Formale Sprachen und Automaten
(Formelsammlung, v2022.2)

Uwe Nestmann
Technische Universität Berlin

30. März 2023

Inhaltsverzeichnis

0 Basiswissen

Die Inhalte dieses Kapitels sind vor allem als Nachschlagewerk zu verstehen: wenn sich Lesende der späteren Kapitel der Definition des einen oder anderen mathematischen Konzepts nicht sicher sind, so findet sich hier eine meist recht formale saubere Definition.

Der Text beinhaltet auch Passagen, die in einem leichten Grauton anstelle von Schwarz erscheinen. Dies deutet darauf hin, dass es sich um nützliche Einsichten oder Notationen handelt, die aber nicht wesentlich zum Verstehen der Inhalte des Moduls sind.

0.1 Mathematische Grundlagen Ana1/LinA

Wir fassen kurz zusammen, welche Inhalte in Bezug auf das Skript des Kombimoduls „Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften" [**?**] schon bekannt sein sollten. Wir zeigen zudem auf, wo sich diese Teile in der vorliegenden Formelsammlung wiederfinden und worin ein meist höherer Grad der Formalisierung liegt.

- Dir Grundlagen der Mengenlehre sind aus dem Kombimodul bekannt. In Abschnitt 0.3 fassen wir diese formal zusammen und betonen die verschiedenen Methoden, mit denen Mengen definiert werden können. Dazu führen wir das in der Informatik eminent wichtige Konzept der Potenzmenge ein. Der Zusatzabschnitt 0.8 erweitert diese Möglichkeiten mithilfe von Abbildungen.

- Wir gehen davon aus, dass die üblichen Zahlenräume bzw. die entsprechenden Mengen bekannt sind (ebenfalls Abschnitt 0.3).

- Der Abschnitt 0.4 zur Aussagenlogik ist deutlich formaler gehalten als es aus dem Kombimodul bekannt ist; zudem wird auch deren Semantik formalisiert. Neben nützlicher Terminologie werden auch logische Äquivalenzen eingeführt, die die Grundlage und Berechtigung für viele bekannte Beweisprinzipien der Mathematik darstellen.

- Der Abschnitt 0.5 zur Prädikatenlogik ist ebenfalls recht formal gehalten, verzichtet aber der Einfachheit halber auf eine formale Semantik. Es genügt jedoch, um Induktionsprinzipien wie die aus der Mathematik bekannte vollständige Induktion als geschlossene Formel darzustellen.

- Der Abschnitt 0.7 zu Abbildungen und deren Eigenschaften orientiert sich weitgehend an der Notation des Kombimoduls. Abbildungen werden in diesem Modul jedoch als Spezialisierung des Relationskonzepts aus Abschnitt 0.6 eingeführt und vor allem im Abschnitt 0.9 zur Formalisierung von Kardinalitäten genutzt.

Insbesondere die Abschnitte 0.6 und 0.10 zu Relationen, darauf aufbauend zu Ordnungen 0.11 und Äquivalenzen 0.12, aber auch zu Kardinalitäten 0.9 enthalten im Vergleich zum Kombimodul neues Material.

das hier in DS benutzt

0.2 Gleichheit[en]

In vielen Texten findet man „:=“ (gelegentlich auch „=:“) oder „$\stackrel{\text{def}}{=}$“ als Symbol für *definierte* bzw. *definierende Gleichheit*. In dieser Formelsammlung benutzen wir stattdessen das Symbol „$\triangleq$“. Beispielsweise wird durch

$$\mathrm{Bez} \triangleq \mathit{Ausdruck}$$

definiert, dass in der Folge – zumindest im Kontext dieser Definition – der Bezeichner Bez metasprachlich immer durch den Ausdruck *Ausdruck* ersetzt werden darf. Dies gilt dann auch nur, weil wir es für unsere Bedürfnisse so festgelegt, eben definiert haben.

Wir verwenden das eher generische Gleichheitssymbol „=“ immer dann, wenn aus irgendwelchen Gründen – neben der direkt definierten Gleichheit beispielsweise aufgrund der in der Schule gelernten Grundrechenarten – eine „wie auch immer geartete Gleichheit“ zwischen zwei Dingen bzw. Ausdrücken *festgestellt werden kann* und damit *gilt*.

Manche Gleichheiten bezeichnen wir auch als *Äquivalenz* (aka: *Gleichwertigkeit*) und verwenden dann dafür ein besonderes Symbol, oftmals das „$\equiv$“, wie beispielsweise im Fall der *semantischen Äquivalenz* von aussagen- und prädikatenlogischen Formeln in § 0.4 und 0.5. Was der Begriff abstrakt (und damit: genau) bedeutet, das zeigen wir in § 0.12.

Umgangssprachlich mag es helfen sich zu vergegenwärtigen, dass *das gleiche* und *dasselbe* unterschiedlich benutzt werden, obwohl beide den Charakter einer Gleichheit besitzen.

Etwas formaler: Nehmen wir beispielsweise die Menge der Brüche, wie in „Ana1/LinA“ [**?**] definiert, dann sind Brüche wie $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ definitiv verschiedene Gegenstände, also *nicht gleich*, sie bezeichnen aber die gleiche (sogar *dieselbe!*) rationale Zahl, die man ansatzweise mit der Periodendarstellung $0,\overline{6}$ eindeutig zu repräsentieren versucht. (Hier sei die Problematik der beiden verschiedenen Dezimaldarstellungen $0,\overline{9}$ und $1,0$ genannt, die ja dieselbe Zahl bedeuten.) Andererseits kann man $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ insofern auch als *äquivalent* in Bezug auf Kürzbarkeit ansehen.

DS definiert ≡ leicht anders als „Kongruenz“
also
(1) $\varphi \equiv \psi$ für logische Formeln falls φ und ψ dieselbe Wahrheitswerttabelle haben

(2) $a \equiv b \pmod{c}$ falls $(a \bmod c) = (b \bmod c)$

0.3 Mengen

Die Bezeichner von Standardmengen, wie beispielsweise $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, verwenden einen anderen Schriftsatz als Metavariablen für Mengen; für letztere bevorzugen wir $A, B, C, \ldots$, möglicherweise mit Indizes (Zahlen oder anderen Buchstaben) versehen.

0.3.1 Notation (Beschreibungsformen 1)

- Eine Menge A kann durch $A \triangleq \{ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \}$ als die explizite Aufzählung unterscheidbarer Elemente a_i definiert werden.
- Die Aussage „$a \in A$" bezeichnet den Sachverhalt, dass a ein Element der Menge A ist.
- Die *leere Menge* $\emptyset \triangleq \{\}$ enthält keine Elemente.

