Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 5.1

Themen: Komplexe Zahlen, Diskrete Fourier-Transformation

Ugo & Gabriel

17. Januar 2023

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

1. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $z^3 = -27$ in den reellen sowie in den komplexen Zahlen? Welche sind dies?

   Lösung

   Im Reellen eine ($z = -3$), im Komplexen drei

   a) $z_1 = -3$
   b) $z_2 = 3e^{i\pi/3}$
   c) $z_3 = 3e^{-i\pi/3}$

   Lösung Ende

2. Geben Sie die Lösungen aus Aufgabe 1.1 in kartesischer Parametrisierung, in Polarkoordinaten sowie als Matrix an.

   Lösung

   a) Kartesisch: $-3 + 0i$, $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
   b) Polarkoordianten: $3e^{i\pi}$, $3e^{-i\pi/3}$, $3e^{-i\pi/3}$
   c) Matrix: $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   Lösung Ende

3. Geben Sie die Vorteile und Nachteile der jeweiligen Darstellungen an.

   Lösung

   a) Kartesisch: Vorteil: Koordinaten in gaußschen Zahlenebene direkt ablesbar. Addition leicht durchführbar. Nachteil: Multiplikation nicht leicht durchführbar.
   b) Polarkoordianten: Vorteil: Multiplikation leicht durchführbar, Nachteil: Addition nicht leicht durchführbar, Mehrdeutigkeit der Koordinaten.
   c) Matrix: Vorteil: Multiplikation entspricht Matrixmultiplikation, Addition entspricht Matrix Addition. Nachteil: Aufwand genauso groß wie in Kartesischen Koordinaten.

   Lösung Ende

4. Zeigen Sie, dass das Standard-Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ nicht durch $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ definiert werden kann. Wie ist es stattdessen definiert?

Lösung

Ein Skalarprodukt muss positiv definit sein, d.h. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ sofern $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Das gilt nicht für $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$. Beispiel: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$, dann gilt $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = (-1) + (-1) = -2 < 0$.

Daher ist das Standard-Skalarprodukt definiert als $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Lösung Ende

5. Zeigen Sie, dass Polynome mit reellen Koeffizienten nur eine gerade Anzahl an komplexen Nullstellen (imaginärer Anteil ungleich 0) besitzen können (Tipp: Zeige, dass wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch die komplex konjugierte $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p).

Lösung

Zunächst machen wir uns klar, dass $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, sowie $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Gerade letzteres ist auch hilfreich für das Verständnis der DFT.

Sei nun $p(z) = a_n\ z^n\ +\ ...\ +\ a_1\ z\ +\ a_0 = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n\ \overline{z}^n\ +\ ...\ +\ a_1\ \overline{z}\ +\ a_0 \\ &= a_n\ \overline{z^n}\ +\ ...\ +\ a_1\ \overline{z}\ +\ a_0 \\ &= \overline{a_n\ z^n}\ +\ ...\ +\ \overline{a_1\ z}\ +\ \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n\ z^n\ +\ ...\ +\ a_1\ z\ +\ a_0} \\ &= \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Lösung Ende

6. Geben Sie alle 5. Einheitswurzeln, also die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$, an.

Lösung

1, $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$

Lösung Ende

7. Geben Sie jeweils eine Funktion $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ an, die sich in der gaußschen Zahlenebene mit konstanter Geschwindigkeit entlang des Einheitskreises um den Ursprung dreht, wobei $f(0) = 1$ sowie $f(1) = 1$ und
   a) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ einmal mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. $f_1(t) = e^{2\pi it}$
   b) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ einmal mal im Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. $f_2(t) = e^{-2\pi it}$
   c) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ vier mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. $f_3(t) = e^{8\pi it}$
   d) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ zwei mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. $f_4(t) = e^{4\pi it}$
   e) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ zwei mal im Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. $f_5(t) = e^{-4\pi it}$
   f) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ kein mal um den Ursprung dreht. $f_6(t) = 1$

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

1. Diskretisieren Sie die Funktionen aus Aufgabe 1.7, indem Sie 5 äquidistante Samples an den Stellen $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ wählen, und stellen Sie diese als Vektor dar.

