MINISTERIET FOR
BØRN, UNDERVISNING
OG LIGESTILLING
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Højere teknisk eksamen

Forberedelsesmateriale

htx161-MAT/A-25052016

Onsdag den 25. maj 2016

Forberedelsesmateriale til prøverne i matematik A

Der er afsat 10 timer på 2 dage til arbejdet med forberedelsesmaterialet til prøverne i matematik A. Oplægget indeholder teori, eksempler og opgaver i et emne i forlængelse af kernestoffet.

Dele af materialet uddybes i et appendiks. Dette appendiks indgår *ikke* i den skriftlige prøve.

Forberedelse til den skriftlige 5-timers prøve:

Nogle af spørgsmålene ved 5-timersprøven tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Forberedelse til den mundtlige prøve:

Emnet, behandlet i dette materiale, indgår som supplerende stof. Der vil derfor være spørgsmål ved den mundtlige prøve i dette emne.

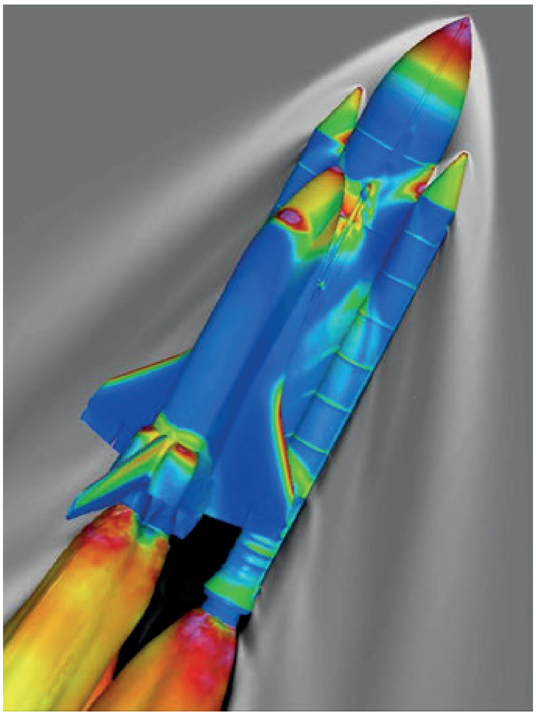
I forberedelsesperioden er alle hjælpemidler tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Billedmateriale uden kildeangivelse er opgavekommissionens ejendom.

Rekursionsligninger

1 Indledning

Dette materiale handler om rekursionsligninger. De er et vigtigt emne indenfor matematikken, og opstår naturligt i mange sammenhænge. For eksempel kan de bruges til at beskrive forskellige former for vækst, og det fører til modeller, der tit kan løses eksakt. Rekursionsligninger kan også bruges til at bestemme tilnærmede løsninger til f.eks. differentialligninger, som man ofte ikke kan give en eksakt løsning til. Da det er ret enkelt at løse rekursionsligninger numerisk med en computer, kan tekniske og videnskabelige problemer, der er beskrevet ved differentialligninger, ofte med fordel omformuleres til rekursionsligninger. For eksempel illustrerer billedet nedenfor, hvordan NASA har beregnet trykket på overfladen af en rumfærge og densiteten af den omgivende luft. En opgave, der vil være vanskelig at løse uden brug af rekursionsligninger.



https://commons.wikimedia.org

Rekursionsligninger kan bruges til at beskrive eller frembringe *talfølger*. En talfølge er en uendelig række af tal, f.eks. 0, 1, 4, 9, 16 osv. Denne talfølge består af rækken af kvadrattal. På symbolsk form kan værdierne i en talfølge kaldes $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$

Ideen bag en rekursionsligning er ganske enkel, nemlig at et tal i rækken beregnes ud fra det foregående tal i rækken. Hvis vi kender y_n (hvor n er et helt tal), kan vi altså beregne y_{n+1}. Ser vi på rækken af kvadrattallene betyder det, at

$$y_{n+1} = \left(\sqrt{y_n} + 1\right)^2 \tag{1}$$

Da $y_3 = 9$ får vi f.eks. for y_4

$$y_4 = \left(\sqrt{y_3} + 1\right)^2 = (\sqrt{9} + 1)^2 = (3 + 1)^2 = 4^2 = 16$$

Ligning (1) er et eksempel på en rekursionsligning. I afsnit 2 vil vi se flere eksempler på rekursionsligninger, og hvad de kan beskrive. Hovedresultatet af afsnittet er, at rekursionsligningen sammen med kendskab til startværdien, y_0, er nok til at bestemme alle de efterfølgende værdier, $y_1, y_2, y_3, \dots$

Afsnit 3 handler om at finde løsningsformler til nogle forskellige typer af rekursionsligninger.

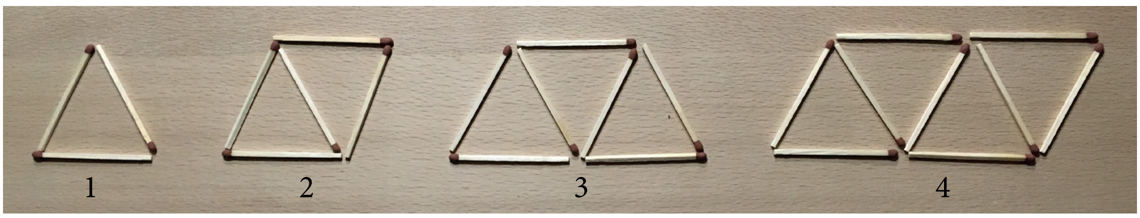
Afsnit 2 og 3 viser tilsammen, hvad rekursionsligninger er, og hvordan de kan bruges til at finde symbolske løsninger til en række problemer, der handler om vækst, f.eks. beregninger på gæld.

I afsnit 4 ser vi på en anden type anvendelser, hvor rekursionsligninger kan bruges til at give tilnærmede løsninger til ligninger og differentialligninger. Ved hjælp af computere kan det udnyttes til at løse ligninger og behandle matematiske modeller af fænomener, der ikke (eller kun meget vanskeligt) kan løses symbolsk.

2 Førsteordens rekursionsligninger

Vi vil nu introducere rekursionsligninger ved hjælp af et par eksempler. Princippet er, at en talfølge kan bestemmes ved, at hver ny værdi i talfølgen beregnes ud fra den foregående værdi. Vi vil først illustrere det med et eksempel, hvor en række tændstikfigurer konstrueres ved at tilføje tændstikker til den foregående figur.

Eksempel 1
Billedet viser en række figurer lavet af tændstikker. Den første tændstikfigur er lavet af 3 tændstikker, den anden tændstikfigur er lavet af 5 tændstikker, den tredje af 7 tændstikker, den fjerde af 9 tændstikker og så videre. Man kan fortsætte følgen og lave tændstikfigur nummer 5, 6, 7 osv.



Tændstikfigur nummer 2 er altså lavet ved at tilføje 2 tændstikker til figur nummer 1, figur nummer 3 er lavet ved at tilføje to tændstikker til figur nummer 2, osv. Hvis vi kalder antallet af tændstikker i den første figur for y_0, gælder det altså at $y_0 = 3$. Antallet af tændstikker i den næste figur er så $y_1 = y_0 + 2 = 3 + 2 = 5$. I den næste figur er der $y_2 = y_1 + 2 = 5 + 2 = 7$ tændstikker. Dette mønster gentager sig, og vi kan derfor beskrive talfølgen med denne ligning:

$$y_{n+1} = y_n + 2$$

Ligningen viser, at y_{n+1} kan beregnes ud fra værdien af y_n. Denne metode, hvor nye værdier beregnes ud fra tidligere, kaldes *rekursion*.

Nummereringen kan måske forekomme lidt speciel, men der er tradition for at nummerere talfølger således, at det første element kaldes y_0 og de efterfølgende y_1, y_2, osv. Før vi giver den formelle definition på en *førsteordens rekursionsligning*, vil vi se på et andet eksempel.