0.3.2 Definition (Zahlenmengen)

- $\mathbb{N} \triangleq \{ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \}$; $\mathbb{N}^+ \triangleq \{ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \}$.
- Mit $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen wir die gebräuchlichen Mengen von *ganzen Zahlen*, *rationalen Zahlen*, *reellen Zahlen*.

0.3.3 Definition (Größe von Mengen) Sei A eine beliebige Menge. $\#(A)$ (oder auch $|A|$) bezeichnet die Anzahl der Elemente in A. Es gilt $\#(A) \in \mathbb{N}$ oder $\#(A) = \infty$.

In DS finden Sie häufiger $|A|$

0.3.4 Notation (Beschreibungsformen 2) Die Schreibweise

$$\{ x \in B \mid P(x) \} \quad \text{bzw.} \quad \{ x \mid P(x) \}$$

definiert die Menge derjenigen Elemente x [aus der Menge B], die die Eigenschaft bzw. das „Prädikat" P erfüllen. Dabei gilt:

- Die Angabe von B kann manchmal entfallen, wird aber empfohlen. Das Symbol „|" kann dabei als „so dass" gelesen werden.
- Die Angabe von $P(x)$ erfolgt entweder umgangssprachlich oder durch eine logische Formel (siehe 0.3.7 sowie § 0.4 und 0.5).
- Die Menge $\{ x_i \mid i \in I \}$ heißt *über* I *indizierte Menge*.

Sowohl $\{ x \in B \mid P(x) \}$ als auch $\{ x \mid P(x) \}$ definieren nur dann Mengen, wenn für alle betroffenen x die Wahrheit von $P(x)$ überprüfbar ist.

dies schließt „Russelmenge" aus

0.3.5 Proposition (Mengen und Elemente)

1. Für beliebige Prädikate P gilt: $\{ y \mid P(y) \} = \{ x \mid P(x) \}$.
2. Für beliebige Mengen A gilt: $A = \{ x \mid x \in A \}$.
3. Für beliebige Prädikate P gilt: $\{ y \mid P(y) \} = \{ x \mid x \in \{ y \mid P(y) \} \}$.

0.3.6 Definition (Zahlenmengen)

$[m, n] \triangleq \{ i \in \mathbb{N} \mid m \leqslant i \text{ und } i \leqslant n \}$ für $m, n \in \cancel{\mathbb{N}}$ $\mathbb{Z}$

0.3.7 Notation („Logik-Sprache“ durch Junktor-Symbole)
Wir führen logische Konnektive zunächst semi-formal als symbolische Abkürzungen natürlichsprachlicher Begriffe ein:

- *Verum* $\top$ steht für „wahr“.
- *Falsum* $\bot$ steht für „falsch“.
- *Negation* $\neg$ steht für „nicht“.
- *Konjunktion* $\wedge$ steht für „und“.
- *Disjunktion* $\vee$ steht für „oder“.
- *Implikation* $\rightarrow$ steht für „impliziert“ (d.h. „läßt schließen auf“).
- *Biimplikation* $\leftrightarrow$ steht für „genau dann, wenn“ („g.d.w.“).
- *Universelle Quantifikation* $\forall$ steht für „für alle“.
- *Existentielle Quantifikation* $\exists$ steht für „es gibt“.

0.3.8 Definition (Teilmengen, Gleichheit von Mengen)
Seien A und B zwei beliebige Mengen.
A heißt *Teilmenge* von B, geschrieben $A \subseteq B$, wenn für alle x gilt:

$$(x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

A und B heißen *gleich*, geschrieben $A = B$, wenn gilt:

$$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$$

A heißt *echte Teilmenge* von B, geschrieben $A \subset B$, wenn gilt:

$$A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B$$

Wenn A (echte) Teilmenge von B ist,
dann heisst B *(echte) Obermenge* von A.

0.3.9 Definition (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Produkt)
Seien A und B zwei beliebige Mengen. Wir definieren:
Vereinigung[smenge] von A und B:

$$A \cup B \triangleq \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Schnitt[menge] von A und B:

$$A \cap B \triangleq \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

Differenz bzw. *Komplement* von A *in [Bezug auf]* B:

$$B \setminus A \triangleq \{ x \mid x \in B \wedge x \notin A \}$$

in DS sagen wir auch „B ohne A“

[kartesisches] Produkt von A und B:

$$A \times B \triangleq \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

disjunkte Vereinigung von A und B:

$$A \uplus B \triangleq \cancel{(A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})} \ A \cup B$$

aber nur falls A und B disjunkt sind! Sonst undefiniert

Die Wahl von $\{1, 2\}$ in der Definition disjunkter Vereinigung ist willkürlich. Beliebige andere Werte hätten verwendet werden können.

0.3.10 Definition Sei $\boldsymbol{M}$ eine Menge von Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bigcup \boldsymbol{M} &\triangleq \{\, x \mid \exists m \in \boldsymbol{M} \;.\; x \in m \,\} \\ \bigcap \boldsymbol{M} &\triangleq \{\, x \mid \forall m \in \boldsymbol{M} \;.\; x \in m \,\} \end{aligned}$$

Als Spezialfälle werden häufig indizierte Vereinigungen verwendet:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} m_i &\triangleq \{\, x \mid \exists i \in I \;.\; x \in m_i \,\} \\ \bigcap_{i \in I} m_i &\triangleq \{\, x \mid \forall i \in I \;.\; x \in m_i \,\} \end{aligned}$$

0.3.11 Definition (Potenzmenge) Sei A eine beliebige Menge. Dann heißt

$$\mathcal{P}(A) \triangleq \{\, B \mid B \subseteq A \,\}$$

Potenzmenge von A. Alternativ gilt die Notation $2^A \triangleq \mathcal{P}(A)$.

0.3.12 Proposition Sei A eine beliebige Menge. Dann gilt:

$$\#(\mathcal{P}(A)) = \begin{cases} 2^{\#(A)} & \text{falls } \#(A) < \infty \\ \infty & \text{falls } \#(A) = \infty \end{cases}$$

0.3.13 Notation (Beschreibungsformen 3: (Strukturelle) Induktion)
Unendlich große Mengen können auch *rekursiv* bzw. *induktiv* durch die Angabe endlich vieler Regeln eindeutig definiert werden. So ergibt sich die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aus folgenden zwei „Regeln“:

Basis $0 \in \mathbb{N}$
Komposition Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann auch $n{+}1 \in \mathbb{N}$.

