FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 06.12.2022

Referenz für die Grundlagen zu Graphen

Ein *ungerichteter Graph* G ist ein Tupel (V, E) bestehend aus einer nicht-leeren *Knotenmenge* V und einer *Kantenmenge* E, wobei $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen *adjazent* wenn $\{u, v\} \in E$ und eine Kante $e \in E$ ist *inzident* zu einem Knoten $v \in V$, falls $v \in e$.

Ein Graph wird *einfach* genannt, wenn er keine *Schleifen* enthält, also keine Kanten von einem Knoten zu sich selbst. Demnach gilt in einem einfachen Graphen $G = (V, E)$, dass $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V \text{ und } u \neq v\}$. Insbesondere beim Arbeiten mit mehreren Graphen nutzen wir auch die Notation $V(G)$, für die Knotenmenge, und $E(G)$, für die Kantenmenge von G.

Alle Graphen in diesem Modul sind einfach, es sei denn wir erlauben explizit Schleifen. Außerdem sind alle Graphen in unserem Modul *endlich*, also gilt $|V(G)| \in \mathbb{N}$, es sei denn wir sagen explizit das der Graph unendlich ist.

Die *Nachbarschaft* $N(v)$ eines Knoten $v \in V(G)$ in einem Graphen G ist die Menge der Knoten $u \in V(G)$, sodass $\{u, v\} \in E(G)$ und die *geschlossene Nachbarschaft* $N[v]$ ist $N(v) \cup \{v\}$. Der *Grad* $\deg(v)$ eines Knoten $v \in V(G)$ in G ist definiert als $|N(v)|$. Wenn wir mit mehreren Graphen arbeiten hängen wir einen Index an das Symbol für die Nachbarschaft und den Grad an um klar zu machen wo wir die Nachbarschaft betrachten, e.g. $N_H(v)$, $N_G(v)$, $\deg_{\mathrm{H}}(v)$ und $\deg_{\mathrm{G}}(v)$.

Ein *Teilgraph*, auch Untergraph oder Subgraph genannt, H von G ist ein Graph, sodass $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq \{\{u, v\} \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$ gelten. Wir nennen den Teilgraphen H von G *induziert* falls $E(H) = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$ gilt. Da ein induzierter Teilgraph allein über seine Knotenmenge und seine Beziehung zu G definiert wird, schreiben wir auch $G[S]$ für den von der Menge $S \subseteq V(G)$ induzierten Teilgraphen.

Die Notation $H \subseteq G$ bedeutet, dass H ein Teilgraph von G ist. Für jedes $S \subseteq V(G)$ definieren wir $G - S = G[V(G) \setminus S$ und für eine Menge $F \subseteq E(G)$ definieren wir $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$. Wenn ein Teilgraph $H \subseteq G$ alle Knoten von G enthält nennen wir wir ihn *spannend*.

Für jedes positive $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ein *Pfad* P ist eine Sequenz $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{k+1})$, wobei für alle $i \in [k]$ gilt, dass $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ und, wenn $k > 0$, gilt $v_i \neq v_j$ für alle $i, j \in [k+1]$ mit $i \neq j$. Die *Länge* von P ist k, wobei die Länge 0 explizit erlaubt ist. Der erste und letzte Knoten der Sequenz sind *Endpunkte* des Pfades P. Alle Knoten die nicht Endpunkte eines Pfades sind werden *interne Knoten* genannt. Wir betrachten Pfade auch als Teilgraphen $P \subseteq G$. (Die Definition über Sequenzen wird hier gewählt um weniger Begriffe einführen zu müssen.)

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls für alle Knoten $u, v \in V(G)$ eine Pfad mit den Endpunkten u und v existiert. Ein zusammenhängender, Kanten- und Knoten-maximaler Teilgraph $H \subseteq G$ wird als *Zusammenhangskomponente* bezeichnet. Wir nennen einen Graphen C einen *Kreis* falls er zusammenhängend ist und alle Knoten in C Grad 2 besitzt. Die *Länge* eines Kreises C ist $|E(C)|$. Wir merken an, dass die Länge eines Pfades P ebenfalls $|E(P)|$ ist.

Referenz für besondere Graphen und Graphklassen

Der Graph ohne Knoten wird auch als *leerer Graph* bezeichnet und ist einzigartig, da er keine Kanten haben kann. Viele Definitionen und Eigenschaften ergeben wenig Sinn auf dem leeren Graphen, zum Beispiel ist ein leerer Graph zusammenhängend. Deshalb wird der leere Graph weitestgehend ignoriert. Wir gehen in unseren Modulen generell davon aus, dass der leere Graph nicht existiert bzw. ignorieren dessen Existenz.

