Escuela de Ingeniería Industrial. Universidad de Vigo. Curso 2021-2022.
Grado en Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática

LABORATORIO de INGENIERÍA de CONTROL

Práctica 3: (11-15/Marzo/2022)
Introducción al Análisis Temporal

En esta práctica se trabajará con la *Control System Toolbox* de Matlab, estudiando la respuesta temporal (frente impulso, escalón,…) de sistemas lineales (de orden 1,2,n...) especificados en función de transferencia.

Los **comandos** que podrán utilizarse son los siguientes:

```
tf, zpk, tfdata, residue, pzmap, step, impulse, ltiview
```

Ejemplos

1. Si se desea obtener la descomposición en fracciones simples de una función, podemos usar el comando **residue**

$$G(s)=\frac{6}{(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{-6}{(s+2)}+\frac{6}{(s+1)}=G1+G2$$

```
>>s=tf('s');
>>G = 6/(s+1)/(s+2);
>>[numG,denG]=tfdata(G,'v');
>>[R,P,K]=residue(numG,denG)
R =
   -6
    6
P =
   -2
   -1
K=
    []
```

De donde, para el caso de polos (-2, -1) reales simples, se deducen las fracciones R(i)/(s–P(i)) i=1,2 para G(s):

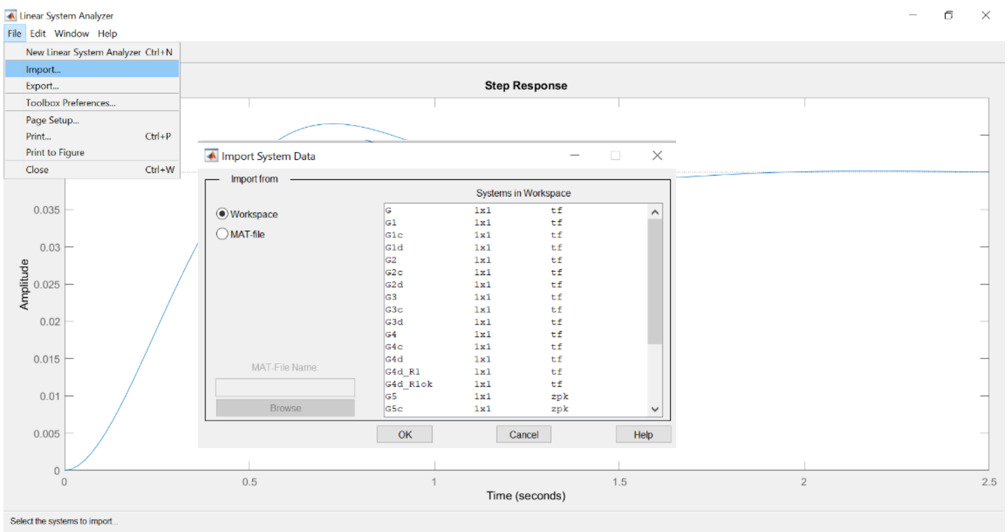
```
>>G1=R(1)/(s-P(1))
>>G2=R(2)/(s-P(2))
```

Mirar en la ayuda cómo deben interpretarse los datos que devuelve esta función para el caso de raíces reales múltiples:

```
>>help residue
```

