow \left|\frac{-CP}{1+CP}\right| \approx 0 \Rightarrow$ Necesitamos una C muy baja para que el módulo se aproxime a 0

→ Moderación del control (ó Esfuerzo de Control) $|G_{ur}(j\omega_r)| \approx 0 \Rightarrow \left|\frac{C}{1+CP}\right| = 0 \rightarrow$ C debe ser muy pequeña

Ejemplo 1 → Rechazo de perturbaciones

$f_d = 0'1\,Hz \rightarrow \omega_d = 2\pi f_d = 0'628\ rad/s$

1a)

$$G_{yd}(s) = \frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{1'3}{s+0'01}}{1+\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = \frac{1'3s}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K}$$

$$G_{yd}(j\omega_d) = \frac{1'3j\omega_d}{-\omega_d^2+(0'01+1'3K)j\omega_d+0'26K} \rightarrow |G_{yd}(j\omega_d)| = \frac{1'3\omega_d}{\sqrt{(-\omega_d^2+0'26K)^2\,(0'01+1'3K)^2\omega_d^2}}$$

1b) $K = 0'5$

$$|G_{yd}(j\omega_d)| = 1'6606 \rightarrow |G_{yd}(j\omega_d)|_{dB} = 4'405\,dB$$

1c)

$A_d = 0'5$

$$A_y = A_d\,|G_{yd}(j\omega_d)| = 0'5 = 1'6606 = 0'8303\ m/s \approx 3\,Km/h$$

→ El control de crucero oscila $\pm 3\,Km/h$ ⇒ $\boxed{87\,\frac{Km}{h} \leq V \leq 93\,\frac{Km}{h}}$

Ejemplo 2 → Rechazo de perturbaciones y moderación del control $d(t) \rightarrow u(t)$

$\omega_d = 0'628\ rad/s$

$$G_{ud}(s) = \frac{-CP}{1+CP} = \frac{-\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}}{1+\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = -\frac{1'3K(s+0'2)}{s^2+(0'01+1'3K)+0'26K}$$

$$G(j\omega_d) = \frac{-1'3K(j\omega+0'2)}{-\omega^2+(0'01+1'3K)j\omega+0'26K} \longrightarrow |G_{ud}(j\omega_d)| = \frac{1'3K\sqrt{0'2^2+\omega_d^2}}{\sqrt{(-\omega_d^2+0'26K)^2+(0'01+1'3K)^2\omega_d^2}}$$

Ejemplo 3 → Inmunidad al ruido y moderación de control

3a)

$$G_{un}(s) = \frac{-C}{1+CP} = \frac{-\frac{K(s+0'2)}{s}}{1+\frac{1'3K(s+0'2)}{s(s+0'01)}} = \frac{-K(s+0'2)(s+0'01)}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K} = \frac{-K(s^2+0'21s+0'002)}{s^2+(0'01+1'3K)s+0'26K}$$

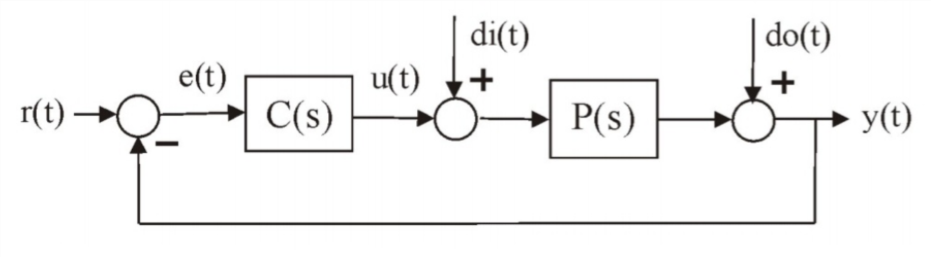
3b)

$$G_{un}(j\omega_n) = \frac{-K(-\omega_n^2+0'21j\omega_n+0'002)}{-\omega_n^2+(0'01+1'3K)j\omega_n+0'26K} \longrightarrow |G_{un}(j\omega_n)| = \frac{K\sqrt{(0'002-\omega_n^2)^2+0'21^2\omega_n^2}}{\sqrt{(0'26K-\omega_n^2)^2+(0'01+1'3K)^2\omega_n^2}}$$

3c)

$\left.\begin{array}{l}\omega_n = 100\ rad/s \\ K = 0'5\end{array}\right\}$ $|G_{un}(j\omega_n)| = 0'5$

