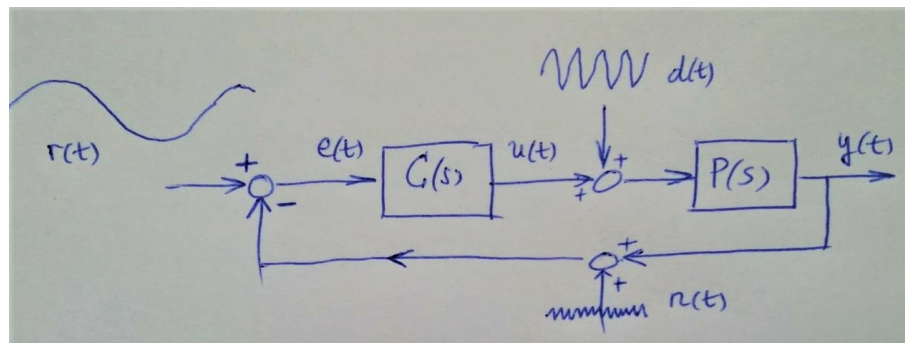


## Planteamiento del Problema de Diseño (ver diapositivas páginas 3-4)

**Objetivos de diseño** La Fig.1 muestra la configuración de un lazo de control formado por la planta o proceso  $P(s)$  y el controlador o regulador  $C(s)$ . Por simplicidad se suprimieron los bloques actuador y sensor, que suelen ser relativamente rápidos y podrían aproximarse por ganancias  $K_{act}, K_{sens}$  que se integran dentro de la planta  $P(s)$ .



**Figura 1** Lazo de control típico y señales externas  $r(t)$ ,  $d(t)$ ,  $n(t)$ .

Se consideran tres señales externas, la *consigna o referencia*  $r(t)$ , la *perturbación*  $d(t)$  y el *ruido*  $n(t)$ . La Fig.1 muestra sus formas de onda en el caso de que sean senoidales, para enfatizar sus frecuencias relativas. Las referencias  $r(t)$  suelen ser de variación lenta y baja frecuencia. El ruido del sensor  $n(t)$  es de baja amplitud y aleatorio, y se puede aproximar por senoidales de alta frecuencia. Las frecuencias de la perturbación  $d(t)$  dependen más del caso concreto, pueden ser de baja, media o alta frecuencia.

El *problema de diseño* puede resumirse así:

- Dada la planta  $P(s)$
- Dadas las características de las señales externas  $r(t)$ ,  $d(t)$ ,  $n(t)$
- Obtener un controlador  $C(s)$  que consiga una determinada reacción o respuesta de las señales 'internas' del sistema,  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$ , ... frente a las entradas externas.

Estas respuestas, reacciones o comportamientos que se trata de conseguir para el lazo cerrado se llaman *objetivos de diseño* y se clasifican en:

- Seguimiento de referencias  $r(t)$  por parte de la salida  $y(t)$ , es decir que  $y(t) \approx r(t)$
- Rechazo de las perturbaciones  $d(t)$  (que  $d(t)$  afecte lo menos posible)
- Inmunidad frente al ruido  $n(t)$  (que  $n(t)$  afecte lo menos posible)
- Moderación del esfuerzo de control  $u(t)$  (que  $|u(t)|$  no alcance valores elevados)

### Funciones de transferencia de lazo cerrado

Primeramente, expresemos la respuesta del sistema (señales internas  $y(t), u(t), \dots$ ) frente a entradas externas. Usando transformadas de Laplace resulta:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{yr}} R(s) + \underbrace{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{yd}} D(s) + \underbrace{\frac{-C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{yn}} N(s),$$
$$U(s) = \underbrace{\frac{C(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{ur}} R(s) + \underbrace{\frac{-C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{ud}} D(s) + \underbrace{\frac{-C(s)}{1+C(s)P(s)}}_{G_{un}} N(s).$$

Las anteriores expresiones se basan en dos propiedades. Primero, el *principio de superposición*, que nos dice que en sistemas lineales con múltiples entradas la salida total (p.ej.  $Y(s)$ ) es suma de las salidas que se obtendrían activando una entrada y anulando las restantes (es decir  $G_{yr}(s)R(s)$ ,  $G_{yd}(s)D(s), \dots$ )

La segunda propiedad es la *regla de Mason* que indica que en un lazo típico todas las funciones de transferencia de lazo cerrado  $G_{ij}(s)$  (salida 'i', entrada 'j') tienen el mismo denominador  $(1 + CP)$  y tienen como numerador el 'camino directo de j a i'. Por ejemplo, en la Fig.1, empezando en  $n(t)$  y siguiendo el flujo de señal hasta  $u(t)$  nos encontramos  $-1$  y  $C(s)$ , por tanto el numerador de  $G_{un}$  es  $-1 \cdot C(s)$ .

