Системы счисления

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел. Знаки, с помощью которых записываются числа (рис. 1.1), называются **цифрами**, а их совокупность — **алфавитом** системы счисления.

В любой системе счисления цифры служат для обозначения чисел, называемых узловыми; остальные числа (алгоритмические) получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел.

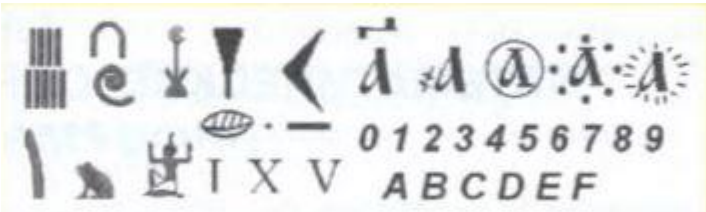


Рис. 1.1. Знаки, используемые для записи чисел в различных системах счисления

Можно выделить следующие виды систем счисления:

1. Унарная
2. Непозиционная
3. Позиционная

Простейшая и самая древняя система — так называемая **унарная система счисления**. В ней для записи любых чисел используется всего один символ — палочка, узелок, зарубка, камушек. Длина записи числа при таком кодировании прямо связана с его величиной.

Система счисления называется **непозиционной**, если количественный эквивалент (количественное значение) цифры в числе не зависит от её положения в записи числа.

Система счисления называется **позиционной**, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения (позиции) в записи числа. **Основание** позиционной системы счисления равно количеству цифр, составляющих её алфавит.

Десятичная система

Десятичная система записи чисел, которой мы привыкли пользоваться в повседневной жизни — пример позиционной системы счисления. Алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Алгоритмические числа образуются в ней следующим образом: значения цифр умножаются на «веса» соответствующих разрядов, и все полученные значения складываются.

Основанием позиционной системы счисления может служить любое натуральное число q > 1. Алфавитом произвольной позиционной системы счисления с основанием q служат числа 0, 1, …, q—1, каждое из которых может быть записано с помощью одного уникального символа; младшей цифрой всегда является 0.

Основные достоинства любой позиционной системы счисления — простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов, необходимых для записи любых чисел.

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm (a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}). \quad (1)$$

A — число;

q — основание системы счисления.

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» i-го разряда.

Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 2. Для записи чисел в двоичной системе счисления используются только две цифры: 0 и 1.

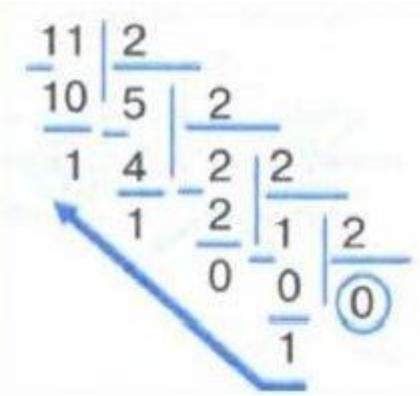
На основании формулы (1) для целых двоичных чисел можно записать:

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot 20. \ (1')$$

Например:

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}.$$

Пример 1. Переведём десятичное число 11 в двоичную систему счисления. Рассмотренную выше последовательность действий (алгоритм перевода) можно изобразить так:



Выписывая остатки от деления в направлении, указанном стрелкой, получим: $11_{10} = 1011_2$.

Пример 2. Если десятичное число достаточно большое, то более удобен следующий способ записи рассмотренного выше алгоритма:

363	181	90	45	22	11	5	2	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1

$363_{10} = 101101011_2$

Восьмеричная система счисления

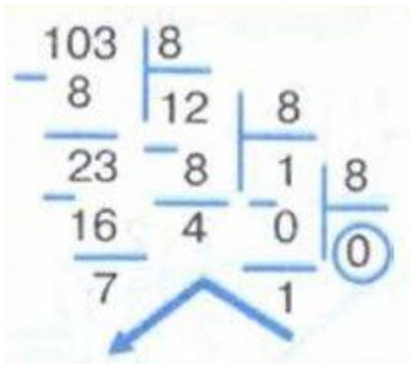
Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 8. Для записи чисел в восьмеричной системе счисления используются цифры: 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + a_{n-2} \cdot 8^{n-2} + ... + a_0 \cdot 8^0. \quad (1'')$$

Например:

$1063_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 563_{10}$.

Пример 3. Переведём десятичное число 103 в восьмеричную систему счисления.



$103_{10} = 147_8$.

Шестнадцатеричная система счисления

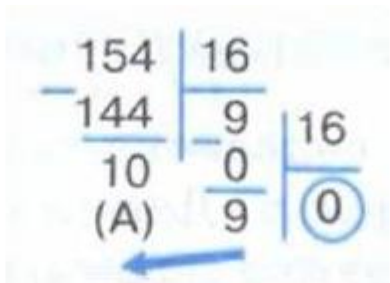
Основание: q = 16.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Таким образом, запись 3AF16 означает:

$3AF_{16} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}$.

Пример 4. Переведём десятичное число 154 в шестнадцатеричную систему счисления.



$154_{10} = 9A_{16}$.

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример 5. Таблица двоичного сложения предельно проста. Так как 1 + 1 = 10, то 0 остаётся в младшем разряде, а 1 переносится в старший разряд.

+	1	0	0	1
	1	0	1	0
1	0	0	1	1

+	1	1	1	1
				1
1	0	0	0	0

Пример 6. Операция умножения двоичных чисел выполняется по обычной схеме, применяемой в десятичной системе счисления, с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.

	×	1	0	1	1
			1	0	1
	+	1	0	1	1
1	0	1	1		
1	1	0	1	1	1

Таким образом, в двоичной системе счисления умножение сводится к сдвигам множимого и сложениям.