TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Lösungsvorschlag Übung 5

Abgabe bis Freitag, den 31.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 21 besprochen (20.05-24.05.).
- Fällt ihr Tutorium auf einen Feiertag, besuchen Sie bitte eines der anderen Tutorien.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 5.1

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p_{X,Y}$ gegeben durch

X/Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse

$$\{X \neq Y\}, \quad \{3X = Y\}, \quad \{X \leq Y\}, \quad \{X < Y\}, \quad \{X + Y \quad \text{ist ungerade}\}$$

Lösung für Tutoriumsaufgabe 5.1

(i)

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$$
$$= 1 - \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

.

(ii) $\mathbb{P}(3X = Y) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{4}$.

(iii) $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 1.$

(iv) $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X \leq Y) - \mathbb{P}(X = Y) = \frac{5}{8}.$

(v)

$$\mathbb{P}(X + Y \quad \text{ungerade}) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 0 + \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Tutoriumsaufgabe 5.2

Die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilung von Y sind in folgender unvollständiger Tabelle gegeben:

X/Y	1	2	3	p_X
1	$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$	
2		$\frac{3}{20}$	0	
3	0	$\frac{1}{5}$		
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	
p_Y		$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{20}$	

(i) Vervollständigen Sie die gegebene Tabelle.

(ii) Sind X und Y unabhängig?

(iii) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 5.2

Die Teile (i,iii) sind in der Tabelle gegeben:

X/Y	1	2	3	p_X	$p_{X\|Y=1}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{7}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	0	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{7}$
3	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$	0
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{7}$
p_Y	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{20}$		

Zu (ii): Nein, X und Y sind nicht unabhängig, denn z.B. ist

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = 0 \neq \frac{7}{80} = \mathbb{P}(X = 3) \cdot \mathbb{P}(Y = 1).$$

Tutoriumsaufgabe 5.3

Eine Urne enthält n Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis n beschriftet sind. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X bezeichne den kleineren und Y den größeren Wert der beiden gezogenen Zahlen. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, die Randverteilungen von X bzw. Y und die Verteilung von $Y - X$.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 5.3

$$\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\begin{cases}0 & \text{falls } i\geq j\\ \frac{2}{n(n-1)} & \text{sonst.}\end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j>i}\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum_{j>i}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i<j}\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum_{i<j}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2(j-1)}{n(n-1)}$$

$$\mathbb{P}(Y-X=k)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y-X=k,X=i)=\sum_{i=1}^{n-k}\mathbb{P}(Y=k+i,X=i)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

für $k=1,2,\dots,n-1$.

Tutoriumsaufgabe 5.4

Seien X_1 und X_2 zwei diskrete unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1=i)=\mathbb{P}(X_2=i)=\frac{1}{n}$$

für $i\in\{1,\cdots n\}$. Sei $Y=\min\{X_1,X_2\}$. Berechnen Sie

(i) die Verteilung von Y,

(ii) $\mathbb{P}(Y=k|X_1>k)$ für $k\in\{1,\cdots n\}$,

(iii) $\mathbb{P}(Y=k|X_1>X_2)$ für $k\in\{1,\cdots n\}$.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 5.4

(i) Durch die Gleichkeit

$$\{\min\{X_1,X_2\}=k\}=\{X_1=k,X_2>k\}\cup\{X_1>k,X_2=k\}\cup\{X_1=k,X_2=k\}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}p_Y(k)&=\mathbb{P}(\min\{X_1,X_2\}=k)\\&=\mathbb{P}(X_1=k,X_2>k)+\mathbb{P}(X_1>k,X_2=k)+\mathbb{P}(X_1=k,X_2=k)\\&=\frac{1}{n^2}+2\frac{n-k}{n^2}=\frac{2n-2k+1}{n^2}\end{aligned}$$

(ii) Falls $k\leq n-1$, $\mathbb{P}(X_1>k)\neq 0$ und erhalten wir

$$\mathbb{P}(Y=k|X_1>k)=\frac{\mathbb{P}(Y=k,X_1>k)}{\mathbb{P}(X_1>k)}=\frac{\mathbb{P}(X_2=k,X_1>k)}{\mathbb{P}(X_1>k)}=\mathbb{P}(X_2=k)=\frac{1}{n}$$

falls $k=n$, ist $\mathbb{P}(Y=k|X_1>k)$ nicht wohldefiniert.