**Ejercicio 1 (1a)** Verificar los seis numeradores de las seis fracciones  $G_{ij}$  de arriba, encontrando en la Fig.1 los caminos directos asociados.

**(1b)** En la Fig.1, la salida medida (tras el ruido de sensor) es  $y_m(t) = n(t) + y(t)$ , y el error es  $e(t) = r(t) - y_m(t)$ . Obtener la expresión completa de  $E(s)$ , con sus tres sumandos detallados:

$$E(s) = \underbrace{\frac{\dots}{1+C(s)P(s)}}_{G_{er}} R(s) + \underbrace{\frac{\dots}{1+C(s)P(s)}}_{G_{ed}} D(s) + \underbrace{\frac{\dots}{1+C(s)P(s)}}_{G_{en}} N(s).$$

**Seguimiento de referencias** Al formular un objetivo de diseño debemos elegir la entrada→salida a las que se refiere. En seguimiento de referencias elegimos  $r(t) \rightarrow y(t)$ , relacionadas por  $Y(s) = G_{yr}(s)R(s)$ . Para tomar el punto de vista frecuencial fijamos una entrada senoidal de cierta amplitud y frecuencia que da lugar (el lazo cerrado es estable) a una salida estacionaria de la misma frecuencia:

$$r(t) = A_r \sin(\omega_r t) \rightarrow y(t) = A_y \sin(\omega_r t + \phi_y),$$

donde amplificación y desfase relativo cumplen:

$$A_y = A_r |G_{yr}(j\omega_r)|, \quad \phi_y = \text{Arg}(G_{yr}(j\omega_r)).$$

Para un buen *seguimiento de referencias*,  $r(t) \approx y(t)$ , ambas señales tienen que tener la misma amplitud, y el desfase debe ser nulo. Esto equivale a que  $G_{yr}(j\omega_r) \approx 1$  (módulo 1, fase 0). Para que la fracción compleja  $G_{yr}(j\omega_r)$  sea próxima a 1 su denominador  $1 + C(j\omega_r)P(j\omega_r)$  tiene que ser próximo al numerador  $C(j\omega_r)P(j\omega_r)$ . Esto solo es posible si el '1' es despreciable frente a  $C(j\omega_r)P(j\omega_r)$ . Es decir:

$$G_{yr}(j\omega_r) = \frac{C(j\omega_r)P(j\omega_r)}{1+C(j\omega_r)P(j\omega_r)} \approx 1 \Leftrightarrow |C(j\omega_r)P(j\omega_r)| \gg 1 \Leftrightarrow |C(j\omega_r)| \uparrow\uparrow.$$

Por tanto, si se quiere mejorar el seguimiento, el módulo  $|C(j\omega_r)|$  debe hacerse grande (símbolo  $\uparrow\uparrow$ ) para las frecuencias  $\omega_r$  (bajas frecuencias en el caso de referencias).

**Rechazo de perturbaciones** Este objetivo significa que una perturbación  $d(t) = A_d \sin(\omega_d t)$  debe afectar lo menos posible a las señales internas. Si elegimos la salida  $y(t) = A_y \sin(\omega_d t + \phi_y)$ , la amplitud  $A_y$  debe ser lo más baja posible, es decir  $A_y/A_d = |G_{yd}(j\omega_d)|$  debe ser pequeña (la fase no importa aquí):

$$|G_{yd}(j\omega_d)| = \left| \frac{P(j\omega_d)}{1 + C(j\omega_d)P(j\omega_d)} \right| \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad |C(j\omega_d)| \uparrow\uparrow.$$

Como la  $P$  es fija y la  $C$  solo aparece en el denominador, la única forma general de hacer pequeña la fracción es hacer  $|C(j\omega_d)|$  muy grande, en el rango de frecuencias  $\omega_d$  que tengan las perturbaciones  $d(t)$  (que podrían presentarse en baja, media o alta frecuencia).