Graphen die sich ohne Kreuzungen von Kanten in die Ebene zeichnen lassen werden als *planar* bezeichnet. Wenn alle Knoten in einem Graphen G den Grad $k \in \mathbb{N}$ besitzen, nennen wir G *k-regulär*, oder einfach *regulär*, wenn k uns nicht interessiert.

Ein Graph W, der keine Kreise als Teilgraphen enthält, wird *kreisfrei* oder *azyklisch* genannt und insbesondere nennen wir solche Graphen *Wälder*. Ein Wald T der zusammenhängend ist wird auch *Baum* genannt. Jeder zusammenhängende Graph hat einen spannenden Baum als Teilgraphen. Bäume dieser Art werden als *Spannbaum* bezeichnet.

Folgende Eigenschaften sind allesamt äquivalent für einen ungerichteten Graphen T.

(i) T ist ein Baum.

(ii) T ist zusammenhängend und $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

(iii) T ist kreisfrei und $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

(iv) T ist Kanten-maximal kreisfrei.

(v) T ist Kanten-minimal zusammenhängend.

(vi) Zwischen je zwei Knoten $u, v \in V(T)$ gibt es genau einen Pfad in T.

Ein *Blatt* in einem Baum T ist ein Knoten b mit Grad 1, oder der einzige Knoten in T, falls $|V(T)| = 1$. Wir nennen einen Baum T *gewurzelt*, falls wir einen Knoten $w \in V(T)$ als *Wurzel* auszeichnen. Die Länge eines Pfades zwischen einem Knoten $u \in V(T)$ und der Wurzel gibt die *Tiefe* des Knoten u in T an. Somit hat die Wurzel Tiefe 0. Die *Tiefe* eines gewurzelten Baums T ist die maximale Tiefe eines Knoten in T. Der Nachbar $v \in N(u)$ eines Knoten $u \in V(T)$ der auf dem eindeutigen Pfad zwischen der Wurzel und u liegt, wird *Elternknoten* von u genannt. Alle anderen Nachbarn von u sind *Kinder* von u.

Ein Graphen G für welchen zwei Mengen $U, W \subseteq V(G)$ mit $U \cap W = \emptyset$ und $U \cup W = V(G)$ existieren, sodass für alle $e \in E$ gilt, dass $|e \cap U| = 1 = |e \cap W|$, wir *bipartit* genannt. Wenn für G gilt, dass $E(G) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G) \text{ und } u \neq v\}$, dann nennen wir G einen *vollständigen* Graphen oder auch eine *Clique*. Die Clique mit $t \in \mathbb{N}$ Knoten wir auch als K_t notiert. Der *vollständige bipartite Graph* $K_{s,t}$ ist ein bipartiter Graph, sodass zwei Mengen U und W mit $U \cup W = V(K_{s,t})$ existieren und $E(K_{s,t}) = \{\{u, v\} \mid u \in U \text{ und } v \in W\}$ gilt.

Referenz für typische Parameter und Probleme auf Graphen

Im Folgenden ist G immer ein einfacher ungerichteter Graph.

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine positive Zahl und sei $c : V(G) \mapsto [k]$ eine Funktion. Wir nennen c eine *k-Färbung* von G, wenn für alle $\{u, v\} \in E(G)$ gilt, dass $c(u) \neq c(v)$. Falls es für G eine k-Färbung gibt, wird G *k-färbbar* genannt. Der Parameter $\chi(G)$ entspricht dem minimalen $k \in \mathbb{N}$ für welcher G k-färbbar ist. Wir bemerken, dass ein Graphen 2-färbbar ist genau dann, wenn er bipartit ist.

Der Parameter $\delta(G)$ entspricht dem minimalen Grad eines Knoten in G und $\Delta(G)$ entspricht dem maximalen Grad eines Knoten in G. Wir schreiben $\omega(G)$ für die Größe der größten Clique die sich als Teilgraph von G finden lässt und $\alpha(G)$ ist die Größe des größten induzierten Teilgraphen in G in welchem alle Knoten Grad 0 besitzen. Eine Knotenmenge $U \subseteq V(G)$ die einen Teilgraphen ohne Kanten induziert wird auch als *unabhängige Menge* bezeichnet.

Eine Menge von Kanten $M \subseteq E(G)$, sodass für alle $e, f \in M$ mit $e \neq f$ gilt, dass $e \cap f = \emptyset$, wird als *Matching* bezeichnet. Ein Matching M ist *perfekt*, wenn $|M| = \frac{|V(G)|}{2}$ gilt. Wenn G einen Kreis enthält der den gesamten Graphen spannt, sagen wir, dass G *hamiltonsch* ist und eine solcher Kreis wird als *Hamiltonkreis* bezeichnet.