$|G_{un}(j\omega_n)|_{dB} = -6\,dB$



$P = 1/s$ $\quad r(t) = 0$

$di(t) = 0$

$C = \frac{K(s+1)}{s}$ $\quad$ En $d_o(t)$ aparece una perturbación $\quad d_o = 0'5 \operatorname{sen}(2\pi t)$

→ El estado del mar es de olas de 1m y frecuencia 1Hz

2A) Rechazo de perturbaciones:

1)Obtener la función de transferencia de lazo cerrado $G_{de}(s)$ desde $d_o(t)$ hasta $e(t)$ en función de K.

2)Frente al oleaje indicado antes, obtener la amplitud E de $e(t) \approx E \sin(2\pi t + \phi_e)$ en régimen permanente, como función de K.

3)Particularizar lo anterior para $K \to 0$ y para $K \to \infty$, determinando la amplitud E[m] en ambos casos, comentando qué consecuencias se tendrían en el sistema de control.

1) $G_{de}(s) = \frac{-1}{1+CP} = \frac{-1}{1 + \frac{K(s+1)}{s^2}} = \boxed{\frac{-s^2}{s^2 + Ks + K}}$

2)

$$G_{de}(j\omega) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + Kj\omega + K} \longrightarrow |G_{de}(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2+K)^2 + K^2\omega^2}}$$

$$E = |G_{de}(j\omega)|\,D = \frac{0'5\,\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2+K)^2 + K^2\omega^2}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi$$

$$\boxed{E = \frac{2\pi^2}{\sqrt{(-4\pi^2+K)^2 + 4\pi^2K^2}} = \frac{19'7392}{\sqrt{(K-39'478)^2 + 39'478\,K}}}$$

3)

$$\lim_{K\to 0} E = \frac{2\pi^2}{\sqrt{(-4\pi^2)^2}} = \frac{2\pi^2}{-4\pi^2} = -1/2$$

$$\lim_{K\to\infty} E = 0$$

→ Como K está en el denominador de $G_{de}(s)$ nos interesa que sea muy grande, para que $|G_{de}(j\omega)| \approx 0$.
Se puede ver que cuando K toma valores muy grandes ($K \to \infty$) el valor de la amplitud E tiende a ϕ.
Que el valor de E sea próximo a ϕ quiere decir que a altas ganancias el error va a ser ϕ ⇒ La carga estará en la posición correcta

→ A bajas ganancias el error es de $-0'5$ ⇒ La posición de la carga variará $\pm 0'5$m

2B) Rechazo de perturbaciones y moderación del control:

1)Obtener la función de transferencia de lazo cerrado $G_{du}(s)$ desde $d_o(t)$ hasta $u(t)$ en función de K.

2)Frente al oleaje indicado arriba, obtener la amplitud U de $u(t) \approx U \sin(2\pi t + \phi_u)$ en régimen permanente, como función de K.

3)Particularizar lo anterior para $K \to 0$ y para $K \to \infty$, determinando la amplitud U [m/s] en ambos casos, comentando qué consecuencias se tendrían en el sistema de control.

1)

$$G_{du} = \frac{-C}{1+CP} = \frac{-\frac{K(s+1)}{s}}{1+\frac{K(s+1)}{s^2}} = \frac{-\frac{K(s+1)}{s}}{\frac{s^2+Ks+K}{s^2}} = \frac{-Ks(s+1)}{s^2+Ks+K}$$

2)

$$G_{du}(j\omega) = \frac{-Kj\omega(1+j\omega)}{(-\omega^2)+Kj\omega+K} \longrightarrow |G_{du}(j\omega)| = \frac{K\omega\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(K-\omega^2)^2+K^2\omega^2}}$$

$U = |G_{du}(j\omega)|\,D$

$D = 0'5$

$\omega = 2\pi$

$$U = \frac{K\cdot 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}}{\sqrt{(K-4\pi^2)^2+4\pi^2K^2}}\cdot 0'5$$

3)

$\lim_{K\to 0} U = \frac{0}{4\pi^2} = 0$ m/s → Para bajos valores de ganancia la velocidad de elevación de la carga es constante (no presenta desviaciones)

$\lim_{K\to\infty} U = 1$ m/s → Para altos valores de ganancia la velocidad de elevación de la carga presenta una desviación de $\pm 0'5$ m/s