**Ejercicio 2** Acabamos de explicar las consecuencias en el dominio de la frecuencia de los objetivos de seguimiento de referencias y de rechazo de perturbaciones. Se pide hacer una discusión similar y llegar a una conclusión sobre si  $|C(j\omega)|$  debe ser alto ( $\uparrow\uparrow$ ) o bajo ( $\downarrow\downarrow$ ) para los objetivos:

- Inmunidad al ruido. Se quiere que el ruido  $n(t)$  no tenga efecto apreciable sobre ninguna señal del lazo, por ejemplo elegimos  $n(t) \rightarrow y(t)$ . Imponemos  $|G_{yn}(j\omega_n)| \approx 0$ , para las frecuencias  $\omega_n$  del ruido (altas frecuencias). ¿ $|C(j\omega_n)|$  debe ser alto ( $\uparrow\uparrow$ ) o bajo ( $\downarrow\downarrow$ ) ?
- Moderación del control. Se quiere que cualquier entrada externa tenga un efecto lo más reducido posible sobre la actuación  $u(t)$ . Por ejemplo, si se elige el par  $r(t) \rightarrow u(t)$ , se debe imponer que  $|G_{ur}(j\omega_r)| \approx 0$ , para las frecuencias  $\omega_r$  de las referencias (bajas frecuencias). ¿ $|C(j\omega_n)|$  debe ser alto ( $\uparrow\uparrow$ ) o bajo ( $\downarrow\downarrow$ ) ?

Las respuestas se pueden comprobar en la diapositiva de página 4.

**Compromiso entre objetivos contrapuestos** La formulación frecuencial de los 4 objetivos de diseño nos permite comprender por qué para alcanzarlos debemos hacer  $|C(j\omega)|$  alto o bajo en ciertas frecuencias dictadas por la clase de señales externas que aparecen en cada aplicación concreta.

Una observación importante es que ciertos objetivos están contrapuestos entre sí. Por ejemplo, para rechazo de perturbaciones de frecuencia  $\omega_d$  alta necesitamos que  $|C(j\omega_d)|$  sea alto para  $\omega_d$  alto. Pero para inmunidad al ruido es preciso que  $|C(j\omega_n)|$  sea bajo, también para  $\omega_n$  alto. Ambas cosas son contradictorias, si  $\omega_n \approx \omega_d$ , e imposibles de conseguir. También están contrapuestos el seguimiento de referencias y la moderación del control.

La consecuencia práctica de lo anterior es que no resulta buena idea optimizar mucho solo uno de los objetivos aislado (p.ej., seguimiento) porque estaremos empeorando alguno de los otros tres. O dicho de otra manera, los controladores a diseñar deben satisfacer un compromiso entre objetivos, y para ello es suficiente con que presenten un rendimiento mínimo aceptable garantizado con respecto a todos y cada uno de los cuatro objetivos.

**Ejemplo: Control de velocidad de crucero** Consideremos el modelo linealizado de un sistema de control de crucero (<https://www.cds.caltech.edu/~murray/books>, Ejemplo 5.11 adaptado), que tiene un diagrama como en la Fig.1 con controlador PI y planta de primer orden:

$$C(s) = K \frac{s+0,2}{s}, \quad P(s) = \frac{1,3}{s+0,01}.$$

La salida  $y(t)$  en  $m/s$  es la desviación de velocidad respecto  $v_0 = 25m/s \approx 90km/h$ . La actuación  $u(t)$  es la posición del acelerador (su desviación respecto a la posición de crucero) y está físicamente limitada a  $|u(t)| \leq 0,5$ . La perturbación  $d(t)$  refleja las fuerzas no modeladas (viento, pendiente, etc.) y está escalada por 100 Kg ( $d = 0,5$  equivale a 50Kg, etc.). El ruido  $n(t)$  ( $m/s$ ) proviene de los errores de medida, y la referencia está puesta a cero  $r = 0$  (ya que se desea velocidad fija  $v_0$  y desviación  $y \approx 0$ ).