Gemeint ist damit, dass die Menge $\mathbb{N}$ aus *genau* solchen Elementen besteht, die sich durch die beiden Regeln „herleiten“ lassen. Mit anderen Worten: *alle* solchen Elemente gehören dazu, aber keine anderen.

Verallgemeinert spricht man von der Definition einer Menge M durch *strukturelle Induktion*, wenn es zum einen eine Basismenge B gibt, deren Elemente ohne weitere Vorbedingung dazugehören:

Basis $B \subseteq M$

Zum anderen kommen *endlich* viele Regeln der **Komposition** hinzu, mit deren Hilfe aus in M bereits enthaltenen Elementen strukturell – wie im Beispiel der Definition von $\mathbb{N}$ ersichtlich – potenziell *unendlich* viele neue Elemente konstruiert und in M aufgenommen werden. Definition 0.4.1 liefert hierzu ein typisches Beispiel.

0.4 Aussagenlogik

0.4.1 Definition (Syntax der Aussagenlogik)
Sei V eine Menge von *aussagenlogischen Variablen*.
Sei $V \cap \{ \top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,) \} = \emptyset$.
Dann ist die *Menge* $\mathbf{A}(V)$ *der aussagenlogischen Formeln zu* V definiert als kleinste Menge mit

- $V \cup \{ \top, \bot \} \subseteq \mathbf{A}(V)$; → wir erlauben auch 0, falsch bzw. 1, wahr statt ⊥ bzw ⊤
- wenn $\varphi \in \mathbf{A}(V)$, dann auch $\neg\varphi \in \mathbf{A}(V)$;
- wenn $\{ \varphi_1, \varphi_2 \} \subseteq \mathbf{A}(V)$, dann auch $\{ (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \to \varphi_2), (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \} \subseteq \mathbf{A}(V)$.

Wir verwenden $p, q, \dots$ als Metavariablen für Elemente von V.
Wir verwenden $\varphi, \psi, \dots$ als Metavariablen für Elemente von $\mathbf{A}(V)$.

Formeln in $\mathbf{A}(V)$, die:

- keine aussagenlogischen Variablen beinhalten, heißen *Aussagen*.
- aussagenlogische Variablen beinhalten, heißen *Aussagenschemata*.
- nur aus einem einzigen Element in $V \cup \{ \top, \bot \}$ bestehen, heißen *atomar*, alle anderen Formeln heißen *zusammengesetzt*.
- maximal eine aussagenlogische Variable und außer $\top$ oder $\bot$ maximal einen weiteren Operator betreffen, nennen wir *trivial*.

0.4.2 Notation Für bessere Lesbarkeit können manche Klammern entfallen. Dazu gelten folgende Regeln des *Operatorenvorrangs*:

- $\neg$ bindet stärker als alle anderen Konnektive;
- $\wedge$ und $\vee$ binden gleich stark;[1]
- $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\to$ und $\leftrightarrow$;
- $\to$ und $\leftrightarrow$ binden gleich stark.

Außenklammern dürfen (nur zwecks Lesbarkeit) weggelassen werden.
~~Syntaktisch korrekte Formeln beinhalten dennoch immer alle Klammern~~.

0.4.3 Definition (Semantik der Aussagenlogik)
Sei V eine Menge von aussagenlogischen Variablen.
Eine *Variablenbelegung* β weist jedem Element $p \in V$ genau ein Element $\beta(p) \in \mathbb{B} \triangleq \{1, 0\}$ der *Wahrheitswerte* zu.
Die zu β gehörige *Auswertung* $[\![\cdot]\!]^\beta$ weist jedem Element $\varphi \in \mathbf{A}(V)$ genau ein Element $[\![\varphi]\!]^\beta \in \mathbb{B}$ zu.($[\![\psi]\!]^\beta$ darf kurz als $[\![\psi]\!]$ geschrieben werden, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.)

Zur Definition von $[\![\cdot]\!]^\beta$ gilt für atomare Formeln:

- $[\![\top]\!]^\beta \triangleq 1$
- $[\![\bot]\!]^\beta \triangleq 0$
- $[\![p]\!]^\beta \triangleq \beta(p)$

außerdem: $[\![0]\!]^\beta := 0$
$[\![1]\!]^\beta := 1$
und analog mit falsch & wahr

[1] In manchen Darstellungen wird $\wedge$ als vorrangig gegenüber $\vee$ betrachtet.

Wahrheitstabellen definieren die Semantik zusammengesetzter Formeln (wobei wir der Einfachheit halber hier das Superskript β weglassen):

$[\![\varphi]\!]$	$[\![\neg\varphi]\!]$
0	1
1	0

$[\![\varphi_1]\!]$	$[\![\varphi_2]\!]$	$[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$[\![\varphi_1]\!]$	$[\![\varphi_2]\!]$	$[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$[\![\varphi_1]\!]$	$[\![\varphi_2]\!]$	$[\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$[\![\varphi_1]\!]$	$[\![\varphi_2]\!]$	$[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!]$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

0.4.4 Bemerkung Es gilt offensichtlich, dass:

- $[\![\neg\varphi]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$
- $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \cdot [\![\varphi_2]\!]$
- $[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] + [\![\varphi_2]\!] - [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]$
- $[\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!] = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi_1]\!] \leqslant [\![\varphi_2]\!]$
- $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!] = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$

0.4.5 Definition
Sei V eine Menge von *aussagenlogischen Variablen*.

1. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathbf{A}(V)$
   heißen *logisch äquivalent*, geschrieben $\varphi \equiv \psi$,[2]
   wenn für alle Variablenbelegungen β gilt: $[\![\varphi]\!]^\beta = [\![\psi]\!]^\beta$.
2. Eine Formel φ heißt *allgemeingültig*, wenn $\varphi \equiv \top$.
3. Eine Formel φ heißt *kontradiktorisch*, wenn $\varphi \equiv \bot$.
4. Eine Formel φ heißt *erfüllbar*,
   wenn es eine Variablenbelegung β gibt mit $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

Äquivalenzen zwischen trivialen Formeln dürfen ohne Beweis benutzt werden (z.B.: $\top \wedge p \equiv p$, $p \vee \bot \equiv p$, $p \to p \equiv \top, \ldots$).