(iii) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y = k | X_1 > X_2) = \frac{\mathbb{P}(Y = k, X_1 > X_2)}{\mathbb{P}(X_1 > X_2)} = \frac{\mathbb{P}(X_2 = k, X_1 > k)}{\mathbb{P}(X_1 > X_2)} \ ,$$

weil

$$\{Y = k, X_1 > X_2\} = \{\min\{X_1, X_2\} = k, X_1 > X_2\} = \{X_2 = k, X_1 > X_2 = k\}$$
$$= \{X_2 = k, X_1 > k\}$$

und dann erhalten wir

$$\mathbb{P}(Y = k | X_1 > X_2) = \frac{\mathbb{P}(X_1 > k, X_2 = k)}{\mathbb{P}(X_1 > X_2)} = \frac{n - k}{n^2 \mathbb{P}(X_1 > X_2)}$$

Weiter gilt

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 > k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n - k}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Dann haben wir

$$\mathbb{P}(Y = k | X_1 > X_2) = \frac{\mathbb{P}(X_1 > k, X_2 = k)}{\mathbb{P}(X_1 > X_2)} = \frac{2(n - k)}{n(n-1)}$$

Hausaufgaben

Hausaufgabe 5.1 (4=1+1+2 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit den folgenden Verteilungen

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	0.20	0.36	0.26	0.18
$p_Y(k)$	0.15	0.26	0.37	0.22

Berechnen Sie

(i) $\mathbb{P}(X = Y)$

(ii) $\mathbb{P}(X = 2Y)$

(iii) $\mathbb{P}(X > Y)$

Hausaufgabe 5.2 (7=2+3+2 Punkte)

Ihre Speisekammer enthält die drei Arten von Lebensmitteln: Pizza, Sandwiches und Pasta, die jeweils mit den Prozentsätzen $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ und $p_3 > 0$ so vorliegen, dass $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Im Verlaufe eines Tages öffnen Sie die Speisekammer nur zweimal und nehmen jedes Mal eines der drei Lebensmittel. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass bei jeder Öffnung die Anteile der Lebensmittel gleich bleiben und die Lebensmittel unabhängig voneinander gewählt werden. Seien P und S dann die Zufallsvariablen der Anzahl der am Tag gegessenen Pizzen bzw. Sandwiches.

(i) Beschreiben Sie die Gemeinsame Verteilung von P und S mithilfe eine Tabelle.

(ii) Geben Sie die Randverteilungen von P und S nur mit Hilfe von p_1 und p_2 an. Wie heißen diese Verteilungen?

(iii) Was ist die bedingte Verteilung von P gegeben S?

Hausaufgabe 5.3 (3=2+1 Punkte)

Wir betrachten eine Urne mit einer zufälligen Anzahl von Kugeln, die wir durch eine Zufallsvariable $K\colon \Omega \to \mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ mit der folgenden Verteilung beschreiben

$$\mathbb{P}(K = m) = 2^{-m}, \quad m \geq 1.$$

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Kugeln unabhängig voneinander weiß oder schwarz sind. Die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel weiß zu sein beträg $\frac{1}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel schwarz zu sein beträgt $\frac{2}{3}$ gegeben, dass in der Urne insgesamt n Kugeln sind.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne keine weißen Kugeln enthält?

(ii) Angenommen, es gibt keine weiße Kugel, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne genau zwei Kugeln enthält?

Hinweis: Die Ergebnisse zu den Reihen auf Blatt 0 können hilfreich sein.

Hausaufgabe 5.4 (6=1+3+2 Punkte)

Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Rademacher-verteilt zum Parameter $p \in [0,1]$ (bzw. hat die Rademacher-Verteilung zum Parameter p), falls $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ und

$$\mathbb{P}(X = 1) = p\,, \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1 - p.$$

Außerdem ist ein n-mal wiederholtes Rademacher-Experiment mit Parameter p eine Familie $(X_1, \cdots X_n)$, wobei jedes X_i Rademacher-verteilt ist mit demselben Parameter p und die Variablen unabhängig voneinander sind.

(i) Sei Y eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable und X eine Rademacher-verteilte Zufallsvariable mit demselben Parameter $p \in [0,1]$. Wir definieren die neuen Zufallsvariablen

$$\overline{X} := \frac{X+1}{2}\,, \quad \overline{Y} := 2Y - 1$$

Beweisen Sie, dass $\overline{X}$ Bernoulli-verteilte und $\overline{Y}$ Rademacher-verteilte Zufallsvariablen jeweils mit Parameter $p \in [0,1]$ sind.

(ii) Sei dann $(X_1, \cdots X_n)$ ein n-mal wiederholtes Rademacher-Experiment mit Parameter p. Wir definieren die neue Zufallsvariable

$$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Beschreiben Sie die Verteilungen von Z und $-Z$ falls $n = 2$. Was fällt Ihnen auf, wenn $p = 1/2$?

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z = 0)$ für beliebige n mit Hilfe der Beschreibung der Rademacher-Variablen in Form der Bernoulli-Variablen aus (i). Nutzen Sie außerdem den Zusammenhang zwischen Bernoulli-Summen und Binomialverteilung.