**Ejemplo 1. Rechazo de perturbaciones  $d(t) \rightarrow y(t)$**  Se desea que el vehículo se mantenga a  $90km/h$  (es decir  $y(t) \approx 0$ ) a pesar de la fuerza externa  $d(t) \leq 0$  (viento a favor o en contra). El viento puede tener frecuencia alta (rachado), media o baja. Consideremos una frecuencia baja:

$$f_d = 0,1 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_d = 2\pi f_d \approx 0,628 \text{ rad/s}.$$

La amplificación o atenuación de la acción del viento sobre la velocidad de crucero se mide con  $|G_{yd}(j\omega_d)|$ . Ya hemos visto que un buen rechazo (atenuación) exige  $|C(j\omega_d)| \uparrow\uparrow$ , en general. Se pide:

- (1a) Valor de  $|G_{yd}(j\omega_d)|$  en función de  $K$
- (1b) Valor de  $|G_{yd}(j\omega_d)|$  para ganancia  $K = 0,5$ ,
- (1c) Efecto de viento de  $\pm 50 \text{ kg}$  ( $A_d = 0,5$ ) sobre la velocidad de crucero  $90 \text{ Km/h}$
- (1d) Comprobación en Matlab de  $|G_{yd}(j\omega_d)|$  y del efecto de la ganancia  $K$ .

Solución: (1a)

$$G_{yd}(s) = \frac{P}{1+CP} = \dots = \frac{1,3 s}{s^2 + (0,01 + 1,3K)s + 0,26K},$$

de donde

$$|G_{yd}(j\omega_d)|^2 = \frac{1,3^2 \omega_d^2}{(0,26K - \omega_d^2)^2 + (0,01 + 1,3K)^2 \omega_d^2}.$$

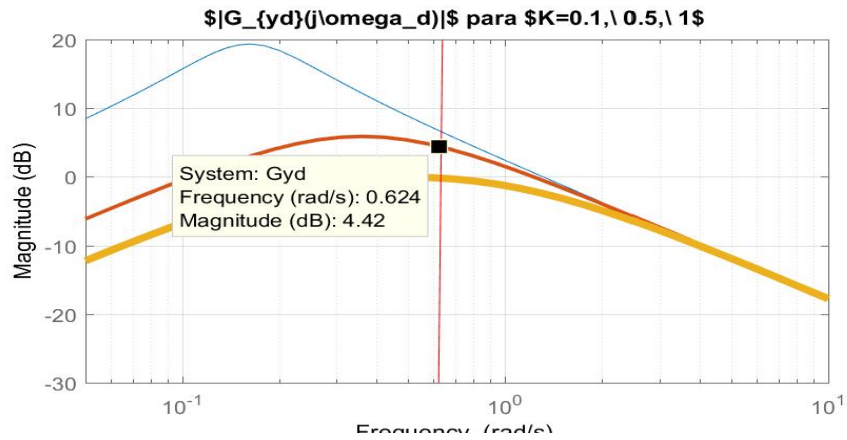
Como  $K$  está en el denominador, haciendo  $K \uparrow\uparrow$  se consigue mejorar la atenuación.

(1b) Sustituyendo  $\omega_d \approx 0,628$ ,  $K = 0,5$ , se obtiene

$$|G_{yd}(j\omega_d)| \approx 1,66 \Rightarrow |G_{yd}(j\omega_d)|_{dB} \approx 4,4 \text{ dB}.$$

(1c) Lo anterior implica que para  $d(t) = A_d \sin(\omega_d t)$  de amplitud  $A_d = 0,5$  (50 Kg), la salida  $y(t)$  (la desviación respecto a velocidad de crucero) responde como  $y(t) = A_y \sin(\omega_d t + \phi_y)$  con amplitud  $A_y = A_d |G_{yd}(j\omega_d)| = 0,5 \cdot 1,66 = 0,83 \text{ (m/s)} \approx 3 \text{ Km/h}$ . En resumen, el control de crucero a  $v_0 = 25m/s \approx 90km/h$  se resiente en el sentido de que oscila con una desviación de  $\pm 3 \text{ Km/h}$ , es decir, la velocidad oscilará de  $87 \text{ Km/h}$  a  $93 \text{ Km/h}$ .