Eksempel 2
Du kender muligvis allerede $n!$, udtalt 'n fakultet'. Man definerer

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1 \cdot 1 = 1\\
2! &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2\\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6\\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24\\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120
\end{aligned}$$

Generelt kan $n!$ forstås som tallene fra 1 til n ganget sammen. Hvis vi kigger på beregningerne ovenfor, kan vi se at $1! = 1 \cdot 0!$, $2! = 2 \cdot 1!$, $3! = 3 \cdot 2!$ og $4! = 4 \cdot 3!$. Der gælder altså at

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 1}_{n!} = (n+1) \cdot n!$$

Beregningen af 5! kan illustreres således

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left, "\cdot 1"] & 1 \arrow[r, bend left, "\cdot 2"] & 2 \arrow[r, bend left, "\cdot 3"] & 6 \arrow[r, bend left, "\cdot 4"] & 24 \arrow[r, bend left, "\cdot 5"] & 120 \\
0! & 1! & 2! & 3! & 4! & 5!
\end{tikzcd}$$

Ligningen $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ kan opfattes som en rekursionsligning. Sætter vi $y_n = n!$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$, altså

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0! = 1\\
y_1 &= 1! = 1\\
y_2 &= 2! = 2\\
y_3 &= 3! = 6 \text{ etc.}
\end{aligned}$$

så opfylder talfølgen $y_0, y_1, y_2, \ldots$ følgende ligning

$$y_{n+1} = (n+1) \cdot y_n \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Denne ligning er endnu et eksempel på en førsteordens rekursionsligning.

Den formelle definition er:

Definition 1
Lad $f(y, n)$ være et udtryk, der afhænger af det reelle tal y og af $n = 0, 1, 2, \ldots$

En *førsteordens rekursionsligning* er en ligning på formen

$$y_{n+1} = f(y_n, n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

En *løsning* til rekursionsligningen er en talfølge

$$y_0, y_1, y_2, \ldots$$

således at ligningen (3) er opfyldt.

Bemærk, at løsningen til en rekursionsligning ikke bare er et tal, men hele talfølgen, der består af de uendeligt mange tal y_0, y_1, y_2, … Bemærk også, at $f(y_n, n)$ skal være defineret for alle y_n og n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, for at det giver mening at tale om, at rekursionsligningen har en løsning.

Når denne type rekursionsligning kaldes førsteordens, skyldes det, at udtrykket for y_{n+1} afhænger af den forrige værdi, y_n, men ikke af y_{n-1} eller andre af de tidligere værdier.

Vi har set, at med $y_n = n!$ gælder $y_{n+1} = (n+1) \cdot y_n$. Det betyder, at hvis vi sætter

$$f(y, n) = (n+1) \cdot y$$

kan rekursionsligningen skrives som $y_{n+1} = f(y_n, n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Det er altså en førsteordens rekursionsligning, og vi kan f.eks. for $n = 5$ skrive

$$y_{5+1} = f(y_5, 5) = (5+1) \cdot y_5$$

så

$$y_6 = 6 \cdot y_5$$

Ligning (2) er opfyldt af $n!$, men der er også andre talfølger, der opfylder ligningen. Vi kan for eksempel sætte $y_n = 0$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ Uanset værdien af n er ligningen $y_{n+1} = (n+1) \cdot y_n$ sand, fordi både venstresiden og højresiden giver nul. Talfølgen $0, 0, 0, 0, \ldots$ er altså også en løsning, så en rekursionsligning kan have mere end en løsning.

Eksempel 3
Talfølgerne $3, 4, 5, 6, \ldots$ og $-7, -6, -5, -4, \ldots$ er to forskellige løsninger til rekursionsligningen $y_{n+1} = y_n + 1$. Rekursionsligningen betyder nemlig, at det næste tal i følgen skal være 1 højere end det foregående tal, og det opfylder begge talfølger.

De to talfølger er forskellige. De kommer af den samme ligning, men har forskellige startværdier. Den første har startværdien $y_0 = 3$, mens den anden har $y_0 = -7$.

Opgave 1
Find to forskellige talfølger, som begge er løsning til rekursionsligningen $y_{n+1} = (y_n)^2, n = 0, 1, 2, \ldots$

Der skal dog ikke så meget ekstra til, for at der kun er én løsning.

Sætning 1
Eksistens og entydighedssætningen. Lad s være en konstant, og $f(y, n)$ et udtryk, der er defineret for y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Så har rekursionsligningen

$$y_{n+1} = f(y_n, n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

en og netop én løsning, der opfylder

$$y_0 = s$$

Ligningen $y_0 = s$ kaldes en *begyndelsesbetingelse*. Sætningen siger, at rekursionsligningen sammen med begyndelsesbetingelsen har en løsning, og at der ikke er flere end denne ene. Man udtrykker dette kort ved at sige, at de to ligninger tilsammen *entydigt bestemmer en løsning*.

Bevis
Vi starter med at vise, at der kun er én løsning.Vi ved, at $y_0 = s$, så dermed er y_0 fastlagt.

Ifølge rekursionsligningen er $y_1 = f(y_0, 0)$, og dermed er y_1 også fastlagt.

Når vi nu kender y_1, kan vi bruge rekursionsligningen igen til at bestemme $y_2 = f(y_1, 1)$, og dernæst $y_3 = f(y_2, 2)$ og så videre.

De to ligninger i sætning 1 bestemmer entydigt tallene $y_0, y_1, y_2, \ldots$ Der er altså højst én løsning.

Vi mangler at vise, at der *er* en løsning. Men da den talfølge, vi har fastlagt, opfylder begyndelsesbetingelsen og rekursionsligningen for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, *er* der en løsning. □

Ved hjælp af en computer kan man i princippet beregne så mange værdier af en løsning til en rekursionsligning, som man har lyst til: ud fra y_0 beregnes y_1, ud fra y_1 beregnes y_2 osv. Det er netop denne type gentagne beregninger, computere er gode til.

Eksempel 4
Vi sætter

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0 + 1, \quad y_2 = 0 + 1 + 2, \quad y_3 = 0 + 1 + 2 + 3 \quad \text{osv.}$$

og generelt $y_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. Der gælder så

$$y_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{y_n} + (n + 1) = y_n + (n + 1)$$

Sætter vi

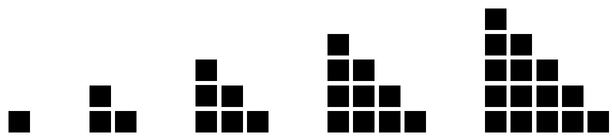
$$f(y, n) = y + n + 1$$

opfylder y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ rekursionligningen

$$y_{n+1} = f(y_n, n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

med begyndelsesbetingelsen $y_0 = 0$.

Denne rekursionsligning kan illustreres grafisk. Vi kan forstå y_n som det samlede antal kasser i en trekantet opstilling af kasser, som vokser ved, at vi i hvert trin, n, tilføjer en ny søjle med n kasser til venstre for opstillingen. Dette er vist på figur 1.



$y_0 = 0$ $y_1 = 1$ $y_2 = 3$ $y_3 = 6$ $y_4 = 10$ $y_5 = 15$

Figur 1. Antallet af kasser i en opstilling kan beskrives med en rekursionsligning.

Det er let at beregne $y_0, y_1, \dots, y_5$. Vi har

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= y_0 + 1 = 1 \\ y_2 &= y_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ y_3 &= y_2 + 3 = 3 + 3 = 6 \\ y_4 &= y_3 + 4 = 6 + 4 = 10 \\ y_5 &= y_4 + 5 = 10 + 5 = 15 \end{aligned}$$

Opgave 2
Fortsæt eksemplet og beregn y_6, y_7, y_8, y_9 og y_{10}. Du skulle gerne nå frem til $y_{10} = 55$.

