FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 23. Dezember 2022

8. Tutorium – Logik
Besprochen in der Woche vom 02.01.2023.

Aufgabe 1

Sei $\sigma := \{R, f\}$ eine Signatur, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist und R ein zweistelliges Relationssymbol. Entscheiden Sie für die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ jeweils ob diese unerfüllbar, erfüllbar mit einem endlichen Modell, oder erfüllbar mit einem unendlichen Modell sind.

(i) $\varphi_1 = \exists x \forall y\ f(y) \neq x \wedge \forall y \forall z (f(y) = f(z) \to y = z)$.

(ii) $\varphi_2 = \forall x \forall y (R(x,y) \to y = f(x)) \wedge \exists x \forall y R(y,x) \wedge \exists x \exists y \neg R(x,y)$.

(iii) $\varphi_3 = \forall x R(x, f(x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \to z = x \vee z = y \vee z = f(x) \vee z = f(y))$

Aufgabe 2

Einer der Schürfer im unendlichen Tunnel ist höchst beleidigt von der Aussage, dass all die Steine die er seit Wochen aus den Wänden bricht gleich seien. Völlig außer sich vor Wut, wendet er sich mit seinem Frust an den derzeitigen Logikzwergenkönig Ekwenz Freseh. Doch erstaunlicherweise stimmt der König dem Zwerg Karl Kühl sogar zu.

«Egal wie viele Farben er reflektiert, das Wesen des Steines bleibt ein Stein zu sein.», sinniert der graubärtige König auf seinem Thron. «Der Stein an sich ist und bleibt unantastbar!», erwidert der Schürfer. «Nur die Wahrnehmung des Steins macht ihn für uns real und somit ist das Aussehen des Steins sein wichtigstes Merkmal.»

«Aber schau, ob ich nun ein Haus mit diesem oder jenem Stein baue, so sind sie für mich gleich.» Der König streicht sich wiederholt weise über den Bart. «Da ist was wahres dran...», grummelt der Schürfer.

Sei $\sigma = \{\cdot\}$ eine Signatur, wobei $\cdot$ ein 2-stelliges Funktionssymbol ist. Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{N}})$, wobei $\cdot^{\mathcal{N}}$ die übliche Multiplikationsfunktion auf $\mathbb{N}$ ist.

(i) Geben Sie Formeln φ_0 und φ_1 an, für die gelten $\varphi_0(\mathcal{N}) = \{0\}$ und $\varphi_1(\mathcal{N}) = \{1\}$.

(ii) Zeigen Sie: Für alle Isomorphismen h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$.

(iii) Geben Sie einen Isomorphismus h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ an, mit $h(2) = 3$.

Hinweis: Verwenden Sie folgenden Satz.

Satz 1 (Fundamentalsatz der Arithmetik) *Seien $p_0, p_1, \ldots$ die Primzahlen, so nummeriert dass $p_0 < p_1 < \ldots$ gilt. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gibt es natürliche Zahlen $e_0, e_1, \ldots \in \mathbb{N}$ so, dass $n = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{e_i}$. Des Weiteren ist diese Zerlegung eindeutig.*

(iv) Zeigen Sie: Es gibt keine Formel $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_2(\mathcal{N}) = \{2\}$.

Hinweis: Verwenden Sie folgendes Lemma.

Notation: Für eine Relation $R \subseteq A^k$ und eine Abbildung $f : A \to B$ schreiben wir

$$f(R) := \{(f(r_1), \ldots, f(r_k)) \mid (r_1, \ldots, r_k) \in R\}.$$

Lemma 1 (Isomorphielemma) *Sei τ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen und $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in$ $\mathrm{FO}[\tau]$. Sei $\pi : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Dann gilt $\pi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{B})$.*