2. Uso de herramienta **ltiview**

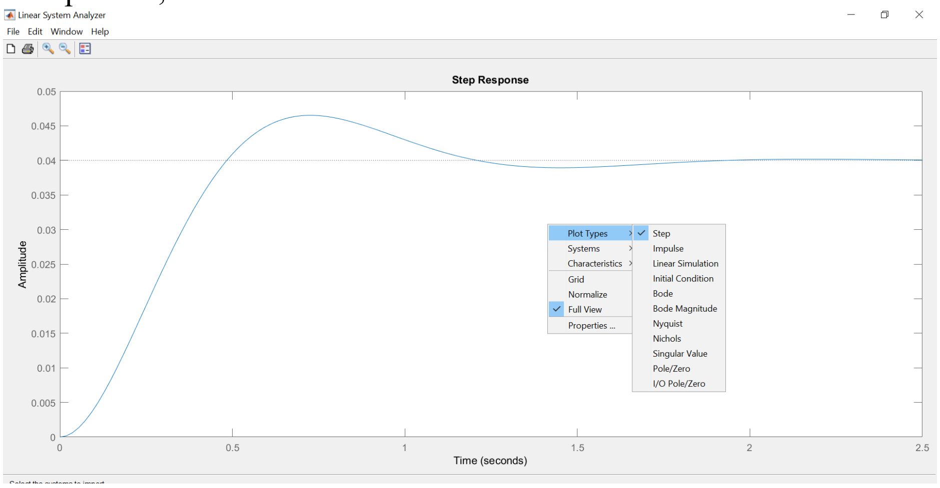
>>ltiview

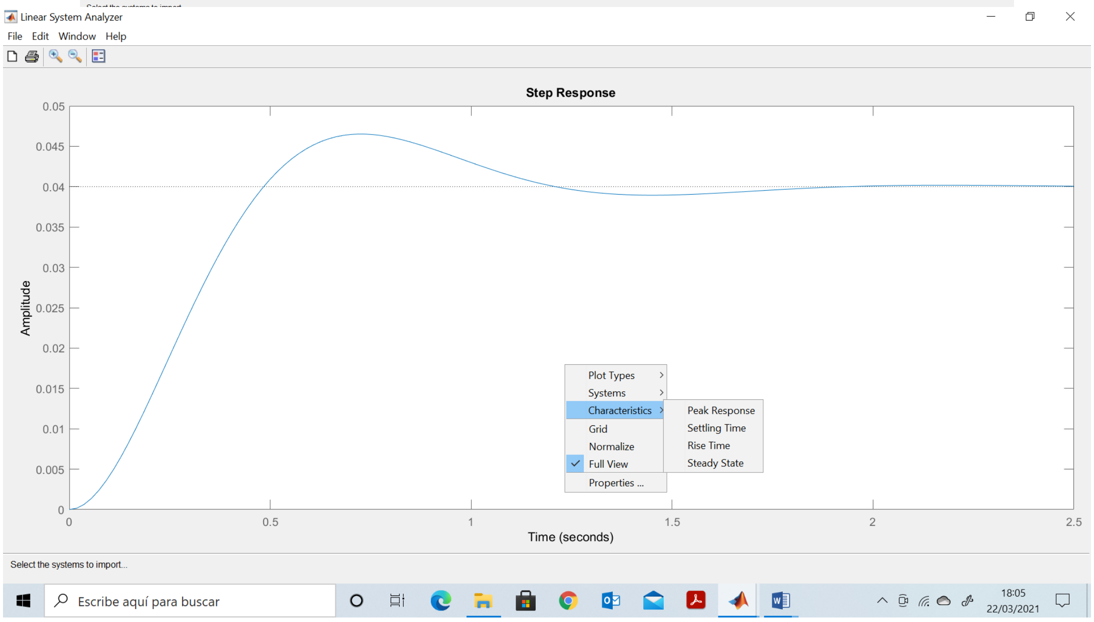


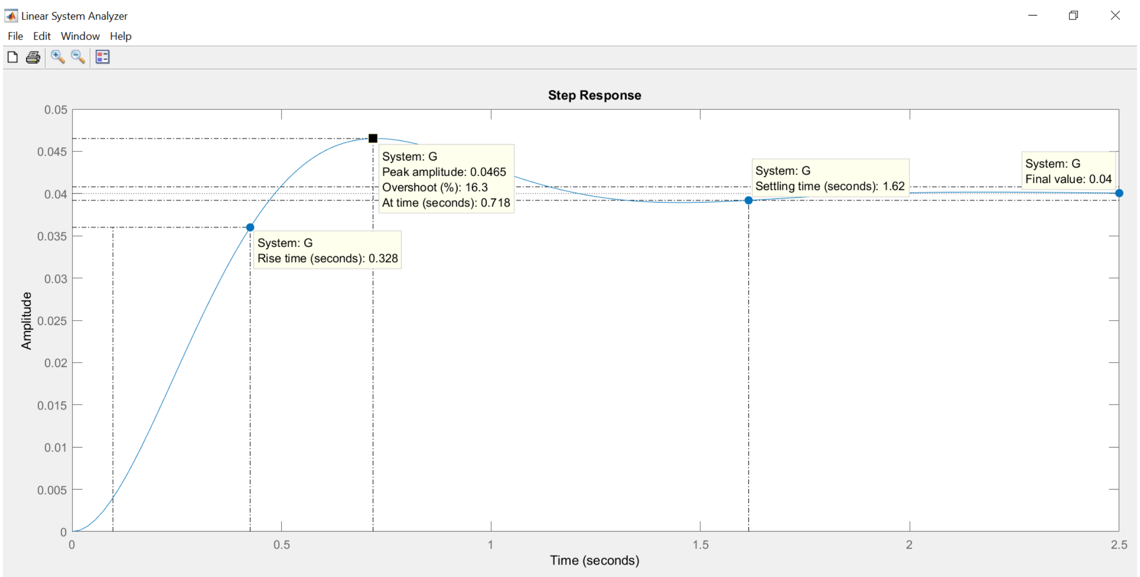
O bien:

```
>>ltiview(G,G1,G2)
```

Una vez importadas las funciones que se deseen, se puede seleccionar tipo de diagramas, características temporales, etc.







EJERCICIOS: Descomposición en fracciones simples. Dominancia.

A) Raíces reales simples:

Ejercicio previo (1): Se considera el sistema:

$$G(s) = 10\frac{\frac{s}{c}+1}{(s+1)(s+10)}$$

Si $c \approx 1$, se puede usar el *modelo reducido* $G_R(s) = 10/(s + 10)$, de respuesta a escalón $y_R(t) = 1 - e^{-10t}$. Obtener la respuesta a escalón completa $y(t) = L^{-1}(G(s) \cdot 1/s)$ y compararla con $y_R(t)$.
Para $c = 1.1$, discutir la validez de la aproximación $y(t) \approx y_R(t)$.

Ejercicio (1) en laboratorio

Programar en la ventana de comandos de *Matlab* la función:

$$G1(s) = 10\frac{\frac{s}{c}+1}{(s+1)(s+10)}$$ donde c se obtiene a partir de:

```
>>clear all;
>>dni=12345678;    % números dni del alumno
>>rng(dni);
>>c = 1+0.2*(rand-0.5)
```

Descomponer G1(s) en el sumatorio de dos funciones simples con el comando *residue* y definirlas G11, G12. Comprobar que su suma es G1.

Con ayuda de la herramienta *ltiview*:
- Obtener la respuesta a escalón unitario de G1 y cada una de sus dos componentes. Analizar los resultados, relacionando la "contribución" de cada una a la respuesta total en relación con la dominancia.

B) Raíces reales múltiples:

Ejercicio previo (2): Una forma de conseguir un escalón suavizado Y(s) es pasar un escalón normal U(s)= 1/s a través de un sistema $G(s)=a^2/(s+a)^2$, con a>0 grande.

Descomponer en fracciones simples Y(s)=U(s)G(s):

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{a^2}{(s+a)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)}$$

Obtener A,B,C, como función de a, y obtener la expresión temporal de y(t).