0.4.6 Proposition (Logische Äquivalenz (I))

$\varphi_1 \wedge \varphi_1 \equiv \varphi_1$	Idempotenz von $\wedge$
$\varphi_1 \vee \varphi_1 \equiv \varphi_1$	Idempotenz von $\vee$
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$	Kommutativität von $\wedge$
$\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$	Kommutativität von $\vee$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$	Assoziativität von $\wedge$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	Assoziativität von $\vee$
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	Distributivität von $\vee$ über $\wedge$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$	Distributivität von $\wedge$ über $\vee$

[2] In manchen Darstellungen wird $\equiv$ als Synonym für $\leftrightarrow$ betrachtet, d.h., als Junktor innerhalb der Formelsprache.

$$
\begin{aligned}
\neg\neg\varphi_1 &\equiv \varphi_1 && \text{doppelte Negation}\\
\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1 &\equiv \bot && \text{Tertium Non Datur } \wedge\\
\varphi_1 \vee \neg\varphi_1 &\equiv \top && \text{Tertium Non Datur } \vee\\
\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &\equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 && \text{De Morgan I}\\
\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) &\equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 && \text{De Morgan II}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 && \text{Implikation}\\
&\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1 && \text{Kontraposition}\\
&\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1) && \text{Biimplikation}
\end{aligned}
$$

0.5 Prädikatenlogik

0.5.1 Notation (Prädikate)

In der Aussagenlogik beinhaltet $V \cup \{\top, \bot\}$ die atomaren Ausdrücke. In der Prädikatenlogik werden aussagenlogische Variablen aus V ersetzt durch so genannte *Prädikate* in $\mathrm{Pr}(X)$, die wiederum parametrisiert sind über eine Menge X von *Termvariablen*.

Typischerweise enthält $\mathrm{Pr}(X)$ Ausdrücke der Form $r(t_1, \dots, t_n)$ mit $n \in \mathbb{N}^+$, wobei r zu einer anzugebenden Menge S_{rel} so genannter Relationssymbole gehört[3] (siehe § 0.6) und die t_i aus Variablen in X sowie Elementen einer ebenfalls anzugebenden Menge S_{fun} so genannter Funktionssymbole (siehe § 0.7) zusammengesetzt werden.

Wir schreiben $\vec{x}$ für $x_1, \dots, x_n$ und $\vec{t}$ für $t_1, \dots, t_n$.

$\mathrm{Pr}(X)$ normalerweise implizit

0.5.2 Definition (Syntax der Prädikatenlogik)

Sei X eine Menge von *Termvariablen*.
Sei $\mathrm{Pr}(X)$ eine Menge von *Prädikaten* über X.
Dann ist die *Menge* $\mathbf{P}(X)$ *der prädikatenlogischen Formeln zu* X definiert als kleinste Menge mit:

- $\mathrm{Pr}(X) \cup \{\top, \bot\} \subseteq \mathbf{P}(X)$;
- wenn $\varphi \in \mathbf{P}(X)$, dann auch $\neg\varphi \in \mathbf{P}(X)$;
- wenn $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathbf{P}(X)$, dann auch $\{(\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \to \varphi_2), (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)\} \subseteq \mathbf{P}(X)$;
- wenn $\varphi \in \mathbf{P}(X)$, dann auch $\cancel{\{(\forall x.\varphi), (\exists x.\varphi)\} \subseteq \mathbf{P}(X)}$ $\{(\forall_x \varphi), (\exists_x \varphi)\} \subseteq \mathbf{P}(X)$

Wir verwenden $\varphi, \psi, \dots$ als Metavariablen für logische Formeln.

0.5.3 Notation (Quantoren und Variablen)

In den Formeln $(\forall x.\varphi)$ und $(\exists x.\varphi)$ „binden“ die Quantoren jeweils die Variable x in der Formel φ. Um Missverständnisse durch verschachtelte Mehrfachbindung zu vermeiden, benutzen wir immer paarweise verschiedene Variablen in den vorkommenden Quantoren.

Quantoren werden häufig in eingeschränkter Form verwendet:

$$
\begin{aligned}
&\cancel{(\forall x{\in}A \,.\, \varphi) \;\triangleq\; (\forall x \,.\, x{\in}A \to \varphi)}\\
&\cancel{(\exists x{\in}A \,.\, \varphi) \;\triangleq\; (\exists x \,.\, x{\in}A \wedge \varphi)}
\end{aligned}
$$

$\forall_{x\in A}\, \varphi := \forall_x\, x \in A \to \varphi$

$\exists_{x\in A}\, \varphi := \exists_x\, x \in A \wedge \varphi$

Im Fach *Logik* gilt dabei, dass die Menge A nicht leer sein darf.

→ in DS darf A leer sein

[3]Üblicherweise ist das Gleichheitssymbol $=$ in S_{rel} enthalten.

Im Folgenden immer „$\forall_x$" statt „$\forall x.$"
und „$\exists_x$" statt „$\exists x.$"

Oft werden Formeln φ zusammen mit den in ihnen frei (d.h. nicht durch Quantoren gebunden) vorkommenden Variablen $\vec{x}$ notiert als $\varphi(\vec{x})$. Das erleichtert die Notation zur Instanziierung der Variablen bzw. zum Einsetzen von konkreten Termen in entsprechender Form als $\varphi(\vec{t})$.

0.5.4 Notation (Quantoren und Klammerung)
Für Quantoren gelten folgende Regeln des *Operatorenvorrangs*:

- $\forall$ und $\exists$ binden gleich stark;
- $\forall$ und $\exists$ binden schwächer als alle anderen Konnektive.

0.5.5 Notation (Eindeutigkeit)
Die Aussage „es gibt *genau* ein x für das $\varphi(x)$ gilt" wird abgekürzt durch:

$$\exists! x \,.\, \varphi(x) \quad \triangleq \quad \Big(\exists z \,.(\varphi(z))\Big) \wedge \Big(\forall x, y \,.\, \varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y\Big)$$

0.5.6 Proposition (Logische Äquivalenz (II))

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \,.\, \varphi) &\equiv \exists x \,.\, \neg\varphi \\ \neg(\exists x \,.\, \varphi) &\equiv \forall x \,.\, \neg\varphi \end{aligned}$$

0.5.7 Proposition (Mathematische Induktion)
Sei $P(n)$ ein Prädikat über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Falls

1. $P(0)$
2. $P(n) \rightarrow P(n{+}1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

beide gelten (bzw. bewiesen werden können), dann gilt auch:

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$$

0.5.8 Notation (Induktionsschemata)
Sei $P(n)$ ein Prädikat über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
Das Prinzip aus Proposition 0.5.7 kann knapp in einer einheitlichen Formel, genannt *Induktionsschema*, zusammengefasst werden.