Referenz für die Grundlagen zu gerichteten Graphen

Generell sind alle Graphen in diesem Modul ungerichtet, es sei denn wir sagen explizit, dass ein Graph gerichtet ist.

Ein *gerichteter Graph* D ist ein Tupel (V, E) bestehend aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V$. Eine *gerichtete Kante* ist also ein Tupel $e = (u, v) \in E$, wobei wir u den *Fuß* von e und v den *Kopf* von e nennen. Für eine Kante $e = (u, v)$ sagen wir, dass e von u *ausgeht* und bei v *eingeht*. Der *unterliegende Graph* von D ist der ungerichtete Graph $G = (V, \{\{u, v\} \mid (u, v) \in E\}$.

Ähnlich wie bei ungerichteten Graphen, heißen zwei Knoten u, v adjazent, falls es eine Kante gibt die beiden Knoten enthält und eine Kante e ist inzident zu u, falls u der Fuß, oder der Kopf von e ist. Es ist explizit erlaubt, dass $(u, v), (v, u) \in E$ gilt und insbesondere gilt, dass $(u, v) \neq (v, u)$. Wir nutzen wieder $V(D)$ für die Knotenmenge von D und $E(D)$ für die Kantenmenge von D.

Wie bei ungerichteten Graphen, nennen wir einen gerichteten Graphen D *einfach*, falls er keine Schleifen besitzt, also wenn gilt, dass $(v, v) \notin E$ für alle $v \in V$. Alle gerichteten Graphen in diesem Modul sind einfach und endlich, es sei denn wir sagen explizit, dass dies für bestimmte Graphen nicht der Fall ist.

Die *Ausnachbarschaft* von $u \in V(D)$ ist definiert als $N^{out}(v) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in E(D)\}$ und die *Einnachbarschaft* ist $N^{in}(v) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in E(D)\}$. Somit ist der *Ausgrad* von u also out-deg$(v) = |N^{out}(v)|$ und der *Eingrad* von u ist in-deg$(v) = |N^{in}(v)|$. Wie bei ungerichteten Graphen setzen wir Indizes an die Symbole für die Nachbarschaften und den Grad, falls wir mit mehreren gerichteten Graphen arbeiten.

Teilgraphen, induzierte Teilgraphen und spannende Teilgraphen sind analog zu ungerichteten Graphen definiert. Ein gerichteter Graph D heißt *schwach zusammenhängend*, falls der unterliegende Graph von D zusammenhängend ist. Die Zusammenhangskomponenten des unterliegenden Graphen entsprechen den *schwachen Zusammenhangskomponenten* von D.

Ein *gerichteter Pfad* ist eine Sequenz $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{k+1})$, wobei für alle $i \in [k]$ gilt, dass $e_i = (v_i, v_{i+1})$ und, wenn $k > 0$, gilt $v_i \neq v_j$ für alle $i, j \in [k + 1]$ mit $i \neq j$. Der Knoten v_1 ist der *Fuß* von P und v_{k+1} ist der *Kopf* von P. Alle anderen Knoten von P werden *interne Knoten* genannt. Wie bei ungerichteten Graphen betrachten wir Pfade in der Praxis häufiger einfach als Teilgraphen. (Auch hier ist die Definition über Sequenzen schlicht kürzer und verständlicher.)

Ein gerichteter Graph D heißt *stark zusammenhängend*, falls für alle Knoten $u, v \in V(D)$ ein Pfad P in D existiert, sodass u der Fuß von P und v der Kopf von P ist. Ein stark zusammenhängender, Kanten- und Knoten-maximaler Teilgraph $H \subseteq G$ wird als *starke Zusammenhangskomponente* bezeichnet. Wenn C ein stark zusammenhängender Graph ist ,in welchem jede Knoten u Ein- und Ausgrad 1 besitzt, wird *gerichteter Kreis* genannt.

Die *Länge* eines gerichteten Pfades oder gerichteten Kreises D entspricht wie bei ungerichteten Graphen $|E(D)|$. Wir merken an, dass die unterliegenden Graphen von gerichteten Pfaden, bzw. gerichteten Kreisen, auch wieder Pfade, bzw. Kreise, sind. Allerdings ist es auch leicht zu sehen, dass es gerichtete Graphen gibt deren unterliegende Graphen Pfade, oder Kreise sind, welche selbst aber weder ein gerichteter Pfade noch ein ungerichteter Kreis sind. Wie in ungerichteten Graphen wird ein gerichteter Graph ohne gerichtete Kreise *kreisfrei* oder auch *azyklisch* genannt. Oft werden azyklische gerichtete Graphen auch als DAGs (directed acyclic graphs) bezeichnet. Auch hier ist anzumerken, dass nicht jeder DAG als unterliegenden Graph einen Wald besitzt.