(1d) Si estas desviaciones no son aceptables se puede resintonizar el controlador (ganancia  $K$ ) para atenuarlas. El ajuste de  $K$  puede basarse en la expresión de  $|G_{yd}(j\omega_d)|$  como función de  $K$ . Alternativamente, el efecto de distintos valores  $K = K_1, K_2, \dots$  puede estudiarse con Matlab:



**Figura 2**  $|G_{yd}(j\omega_d)|$  para  $K = 0,1$  (trazo fino),  $K = 0,5$  (medio) y  $K = 1$  (grueso).

La anterior figura se basa en el código:

```
s=tf('s'); P= 1.3/(s+0.01); K= [0.1, 0.5, 1];
for k=1:3,
    C= K(k)*(s+0.2)/s; Gyd= feedback(P,C);
    bodemag(Gyd); hold on;
end;
```

Como se ve en la Fig.2, el rechazo a perturbaciones mejora ( $|G_{yd}(j\omega_d)|$  decrece) cuando se aumenta la ganancia. En concreto, duplicando la ganancia (de  $K = 0,5$  a  $K = 1$ ) el módulo ( $4,4dB$  para  $K = 0,5$ ) ya se pone por debajo de los  $0dB$  para  $K = 1$ . Observar que aunque los cálculos se hicieron a una frecuencia fija  $\omega_d \approx 0,6$  el beneficio del aumento de  $K$  se extiende a todo el rango de frecuencias.

**Ejemplo 2. Rechazo de perturbaciones y moderación del control  $d(t) \rightarrow u(t)$**  Se desea que la aparición de perturbaciones  $d(t)$  no afecte mucho a la señal de actuación  $u(t)$ . Esto implica tanto un rechazo de perturbaciones como una moderación del control  $u(t)$ . Consideremos la misma frecuencia  $\omega_d \approx 0,628 \text{ rad/s}$ . La función de transferencia que se aplica es:

$$G_{ud}(s) = \frac{-CP}{1+CP} = \dots = \frac{-1,3 K (s+0,2)}{s^2 + (0,01 + 1,3K)s + 0,26K},$$

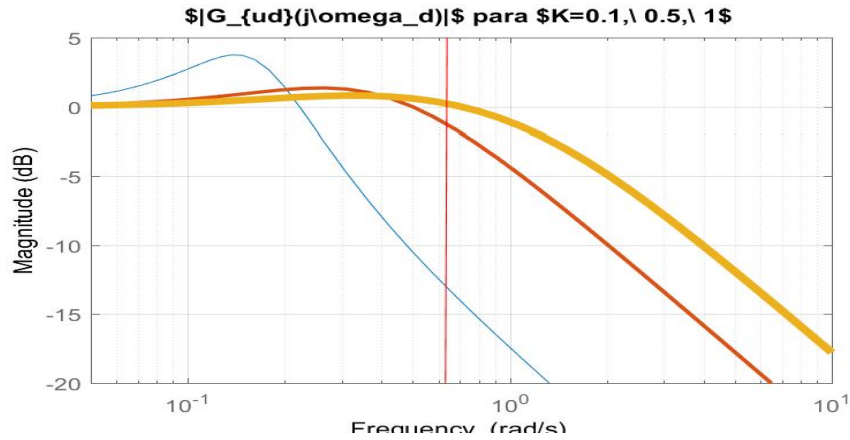
Se pide: (2a)  $|G_{ud}(j\omega_d)|$  en función de  $K$ , (2b) Comprobación en Matlab.