Ejercicio (2) en laboratorio

Programar en la ventana de comandos de *Matlab* Y(s):

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{a^2}{(s+a)^2}$$ donde *a* se obtiene a partir de:

```
>>clear all;
>>dni=12345678;    % números dni del alumno
>>rng(dni);
>>a = 20+20*(rand-0.5)
```

Descomponer Y(s) en el sumatorio de las funciones simples con el comando *residue* y definirlas, Y1, Y2, Y3. Comprobar que su suma es Y. Calcular el valor teórico de la salida y(t) aplicando la transformada inversa de Laplace.

Con ayuda de la herramienta *ltiview*:
- Obtener la respuesta a impulso unitario de Y y cada una de sus componentes. Analizar los resultados, relacionando la "contribución" de cada una a la respuesta total y verificar el suavizado que se obtiene del escalón.

C) Raíces complejas conjugadas:

Ejercicio (3) en laboratorio: Para la planta Gp(s), formada por el motor de CC y la carga (p.ej., una antena, de inercia J) de segundo orden con la que se trabajó en la Práctica 2, se calculan ejecutando el siguiente código dos controladores PI ideales C y C2 y los correspondientes sistemas en lazo cerrado:

```
clear all
close all

s  = tf('s');
dni=        ;  % Incluir números DNI alumno
rng(dni);
dv = 0.05;

R = 2.0;
L = 0.5;
Km = 0.1;
Kb = 0.1+2*dv*(rand-0.5);
Kf = 0.2;
J = 0.02;
b =Km/L/J;
a1=(L*Kf+R*J)/L/J;
a2= (R*Kf+Km*Kb)/L/J;
Gp = b/(s^2+a1*s+a2)

so = 0.01;

% Cálculo C = PI ideal con cancelación (método Pr2b)
delta = cos(atan(-pi/(log(so))));
alfa  = (a1-sqrt((a1^2)-4*a2))/2
wn    = (a1-alfa)/(delta*2)
ts    = 4/(wn*delta)

Kp = (wn^2+2*alfa*delta*wn-a2)/b;
KI =(alfa*wn^2)/b;
C= (Kp*s+KI)/s

%Cálculo C2 = PI ideal sin cancelación (método general fijando SO, ts)
ts2 = 0.6
wn2=4/(ts2*delta)
alfa2 = a1-2*delta*wn2
Kp2 = (wn2^2+2*alfa2*delta*wn2-a2)/b;
KI2 =(alfa2*wn2^2)/b;
C2= (Kp2*s+KI2)/s

T1 = feedback(Gp*C,1);
T2= feedback(Gp*C2,1);
```

Programar este código en un script de Matlab y ejecutarlo. Obtener los valores de: alfa, wn, ts, C, ts2, wn2, alfa2, C2.

Continuar dicho código para:
-Descomponer T1(s) en el sumatorio de tres funciones simples T11 a T13 con el comando *residue.*
-Definir las funciones T11 a T13 a partir de los datos que devuelve la función *residue..*

-Eliminar la presencia de residuos complejos ... por ejemplo si T12 y T13 son las “complejas”, definir T14 = T12 + T13. Comprobar que T1 = T11 + T14.

Con ayuda de la herramienta *ltiview*:
- Obtener la respuesta a escalón unitario de T1 y cada una de sus componentes (no “complejas” T1i).
Analizar los resultados, relacionando la "contribución" de cada una a la respuesta total en relación con la dominancia.
-Ver el mapeado cero/ polo de T1

Realizar el mismo estudio (descomposición en fracciones, definición de funciones, eliminación complejas, respuesta a escalón de T2 y contribuciones, mapeado cero/polo) para la función T2(s)

¿Se cumple el tiempo de establecimiento impuesto en este diseño? ¿Por qué?

