

Wissenschaftliches Rechnen – Großübung 3.1

Themen: Eigenzerlegung, Potenzmethode

Ugo & Gabriel

29. November 2022

Aufgabe 1: Eigenzerlegung

1. Wie lässt sich anhand der Eigenwerte der Rang einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dazu haben?

———— Lösung ————

Es gilt $\text{Rang } \mathbf{A} = n - \dim \text{Kern } \mathbf{A}$. Der Kern enthält Eigenvektoren zum Eigenwert Null, also $\text{Kern } \mathbf{A} = \text{Eig}(\mathbf{A}, \lambda = 0)$. Der Rangdefizit von \mathbf{A} ist die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert Null. Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes entspricht im Allgemeinen nicht der Dimension des zugehörigen Eigenraumes, somit kann man den Rang anhand der Eigenwerte nicht genau angeben (nur eine obere bzw. untere Grenze).

Hat der Eigenwert 0 die algebraische Vielfachheit $k \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $n - k \leq \text{Rang}(\mathbf{A}) \leq n - 1$.

Für diagonalisierbare (insbesondere symmetrische Matrizen) kann man den Rang(defizit) exakt anhand der Eigenwerte bestimmen.

———— Lösung Ende ————

2. Welche nützlichen Eigenschaften in Bezug auf Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen symmetrische Matrizen?

———— Lösung ————

- Sie haben ausschließlich reelle Eigenwerte.
- Sie sind orthogonal diagonalisierbar: Es gibt eine orthogonale Basis des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von \mathbf{A} .

———— Lösung Ende ————

3. Eine Eigenzerlegung ist im Allgemeinen eine Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$. Wir betrachten jedoch den Fall, dass sich \mathbf{A} in $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$ zerlegen lässt.

- a) Was für eine Art von Transformation beschreiben \mathbf{U} und $\mathbf{\Lambda}$?
- b) Was steht in den Matrizen \mathbf{U} und $\mathbf{\Lambda}$?
- c) Welche nützliche Eigenschaft hat \mathbf{U} ?

———— Lösung ————

- a) \mathbf{U} ist ein Basiswechsel in die Eigenbasis und, für den Fall, den wir betrachten, eine Rotation und/oder Spiegelung, $\mathbf{\Lambda}$ ist eine Skalierung

- b) \mathbf{U} enthält die Eigenvektoren von \mathbf{A} als Spalten und $\mathbf{\Lambda}$ die Eigenwerte von \mathbf{A} auf der Diagonalen
 c) \mathbf{U} ist orthogonal

Lösung Ende

4. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, sodass eine Matrix \mathbf{A} eine reelle Eigenzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ besitzt?

Lösung

Die Matrix muss orthogonal diagonalisierbar sein. Es gilt:

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T)^T = (\mathbf{U}^T)^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T = \mathbf{A}$$

Damit muss \mathbf{A} symmetrisch sein.

Lösung Ende

5. Gegeben ist folgendes Optimierungsproblem, bei dem wir die quadratische Form einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unter einer Nebenbedingung maximieren wollen:

$$\max_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

- a) Warum ist die Nebenbedingung notwendig, damit das Problem wohlgestellt ist?
 b) Welcher Vektor maximiert die Zielfunktion unter der Nebenbedingung?

Lösung

Ohne die Nebenbedingung hat das Problem keine Lösung, da man den Vektor \mathbf{x} beliebig skalieren kann und die Zielfunktion dadurch unbeschränkt wird.

Für die Lösung:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}$$

Damit muss \mathbf{x} der Eigenvektor \mathbf{u}_1 zum größten Eigenwert λ_1 von \mathbf{A} sein und der Wert der Zielfunktion ist $\mathbf{u}_1^T \mathbf{A} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^T \lambda_1 \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 = \lambda_1$ (da $\|\mathbf{x}\| = 1$ und \mathbf{U} orthogonal ist, gilt $\|\mathbf{u}_1\| = 1$).

Lösung Ende

6. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Die Spur ist definiert als $\text{Spur } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Für $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\text{Spur}(\mathbf{BC}) = \text{Spur}(\mathbf{CB})$.
 b) Die Spur ist die Summe der Eigenwerte: $\text{Spur } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
 c) Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte: $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Lösung

- a) Es gilt zunächst, dass $(\mathbf{BC})_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} c_{k,i}$. Dann ist

$$\text{Spur}(\mathbf{BC}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} c_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{j,i} b_{i,j} = \text{Spur}(\mathbf{CB}).$$

- b) Wir nutzen die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe:

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \text{Spur}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}) = \text{Spur}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}) = \text{Spur}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}) = \text{Spur } \mathbf{\Lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

c)

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}) \\
&= \det \mathbf{U} \det \mathbf{\Lambda} \det \mathbf{U}^{-1} \\
&= \det \mathbf{\Lambda} \det \mathbf{U} \det \mathbf{U}^{-1} \\
&= \det \mathbf{\Lambda} \det \mathbf{U} \frac{1}{\det \mathbf{U}} \\
&= \det \mathbf{\Lambda} \\
&= \prod_{i=1}^n \lambda_i
\end{aligned}$$

Lösung Ende

7. Die Fibonacci-Folge ist eine rekursiv definierte Folge mit $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Ihre Glieder lassen sich mithilfe von Exponentiation einer Matrix berechnen. Die Grundmatrix dabei ist

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

und wird potenziert, sodass

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_1^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- Berechnen Sie mithilfe dieser Methode alle Folgenglieder bis einschließlich F_6 .
- Erläutern Sie, wie man mithilfe einer Eigenzerlegung beliebige Folgenglieder effizient bestimmen kann.

