FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 6. Dezember 2022

6. Tutorium – Logik
Besprochen in der Woche vom 05.12.2022.

Aufgabe 1

Seien $\sigma_1 = \{+, 0\}$ und $\sigma_2 = \{\subseteq, \emptyset\}$ zwei Signaturen, wobei $\emptyset$ und 0 Konstantensymbole sind, $\subseteq$ ein zweistelliges Relationssymbol ist und $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist.

(i) Geben Sie eine σ_1-Struktur $\mathcal{A}$ an, welche die natürlichen Zahlen mit der Addition und dem neutralen Element der Addition[1] darstellt.

(ii) Geben Sie eine σ_1-Struktur $\mathcal{B}$ an, welche die natürlichen Zahlen mit der Multiplikation und dem neutralen Element der Multiplikation darstellt.

(iii) Geben Sie eine σ_2-Struktur $\mathcal{D}$ an, welche die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ darstellt.

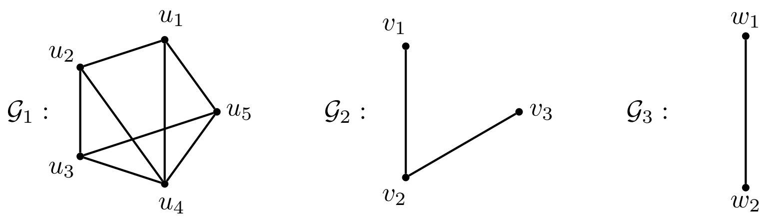
(iv) Geben Sie eine σ_2-Struktur $\mathcal{E}$ an, welche die Kleiner-Gleich Relation über $\mathbb{N}$ darstellt.

(v) **Bonusfrage:** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_1]$ an, sodass $\varphi(\mathcal{B})$ genau die Primzahlen enthält.

Aufgabe 2

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Ungerichtete Graphen werden als σ-Strukturen aufgefasst, wobei E als die Kantenrelation interpretiert wird.

Betrachten Sie die folgenden Graphen:



Geben Sie für jeden der Graphen an ob sie die folgenden Formeln erfüllen.

(i) $\varphi_1 = \exists x \forall y E(x, y)$

(ii) $\varphi_2 = \exists x \exists y (x \neq y \wedge \neg E(x, y))$

(iii) $\varphi_3 = \forall x (\exists y (E(x, y) \wedge \exists z (y \neq z \wedge E(x, z))))$

Sei $\mathcal{G}$ die σ-Struktur zu einem ungerichteten Graphen G. Finden Sie Formeln, sodass die folgenden Aussagen erfüllt sind.

(iv) $\mathcal{G} \models \varphi_4$ genau dann, wenn G genau zwei Knoten enthält, sodass jeder Knoten der nicht einer dieser beiden Knoten ist, ein Nachbar von einem dieser beiden Knoten ist.

(v) $\varphi_5 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\mathcal{G}_1 \not\models \varphi_5$, $\mathcal{G}_2 \models \varphi_5$ und $\mathcal{G}_3 \not\models \varphi_5$.

[1]Das neutrale Element e einer Operation $*$ ist das Element für das $x * e = e * x = x$ für alle x aus der Grundmenge gilt.

Aufgabe 3

Sei $\sigma = \{R, f\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol R und einem einstelligen Funktionssymbol f. Geben Sie für die folgenden Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma]$ die Menge der freien Variablen an. Geben Sie außerdem an, welche Variablen durch welche Quantoren gebunden werden.

(i) $\varphi_1 \coloneqq (\forall x \exists y\ R(x,y) \wedge \neg x \neq y) \vee \neg \exists z \forall y\, (R(y,z) \leftrightarrow \forall y\ y = y)$

(ii) $\varphi_2 \coloneqq \exists x \forall x\ f(x) = x$

Aufgabe 4

Sei σ die Signatur aus Aufgabe 2 und seien

$$\psi_1(x) = \exists y \exists z (E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x)),\ \ \psi_2(x) = \forall y (x \neq y \to E(x,y)) \text{ und } \psi_3(x,y) = \neg E(x,y).$$

Ermitteln Sie $\psi_i(\mathcal{G}_j)$ für alle $i, j \in [3]$.

Anmerkung: $\varphi(\mathcal{A}) = \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]\}$ für $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, wobei A das Universum von $\mathcal{A}$ ist.