Taller ProgComp: Track Matemática

Matrices

Gabriel Carmona Tabja

Universidad Técnica Federico Santa María,
Università di Pisa

May 6, 2024

Part I

Matrices

MATRICES

Definición

La matriz podría ser definida como una tabla de números, símbolos o expressiones distribuidas en filas (n) y columnas (m). Lo denominaremos una matriz de tamaño $n \times m$.

MATRICES

Definición

La matriz podría ser definida como una tabla de números, símbolos o expressiones distribuidas en filas (n) y columnas (m). Lo denominaremos una matriz de tamaño $n \times m$.

$$A_{3\times 4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Cuadrada

Una matriz donde la cantidad de filas es la misma a la cantidad de columnas.

Matriz Cuadrada

Una matriz donde la cantidad de filas es la misma a la cantidad de columnas.

$$A_{3\times 3}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

Una matriz cuadrada donde en la diagonal hay únicamente 1 y en el resto puros 0. La denominaremos I.

Más sobre matrices

Matriz Identidad

Una matriz cuadrada donde en la diagonal hay únicamente 1 y en el resto puros 0. La denominaremos I.

$$I_{3\times 3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

MATRIX TRANSPUESTA

Matriz Transpuesta

La matrix transpuesta es tomar la matriz y darle la vuelta tomando como eje la diagonal. La matriz transpuesta de A se denota A^T.

Matriz Transpuesta

La matrix transpuesta es tomar la matriz y darle la vuelta tomando como eje la diagonal. La matriz transpuesta de A se denota A^T.

$$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operaciones: Suma

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B_{n\times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Operaciones: Suma

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B_{n\times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Operaciones: Suma

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B_{n\times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Complejidad: $O(n \cdot m)$

Operaciones: multiplicación por escalar

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación por escalar

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot A_{n\times m} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1m} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \alpha \cdot a_{n2} & \cdots & \alpha \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación por escalar

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot A_{n\times m} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{1m} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \cdots & \alpha\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\cdot a_{n1} & \alpha\cdot a_{n2} & \cdots & \alpha\cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Complejidad: $O(n \cdot m)$

Operaciones: multiplicación

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B_{m\times o} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1o} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mo} \end{bmatrix}$$

Operaciones: multiplicación

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B_{m\times o} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1o} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mo} \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times o} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \cdot b_{ko} \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} \cdot b_{ko} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \cdot b_{ko} \end{bmatrix}$$

¡La matrix resultante tendrá tamaño $n \times o$!

OPERACIONES: EJEMPLO MULTIPLICACIÓN

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \; B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & \# & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 6\cdot 1 \\ \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

OPERACIONES: EJEMPLO MULTIPLICACIÓN

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \; B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 24 \\ 2\cdot 1 + 6\cdot 0 + 2\cdot 1 & \# & \# \end{bmatrix}$$

OPERACIONES: EJEMPLO MULTIPLICACIÓN

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 24 \\ 4 & 2 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & \# \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \; B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 24 \\ 4 & 22 & 2\cdot 2 + 6\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \; B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 24 \\ 4 & 22 & 24 \end{bmatrix}$$

Operaciones: ejemplo multiplicación

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 24 \\ 4 & 22 & 24 \end{bmatrix}$$

Complejidad: $O(n \cdot m \cdot o)$

Part II

UTILIDADES

Secuencia de Fibonacci

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

Secuencia de Fibonacci

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

Posibles soluciones

- Recursiva: $O(2^n)$
- DP: $O(n)$

Secuencia de Fibonacci

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

Posibles soluciones

- Recursiva: $O(2^n)$
- DP: $O(n)$

Problema

¿Qué pasa si n es 10^{12}?

Secuencia de Fibonacci como una matriz

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

Secuencia de Fibonacci como una matriz

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

- Dado un $F(n)$, calcular $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$
- Extendamos: $F(0) = 0$

Secuencia de Fibonacci como una matriz

Definición

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

- Dado un $F(n)$, calcular $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$
- Extendamos: $F(0) = 0$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}$$

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1) + F(n) \\ F(n+1) & F(n) + F(n+1) \end{bmatrix}$$

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1)+F(n) \\ F(n+1) & F(n)+F(n+1) \end{bmatrix}$$

¿F(n)?

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1)+F(n) \\ F(n+1) & F(n)+F(n+1) \end{bmatrix}$$

¿F(n)?

$$F(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

¿Cómo elevar una matrix?

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1)+F(n) \\ F(n+1) & F(n)+F(n+1) \end{bmatrix}$$

¿F(n)?

$$F(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

¿Cómo elevar una matrix?
¡Es cosa de aplicar exponenciación binaria! En C++ no existe multiplicación de matrices directamente, pero se puede programar!

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1)+F(n) \\ F(n+1) & F(n)+F(n+1) \end{bmatrix}$$

¿F(n)?

$$F(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

¿Cómo elevar una matrix?
¡Es cosa de aplicar exponenciación binaria! En C++ no existe multiplicación de matrices directamente, pero se puede programar!
¿Complejidad?

Secuencia de Fibonacci como una matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(1) \\ F(1) & F(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(n) & F(n-1)+F(n) \\ F(n+1) & F(n)+F(n+1) \end{bmatrix}$$

¿F(n)?

$$F(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

¿Cómo elevar una matrix?
¡Es cosa de aplicar exponenciación binaria! En C++ no existe multiplicación de matrices directamente, pero se puede programar!
¿Complejidad? $O(2^3 \cdot \log n)$

References I