Opgave 3

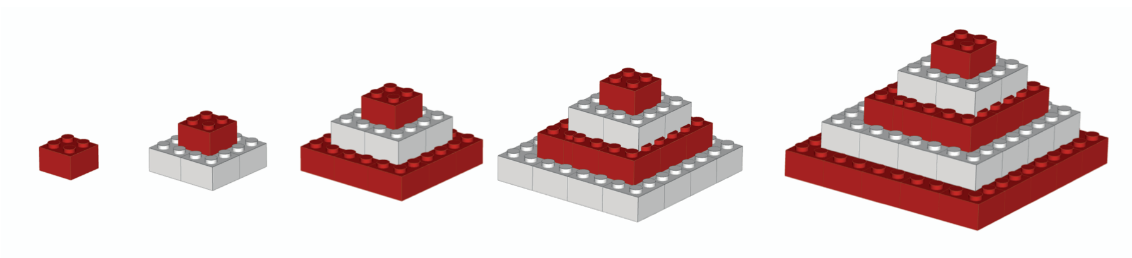


Illustration: John Schou

Billedet viser en række trappepyramider bygget af legoklodser. Den første pyramide består af én klods. Den næste pyramide fremkommer ved, at vi tilføjer et lag med 2×2 klodser under den første. Den næste pyramide i rækken fremkommer så ved, at vi tilføjer 3×3 klodser under den foregående pyramide. Man kan fortsætte rækken og bestemme antallet af klodser i de følgende pyramider.

a) Beskriv de to sidste pyramider på billedet samt den næste pyramide i rækken, og bestem hvor mange klodser, der skal bruges til at bygge dem.

b) Opskriv en rekursionsligning af formen $y_{n+1} = f(y_n, n)$, der beskriver antallet af klodser, y_{n+1}, i pyramide $n + 1$, ud fra antallet af klodser y_n i pyramide n.

c) Sæt $y_0 = 0$ og bestem $y_1, y_2, \dots, y_7$ ved hjælp af rekursionsligningen.

3 Førsteordens lineære rekursionsligninger

En særlig simpel form for rekursionsligning er en *lineær rekursionsligning*. Ligningerne

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 4 \cdot n$$

og

$$y_{n+1} = -\sqrt{5} \cdot y_n + 3 \cdot n^2$$

er begge eksempler på lineære rekursionsligninger. De har det til fælles, at y_{n+1} er bestemt som en konstant ganget med y_n plus et led, der kan afhænge af n. Når ligningerne kaldes lineære, er det fordi, de er lineære i y_n. En eventuel potens på n i det andet led har altså ingen betydning.

Definition 2
En rekursionsligning, der kan skrives som

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

hvor a er en konstant, og $b(n)$ er et udtryk, der kan afhænge af n, kaldes en førsteordens lineær rekursionsligning. Ligningen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

kaldes en *homogen* førsteordens lineær rekursionsligning. Den kaldes også den homogene ligning hørende til (4).

Når ligning (5) kaldes homogen, skyldes det, at $b(n) = 0$. Hvis $b(n) \neq 0$ kaldes (4) for en *inhomogen* ligning. En tilsvarende sprogbrug bruges i øvrigt om visse typer af differentialligninger.

Vi har allerede set eksempler på lineære rekursionsligninger. I eksempel 4 kiggede vi på rekursionsligningen

$$y_{n+1} = y_n + (n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

og den er jo præcis på formen (4) med $a = 1$ og $b(n) = n + 1$.

Rekursionsligningen $y_{n+1} = (n+1) \cdot y_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, i eksempel 2 er derimod ikke på formen (4). Koefficienten foran y_n er lig med $(n + 1)$. Dvs. den afhænger af n og er således ikke en konstant. Bemærk også, at n ikke behøver at optræde i udtrykket for $b(n)$. Det vigtige er, at b ikke afhænger af y_n. Så rekursionsligningen $y_{n+1} = y_n + 2, n = 0, 1, 2, \ldots$, fra eksempel 1 er lineær med $a = 1$ og $b(n) = 2$.

Vi har i det foregående set, hvordan y_1 kan beregnes ud fra y_0, at y_2 kan beregnes ud fra y_1, og at y_{n+1} generelt kan beregnes ud fra y_n. Men i nogle tilfælde kan y_n beregnes direkte ud fra n, uden at man først må beregne de foregående tal i følgen. Det vil vi se i eksempel 5.

Eksempel 5
Antag, at vi har lånt penge til en rente på 100% om året. En rente på 100% betyder, at vores gæld fordobles hvert år. Så hvis vi efter n år skylder y_n kroner, så skylder vi året efter

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dette er en homogen lineær rekursionsligning.

Da vi fordobler gælden hvert år, kan vi finde en generel formel til direkte beregning af y_n, så vi f.eks. kan beregne y_{10} uden først at beregne de foregående tal i følgen. Hvis vi kalder startgælden s, kan vi beregne y_n direkte ved formlen

$$y_n = s \cdot 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

for der gælder jo

$$y_0 = s \cdot 2^0 = s \cdot 1 = s$$

og

$$y_{n+1} = s \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot (s \cdot 2^n) = 2 \cdot y_n$$

Så rekursionsligningen og begyndelsesbetingelsen er opfyldt. Eksistens- og entydighedssætningen fortæller, at der ikke er andre løsninger.

Bemærk, at løsningen $y_n = s \cdot 2^n$ stemmer overens med den velkendte eksponentielle udvikling, hvor n er den uafhængige variabel.

Vi har nu set, at vi i et konkret tilfælde kan finde en formel til beregning af løsningen til (5). Den følgende sætning siger, at det altid kan lade sig gøre.

Sætning 2
Samtlige løsninger til den homogene rekursionsligning

$$y_{n+1} = a \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

er givet ved talfølgen

$$y_n = k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

hvor $k \in \mathbb{R}$ er en konstant.

Beviset for sætningen findes i appendiks. Sætningen skal forstås sådan, at der for ethvert $k \in \mathbb{R}$ er en løsning, $y_n = k \cdot a^n$. Der er altså uendeligt mange løsninger, og enhver løsning har denne form. Værdien af k kan bestemmes ud fra en eventuel begyndelsesbetingelse, $y_0 = s$.

Eksempel 6
Rekursionsligningen

$$y_{n+1} = 3 \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

har løsningen

$$y_n = k \cdot 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Værdien af k kan bestemmes ud fra en eventuel begyndelsesbetingelse. Hvis begyndelsesbetingelsen er $y_0 = 5$, får vi $y_0 = k \cdot 3^0 = 5$, og k kan bestemmes

$$k \cdot 3^0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$$

så løsningen bliver

$$y_n = 5 \cdot 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Opgave 4
Betragt rekursionsligningen

$$y_{n+1} + \tfrac{1}{2} \cdot y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Vis at ligningen kan skrives på formen (6).

b) Opskriv samtlige løsninger til ligningen.

c) Bestem den løsning, hvor $y_0 = 10$.

d) Argumenter for at $y_{n+1} \cdot y_n < 0, n = 0, 1, 2, \ldots$, for den løsning du lige har fundet. Altså at to på hinanden følgende y-værdier har forskelligt fortegn.

Opsummering

Vi har nu introduceret rekursionsligninger og set, at en løsning til en rekursionsligning er en talfølge, $y_0, y_1, y_2, \ldots$ Rekursionsligningen har uendeligt mange løsninger, men kun en af dem opfylder begyndelsesbetingelsen. Hvis startværdien y_0 er fastlagt, er der kun én løsning, og den kan bestemmes ud fra y_0 ved at anvende rekursionsligningen til at beregne de efterfølgende værdier i talfølgen, trin for trin.

Vi har også set, at løsningen i nogle tilfælde kan skrives som en formel, der tillader os at beregne et vilkårligt tal, y_n, i talfølgen, *uden* først at beregne de foregående tal.

Vi har introduceret en særlig type af rekursionsligninger – en førsteordens lineær rekursionsligning, der kan deles op i to specialtilfælde, som vi kalder for hhv. homogen og inhomogen.