$$\Bigg(P(0) \;\wedge\; \Big(\forall n \in \mathbb{N}.\big(P(n) \rightarrow P(n{+}1)\big) \Big) \Bigg) \rightarrow (\, \forall x \in \mathbb{N}.P(x) \,)$$

0.5.9 Proposition (Werteverlaufsinduktion)
Sei $P(n)$ ein Prädikat über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\Bigg(\forall n \in \mathbb{N}.\Big(\big(\forall m \in [0, n{-}1].P(m)\big) \rightarrow P(n) \Big) \Bigg) \rightarrow (\, \forall x \in \mathbb{N}.P(x) \,)$$

0.5.10 Bemerkung Abgesehen von den oben definierten Induktionsprinzipien und -schemata im Fall der natürlichen Zahlen kann man Induktionsprinzipien und -schemata für jede per struktureller Induktion definierte Menge (siehe Notation 0.3.13) begründen.

0.6 Relationen

0.6.1 Definition (Kartesisches Produkt)
Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \;\triangleq\; \{\, (a_1,\ \ldots,\ a_n) \mid \forall i \in [1,\, n] \,.\, a_i{\in}A_i \,\}$$

[kartesisches] Produkt der A_i.
Es wird auch notiert als $A_1 \times \cdots \times A_n$ (siehe Def. 0.3.9 für $n = 2$).

- Die Elemente von $\prod_{i=1}^{n} A_i$ heißen n-*Tupel*.
- 2-Tupel heißen *Paare*.
- $()$ heißt *leeres Tupel*; es wird häufig auch mit λ bezeichnet.

Für eine beliebige Menge A und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $A^n \triangleq \prod_{i=1}^{n} A$.

0.6.2 Bemerkung (Spezialfälle)
Sei A eine beliebige Menge.

- $A^0 = \{\, () \,\}$
- $\prod_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$, falls $A_k = \emptyset$ für mindestens ein $k \in [1,\, n]$

0.6.3 Definition (Relation)
Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen.
Sei $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$. Dann heißt

$$\underbrace{R}_{\cancel{\text{Graph}}} \;:\; \underbrace{(A_1, \ldots, A_n)}_{\text{Typ}}$$

n-*stellige Relation*. Der Spezialfall der 2-stelligen Relation heißt auch *binäre Relation*, alternativ mit Infixschreibweise $a\ R\ b$ für $(a, b) \in R$.
~~Zwei Relationen $R_A : (A_1, \ldots, A_n)$ und $R_B : (B_1, \ldots, B_m)$ sind *gleich*, falls~~

1. ~~$n = m$,~~
2. ~~$A_i = B_i$~~ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und
3. ~~$R_A = R_B$.~~

0.6.4 Definition (Spezialfälle)
Seien A und B beliebige Mengen.

- $\emptyset_{A,B} : (A, B)$ mit $\emptyset_{A,B} \triangleq \emptyset$
  bezeichnet die *leere Relation* (mit Typ (A, B)).
- $\nabla_{A,B} : (A, B)$ mit $\nabla_{A,B} \triangleq A \times B$
  bezeichnet die *universelle Relation* bzw. *Allrelation* (mit Typ (A, B)).

Wenn der Typ implizit klar ist, kann der Index weggelassen werden.

0.6.5 Notation

- ~~In [?] wird eine Relation *Rel* anstelle von Graph(*Rel*) : Typ(*Rel*) als Paar ⟨Typ(*Rel*), Graph(*Rel*)⟩ notiert (mit anderer Typnotation).~~
- Ist der Typ einer Relation implizit klar, wird oft nur R angegeben.
  In diesen Fällen wird auch der bloße Graph als Relation bezeichnet.

0.6.6 Definition (Totalität und Eindeutigkeit)
Sei $R : (A, B)$ eine binäre Relation. R heißt

1. *linkstotal*, falls: oder "total"
$$\forall a{\in}A \,.\, \exists b{\in}B \,.\, aRb$$
2. *rechtstotal*, falls: oder "surjektiv"
$$\forall b{\in}B \,.\, \exists a{\in}A \,.\, aRb$$
3. *linkseindeutig*, falls: oder „injektiv"
$$\forall a_1, a_2{\in}A \,.\, \forall b{\in}B \,.\, (\, a_1Rb \wedge a_2Rb \to a_1{=}a_2 \,)$$
4. *rechtseindeutig*, falls: oder „Funktion"
$$\forall a{\in}A \,.\, \forall b_1, b_2{\in}B \,.\, (\, aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1{=}b_2 \,)$$

0.6.7 Definition (Komposition) Seien A, B, C drei beliebige Mengen. Seien $P : (A, B)$ und $Q : (B, C)$ zwei beliebige Relationen. Dann ist die *Komposition* $P;Q : (A, C)$ definiert wie folgt:

$$P;Q \;\triangleq\; \{\, (a,\ c) \in A \times C \mid \exists b{\in}B \,.\, aPb \wedge bQc \,\}$$

0.6.8 Notation Aus Bequemlichkeit schreiben wir oft PQ anstelle von $P;Q$. Aus Gründen der Konsistenz mit dem Kompositionsbegriff für Funktionen (siehe §0.7) erlauben wir auch $Q \circ P \triangleq P;Q$ als Notation.

in DS nur diese Schreibweise "Q nach P"

0.6.9 Proposition (Assoziativität der Komposition)
Seien A, B, C, D beliebige Mengen.
Seien $P : (A, B)$, $Q : (B, C)$ und $R : (C, D)$ drei beliebige Relationen.
Dann gilt:
$$P;(Q;R) = (P;Q);R$$

0.6.10 Definition (Umkehrrelation)
Seien A und B zwei beliebige Mengen. Sei $R : (A, B)$.
Die *Umkehrrelation* von R, geschrieben $R^{-1} : (B, A)$, ist definiert durch:

$$R^{-1} \;\triangleq\; \{\, (b,\ a) \mid (a,\ b) \in R \,\}$$

0.6.11 Proposition (Eigenschaften der Umkehrrelation)
Seien A, B, C drei beliebige Mengen. Seien $R : (A, B)$ und $Q : (B, C)$ zwei beliebige Relationen. Dann gilt:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(RQ)^{-1} = Q^{-1}R^{-1}$
3. $(Q \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ Q^{-1}$

0.7 Abbildungen = Funktionen

DS: eine Funktion $f : A \to B$ ist per default partiell. Wenn f total ist sollte das explizit gesagt werden. Daher verwenden wir in DS das Symbol „$\rightharpoonup$“ nicht

0.7.1 Definition (Partielle Abbildung)

Sei $f : (A, B)$ eine rechtseindeutige Relation. Dann heißt f *partielle Abbildung* f *vom Typ* $A \rightharpoonup B$, geschrieben $f : A \rightharpoonup B$.