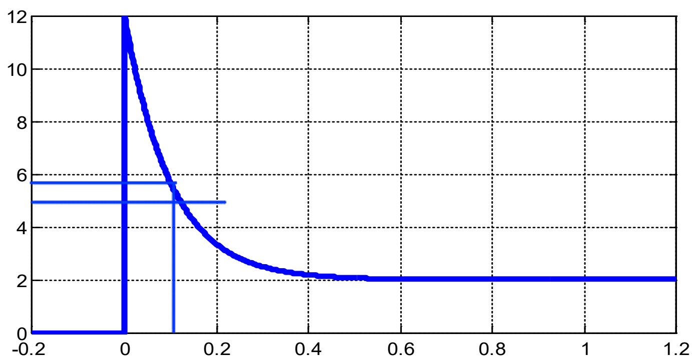
EJERCICIOS: Identificación de sistemas de primer y segundo orden

A) Sistemas de primer orden:

Ejercicio previo (3): Una rutina de software ejecuta un regulador PD con derivada filtrada, G(s). Se desconocen las ganancias K_p,K_d y la constante de tiempo ε del filtro, pero se obtiene la respuesta a escalón unitario, mostrada en la figura. ¿Cuáles son los parámetros K_p,K_d,ε, del regulador?

$$\boxed{G(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{(1+\varepsilon \cdot s)}}$$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}



NOTA: Obtener la expresión de la salida temporal $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\cdot U(s)\right)$ y sus valores y(0), y(∞), y(ε) en función de K_p, K_d, ε. Comparar con los resultados numéricos que se deducen de la gráfica para calcular los parámetros desconocidos.

Ejercicio (4) en laboratorio:

Programar la función G(s) con los parámetros identificados en el ejercicio anterior y obtener su respuesta a escalón unitario.

Ejercicio previo (4): La cantidad de Carbono-14 en una muestra ósea animal sigue la ley de primer orden y(t), donde y0 es la cantidad original (animal vivo) conocida. En función de esta ley, se define x(t):

$$y(t) = y0 \cdot e^{-pt}, \qquad x(t) = 1 - \frac{y(t)}{y0}$$

a) Demostrar que x(t) es la respuesta a escalón unitario de un sistema de primer orden G(s).
b) El tiempo t_d de semidesintegración del C-14 es t_d=5570 (años). Es decir, x(t_d)=0.5 Determinar el coeficiente ‘p’.
c) Si cierta muestra presenta un valor x=0.25, deducir la antigüedad aproximada de la misma.

Ejercicio (5) en laboratorio:

Para el sistema anterior, con un tiempo de semidesintegración td = 5570+60*(rand-0.5), y por tanto $x(t_d)=0.5$, programar el cálculo de p_c, el sistema de primer orden $Gc=p_c/(s+p_c)$ y representar su respuesta a escalón. Si la muestra presenta un valor x=0.40, medir en la gráfica la antigüedad aproximada de la misma.

B) Sistemas de segundo orden:

Ejercicio previo (5): Un joystick para aplicaciones de realidad virtual permite programar la impedancia:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+K\cdot y(t)=u(t) \qquad \text{S.O.}=e^{\frac{-\pi}{tg\theta}} \qquad t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

donde y(t),u(t) son posición y fuerza total en la palanca. Se desea que, para fuerza en escalón de valor u=1Nw, la palanca se desplace en permanente $y(\infty)=0.01$m, a través de un transitorio con sobreoscilación del SO=10% en un tiempo de pico tp=0.5s.

Obtener la función de transferencia G6 desde U(s) hasta Y(s), y expresarla como un segundo orden normalizado con una ganancia Kp. Obtener los valores necesarios de M,B,K.

Ejercicio (6) en laboratorio:

Programar la función de transferencia G6 obtenida en el ejercicio anterior y representar su respuesta a escalón unitario. Verificar en la gráfica las características temporales del sistema SO, tp, $y(\infty)$.