Endelig har vi set, at det er nemt at opskrive alle løsninger til den homogene førsteordens rekursionsligning, og at man her kan opskrive en formel, der direkte beregner løsningen y_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$

Vi vender nu tilbage til den inhomogene linære rekursionsligning. Den følgende sætning viser, at vi også her kan finde samtlige løsninger. Det kræver dog, at vi kan finde én løsning – en såkaldt *partikulær løsning*.

Sætning 3
Antag at z_n er en løsning til rekursionsligningen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Så er samtlige løsninger givet ved talfølgen

$$y_n = z_n + k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

for $k \in \mathbb{R}$.

Beviset for sætningen findes i appendiks. Sætningen siger, at samtlige løsninger til den inhomogene ligning er givet ved den partikulære løsning plus samtlige løsninger til den homogene ligning.

Sætning 3 gør det let at opskrive samtlige løsninger, når vi kender én løsning. Men hvordan finder vi en løsning? I praksis kan man mange gange slippe afsted med at gætte sig til en løsning. I eksempel 5 så vi på et lån. Det gav anledning til en homogen rekursionsligning. Hvis der afdrages på lånet, får vi en inhomogen ligning, og vi får brug for at gætte en løsning. Det ser vi på i eksempel 7.

Eksempel 7
Lad os antage, at der er optaget et forbrugslån, hvor der tilskrives en rente $r = 5\%$ pr. år til lånet, og afdrages A kroner pr. år. At tilskrive en rente på $r = 5\%$ svarer til at gange med 1,05. Så hvis vi efter n år skylder y_n, så skylder vi året efter

$$y_{n+1} = 1{,}05 \cdot y_n - A$$

Denne ligning er på formen (4) med $a = 1{,}05$ og $b(n) = -A$. Hvis vi bare kan finde én løsning, så tillader sætning 3 os at opskrive samtlige løsninger.

Siden $b(n) = -A$ er en konstant, gætter vi på, at vi kan finde en løsning på formen $z_n = c$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$, hvor c er en konstant. Vi skal altså undersøge, om vi kan bestemme en værdi af c, så rekursionsligningen er opfyldt. I stedet for z_n og z_{n+1} indsætter vi c i ligningen

$$z_{n+1} = 1{,}05 \cdot z_n - A$$

og dermed får vi

$$c = 1{,}05 \cdot c - A$$

Denne ligning har løsningen $c = \frac{A}{0{,}05}$. Vi har hermed vist, at $z_n = \frac{A}{0{,}05}$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, er en løsning. Samtlige løsninger er derfor givet ved

$$y_n = \frac{A}{0{,}05} + k \cdot 1{,}05^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

for $k \in \mathbb{R}$.

Opgave 5
Hvis der hvert år afdrages A kr. på et lån, hvor renten er r procent, svarer det til rekursionsligningen $y_{n+1} = a \cdot y_n - A$, hvor $a = 1 + r/100$.

a) Vis at ligningen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n - A, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

har en partikulær løsning

$$z_n = \frac{A}{\frac{r}{100}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Vis dernæst at samtlige løsninger fås som

$$y_n = \frac{A}{\frac{r}{100}} + k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eller

$$y_n = \frac{A}{\frac{r}{100}} + k \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

for $k \in \mathbb{R}$.

c) Et billån med en startgæld på 73 000 kr forrentes med 6% pr. år, og der afdrages med 12 000 kr. om året. Forklar at $y_0 = 73\,000$ og vis, at i dette tilfælde er $k = -127\,000$.

d) Hvor stor er restgælden efter 7 år?

Man kan ikke altid finde en løsning ved at gætte på en konstant. Man må så i stedet prøve med andre typer af funktioner, som vi vil se i den næste opgave.

Opgave 6
I eksempel 1 så vi på tændstikfigurer, der kunne beskrives med rekursionsligningen

$$y_{n+1} = y_n + 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

og begyndelsesbetingelsen

$$y_0 = 3$$

Vi kan omskrive rekursionsligningen til

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

hvor $a = 1$ og $b(n) = 2$.

Denne rekursionsligning har ikke en konstant som partikulær løsning. Vi gætter i stedet på, at $z_n = \alpha \cdot n, n = 0, 1, 2, \ldots$ er en løsning, og vil finde den fuldstændige løsning til rekursionsligningen.

a) Vis, at denne rekursionsligning ikke har en konstant, $z_n = k$, som partikulær løsning.

b) Bestem α, så $z_n = \alpha \cdot n$ er en løsning til rekursionsligningen.

c) Opskriv samtlige løsninger til rekursionsligningen.

d) Bestem den løsning, der opfylder $y_0 = 3$.

e) Tjek, at den fundne løsning stemmer overens med de værdier, vi fandt i eksempel 1.

4 Anvendelser

I det foregående afsnit har vi set eksempler på problemer, der kunne beskrives med rekursionsligninger. Vi skal nu se på to andre typer af problemer, hvor det viser sig, at rekursionsligninger finder udstrakt anvendelse. Den ene af disse er *Newtons metode*, der tillader os at finde en numerisk løsning til ligninger, som ikke nødvendigvis kan løses symbolsk. En numerisk løsning er ikke en eksakt løsning, men en tilnærmelse til den eksakte løsning til ligningen. Heldigvis kan vi gøre tilnærmelsen så god, som vi ønsker.

Den anden anvendelse er *Eulers metode*, der kan bruges til at finde tilnærmede løsninger til differentialligninger. Mange fænomener af praktisk interesse kan beskrives med differentialligninger, hvor man ikke kan opskrive en forskrift for løsningen. I stedet for diffentialligningen kan man formulere en passende rekursionsligning, hvis løsning ligger tæt på løsningen til differentialligningen. Derved kan man med en computer beregne en række punkter, der ligger meget tæt på den eksakte løsning.

Den grundlæggende idé bag begge metoder er at bruge tangenten som en tilnærmelse til en funktion. Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0, og sæt $y_0 = f(x_0)$. Fra undervisningen ved vi, at tangenten til f i punktet $(x_0; y_0)$ har ligningen

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

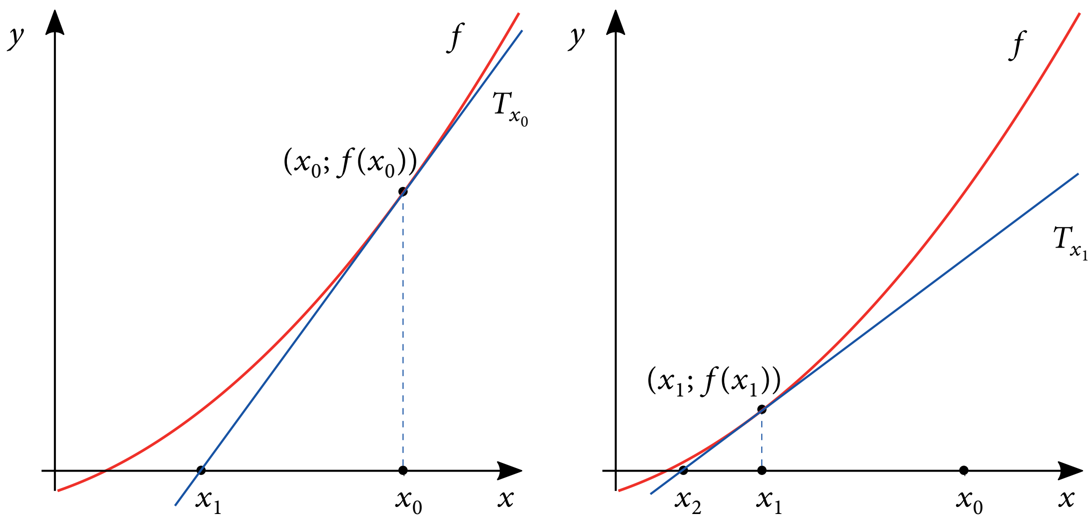
Det vil sige, at tangenten er grafen for den lineære funktion T_{x_0}, givet ved

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangenten til f i punktet $(x_0; y_0)$ er ikke bare en linje, der går gennem $(x_0; y_0)$; tangenten *smyger* sig op ad grafen for f nær punktet $(x_0; y_0)$. Det svarer til, at $T_{x_0}(x)$ er en god tilnærmelse til $f(x)$, når x er tæt på x_0.

