FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 25. November 2022

1. Hausarbeit – Logik

Abgabe: 07.12.2022 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 07. Dezember 2022, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 10 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 40 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Jeder Punkt in der Hausarbeit entspricht dabei $\frac{1}{4}$ Portfoliopunkten. Es sind also bis zu 10 Portfoliopunkte zu erreichen.

Sie dürfen Aussagen aus dem Teil der Vorlesung und des Skripts zur Aussagenlogik, und aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden, ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Alle Antworten sind zu begründen.

Hausaufgabe 1

3+2+7 = 12 Punkte

Wir definieren die erweiterte Aussagenlogik AL(M), indem wir die Syntax der Aussagenlogik durch folgende Formelbildungsregel erweitern:

Wenn $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}(M)$ Formeln sind, dann ist auch $M(\varphi, \psi, \chi)$ eine Formel in AL(M).

Die Semantik des Junktors $M(\varphi, \psi, \chi)$ ist dabei so definiert, dass $[\![M(\varphi, \psi, \chi)]\!]^\beta = 1$, für eine passende Belegung β, genau dann, wenn beide der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$ oder $[\![\psi]\!]^\beta = 1$, dann ist $[\![\chi]\!]^\beta = 0$.
- Wenn $[\![\chi]\!]^\beta = 0$, dann ist $[\![\varphi]\!]^\beta = 0$ oder $[\![\psi]\!]^\beta = 0$.

(i) Seien $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathrm{AL}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert eine Formel $\varphi_M \in \mathrm{AL}$, so dass für alle zu ψ_1, ψ_2, ψ_3 passenden Belegungen β gilt: $[\![M(\psi_1, \psi_2, \psi_3)]\!]^\beta = 1 \Leftrightarrow \beta \models \varphi_M$.

Sei $\mathrm{AL}_{\perp,M} \subseteq \mathrm{AL}(M)$ die Klasse der Formeln der erweiterten Aussagenlogik, welche nur Variablen, $\perp$ und den Junktor M verwenden.

(ii) Sei $X \in \textsc{AVar}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert eine Formel $\varphi_\neg \in \mathrm{AL}_{\perp,M}$ mit $\varphi_\neg \equiv \neg X$.

Sei $\mathrm{AL}_{\perp,\neg,\vee} \subseteq \mathrm{AL}$ die Klasse der Formeln, welche nur Variablen, $\perp$, $\neg$ und $\vee$ verwenden.

(iii) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion: Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_{\perp,\neg,\vee}$ existiert eine Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_{\perp,M}$ mit $\varphi \equiv \varphi'$.

Hausaufgabe 2 1+1+1+8=11 Punkte

Wir nennen ein Literal $L \in \mathrm{AL}$ *gut*, wenn L keine Negation enthält und L heißt *schlecht*, falls L nicht gut ist. Eine Klausel C aus einer Klauselmenge heißt *gut*, falls C ausschließlich gute Literale enthält und C heißt *schlecht*, falls C nur schlechte Literale enthält.

Wir betrachten eine Einschränkung des Resolutionskalküls: In der *pessimistischen Resolution* darf nur dann eine Resolvente aus zwei Klauseln gebildet werden, falls eine der Klauseln schlecht ist.

Sei φ eine Formel in konjunktiver Normalform.

(i) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{C}(\varphi)$ keine schlechten Klauseln enthält und $|\operatorname{var}(\varphi)| \geq 1$ gilt, dann ist φ erfüllbar.

(ii) Zeigen Sie: Die pessimistische Resolution ist korrekt.

(iii) Zeigen Sie: Falls $|\operatorname{var}(\varphi)| = 0$ und φ unerfüllbar ist, dann können wir auch mit der pessimistischen Resolution eine Resolutionswiderlegung für $\mathcal{C}(\varphi)$ finden.

(iv) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Variablen in der Eingabeformel: Die pessimistische Resolution ist vollständig.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Vollständigkeit für das Resolutionskalkül (siehe S. 41-42 im Vorlesungsskript). Überlegen Sie insbesondere welche Rollen $\mathcal{C}^-$ und $\mathcal{C}^+$ in der pessimistischen Resolution spielen könnten.

Hausaufgabe 3 1+8+8=17 Punkte

Ein ungerichteter Graph K, sodass $\{u, v\} \in E(K)$ für alle $u, v \in V(K)$ mit $u \neq v$ gilt, ist eine *Clique*. Wir definieren $\omega(G)$ als die maximale Größe einer Clique die sich als Teilgraph von G finden lässt.

Sei G ein ungerichteter Graph und sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine Funktion $c : V(G) \to [k]$ ist eine *k-Cliquen-Färbung von G*, wenn für alle $i \in [k]$ gilt, dass $\omega(G_i) < k$, wobei wir G_i als $G[\{u \in V(G) \mid c(u) = i\}]$ definieren. Ein Graph G heißt *k-Cliquen-färbbar*, falls für G eine k-Cliquen-Färbung existiert.

Sei G ein Graph, sodass $V(G)$ abzählbar unendlich viele Knoten enthält. Weiter sei H ein endlicher Teilgraph von G und sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fest gewählt.

(i) Zeigen Sie: Wenn G k-Cliquen-färbbar ist, dann ist auch H k-Cliquen-färbbar.

(ii) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{H,k}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn H k-Cliquen-färbbar ist. Zeigen Sie, wie man aus jeder Belegung, die $\varphi_{H,k}$ erfüllt, eine k-Cliquen-Färbung c_H konstruieren kann und wie man aus einer k-Cliquen-Färbung c_H eine Belegung konstruiert, welche $\varphi_{H,k}$ erfüllt.

(iii) Zeigen Sie: Wenn jeder endliche Teilgraph G' von G eine k-Cliquen-Färbung besitzt, dann ist G k-Cliquen-färbbar.

Anmerkung: Sie können den Ausdruck $\varphi_{H,k}$, mitsamt seiner geforderten Eigenschaften, aus der vorherigen Unteraufgabe in dieser Unteraufgabe verwenden, unabhängig von der von Ihnen dort angegebenen Lösung.