Taller ProgComp: Track Matemática

Polinomios

Gabriel Carmona Tabja

Universidad Técnica Federico Santa María,
Università di Pisa

May 20, 2024

Part I

POLINOMIOS

POLINOMIO DE UNA VARIABLE

Definición

Conjunto finito de variables y constantes

Polinomio de una variable

Definición

Conjunto finito de variables y constantes
Un polinomio de grado n, donde $n \in \mathbb{N}$ se define como:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$

Donde $a_i \in \mathbb{R}$

Operaciones entre Polinomios - Suma

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Operaciones entre Polinomios - Suma

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) + B(x)$:

Operaciones entre Polinomios - Suma

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$

$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) + B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m + b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot x^1$$

Operaciones entre Polinomios - Suma

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) + B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m + b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot x^1$$

¿Cuál sería la complejidad?

Operaciones entre Polinomios - Suma

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) + B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m + b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot x^1$$

¿Cuál sería la complejidad? $O(n)$

Operaciones entre Polinomios - Resta

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Operaciones entre Polinomios - Resta

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) - B(x)$:

Operaciones entre Polinomios - Resta

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) - B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m - b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1) \cdot x^1$$

Operaciones entre Polinomios - Resta

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) - B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m - b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1) \cdot x^1$$

¿Cuál sería la complejidad?

Operaciones entre Polinomios - Resta

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) - B(x)$:

$$A(x) + B(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + (a_m - b_m) \cdot x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1) \cdot x^1$$

¿Cuál sería la complejidad? $O(n)$

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$

$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = (a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1) \cdot (b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1)$$

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = (a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1) \cdot (b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1)$$

¿Cuál sería la complejidad?

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$
$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = (a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1) \cdot (b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1)$$

¿Cuál sería la complejidad? $O(n \cdot m)$

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$

$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = (a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1) \cdot (b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1)$$

¿Cuál sería la complejidad? $O(n \cdot m)$
¿Se podrá hacer mejor?

Operaciones entre Polinomios - Multiplicación

Si tengo un polinomio $A(x)$ y $B(x)$, tal que:

$$A(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1$$

$$B(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1$$

Digamos que $m < n$, entonces $A(x) \cdot B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = (a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1) \cdot (b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1)$$

¿Cuál sería la complejidad? $O(n \cdot m)$
¿Se podrá hacer mejor? Si, utilizando Fast Fourier Transform (FFT), tiene tiempo $O(n \log n)$
Un código funcional se puede acceder aquí: código FFT

Aplicación

Problema

Dado dos arreglos A y B, quiero determinar todas las posibles sumas $a[i] + b[j]$ y por cada suma saber cuantas veces aparece.

Aplicación

Problema

Dado dos arreglos A y B, quiero determinar todas las posibles sumas $a[i] + b[j]$ y por cada suma saber cuantas veces aparece.

Ejemplo

Si $A = [1, 2, 2, 3]$ y $B = [2, 4]$:

- 3 se obtiene 1 vez
- 4 se obtiene 2 veces
- 5 se obtiene 2 veces
- 6 se obtiene 2 veces
- 7 se obtiene 1 vez

APLICACIÓN

Transformación

- Representemos A como un polinomio donde $c_{a_i} \cdot x^{a_i}$, donde c_{a_i} es cuantas veces aparece a_i en el arreglo

Aplicación

Transformación

- Representemos A como un polinomio donde $c_{a_i} \cdot x^{a_i}$, donde c_{a_i} es cuantas veces aparece a_i en el arreglo
- Lo mismo con B

Aplicación

Transformación

- Representemos A como un polinomio donde $c_{a_i} \cdot x^{a_i}$, donde c_{a_i} es cuantas veces aparece a_i en el arreglo
- Lo mismo con B
- La respuesta al problema sería cosa de multiplar los dos polinomios

Usando el ejemplo anterior

$A = [1, 2, 2, 3]$ y $B = [2, 4]$:

- $A(x) = 1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1$
- $B(x) = 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^2$

Aplicación

Transformación

- Representemos A como un polinomio donde $c_{a_i} \cdot x^{a_i}$, donde c_{a_i} es cuantas veces aparece a_i en el arreglo
- Lo mismo con B
- La respuesta al problema sería cosa de multiplar los dos polinomios

Usando el ejemplo anterior

$A = [1, 2, 2, 3]$ y $B = [2, 4]$:

- $A(x) = 1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1$
- $B(x) = 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^2$
- $A(x) \cdot B(x) = 1 \cdot x^7 + 2 \cdot x^6 + 2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 + x^3$

REFERENCES I