4.1 Nulpunktsbestemmelse med Newtons metode

Vi vil nu se, hvordan vi kan bruge tangenten, T_{x_0}, til en funktion, f, til at finde nulpunkter for funktionen. Idéen bag metoden er illustreret på figur 2, og går ud på at finde nulpunkter for tangenten til grafen for f i stedet for nulpunkter for funktionen selv. Tangenter er rette linjer, og



Figur 2. Newtons metode til nulpunktssøgning. Med startgæt x_0 findes x_1, og ud fra x_1 findes x_2.

derfor kan man altid bestemme skæringen med x-aksen (nulpunktet) med mindre tangenten er vandret. Da tangenten er en god tilnærmelse til funktionen, kan vi bruge nulpunktet for tangenten som en tilnærmelse til nulpunktet for funktionen. Det smarte er så, at man kan benytte nulpunktet for en tangent som udgangspunkt for bestemmelse af en ny tangent, og den bruges så til at beregne et nyt tilnærmet nulpunkt, som forhåbentlig er bedre end det første. Hvis vi kalder startpunktet for x_0, vil metoden altså give os et bud på et tilnærmet nulpunkt x_1, som kan bruges til at give et nyt bud på et tilnærmet nulpunkt x_2 osv.

Nu da vi har forstået metoden, sætter vi den på formel. Vi ønsker i første omgang at beregne x_1, der er nulpunkt for tangenten $T_{x_0}(x)$, der er givet ved

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Vi sætter derfor $T_{x_0}(x_1) = 0$ og løser for x_1

$$f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \tag{10}$$

Hvis vi antager at $f'(x_0) \neq 0$, dvs. tangenten ikke er vandret, får vi

$$\begin{aligned} & x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Hermed har vi fundet et tilnærmet nulpunkt, x_1, ud fra startgættet x_0. På samme måde kan vi finde en (forhåbentlig bedre) tilnærmelse x_2 ud fra x_1. Tangenten i x_1 er grafen for $T_{x_1}(x)$:

$$T_{x_1}(x) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

og nulpunktet, x_2, for denne kan på helt tilsvarende måde findes til

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Vi kan fortsætte i det uendelige og får

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoden kaldes Newtons metode og kan defineres således:

Newtons metode
Lad $f(x)$ være en differentiabel funktion, og lad x_0 være et startgæt på et nulpunkt. I Newtons metode til bestemmelse af nulpunkter defineres talfølgen x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ved rekursionsligningen

$$x_{n+1} = N(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

hvor $N(x)$ er givet ved

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Metoden vil fejle, hvis $f'(x_n) = 0$ for en eller anden værdi af n (overvej selv hvorfor), og der er ingen generel garanti for, at talfølgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nærmer sig et nulpunkt.

Eksempel 8
Vi vil bruge Newtons metode til at bestemme et nulpunkt for funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$$

Vi har $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$, og vi kan opskrive $N(x)$

$$N(x) = x - \frac{x^3 - 3x^2 + x + 3}{3x^2 - 6x + 1}$$

Newtons metode svarer derfor til rekursionsligningen

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{{x_n}^3 - 3{x_n}^2 + x_n + 3}{3{x_n}^2 - 6x_n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hvis vi bruger startgættet $x_0 = 0$, får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{{x_0}^3 - 3{x_0}^2 + x_0 + 3}{3{x_0}^2 - 6x_0 + 1} = 0 - \frac{0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 + 3}{3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1} = -\frac{3}{1} = -3$$

De følgende værdier bliver

$$\begin{aligned} x_2 &= -1{,}826086957 \\ x_3 &= -1{,}146719014 \\ x_4 &= -0{,}842326277 \\ x_5 &= -0{,}772847636 \\ x_6 &= -0{,}769301397 \end{aligned}$$

Det ser ud til, at værdien af x_n nærmer sig nulpunktet, der befinder sig i $x = -0{,}769292354\ldots$ Vi har altså bestemt et tal, $-0{,}769301397$, der er ganske tæt på løsningen, og vi kunne finde en endnu bedre tilnærmelse, hvis vi ville.

Hvis vi i stedet vælger $x_0 = 1$ som startværdi, går det knap så godt. Vi får

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 3}{3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1} = 2$$

og dernæst

$$x_2 = 2 - \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 3}{3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1} = 1$$

Men det var jo den samme værdi som x_0, så derfor bliver $x_3 = 2$, så $x_4 = 1$ osv. Metoden vil veksle mellem disse to værdier uden nogensinde at nærme sig nulpunktet, som vist på figur 3.

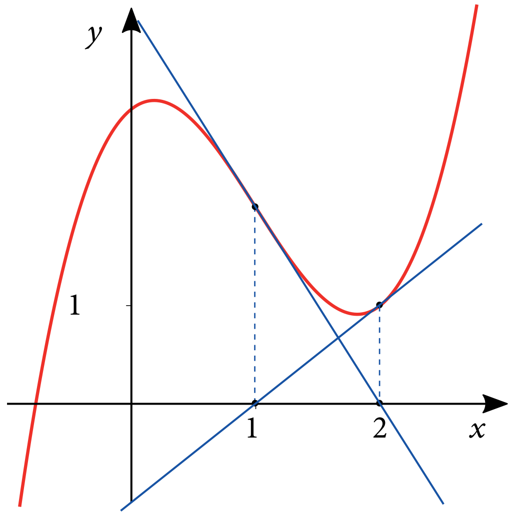
Vi har ovenfor set, at metoden gik godt med startgættet $x_0 = 0$, mens startgættet $x_0 = 1$ ikke var brugbart. Den følgende sætning, som vi ikke beviser, siger at Newtons metode normalt fungerer, hvis blot vi starter tæt nok på et nulpunkt:

Sætning 4
Lad $f(x)$ være en to gange kontinuert differentiabel funktion, og x^* et punkt så

$$\begin{aligned} &f(x^*) = 0 \ \text{ og} \\ &f'(x^*) \neq 0 \end{aligned}$$

Hvis x_0 vælges tæt nok på x^*, vil Newtons metode med startgættet x_0 give en talfølge x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, der opfylder

$$x_n \to x^* \quad \text{for} \quad n \to \infty$$



Figur 3. Newtons metode kan i visse tilfælde fejle.

At en funktion $f(x)$ er to gange kontinuert differentiabel betyder, at funktionen kan differentieres to gange, så $f''(x)$ eksisterer og er kontinuert.

Sætning 4 siger, at hvis $f'(x^*) \neq 0$, vil x_n nærme sig nulpunktet, bare startgættet er godt nok. Det viser sig dog, at selv om betingelserne i sætning 4 ikke er opfyldt, fungerer metoden ofte alligevel.

Det foregående eksempel viser, at det altid er en god ide at starte med at tegne en graf for funktionen, så man kan vælge en værdi af x_0, der ligger tæt på nulpunktet x^*.

Opgave 7
Betragt funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x + x$$

Ligningen $f(x) = 0$ kaldes en transcendent ligning, fordi man ikke kan isolere x i ligningen. Vores eneste håb om at finde et nulpunkt er ved hjælp af numeriske metoder.

Vælg et passende startgæt, x_0, og brug Newtons metode til at bestemme x_1, x_2, x_3, x_4 og x_5 ved hjælp af et IT-værktøj. Beregn så $f(x_5)$. Tjek evt. resultatet med dit CAS-værktøj.