EJERCICIO: Reducción de sistemas

Ejercicio (7) en laboratorio

Para el sistema de control de la grúa que regula la profundidad y(t)[m] de una carga submarina, con el que se trabajó en la Práctica 2b, programar en un *script* de *Matlab* la función de lazo cerrado T(s) que resulta al aplicar un PD con derivada filtrada en serie con la planta 1/s:

$$T(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}=\frac{(p_1p_2/c_2)(s+c_2)}{(s+p_1)(s+p_2)},$$ donde p_1, p_2, c_2 se obtienen a partir de:

```
clear all;
dni=12345678;    % números dni del alumno
rng(dni);
p1=1+0.2*(rand-0.5);
p2=11+0.2*(rand-0.5);
c2=10+0.2*(rand-0.5);
```

Calcular el sistema reducido T_R equivalente, programarlo y representar la respuesta a escalón de ambos sistemas.

→ Ejercicio previo 1

$$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{\frac{10s}{c}+10}{(s+1)(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{D}{s+10}$$

$$A = Y(s)\cdot s\Big]_{s=0} = 1$$

$$B = Y(s)(s+1)\Big]_{s=-1} = \frac{-\frac{10}{c}+10}{-9}$$

$$D = Y(s)(s+10)\Big]_{s=-10} = \frac{-\frac{100}{c}+10}{90}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{-10/c+10}{-9}}{s+1} + \frac{\frac{-100/c+10}{90}}{s+10} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \underbrace{1}_{\infty} - \overbrace{\left(\frac{-\frac{10}{c}+10}{9}\right)e^{-t} + \left(\frac{-\frac{100}{c}+10}{90}\right)e^{-10t}}^{\text{TRANSITORIO}}$$

→ Como $y(t) = y_t + y_\infty$ $\begin{cases} y_\infty = 1 \\ y_t = 0 = \lim_{t\to\infty}\left[-\left(\frac{-\frac{10}{c}+10}{9}\right)e^{-t} + \left(\frac{-\frac{100}{c}+10}{90}\right)e^{-10t}\right] \end{cases}$

→ Si cogemos la respuesta $y_R(t) = 1 - e^{-10t}$ → Vemos que $\begin{cases} y_\infty = 1 \\ y_t = 0 = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-10t}\right] \end{cases}$

$$\boxed{\rightarrow \text{Cuando } c = 1'1 \rightarrow y(t) = 1 - 0'101e^{-t} - 0'9e^{-10t}}$$

→ Ejercicio previo 2

$$\left.\begin{array}{l} U(s) = 1/s \\ G(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2} \end{array}\right\} Y(s) = \frac{a^2}{s(s+a)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{s+a}$$

$$A = Y(s)\cdot s\Big]_{s=0} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$B = Y(s)(s+a)^2\Big]_{s=-a} = \frac{a^2}{s}\Big]_{s=-a} = \frac{a^2}{-a} = -a$$

$$C = \frac{dB}{ds}\Big]_{s=-a} = \frac{-a^2}{s^2} = \frac{-a^2}{a^2} = -1$$

⇒

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{a}{(s+a)^2} - \frac{1}{s+a}\right]$$

$$y(t) = 1 - at\cdot e^{-at} - e^{-at} \rightarrow \boxed{y(t) = 1 - (1+at)\,e^{-at}}$$

→ Ejercicio previo 3

$$G(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{1+\varepsilon s} \rightarrow G(s) = \frac{K_p(1+\varepsilon s) + K_d s}{1+\varepsilon s} = \frac{\frac{(K_d + K_p\varepsilon)s + K_p}{\varepsilon}}{s + 1/\varepsilon}$$

$$U(s) = 1/s \qquad Y(s) = \frac{\frac{(K_d + K_p\varepsilon)s + K_p}{\varepsilon}}{(s + 1/\varepsilon)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/\varepsilon}$$

$$A = Y(s) \cdot s \Big]_{s=0} = K_p$$

$$B = Y(s)\cdot(s+1/\varepsilon)\Big]_{s=-1/\varepsilon} = \frac{(K_d + K_p\varepsilon)s + K_p}{\varepsilon \cdot s}\Big]_{s=-1/\varepsilon} = \frac{(K_d + K_p\varepsilon)(-1/\varepsilon) + K_p}{-1} = \frac{-K_d/\varepsilon - K_p + K_p}{-1} = \frac{K_d}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K_p}{s} + \frac{K_d/\varepsilon}{s+1/\varepsilon} \rightarrow \boxed{y(t) = K_p + \frac{K_d}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= K_p + \frac{K_d}{\varepsilon} \\ y(\infty) &= K_p \\ y(\varepsilon) &= K_p + \frac{K_d/\varepsilon}{e} \end{aligned}}$$