Para el primer punto, operamos y llegamos a:

$$|G_{ud}(j\omega_d)|^2 = \frac{1,3^2 K^2 (\omega_d^2 + 0,2^2)}{(0,26K - \omega_d^2)^2 + (0,01 + 1,3K)^2 \omega_d^2}.$$

Para el segundo punto, ejecutamos un código similar al anterior, cambiando  $G_{yd}$  por

```
Gud = - feedback( C*P, 1);
```



**Figura 3**  $|G_{ud}(j\omega_d)|$  para  $K = 0,1$  (trazo fino),  $K = 0,5$  (medio) y  $K = 1$  (grueso).

De la Fig.3 se extraen varias conclusiones. Recordar que la amplitud  $A_u$  de oscilación del control es  $A_u = |G_{ud}(j\omega_d)| A_d$  donde  $A_d$  es la amplitud de la perturbación. Por tanto, a la frecuencia estudiada  $\omega_d \approx 0,6$ , es mejor la menor ganancia  $K = 0,1$ . El problema es que a esa ganancia se presenta un máximo de resonancia a  $\omega_r \approx 0,14 \text{ rad/s}$  de casi  $4\text{dB}$ , que equivale a una amplificación de casi  $10^{4/20} \approx 1,6$ .

Esto quiere decir que si la perturbación baja de frecuencia hasta  $\omega_r \approx 0,14 \text{ rad/s}$  entonces una amplitud  $A_d = 0,5 (\pm 50 \text{ Kg})$  hace que la señal de control  $u(t)$  oscile con amplitud  $A_u = A_d |G_{ud}(j\omega_r)| = 0,5 \cdot 1,6 = 0,8$ . Recordar que  $u(t)$  es la posición del pedal del acelerador y está físicamente limitada a  $|u(t)| \leq 0,5$ . Por tanto la ganancia  $K = 0,1$  y la perturbación de  $\pm 50 \text{ Kg}$  harían que el servo del pedal se saturase en los topes (pedal pisado y suelto) produciendo un comportamiento no deseado.

**Ejercicio 3. Inmunidad al ruido y moderación del control** Se desea estudiar el comportamiento entre señales  $n(t) \rightarrow u(t)$ , es decir el impacto del ruido  $n(t)$  (debido a los sensores) sobre el actuador  $u(t)$  (pedal aceleración). En frecuencia:

$$n(t) = A_n \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad u(t) = A_u \sin(\omega_n t + \phi_u)$$

- (3a) ¿Cuál es la función de transferencia  $G_{un}(s)$  que se aplica ?
- (3b) El efecto en amplitudes es  $A_u = A_n |G_{un}(j\omega_n)|$  ¿ Cuánto vale  $|G_{un}(j\omega_n)|$  ?
- (3c) Para alta frecuencia  $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$  (16 Hz) y ganancia  $K = 0,5$ , determinar  $|G_{un}(j\omega_n)|$ .
- (3d) Usando Matlab, obtener el gráfico de Bode  $|G_{un}(j\omega)|$  para  $K = 0,1, 0,5, 1$ .

Soluciones al ejercicio 3:

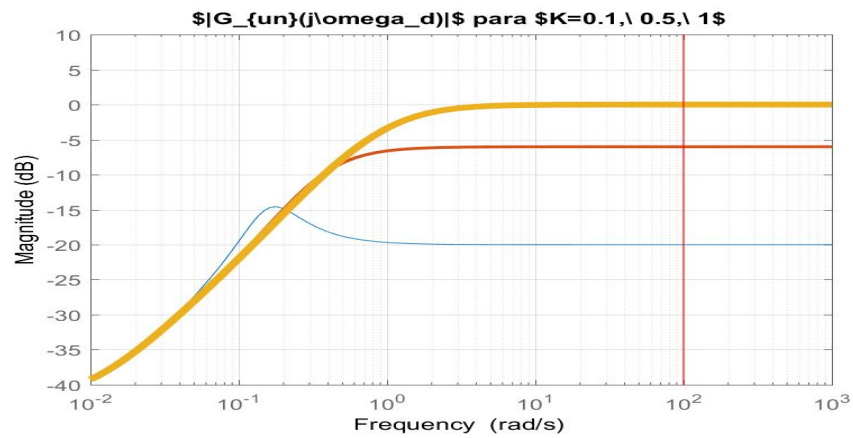
(3a)

$$G_{un} = \frac{-C}{1+PC}$$

(3b-c)

$$|G_{un}(j\omega_n)| \approx 0,5 = -6dB.$$

(3d)



**Figura 4**  $|G_{un}(j\omega_n)|$  para  $K = 0,1$  (trazo fino),  $K = 0,5$  (medio) y  $K = 1$  (grueso).