1. Wir schreiben $f(a) = b$, falls $(a, b) \in f$.
2. $f(a)$ ist *Funktionswert von* f *an der Stelle* a.
3. A heißt *Argumentbereich* bzw. *Domain* von f, geschrieben $\mathrm{dom}(f)$. B heißt *Zielbereich* bzw. *Codomain* von f, geschrieben $\mathrm{cod}(f)$.
4. Seien $A_0 \subseteq A$ und $B_0 \subseteq B$. Dann heißen die Mengen

$$\begin{aligned} f(A_0) &\triangleq \{\, b \in B \mid \exists a \in A_0 \,.\, f(a) = b \,\} \\ f^{-1}(B_0) &\triangleq \{\, a \in A \mid \exists b \in B_0 \,.\, f(a) = b \,\} \end{aligned}$$

   Bild von A_0 *bzgl.* f, sowie *Urbild von* B_0 *bzgl.* f.
5. Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &\triangleq f(A) \\ \mathrm{Def}(f) &\triangleq f^{-1}(B) \end{aligned}$$

   heißen *Bildbereich* $\mathrm{Bild}(f) \subseteq B$ und *Definitionsbereich* $\mathrm{Def}(f) \subseteq A$.
6. Darüberhinaus heißt f *[totale] Abbildung*, geschrieben $f : A \to B$, falls f linkstotal ist.

Wir verwenden die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym. !!!

0.7.2 Notation

0.7.2 Notation Anstelle von Paaren (a, b) verwendet man im Kontext von Abbildungen häufig auch die Schreibweise $a \mapsto b$. Partielle Abbildungen können dann auch durch folgende Schreibweise definiert werden:

$$f : A \rightharpoonup B; a \mapsto \mathrm{Ber}_f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad f : A \rightharpoonup B; \begin{cases} a \mapsto \mathrm{Ber}_1(a)\,; P_1(a) \\ a \mapsto \mathrm{Ber}_2(a)\,; P_2(a) \\ \dots \end{cases}$$

statt „;“ schreiben wir auch „falls“ oder „wenn“

wobei die Prädikate $P_1, P_2, \dots$ eine Fallunterscheidung definieren und die $\mathrm{Ber}_f, \mathrm{Ber}_1, \mathrm{Ber}_2, \dots$ jeweils „Berechnungsvorschriften“ repräsentieren.

0.7.3 Proposition (Gleichheit partieller Abbildungen)

Zwei partielle Abbildungen $f_1 : A_1 \rightharpoonup B_1$ und $f_2 : A_2 \rightharpoonup B_2$ sind *gleich*, falls $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $\mathrm{Def}(f_1) = \mathrm{Def}(f_2)$ und $\forall x \in \mathrm{Def}(f_1) \,.\, f_1(x) = f_2(x)$.

0.7.4 Theorem (Komposition partieller Abbildungen)

Seien $f : A \rightharpoonup B$ und $g : B \rightharpoonup C$ partielle Abbildungen. Dann ist deren Komposition $(g \circ f) : A \rightharpoonup C$ wieder eine partielle Abbildung.

Außerdem gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathrm{Def}(g \circ f)$.

0.7.5 Definition (Eigenschaften partieller Abbildungen)

Begriff	LT	LE	RE	RT
~~*partielle*~~ *Abbildung*			•	
totale *Abbildung*	•		•	
injektive partielle Abbildung		•	•	
surjektive partielle Abbildung			•	•
bijektive partielle Abbildung		•	•	•
Bijektion	•	•	•	•

„rechtseindeutig“

„rechtstotal“

„linkseindeutig“

„linkstotal“

0.7.6 Proposition (Umkehrabbildung I)
Sei $f : A \rightharpoonup B$ eine partielle Abbildung. Ist f injektiv, dann ist auch die Umkehrrelation $f^{-1} : (B, A)$ eine injektive partielle Abbildung.
Außerdem gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

$\hookrightarrow (R^{-1})^{-1} = R$ gilt immer (auch falls R nicht injektiv oder eine Funktion ist (siehe 0.6.11)

0.7.7 Definition (Isomorphie)
Seien A und B zwei Mengen. Wenn eine Bijektion $f : A \to B$ existiert, dann heißen A und B *isomorph*, geschrieben $A \cong B$.

0.7.8 Proposition (Umkehrabbildung II)
Eine Relation $f : (A, B)$ ist genau dann eine Bijektion, wenn es eine Relation $g : (B, A)$ gibt, so dass

- $(g \circ f)(a) = a$ für alle $a \in A$ gilt, und
- $(f \circ g)(b) = b$ für alle $b \in B$ gilt.

Außerdem gilt $g = f^{-1}$.

0.7.9 Bemerkung Zu jeder binären Relation $R : (A, B)$ gibt es zwei Abbildungen f_R und g_R mit dem „gleichen Informationsgehalt“, definiert durch:

$$f_R : \begin{array}{rcl} A & \to & 2^B \\ a & \mapsto & \{\, b \in B \mid a\,R\,b \,\} \end{array} \qquad g_R : \begin{array}{rcl} B & \to & 2^A \\ b & \mapsto & \{\, a \in A \mid a\,R\,b \,\} \end{array}$$

0.8 Mengen++

0.8.1 Definition (Charakteristische Funktion)
Seien T, A zwei Mengen mit $T \subseteq A$.
Dann heißt die Abbildung $\chi_T : A \to \{0,\ 1\}$, definiert durch

$$\chi_T(a) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in T \\ 0 & \text{falls } a \notin T \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion von* T *bzgl.* A.

wichtig für BeKo

0.8.2 Definition (Multimengen) Sei A eine Menge. Dann bezeichnet die Abbildung $M_T : A \to \mathbb{N}$ eine eindeutig gegebene *Multimenge* T. Für jedes $a \in A$ heißt $M_T(a)$ die *Häufigkeit* bzw. *Multiplizität* von a in T.
Wir definieren die *Größe* von T als die Summe der Häufigkeiten aller Elemente von A in T:

$$\#(T) \triangleq \sum_{a \in A} M_T(a)$$

das benutzen wir in DS

0.8.3 Definition (Mengenfamilie)
Sei M eine Menge von Mengen.
Sei I eine sogenannte *Indexmenge*.
Eine surjektive Abbildung $A : I \to M$ heißt auch *Mengenfamilie* $(A_i)_{i \in I}$.