$y(\infty) = 2 \rightarrow \boxed{K_p = 2}$

$y(0) = 12 = K_p + \frac{K_d}{\varepsilon} \rightarrow \frac{K_d}{\varepsilon} = 10$

$y(\varepsilon) = 2 + \frac{10}{e} \rightarrow y(\varepsilon) = 5'679$ ← Lo busco en la gráfica

↳ $\boxed{\varepsilon \approx 0'1}$

$\boxed{K_d = 1}$

→ Ejercicio previo 4

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-pt}$$

$$x(t) = 1 - \frac{y(t)}{y_0}$$

a)

$$x(t) = 1 - \frac{\cancel{y_0} e^{-pt}}{\cancel{y_0}} = 1 - e^{-pt}$$

→ Como la transformada inversa de Laplace de un sistema de primer orden del tipo $G(s) = \frac{1}{s+p}$ es e^{-pt}, se verifica que $x(t)$ es la respuesta a escalón unitario de un sistema de primer orden

b) $t_d = 5570$ ¿p?
$x(t_d) = 0'5$

$$x(t) = 1 - e^{-pt} \rightarrow 0'5 = 1 - e^{-p \cdot 5570} \rightarrow 1 - 0'5 = \frac{1}{e^{5570p}} \rightarrow p = \frac{\ln 2}{5570} \rightarrow p = 1'24 \times 10^{-4}$$

c)

$$x(t_d) = 0'25 = 1 - e^{-p \cdot t_d} \rightarrow 1 - 0'25 = \frac{1}{e^{p t_d}} \rightarrow \ln(4/3) = p \cdot t_d \rightarrow t_d = 2311'76 \text{ (años)}$$

→ Ejercicio previo 5

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + K y(t) = u(t)$$

$$S.O. = e^{-\frac{\pi}{tg\theta}} = 0'1$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0'5\,s$$

$y(t)$ = posición → $y(\infty) = 0'01m$

$u(t)$ = fuerza → Escalón unitario

$$0'1 = e^{-\pi/tg\theta} \rightarrow \ln 0'1 = -\pi/tg\,\theta$$

$$tg\theta = -\pi/\ln 0'1 = 1'3644 \rightarrow \theta = 56'761$$

$$\xi = \cos\theta = 0'5911$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{0'5\sqrt{1-\xi^2}} = 7'7897$$

$$\mathcal{L}[\text{función impedancia}] = M \cdot s^2 Y(s) + Bs\,Y(s) + K\,Y(s) = U(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$\boxed{\rightarrow G_G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}}}$$

→ Ec característica sist 2º orden (con ganancia)

$$G(s) = \frac{K_p\,\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ → Igualando términos con G_G

$$\frac{B}{M} = 2\xi\omega_n = 9'20898$$

$$\frac{K}{M} = \omega_n^2 = 60'679$$

$$K_p\,\omega_n^2 = \frac{1}{M}$$

→ sabemos que $y(\infty) = 0'01$

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)$$

$$\lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1/s \cdot s}{Ms^2+Bs+K} = \frac{1}{K} = 0'01$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow K = 100 \\ \rightarrow M = 1'648 \\ \rightarrow B = 15'1765 \\ \rightarrow K_p = 0'01 \end{array}}$$

$$\boxed{G_G(s) = \frac{1/1'648}{s^2 + 9'20898s + 60'679}}$$