Eksempel 9
Vi vil nu se, hvordan Newtons metode kan bruges til at beregne en tilnærmet værdi af kvadratroden af et tal. Som et eksempel vil vi se på, hvordan $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ kan beregnes. At finde $\sqrt{2}$ betyder at finde $x > 0$ så

$$x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = 0$$

Det søgte tal er altså et nulpunkt for funktionen $f(x) = x^2 - 2$, og vi kan benytte Newtons metode på

$$f(x) = x^2 - 2$$

Den afledede er

$$f'(x) = 2 \cdot x$$

så vi kan opskrive $N(x)$

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2 \cdot x}$$

Derfor svarer Newtons metode til rekursionsligningen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{{x_n}^2 - 2}{2 \cdot x_n} \\ &= x_n - \left(\frac{x_n}{2} - \frac{2}{2 \cdot x_n}\right) \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{2}{2 \cdot x_n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Som startgæt for Newtons metode vælger vi $x_0 = 4$. Det er selvfølgelig et dårligt gæt, men det tjener til at illustrere metoden. Ved indsættelse af $x_0 = 4$ får vi

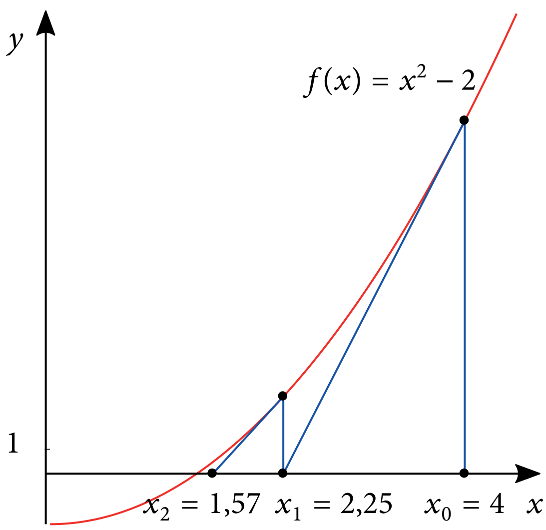
$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(4 + \frac{2}{4}\right) = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

som første bud på $\sqrt{2}$.

Vi finder nu x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{2}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{113}{72} \approx 1{,}57$$

der er noget tættere på den korrekte værdi. Beregningerne er illustreret på figur 4.



Figur 4. Newtons metode brugt til beregning af $\sqrt{2}$.

Vi har netop set, hvordan man numerisk kan tilnærme $\sqrt{2}$. Lignende metoder benyttes i computere, lommeregnere og CAS-værktøjer til at beregne værdier af forskellige funktioner, som f.eks. kvadratroden, $\sqrt{x}$.

Opgave 8
Fortsæt eksempel 9 og beregn x_3, x_4 og x_5. Brug et CAS-værktøj til at finde ud af, med hvor mange decimalers nøjagtighed x_5 stemmer med $\sqrt{2}$.

Vi har i det foregående anvendt Newtons metode for funktionen $f(x) = x^2 - 2$ til at beregne en tilnærmet værdi af $\sqrt{2}$. Dette kan selvfølgelig generaliseres til at beregne en tilnærmet værdi af kvadratroden, $\sqrt{w}$, af et vilkårligt tal, w, hvor $w > 0$.

Opgave 9
Lad $w > 0$ være givet. Vis at Newtons metode til at finde nulpunkter for $f(x) = x^2 - w$ kan skrives

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{w}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Denne specielle udgave af Newtons metode, som vi her har anvendt til at finde kvadratrødder, kaldes *Herons metode.*

4.2 Løsning af differentialligninger med Eulers metode

I dette afsnit vil vi se, hvordan rekursionsligninger kan bruges til at bestemme en tilnærmet løsning til en differentialligning.

Betragt differentialligningen

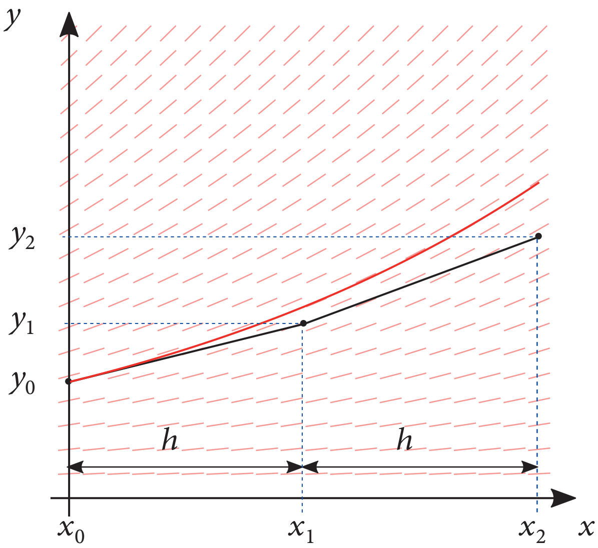
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \tag{11}$$

Det er nemt at kontrollere, at $f(x) = k \cdot \mathrm{e}^x$, hvor k er en konstant, er en løsning til denne ligning. Men der findes mange differentialligninger, hvor man ikke kan opskrive forskriften for den eksakte løsning. Her må man i stedet nøjes med en tilnærmet løsning.

Med udgangspunkt i differentialligningen (11) vil vi nu vise, hvordan man på en systematisk måde kan bestemme en tilnærmet løsning til en differentialligning med en given begyndelsesbetingelse. Lad os se på den løsningskurve, der går igennem punktet $(x_0; y_0)$. Idéen er at benytte linjeelementerne til at finde punkter $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ osv., der ligger tæt på differentialligningens løsningskurve. Den tilnærmede løsning er altså *ikke* en kurve men et antal diskrete punkter. Hvis man i stedet for disse punkter ønsker en sammenhængende kurve som løsning, kan de enkelte punkter forbindes med rette linjestykker.

Fra undervisningen ved du, at linjeelementer kan bruges til at skitsere, hvordan en eller flere løsninger til en differentialligning kan se ud. Linjeelementet $(x_0; y_0; \alpha)$ angiver, at løsningskurvens hældning i punktet $(x_0; y_0)$ er α. Da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$, vil hældningen i ethvert punkt have samme værdi som punktets y-koordinat, og derfor bliver linjeelementet i startpunktet $(x_0; y_0; y_0)$.

På figur 5 ses nogle af linjeelementerne for differentialligning (11). Hvert af de små røde linjestykker er en del af tangenten til den løsningskurve, der går igennem det tilsvarende punkt. Når man er tæt på x_0, vil der ikke være ret stor forskel på løsningskurven og tangenten gennem startpunktet, og det er derfor rimeligt at sige, at tangenten er en god tilnærmelse til løsningskurven. For at finde næste punkt i den tilnærmede løsning går vi et *lille* stykke, h, til højre ad x-aksen til værdien $x_1 = x_0 + h$. For at finde y-værdien, y_1, i den tilnærmede løsning, indsætter vi derfor x_1 i ligningen for tangenten til løsningskurven gennem $(x_0; y_0)$.



Figur 5. Tilnærmelse af løsning til differentialligning.

Det næste punkt $(x_2; y_2)$ i den tilnærmede løsning bestemmes på samme måde, men ud fra $(x_1; y_1)$. Derfor bliver $x_2 = x_1 + h$, og y_2 findes ved indsættelse i tangenten til løsningskurven gennem $(x_1; y_1)$.

I det følgende eksempel vil vi gennemgå beregningerne, der giver en tilnærmet løsning til differentialligning (11) for $x \in [0; 1]$.

Eksempel 10
Vi betragter fortsat differentialligningen,

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad x \in [0; 1] \tag{12}$$

og vil nu bestemme en tilnærmet løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0{,}5$. Løsningskurven går altså igennem punktet $(x_0; y_0) = (0; 0{,}5)$. Vi vælger $h = 0{,}5$ og får derfor tre punkter i den tilnærmede løsning, svarende til $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$ og $x_2 = 1$.