0.8.4 Bemerkung Mengenfamilien verwendet man oft, wenn man M implizit lassen möchte.

0.9 Kardinalität

0.9.1 Definition (Größe von Mengen (II))
Eine Menge A heißt *endlich*, falls es eine Bijektion vom Typ $A \to [1, n]$ für $n \in \mathbb{N}$ gibt; dann bezeichnet $\#(A) \triangleq n$ die entsprechende Anzahl der Elemente in A. Falls ein solches n nicht existiert, heißt A *unendlich* und wir notieren $\#(A) \triangleq \infty$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\infty + n = \infty$ und $\infty - n = \infty$.
Außerdem gelte $n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

0.9.2 Proposition
Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

siehe "Inklusion Exklusion"

0.9.3 Definition (Kardinalität; Vergleich von Mengengrößen)
Seien A und B zwei Mengen.

1. A und B haben die gleiche Kardinalität,
   geschrieben $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$,
   falls es eine *Bijektion* vom Typ $A \to B$ gibt.
   A und B heißen dann auch *äquipotent*.
2. A hat höchstens die Kardinalität von B,
   geschrieben $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$,
   falls es eine *injektive* Abbildung vom Typ $A \to B$ gibt.

   $\Leftrightarrow$ es gibt $A' \subseteq A$ und Bijektion vom Typ $A' \to B$
3. A hat eine echt kleinere Kardinalität als B,
   geschrieben $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$,
   falls $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$ und $\mathrm{card}(A) \neq \mathrm{card}(B)$.

Übung: Beweisen Sie diese Äquivalenz

0.9.4 Notation In der Literatur werden häufig sowohl die Anzahl $\#(A)$ als auch die Kardinalität $\mathrm{card}(A)$ einer Menge A mit $|A|$ bezeichnet. Das führt gelegentlich zu Mehrdeutigkeiten bei unendlichen Mengen.

0.9.5 Definition (Abzählbarkeit) Sei A eine Menge.

1. A heißt *abzählbar*, falls A endlich oder äquipotent zu $\mathbb{N}$ ist.
2. A heißt *abzählbar unendlich*, falls A äquipotent zu $\mathbb{N}$ ist.
3. A heißt *überabzählbar*, falls $\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}(A)$.

0.9.6 Proposition (Größe von Zahlenmengen)

1. $\#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Q}) = \#(\mathbb{R}) = \infty$
2. $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q})$
3. $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) < \mathrm{card}(\mathbb{R})$

Übung: Beweisen Sie $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q})$

0.9.7 Theorem (Cantor)
Sei A eine Menge. Dann gilt:

$$\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$$

Weiterführend: recherchieren Sie "Diagonalisierung"

0.10 Homogene Relationen

0.10.1 Definition Sei $R : (A_1, \ldots, A_n)$ eine Relation.
R heißt *homogen*, falls $A_i = A_j$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
Die binäre Relation $Id_A : (A, A)$ definiert durch $Id_A \triangleq \{(a,\ a) \mid a{\in}A\}$
heißt *Identität auf* A. ~~Sie wird auch *Diagonalrelation* Δ_A genannt.~~

0.10.2 Definition (Eigenschaften homogener Relationen)
Sei $R : (A, A)$ eine binäre homogene Relation. Dann heißt R:

reflexiv	falls	$\forall a{\in}A \,.\, aRa$	$\Delta_A \subseteq R$
irreflexiv	falls	$\forall a{\in}A \,.\, \neg(aRa)$	$\Delta_A \cap R = \emptyset$
symmetrisch	falls	$\forall a, b{\in}A \,.\, aRb \to bRa$	$R^{-1} \subseteq R$
antisymmetrisch	falls	$\forall a, b{\in}A \,.\, aRb \wedge bRa \to a{=}b$	$R^{-1}{\cap}R \subseteq \Delta_A$
transitiv	falls	$\forall a, b, c{\in}A \,.\, aRb \wedge bRc \to aRc$	$R \circ R \subseteq R$
linear	falls	$\forall a, b{\in}A \,.\, a{\neq}b \to (aRb \vee bRa)$	$\nabla_{A,A} \backslash \Delta_A \subseteq R^{-1}{\cup}R$

diese Eigenschaften definieren wir in DS auch für $R:(A,B)$ mit $A \neq B$

0.10.3 Definition Sei $R : (A, A)$ eine binäre homogene Relation. Dann heißt R^n für $n \in \mathbb{N}$ die n*-fache Komposition von* R, definiert durch:

$$\begin{aligned} R^0 &\triangleq \Delta_A \\ R^{n+1} &\triangleq RR^n \end{aligned}$$

$R^{n+1} := R^n \circ R$

0.10.4 Bemerkung Die n-fache Komposition einer Relation kann gleichwertig links- bzw rechts-induktiv definiert werden:

$$R^{n+1} \triangleq RR^n \qquad \text{oder auch} \qquad R^{n+1} \triangleq R^n R$$

([?] komponiert von links, [?] komponiert von rechts.)
Je nach Kontext erlauben wir uns beide Varianten.

0.10.5 Definition (Abschluss)
Sei $R : (A, A)$ eine binäre homogene Relation.

1. Der *reflexive Abschluss* von R ist definiert durch:

$$r(R) \triangleq R \cup \Delta_A$$

2. Der *symmetrische Abschluss* von R ist definiert durch:

$$s(R) \triangleq R \cup R^{-1}$$

3. Der *transitive Abschluss* von R ist definiert durch:

$$t(R) \triangleq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

Der Typ der Abschlussrelationen entspricht
in allen drei Fällen jeweils dem Typ der Basisrelation:
$\mathrm{Typ}(r(R)) = \mathrm{Typ}(s(R)) = \mathrm{Typ}(t(R)) = \mathrm{Typ}(R)$

0.11 Ordnungen

0.11.1 Definition (Ordnungen)
Sei $R : (A, A)$ eine binäre homogene Relation. Die Tabelle benennt die Mindestkriterien, so dass für R der jeweilige Ordnungsbegriff gilt.