Lösung

a) Es gilt:

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Es gilt: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$.

b) Wir diagonalisieren $\mathbf{F}_1 = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ und berechnen $\mathbf{F}_1^n = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{U}^T$.

Lösung Ende

8. Aufgrund von numerischen Fehlern ist die Systemmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ häufig nicht positiv definit, obwohl sie das theoretisch sein sollte. Als Lösung nutzt man gerne Regularisierung, d.h. statt $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ löst man ein LGS $(\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\alpha > 0$, das man im Vorhinein wählt¹.
- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von \mathbf{C} . Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$?

Lösung

¹Diese Art der Regularisierung nennt man ℓ^2 -Regularisierung, bei der man statt $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ die Fehlerfunktion $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|^2$ minimiert. Dadurch liegt $\mathbf{A}\mathbf{x}$ nicht mehr möglichst nah an \mathbf{b} , denn die ℓ^2 -Norm des Lösungsvektors wird gleichzeitig minimiert.

Es gelte $\mathbf{C}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. Dann gilt:

$$(\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{C}\mathbf{v}_i + \alpha \mathbf{I}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i + \alpha \mathbf{v}_i = (\lambda_i + \alpha) \mathbf{v}_i$$

Also gilt für die Eigenwerte μ_i von $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$, dass $\mu_i = \lambda_i + \alpha$. Die Eigenvektoren von \mathbf{C} und $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$ sind dieselben.

Lösung Ende

- b) Begründe mit der vorigen Teilaufgabe, dass die Kondition der Matrix $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$ besser ist als von \mathbf{C} .

Hinweis: Die Kondition einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann man berechnen als

$$\kappa(\mathbf{A}) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|,$$

wobei λ_1 der betragsmäßig größte und λ_n der betragsmäßig kleinste Eigenwert von \mathbf{A} ist.

Lösung

Es ist:

$$\kappa(\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}) = \frac{\mu_1}{\mu_n} = \frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_n + \alpha} < \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$$

Je größer man α wählt, umso mehr nähert sich die Kondition der 1.

Lösung Ende

- c) Was passiert, wenn man zu viel regularisiert, d.h. α sehr groß wählt? Schau dir explizit an was für $\alpha \rightarrow \infty$ passiert.

Lösung

Die Matrix $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$ ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Sei $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$. Auffällig ist, dass im Vergleich zur Eigenzerlegung von \mathbf{C} sich nur die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ ändert. Für diese gilt:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n + \alpha \end{bmatrix}$$

Die Inverse von $\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I}$ ist $(\mathbf{C} + \alpha \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T$, wobei:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + \alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 + \alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n + \alpha} \end{bmatrix}$$

Für $\alpha \rightarrow \infty$ geht die Inverse gegen die Nullmatrix. Somit geht die Lösung des LGS gegen den Nullvektor.

Lösung Ende

9. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle ihre Eigenwerte größer oder gleich Null sind.

———— Lösung ————

Hinrichtung: Es gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, insbesondere für alle Eigenvektoren \mathbf{v} von \mathbf{A} . Damit gilt:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \lambda \underbrace{\|\mathbf{v}\|^2}_{\geq 0}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $\lambda \geq 0$.

Rückrichtung: Da \mathbf{A} symmetrisch ist, existiert eine Eigenzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$. Es ist:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{v}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 \geq 0$$

———— Lösung Ende ————

- b) Jede symmetrische, positiv semidefinite Matrix \mathbf{A} kann man als Produkt einer Matrix \mathbf{B} mit sich selbst schreiben: $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.

Weitere Fragen hierzu:

- Ist \mathbf{B} eindeutig bestimmt?
- Welche Eigenschaften hat \mathbf{B} ?

———— Lösung ————

Wir nutzen erneut eine Eigenzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T = \mathbf{B} \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$$

Also ist $\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T$. Dabei ist

$$\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^{1/2} \end{bmatrix}$$

Da \mathbf{A} positiv semidefinit ist, gilt $\lambda_i \geq 0$ und damit $\lambda_i^{1/2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Matrix \mathbf{B} ist ebenfalls symmetrisch (da wir schließlich eine Eigenzerlegung für \mathbf{B} angeben können) und ebenfalls positiv semidefinit.

Die Lösung ist nicht eindeutig, da $-\mathbf{B}$ ebenfalls eine Lösung ist (die ebenfalls symmetrisch, aber negativ semidefinit ist).