For at finde punktet $(x_1; y_1)$ i den tilnærmede løsning følges tangenten til løsningskurven gennem startpunktet $(0; 0{,}5)$ frem til $x = x_1$. Metoden er illustreret i figur 6. Tangenten gennem $(x_0; y_0)$ har ligningen

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Da f er en løsning til (12), er $f'(x_0) = y_0$, og vi kan skrive tangenten som

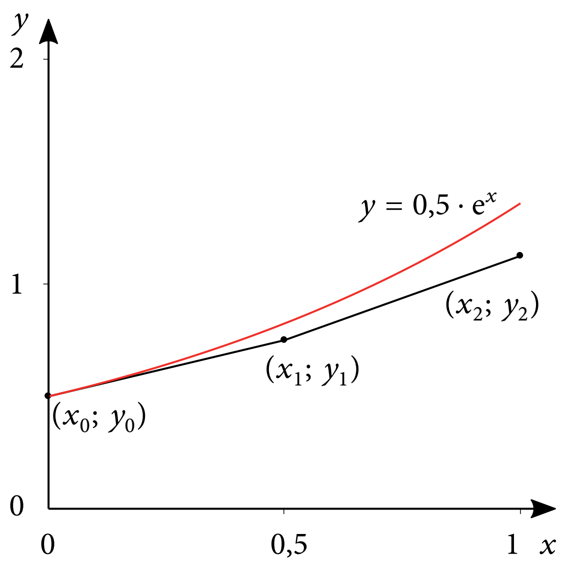
$$y = y_0 \cdot (x - x_0) + y_0$$

Vi kan nu finde y_1 ved at indsætte $x = x_1$

$$y_1 = y_0 \cdot (x_1 - x_0) + y_0$$

Vi indsætter de kendte værdier $(x_0; y_0) = (0; 0{,}5)$ og $x_1 = 0{,}5$, og får

$$y_1 = 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 0) + 0{,}5 = 0{,}75$$



Figur 6. Eksakt og tilnærmet løsning med $h = 0{,}5$.

Det andet punkt i vores tilnærmede løsning er altså $(x_1; y_1) = (0{,}5;\ 0{,}75)$. For at finde det sidste punkt $(x_2; y_2)$ i den tilnærmede løsning, skal vi følge tangenten til løsningskurven gennem $(x_1; y_1)$ frem til $x = x_2$. Denne tangent har ligningen

$$y = y_1 \cdot (x - x_1) + y_1$$

og y_2 bestemmes ved at indsætte $x = x_2 = 1$

$$y_2 = y_1 \cdot (x_2 - x_1) + y_1 = 0{,}75 \cdot (1 - 0{,}5) + 0{,}75 = 1{,}125$$

Vi har nu bestemt en tilnærmet løsning til differentialligningen, som består af 3 punkter, der ses i tabellen herunder. I dette tilfælde kan differentialligningen også løses eksakt:

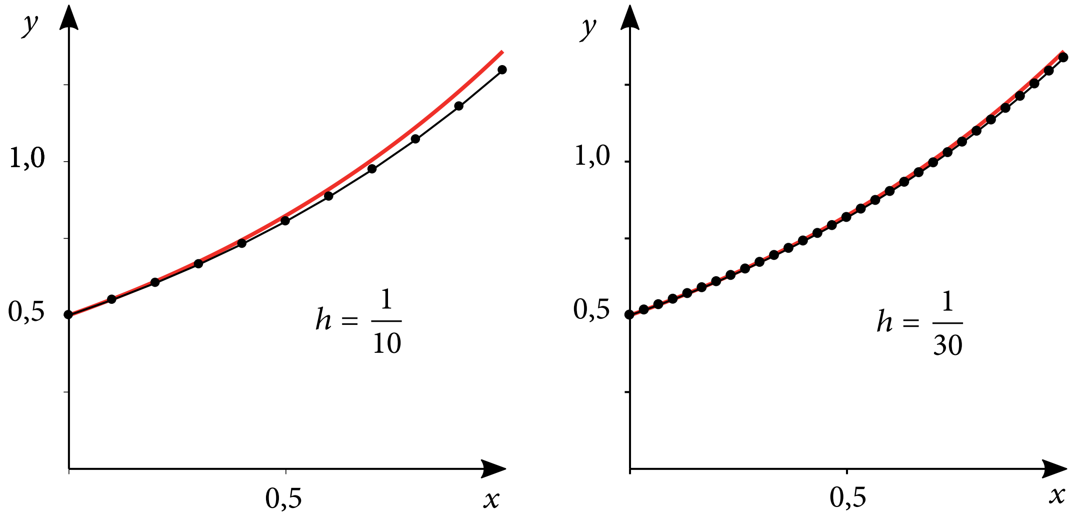
$$y(x) = 0{,}5 \cdot e^x$$

Vi kan derfor sammenligne vores tilnærmede løsning med den eksakte løsning. Værdierne for den eksakte løsning ses under den stiplede linje i tabellen.

n	0	1	2
x_n	0,0	0,5	1,0
y_n	0,500	0,750	1,125
$0{,}5 \cdot e^{x_n}$	0,500	0,824	1,359

Tilnærmelsen er ikke særligt præcis, hvilket ses på figur 6. Men det bliver bedre, hvis vi gør skridtstørrelsen mindre, og dermed øger antallet af punkter. Figur 7 viser tilnærmede løsninger med $h = 1/10$ og $h = 1/30$. Generelt gælder det (hvis man ser bort fra afrundingseffekter i computeren), at hvis højresiden af differentialligningen opfører sig tilstrækkeligt pænt i et lukket interval, kan tilnærmelsen gøres vilkårligt god indenfor intervallet ved at vælge h tilpas lille.

Bemærk at der er to kilder til fejl i tilnærmelsen $y_2 \approx y(x_2)$. For det første brugte vi tangenten som tilnærmelse til grafen til at finde y_1. For det andet brugte vi tangenten til løsningen gennem



Figur 7. Tilnærmede løsninger med to forskellige skridtlængder.

$(x_1; y_1)$ til at finde y_2, men grafen for den løsning vi søger, går ikke igennem $(x_1; y_1)$, fordi y_1 blot er en tilnærmelse til $y(x_1)$.

Metoden til at bestemme en tilnærmet løsning til en differentialligning skitseret i eksemplet, kaldes *Eulers metode*. Hvis vi kalder højresiden i differentialligningen for $g(y)$ og lader skridtlængden h betegne afstanden mellem x-værdierne, kan vi generelt definere Eulers metode således:

Eulers metode
Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y)$$

med begyndelsesbetingelsen $y(x_0) = s$.

Vælg $h > 0$. Eulers metode tilnærmer $y(x_n)$ med y_n, hvor $x_n = x_0 + n \cdot h$, og y_n er bestemt ved

$$\begin{aligned} y_0 &= s \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Bemærk at Eulers metode er formuleret som en rekursionsligning, der umiddelbart kunne se ud til at være på formen (8) fra sætning 3; altså $y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n)$. Men $g(y_n)$ afhænger af y_n og er derfor *ikke* på samme form som $b(n)$. Rekursionsligningen er derfor i almindelighed ikke en lineær førsteordens rekursionsligning.

I næste opgave benyttes Eulers metode, som beskrevet i rammen ovenfor, på differentialligningen i eksempel 10.

Opgave 10
Benyt Eulers metode med $g(y) = y$, $h = 0{,}5$, $x_0 = 0$ og $s = 0{,}5$ til at beregne y_1 og y_2, og opskriv de tre første punkter i den tilnærmede løsning af differentialligningen.

Eksempel 11
Vi ser på differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y}, \quad x \in [1;\,3]$$

med begyndelsesbetingelsen $y(1) = 2$. Vi vil bestemme en tilnærmet løsning med skridtlængden $h = 0,25$. Vi har altså $x_0 = 1$ og $y_0 = 2$, og har for $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}25 \cdot \sqrt{y_n}$$

Dette er en rekursionsligning, men den er ikke lineær.