Ordnungsbegriff	reflexiv	transitiv	antisymmetrisch	linear
Quasiordnung	•	•		
partielle Ordnung	•	•	•	
totale Ordnung	•	•	•	•

Für Ordnungen R auf A wird häufig auch die Notation (A, R) verwendet. Man nennt (A, R) dann auch *quasi-/partiell/total geordnete Menge*.

0.11.2 Notation (Ordnungsbegriffe)

- Quasiordnungen heißen auch *Präordnungen*.
- Partielle Ordnungen heißen auch *Halbordnungen*.
- Totale Ordnungen heißen auch *lineare Ordnungen*.
- Irreflexive Ordnungen heißen auch *streng* oder *strikt*.

0.12 Äquivalenzen

0.12.1 Definition (Äquivalenzrelation)
Sei $R : (A, A)$ eine binäre homogene Relation.
R heißt *Äquivalenzrelation* bzw. *Äquivalenz [auf* A*]*,
wenn R sowohl (1) reflexiv, (2) symmetrisch, als auch (3) transitiv ist.

0.12.2 Notation
Äquivalenzen sind binäre Relationen, also Mengen (von Paaren). Wir können daher Äquivalenzrelationen vergleichen, zum Beispiel bzgl. Mengeninklusion („$\subseteq$") und Mengengrößen ($\#(\cdot)$).

alle Relationen sind Mengen & erlauben daher Anwendung von "$\subseteq$" & "$|\,|$"

0.12.3 Lemma
Sei A eine beliebige Menge.

"inklusionsmaximale"

- $\nabla_{A,A}$ ist $\subseteq$-größte Äquivalenz auf A.
- Δ_A ist $\subseteq$-kleinste Äquivalenz auf A.

"inklusionsminimale"

0.12.4 Proposition (Erzeugte Äquivalenz)
Sei $R : (A, A)$ eine beliebige homogene Relation.
Unter allen Relationen, die Obermengen von R sind, ist

1. $r(R)$ die $\subseteq$-kleinste reflexive Relation;
2. $s(R)$ die $\subseteq$-kleinste symmetrische Relation;
3. $t(R)$ die $\subseteq$-kleinste transitive Relation;
4. $t(s(r(R)))$ die $\subseteq$-kleinste Äquivalenz.

0.12.5 Definition (Äquivalenzklassen)
Sei $R : (A, A)$ eine Äquivalenz. Sei $a \in A$. Dann heißt

$$[a]_R \triangleq \{ x \in A \mid (a, x) \in R \}$$

Äquivalenzklasse von a *bzgl.* R.

0.12.6 Notation Wenn die intendierte Äquivalenz R aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, schreiben wir auch $[a]$ anstelle von $[a]_R$.

0.12.7 Proposition
Sei $R : (A, A)$ eine Äquivalenz. Sei $a \in A$. Dann gilt:

1. $a \in [a]$
2. $(a_1, a_2) \in R$ g.d.w. $[a_1] = [a_2]$
3. $(a_1, a_2) \notin R$ g.d.w. $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset$

0.12.8 Definition (Divison mit Rest)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Dann gilt folgende Zerlegung:

$$\exists! m \in \mathbb{N} \ . \ \exists! r \in [0, k-1] \ . \ n = \underbrace{m}_{n \operatorname{div} k} \cdot k + \underbrace{r}_{n \bmod k}$$

Wegen der Eindeutigkeit der angegebenen Zerlegung mittels m und r bezeichnen div und mod wohldefinierte Abbildungen.
Die Abbildung $n \bmod k$ wird oft auch mit $n \,\%\, k$ bezeichnet.
Wir definieren $\equiv_k \triangleq \{(n_1,\ n_2) \mid n_1 \bmod k = n_2 \bmod k\}$.

0.12.9 Definition (Quotient)
Sei $R : (A, A)$ eine Äquivalenz.
Dann heißt die Menge aller Äquivalenzklassen, gegeben durch

$$A/R \triangleq \{\ [a]_R \mid a \in A\ \}$$

der *Quotient von* A *bzgl.* R.
Die Anzahl $\#(A/R)$ der Äquivalenzklassen bzgl. R heißt *Index von* R.

0.12.10 Definition (Repräsentantensystem)
Sei $R : (A, A)$ eine Äquivalenz. Sei $S \subseteq A$.
S heißt *Repräsentantensystem von* A/R, falls gilt:

$$\forall a \in A \ . \ \exists! s \in S \ . \ s \in [a]$$

0.12.11 Proposition
Sei S *Repräsentantensystem von* A/R. Dann gilt:

1. $S \cong A/R$
2. $A = \bigcup_{x \in S} [x]_R$

0.12.12 Definition (Kern einer Abbildung)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt die Relation

$$\operatorname{Ker}(f) \triangleq \{\ (a_1,\ a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\ \}$$

der *Kern von* f.

0.12.13 Proposition (Kern einer Abbildung)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.
Dann ist $\operatorname{Ker}(f)$ eine Äquivalenz [auf A]
mit Index $\#(A/\operatorname{Ker}(f)) = \#(f(A))$.

0.13 Faktorisierungssätze

0.13.1 Theorem (Faktorisierung I)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann existieren

- eine Menge C (eindeutig bestimmt „bis auf Isomorphie"),
- eine surjektive Abbildung $g : A \to C$,
- eine injektive Abbildung $h : C \to B$,

so dass $f = h \circ g$.

0.13.2 Proposition
Sei $R : (A, A)$ eine beliebige Äquivalenz. Sei

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{nat}_R & : & A & \to & A/R \\ & & a & \mapsto & [a]_R \end{array}$$

die so genannte *natürliche Abbildung zu* R. Dann gilt $\mathrm{Ker}(\mathrm{nat}_R) = R$.

0.13.3 Theorem (Faktorisierung II)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.
Seien $\mathrm{nat}_f \triangleq \mathrm{nat}_{\mathrm{Ker}(f)}$, d.h.

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{nat}_f & : & A & \to & A/\mathrm{Ker}(f) \\ & & a & \mapsto & [a]_{\mathrm{Ker}(f)} \end{array}$$

die *natürliche Abbildung von* f, und

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{val}_f & : & A/\mathrm{Ker}(f) & \to & B \\ & & [a]_{\mathrm{Ker}(f)} & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Es gilt:

1. nat_f ist surjektiv
2. val_f ist injektiv
3. $f = \mathrm{val}_f \circ \mathrm{nat}_f$
4. $A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$

0.13.4 Bemerkung Im Faktorisierungssatz ist
$\mathrm{Bild}(f)$ isomorph zu einem Repräsentantensystem für $A/\mathrm{Ker}(f)$.