———— Lösung Ende ————

Aufgabe 2: Potenzmethode

Die Potenzmethode ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung des Eigenvektors zum betragsmäßig größten Eigenwertes einer (diagonalisierbaren) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei gilt folgende Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_t\|}$$

Dabei nehmen wir an, dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

1. Warum wird der Vektor in jedem Schritt normiert?

—— Lösung ———

Dies hat numerische und praktische Gründe. Ohne die Normierung würde die Länge des Vektors gegen Null oder Unendlich gehen. Außerdem ist die Normierung für die Abbruchbedingung notwendig.

—— Lösung Ende ———

2. Für welche Startvektoren sollte das Verfahren in der Theorie nicht gegen den Eigenvektor zum größten Eigenwert konvergieren?

—— Lösung ———

- Nullvektor (offensichtlich)
- Ein Eigenvektor zu einem anderen Eigenwert
- Falls der Startvektor keinen Anteil vom ersten Eigenvektor hat: $\mathbf{v}_0 = 0\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$. Das inkludiert den Fall, dass es ein Eigenvektor zu einem anderen Eigenwert ist. Für symmetrische Matrizen heißt dies, dass er orthogonal zum ersten Eigenvektor ist.

—— Lösung Ende ———

3. Wie kann man das Verfahren modifizieren, um den Eigenvektor zum betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert zu erhalten, falls \mathbf{A} symmetrisch ist?

—— Lösung ———

Wir nehmen an \mathbf{u}_1 sei bereits bekannt. Es gibt mehrere Möglichkeiten:

- Wir projizieren den ersten Eigenvektor aus der Matrix $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T$ und führen die Potenzmethode erneut durch.
- Wir wählen den Startvektor so, dass er keinen Anteil vom ersten Eigenvektor hat: $\mathbf{v}_0 = 0\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$. Bei symmetrischen Matrizen geht es, wenn man den orthogonal zum ersten Eigenvektor wählt, da $\mathbf{u}_1^T\mathbf{v}_0 = \alpha_1 = 0$. Aufgrund von numerischen Fehlern bleibt die Orthogonalität nicht lange erhalten, sodass man immer wieder einen nicht orthogonalen Anteil vom aktuellen Vektor \mathbf{v}_t abziehen muss:

$$\mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_t\|} \quad \text{und anschließend} \quad \mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \mathbf{v}_{t+1} - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_{t+1} \rangle \mathbf{u}_1$$

—— Lösung Ende ———

4. Gegeben sind die folgenden zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

- Welches ist der Eigenvektor zum (betragsmäßig) größten Eigenwert der beiden Matrizen?
- Führen Sie für beide Matrizen die Potenzmethode für einige Iterationen mit dem Startvektor $\mathbf{v}_0 = (1, 1)^T$ durch (Sie können sich hier den Normierungsschritt sparen). Wie schnell konvergiert das Verfahren für die jeweilige Matrix?
- Wodurch kommt der Unterschied in der Konvergenzgeschwindigkeit zustande?

Lösung

- $(1, 0)^T$
- Nach t Iterationen gilt für \mathbf{A} : $\mathbf{v}_t = (1, 0.9^t)^T$ und für \mathbf{B} : $\mathbf{v}_t = (1, 0.1^t)^T$. Für \mathbf{B} konvergiert das Verfahren schneller.
- Das Verfahren konvergiert für \mathbf{B} schneller, da $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \frac{0.1}{1} = 0.1$ kleiner ist als im Vergleich zu \mathbf{A} $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \frac{0.9}{1} = 0.9$.

Lösung Ende

5. Zeigen Sie, dass das Verfahren exponentiell mit dem Faktor $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ konvergiert.

Lösung

Da \mathbf{A} diagonalisierbar ist, kann man den Startvektor \mathbf{v}_0 mithilfe der Eigenbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ von \mathbf{A} linear kombinieren:

$$\mathbf{v}_0 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

Offensichtlich muss \mathbf{v}_0 so gewählt werden, sodass $\alpha_1 \neq 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{v}_0 &= \alpha_1 \mathbf{A}^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}^t \mathbf{u}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n \\ \frac{\mathbf{A}^t \mathbf{v}_0}{\lambda_1^t} &= \frac{1}{\lambda_1^t} (\alpha_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n) \\ &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Da $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, gilt $0 \leq \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ für $i \in \{2, \dots, n\}$. Somit ist $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t$ stets der größte Faktor, der exponentiell mit der Anzahl an Schritten gegen Null geht.

Lösung Ende

6. Wie kann man mithilfe der Potenzmethode den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dazu haben?

Lösung

Falls \mathbf{A} regulär ist, d.h. 0 kein Eigenwert ist, kann man die Potenzmethode auf die Inverse anwenden. Dabei ist $\left| \frac{1}{\lambda_n} \right|$ der größte Eigenwert von \mathbf{A}^{-1} und hat denselben Eigenvektor wie λ_n (von \mathbf{A}).

Lösung Ende