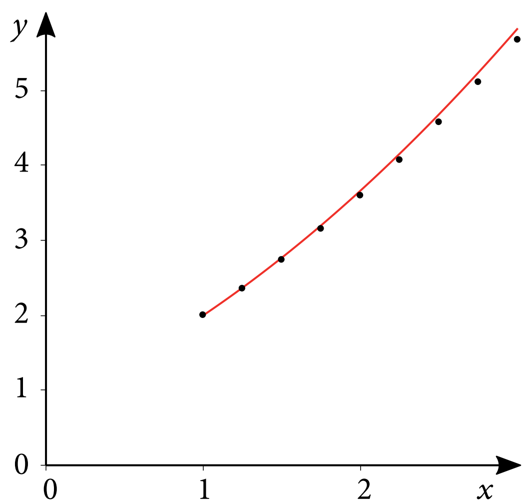
Med $x_1 = 1 + 1 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$ får vi så

$$y_1 = 2 + 0{,}25 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}3536$$

Værdierne af y_n beregnet på denne måde for $n = 0, \ldots, 8$ fremgår af den nedenstående tabel:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,0
y_n	2,0	2,3536	2, 7371	3,1507	3,5944	4,0684	4,5727	5,1073	5,6723

Det kan vises, at den eksakte løsning til differentialligningen ovenfor med begyndelsesbetingelsen $y(1) = 2$ er givet ved $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + (\sqrt{2} - \frac{1}{2})x + (\frac{9}{4} - \sqrt{2})$. Grafen i figur 8 viser den tilnærmede løsning sammen med den eksakte løsning. Bemærk, at tilnærmelsen er bedst tættest på punktet $(x_0;\, y_0)$.



Figur 8. Eksakt løsning sammen med tilnærmet løsning.

Generelt kan man ikke opskrive en formel, så man direkte kan beregne de enkelte værdier y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ uden først at beregne de foregående værdier. Men som det næste eksempel viser, findes der dog tilfælde, hvor det kan lade sig gøre.

Eksempel 12
I opgave 10 fandt vi de tre første punkter i den tilnærmede løsning for differentialligningen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$, ved hjælp af rekursion. Vi vil nu vise, at løsningen kan bestemmes ved en direkte formel, som vi så det i afsnit 3. Vi har brug for en rekursionsligning, og den kan findes vha. Eulers metode. Idet $g(y_n) = y_n$, har vi at

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot g(y_n) = y_n + h \cdot y_n = (1 + h) \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Denne rekursionsligning er af formen (6) fra sætning 2, med $a = (1 + h)$. Samtlige løsninger kan derfor skrives

$$y_n = k \cdot a^n = k \cdot (1 + h)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Værdien af k findes ud fra begyndelsesbetingelsen, $y(0) = 0{,}5$, så $y_0 = 0{,}5$ og dermed er

$$k \cdot (1 + h)^0 = k = 0{,}5$$

Vi kan så beregne y_n direkte for $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_n = 0{,}5 \cdot (1 + h)^n$$

Med skridtlængden $h = 0{,}5$ får vi

$$y_1 = 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}5)^1 = 0{,}75$$
$$y_2 = 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}5)^2 = 1{,}125$$

hvilket stemmer overens med resultaterne fra eksempel 10.

Opgave 11
Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 1, \quad x \in [0; 1]$$

a) Opskriv rekursionsligningen, der svarer til Eulers metode for differentialligningen.

b) Vis at $z_n = -1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ er en partikulær løsning til rekursionsligningen.

c) Opskriv samtlige løsninger til rekursionsligningen.

d) Find den løsning til rekursionsligningen, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y_0 = 0$.

e) Sæt $h = 0{,}1$ og bestem $(x_n; y_n)$ for $n = 0, 1, \ldots, 10$ vha. Eulers metode.

f) Sammenlign de fundne værdier med den eksakte løsning til differentialligningen med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$, som er $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

5 Konklusion

I dette forberedelsesmateriale har vi set på førsteordens rekursionsligningen

$$y_{n+1} = f(y_n, n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi har formuleret et eksistens- og entydighedsresultat, og vi har udviklet løsningsformler, når $f(y_n, n)$ er tilpas enkel. Vi har anvendt teorien til nulpunktsbestemmelse for funktioner og til numerisk løsning af differentialligninger.

Der er selvfølgelig meget mere at se på, end vi kan nå at gøre i dette materiale. Det næste naturlige skridt kunne være at betragte ligninger på formen

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}, n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

altså ligninger hvor y_{n+1} afhænger af de to foregående y-værdier. Sådanne ligninger kalder man 2.-ordens rekursionsligninger, og de kan bl.a. beskrive de såkaldte Fibonacci-tal

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Hvert tal i denne talfølge er summen af de to foregående tal, så

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mere generelt kan man kigge på n'te-ordens rekursionsligninger.

Man kan også se på systemer af rekursionsligninger:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{f}(\vec{y}_n, n)$$

hvor $\vec{y}_n$ er vektorer, og $\vec{f}$ er en vektorfunktion. Sådanne ligninger opstår ofte, når man løser systemer af differentialligninger numerisk.

Appendiks

I dette appendiks bevises sætning 2 og 3, der ikke er bevist i hovedteksten.

Sætning 2
Samtlige løsninger til den homogene rekursionsligning

$$y_{n+1} = a \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

er givet ved talfølgen

$$y_n = k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

hvor $k \in \mathbb{R}$ er en konstant.

Bevis for sætning 2
Vi viser først, at $y_n = k \cdot a^n$ er en løsning. Dvs. at den opfylder rekursionsligningen (13). Dette gøres ved indsættelse.

Venstresiden: vi skal finde et udtryk for y_{n+1}, og bruger at $y_n = k \cdot a^n$, så $y_{n+1} = k \cdot a^{n+1} = k \cdot (a \cdot a^n)$.

Højresiden: her fås at $a \cdot y_n = a \cdot (k \cdot a^n)$.

Da venstresiden er lig med højresiden, er $y_n = k \cdot a^n$ en løsning for $n = 0, 1, 2, \ldots$

Vi viser dernæst, at der ikke er flere løsninger. Dvs. at hvis vi har en talfølge, der er løsning til rekursionsligningen (13), så må den have formen (14).

Lad talfølgen u_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ være en løsning. Vi vil vise, at så er $u_n = y_n$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$ Heldigvis kan vi nøjes med at vise, at de to følger stemmer overens for $n = 0$, dvs. $u_0 = y_0$. For hvis dette er opfyldt, vil Eksistens og entydighedssætningen give os, at de to følger stemmer overens for alle n, da en rekursionsligning med begyndelsesbetingelse kun har én løsning.

Vælger vi $k = u_0$, så vil $y_0 = k \cdot a^0 = u_0 \cdot 1 = u_0$, og dermed er $u_n = y_n$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

□

Sætning 3
Antag at z_n er en løsning til rekursionsligningen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Så er samtlige løsninger givet ved talfølgen

$$y_n = z_n + k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

for $k \in \mathbb{R}$.

Bevis for sætning 3
Vi ønsker at finde samtlige løsninger, y_n, til den inhomogene rekursionsligning

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

og antager, at vi har en partikulær løsning, nemlig følgen z_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Det betyder, at der gælder

$$z_{n+1} = a \cdot z_n + b(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Hvis vi for hver værdi af n trækker ligning (18) fra ligning (17) , får vi et udtryk af formen

$$y_{n+1} - z_{n+1} = a \cdot (y_n - z_n) \tag{19}$$

og da dette gælder for alle n, har vi altså fået en ny rekursionsligning, og den er homogen! Derfor ved vi fra sætning 2, at samtlige løsninger er givet ved følgen

$$y_n - z_n = k \cdot a^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dette kan omskrives til

$$y_n = z_n + k \cdot a^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

hvilket var det, vi skulle nå frem til. $\square$