Элементы алгебры логики

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Логические операции

Высказывания бывают простые и сложные. Высказывание называется простым, если никакая его часть сама не является высказыванием. Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Инверсия	«не»; «неверно, что»
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»

Конъюнкция

Конъюнкция — логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Для записи конъюнкции используются следующие знаки: И, ?, •, &. Например: А И В, А ? В, А • В, А&В.

Конъюнкцию можно описать в виде таблицы, которую называют таблицей истинности:

Дизъюнкция

Дизъюнкция — логическая операция, которая каждым двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Для записи дизъюнкции используются следующие знаки: ИЛИ, ?, |, +. Например: А ИЛИ В, А?В, А|В, А+В.

Дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

Инверсия

Инверсия — логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Для записи инверсии используются следующие знаки: НЕ, ¬, —.

Инверсия определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Логические операции

Пример 1. Пусть А — «На web-странице встречается слово «крейсер»», В = «На web-странице встречается слово «линкор»». Рассматривается некоторый сегмент сети Интернет, содержащий 5 000 000 web-страниц. В нём высказывание А истинно для 4800 страниц, высказывание В — для 4500 страниц, а высказывание А? В — для 7000 страниц. Для какого количества web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) НЕ (А ИЛИ В);

б) A&B;

в) На web-странице встречается слово «крейсер» и не встречается слово «линкор».

Решение. Изобразим множество всех web-страниц рассматриваемого сектора сети Интернет кругом, внутри которого разместим два круга: одному из них соответствует множество web-страниц, где истинно высказывание А, второму — где истинно высказывание В (рис. 1.3).

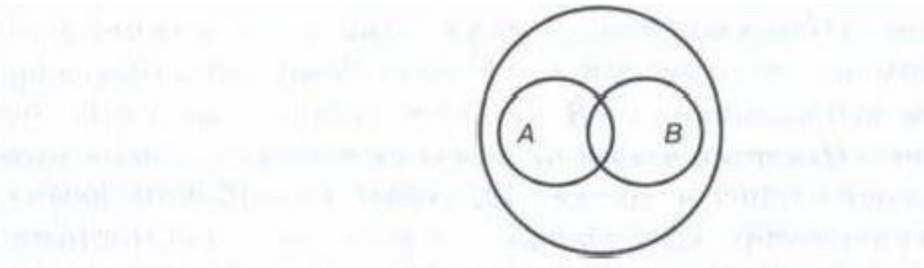

Рис. 1.3 Графическое изображение множеств web-страниц

Изобразим графически множества web-страниц, для которых истинны выражения и высказывание. а) — в) (рис. 1.4).

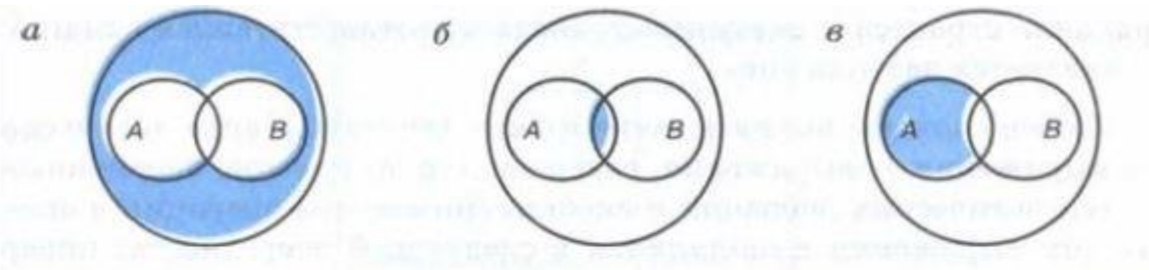

Рис. 1.4 Графические изображения множеств web-страниц, для которых истины выражения и высказывания а) – в)

Построенные схемы помогут нам ответить на вопросы, содержащиеся в задании.

Выражение А ИЛИ В истинно для 7000 web-страниц, а всего страниц 5 000 000. Следовательно, выражение А ИЛИ В ложно для 4 993 000 web-страниц. Иначе говоря, для 4 993 000 web-страниц истинно выражение НЕ (А ИЛИ В).

Выражение А? В истинно для тех web-страниц, где истинно А (4800), а также тех web-страниц, где истинно В (4500). Если бы все web-страницы были различны, то выражение А? В было бы истинно для 9300 (4800 + 4500) web-страниц. Но, согласно условию, таких web-страниц всего 7000. Это значит, что на 2300 (9300 — 7000) web-страницах встречаются оба слова одновременно. Следовательно, выражение A & B истинно для 2300 web-страниц.

Чтобы выяснить, для скольких web-страниц истинно высказывание A и одновременно ложно высказывание B, следует из 4800 вычесть 2300. Таким образом, высказывание «На web-странице встречается слово «крейсер” И не встречается слово «линкор»» истинно на 2500 web-страницах.

Построение таблиц истинности для логических выражений

Для логического выражения можно построить таблицу истинности, показывающую, какие значения принимает выражение при всех наборах значений входящих в него переменных. Для построения таблицы истинности следует:

1) подсчитать n — число переменных в выражении;

2) подсчитать общее число логических операций в выражении;

3) установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов;

4) определить число столбцов в таблице: число переменных + число операций;

5) заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции в соответствии с последовательностью, установленной в п. 3;

6) определить число строк в таблице (не считая шапки таблицы): $m = 2^n$;

7) выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой целый ряд n-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n — 1$;

8) провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Построим таблицу истинности для логического выражения A? A & Б. В нём две переменные, две операции, причём сначала выполняется конъюнкция, а затем — дизъюнкция. Всего в таблице будет четыре столбца:

Наборы входных переменных — это целые числа от 0 до 3, представленные в двухразрядном двоичном коде: 00, 01, 10, 11.

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$

Заполненная таблица истинности имеет вид:

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Свойства логических операций

1. Переместительный (коммутативный) закон:

- для логического умножения:

А & В = Б & А;

- для логического сложения:

А? В = В? А.

2. **Сочетательный (ассоциативный) закон**:

- для логического умножения:

(А & Б) & С = А & (Б & С);

- для логического сложения:

(А? В) ? С = А? (В? С).

При одинаковых знаках операций скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

3. Распределительный (дистрибутивный) закон:

- для логического умножения:

A & (B? C) = (A & B)? (A & C);

- для логического сложения:

? (B & C) = (A? B) & (A v C).

4. Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} = A.$

Двойное отрицание исключает отрицание.

5. Закон исключённого третьего:

- для логического умножения:

$A \,\&\, \overline{A} = 0;$

- для логического сложения

$A \vee \overline{A} = 1.$

Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

6. Закон повторения:

- для логического умножения:

A & A = A;

- для логического сложения:

A? A = A.

7. Законы операций с 0 и 1:

- для логического умножения:

A & 0 = 0; A & 1=A;

- для логического сложения:

A? 0 =A; A? 1 = 1.

8. Законы общей инверсии:

- для логического умножения:

$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B};$

- для логического сложения:

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}.$

Законы алгебры логики могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Докажем распределительный закон для логического сложения:

A? (B & C) = (A? B) & (A? C).

A	B	C	$B \& C$	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Пример 2. Найдём значение логического выражения для числа X = 0.

$(X < 3) \& \overline{(X < 2)}$

Решение. При X = 0 получаем следующее логическое выражение:

$(0 < 3) \& \overline{(0 < 2)}.$

Так как логические выражения 0<3, 0<2 истинны, то, подставив их значения в логическое выражение, получаем:

$$1 \,\&\, \overline{1} = 1 \,\&\, 0 = 0.$$