Lösung

a) $\begin{bmatrix}1 & \omega_5 & \omega_5^2 & \omega_5^3 & \omega_5^4\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

b) $\begin{bmatrix}1 & \omega_5^{-1} & \omega_5^{-2} & \omega_5^{-3} & \omega^{-4}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

c) $\begin{bmatrix}1 & \omega_5^4 & \omega_5^8 & \omega_5^{12} & \omega_5^{16}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

d) $\begin{bmatrix}1 & \omega_5^2 & \omega_5^4 & \omega_5^6 & \omega_5^8\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

e) $\begin{bmatrix}1 & \omega_5^{-2} & \omega_5^{-4} & \omega_5^{-6} & \omega_5^{-8}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

f) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

Lösung Ende

2. Konstruieren Sie, mit den aus der letzten Aufgabe gefundenen Vektoren, die DFT Matrix $\mathbf{\Omega}_5$, indem sie die Vektor sortieren und normieren.

Lösung

Spaltenreihenfolge: f), a), d), e), b) oder c). Normierungsfaktor für alle Vektoren $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Lösung Ende

3. Zeigen Sie, dass man die Spalten der Inversen der DFT-Matrix, also $\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T} = \overline{\mathbf{\Omega}_n}$, durch umsortieren der Spalten von $\mathbf{\Omega}_n$ erhalten kann.

Lösung

Da $\mathbf{1} = \overline{\mathbf{1}}$ bleibt die erste Spalte an der gleichen Stelle. Für die anderen Spalten machen wir uns klar, dass $\omega_n^{n-l} = \overline{\omega_n^l}$ und somit Spalte $n-i$ in Ω_n gleich der komplex konjugierten der Spalte i ist, wenn wir mit 0 die Indizierung beginnen. Somit können alle anderen Spalten um Index $\frac{n}{2}$ gespiegelt getauscht werden.

Ausführlicher siehe im Skript Abschnitt "Die DFT Matrix und die diskrete Fouriertransformationßowie Gleichung 7.17.

Lösung Ende

4. Im Skipt wird gezeigt, dass die DFT-Matrix unitär (komplexe Analogie zu orthogonal) ist, indem gezeigt wird, dass $\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T}\mathbf{\Omega}_n = \mathbf{I}$. Warum reicht es im Komplexen nicht $\mathbf{\Omega}_n$ nur zu transponieren um Unitarität zu zeigen, sondern muss zusätzlich noch komplex konjugiert werden ($\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T}$)?

Lösung

Um Unitarität zu zeigen muss das Skalarprodukt gebildet werden. Das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist definiert als $x^\mathsf{T}\overline{y} = \overline{x}^\mathsf{T}y$. (Siehe Aufgabe 1.4)

Lösung Ende

5. Zeigen Sie, dass $\mathbf{\Omega}_n$ und $\overline{\mathbf{\Omega}_n}$ symmetrisch sind.

Lösung

$(\mathbf{\Omega}_n)_{ij} = \omega_n^{ij} = (\Omega_n)_{ji}$.

Lösung Ende

6. Gegeben ein reeles Signal $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ sowie seine Fourier-Transformierte $\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^n$, interpretiert als diskrete Funktion an den Stützstellen $(0, \ldots, n-1)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{s}}$ achsensymetrisch im Realteil, sowie punktsymetrisch im Imaginärteil ist, wenn man den ersten Eintrag ignoriert und als Ursprung $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ wählt.

Lösung

Wir müssen zeigen, das $\mathrm{Re}(\hat{\mathbf{s}}_l) = \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{s}}_{n-l})$ und $-\mathrm{Im}(\hat{\mathbf{s}}_l) = \mathrm{Im}(\hat{\mathbf{s}}_{n-l})$, wobei unsere Indizes bei 0 beginnen. Das bedeutet wir wollen $\overline{(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_l} = \overline{\hat{\mathbf{s}}_l} = \hat{\mathbf{s}}_{n-l} = (\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_{n-l}$ zeigen.

Es gilt

$$(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_l = \begin{bmatrix} 1 & \omega_n^l & l\omega_n^{2l} & \ldots & \omega_n^{(n-1)l} \end{bmatrix} \mathbf{s},$$

sowie

$$(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_{n-l} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_n^{n-l} & \omega_n^{2(n-l)} & \ldots & \omega_n^{2(n-1)(n-l)} \end{bmatrix} \mathbf{s}.$$

Da $\omega_n^{n-l} = \overline{l\omega_n^l}$, $z^{lk} = (z^l)^k$ sowie $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, gilt

$$(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_{n-l} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{\omega_n^l} & \overline{\omega_n^{2l}} & \ldots & \overline{\omega_n^{2(n-1)l}} \end{bmatrix} \mathbf{s}.$$

Da $\mathbf{s}$ nur reele Einträge besitzt, gilt $\mathbf{s} = \overline{\mathbf{s}}$, also auch

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_{n-l} &= \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{\omega_n^l} & \overline{l\omega_n^{2l}} & \ldots & \overline{l\omega_n^{2(n-1)l}} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ &= \overline{\begin{bmatrix} 1 & l\omega_n^l & l\omega_n^{2l} & \ldots & l\omega_n^{(n-1)l} \end{bmatrix} \mathbf{s}} = \overline{(\mathbf{\Omega}_n \mathbf{s})_l}.\end{aligned}$$

Lösung Ende

7. Zeigen Sie, dass auch die Rückrichtung der Aussage der letzten Aufgabe gilt, wenn der erste Eintrag des transformierten Signals reell ist. Das bedeutet, wenn das transformierte Signal $\hat{\mathbf{s}}$ achsensymetrisch im Realteil sowie punktsymetrisch im Imaginärteil ist, dann ist das Ursprungssignal reell.

Lösung

Das gegeben das Signal $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^n$, wie in der Aufgabe beschrieben, lässt sich wie folgt formalisieren:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 \in \mathbb{R} \text{ sowie } \hat{\mathbf{s}}_k = \overline{\hat{\mathbf{s}}_{n-k}} \text{ für alle } k \in [1, n-1].$$

Wenn n ungerade ist, gilt für alle Einträge $\mathbf{s}_j$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_j &= \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} \\
&= \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \sum_{k=(n-1)/2+1}^{(n-1)} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} \\
&= \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_{n-k} \omega_n^{j(n-k)} \\
&= \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \hat{\mathbf{s}}_{n-k} \omega_n^{j(n-k)} \\
&= \hat{\mathbf{s}}_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k}\, \overline{\omega_n^{jk}}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun nur die Rechnung $\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k}\, \overline{\omega_n^{jk}}$ und machen uns klar, dass $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k}\, \overline{\omega_n^{jk}} &= \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk}} \\
&= \overline{\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk}} + \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} \\
&= \overline{\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk}}} = \overline{\hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k}\, \overline{\omega_n^{jk}}}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Term in der Summe gleich seiner komplex konjugierten. Dies kann nur gelten, wenn der imaginäre Anteil 0 ist. Somit ist jeder Term in der Summe reel.

Für den Fall, dass n gerade ist, gilt das gleiche, es kommt nur zusätzlich noch die mittlere Frequenz als Summand dazu:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_{n/2} \omega_n^{jn/2} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{s}}_k \omega_n^{jk} + \overline{\hat{\mathbf{s}}_k}\, \overline{\omega_n^{jk}}.$$

Da $\omega_n^{jn/2} = \pm 1 \in \mathbb{R}$ sowie $\hat{\mathbf{s}}_{n/2} = \overline{\hat{\mathbf{s}}_{n/2}} \in \mathbb{R}$, sind auch in diesem Fall alle Summanden Element der reelen Zahlen. Somit ist auch die Summe reel.

Lösung Ende

8. Gegeben die komplexen Stützstellen 1, $e^{\frac{1}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{2}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{3}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{4}{6}2\pi i}$ und $e^{\frac{5}{6}2\pi i}$. Konstruieren Sie die zugehörige Vandermonde-Matrix sowie die zugehörigen Lagrange-Basispolynome.

Lösung

Das ist einfach $\mathbf{\Omega}_n$ (Vandermonde-Matrix) sowie $\overline{\mathbf{\Omega}_n}^{\mathsf{T}} = \overline{\mathbf{\Omega}_n}$ (Lagrange-Basis).

Lösung Ende