Aufgaben zur Vorlesung **WiSe 22/23**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche **17.10.2022**

Lösungsskizze für das 1. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 24.–28.10.2022)

Aufgabe 1. Analyse einer Turing-Maschine

Gegeben sei die Turing-Maschine $M = (Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{a, b, c, \square\}, \delta, z_0, \square, E = \{z_4\})$, wobei δ wie folgt definiert ist:

δ	a	b	c	$\square$
z_0	(z_0, a, R)	(z_1, a, R)	$\perp$	$\perp$
z_1	$\perp$	(z_1, b, R)	(z_1, c, R)	(z_2, c, L)
z_2	(z_4, a, N)	(z_3, b, L)	(z_2, c, L)	$\perp$
z_3	(z_0, a, R)	(z_3, b, L)	$\perp$	$\perp$

a) Stellen Sie M als Zustandsgraph dar.

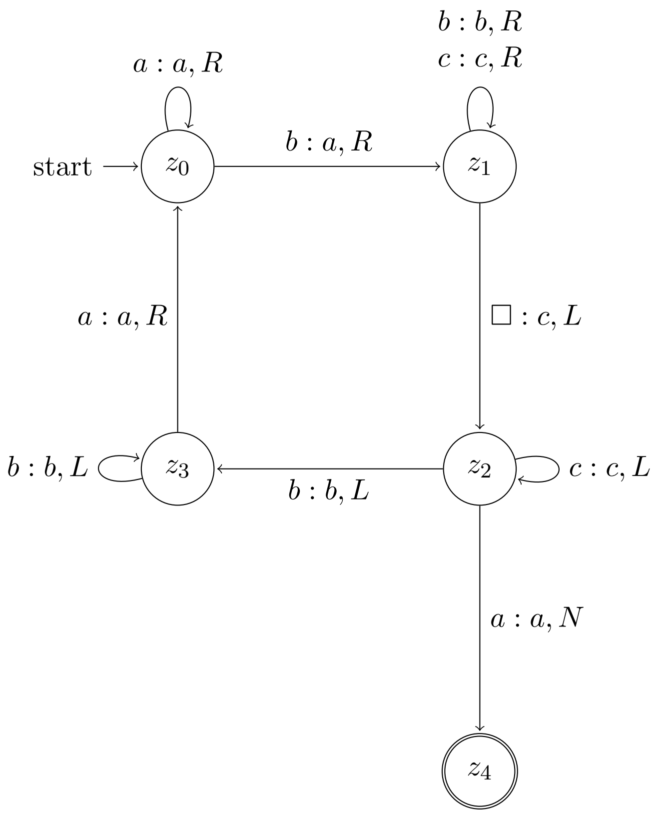
b) Geben Sie die Konfigurationsfolge (beginnend mit der Startkonfiguration z_0abb) der Turing-Maschine M bei Eingabe abb an (ohne Begründung).

c) Für welche Wörter $w \in \Sigma^*$ erreicht M den Endzustand z_4? Geben Sie für jedes solches Eingabewort an, was nach Erreichen des Endzustandes auf dem Band steht.

d) Sei w ein beliebiges Wort der Länge n, für das die Turing-Maschine M den Endzustand z_4 erreicht. Gilt dann immer, dass M auf Eingabe w nach höchstens $4 \cdot n + 2$ Schritten den Endzustand erreicht?

——————Lösungsskizze——————

a) Der Graph für diese TM:



b) $z_0abb \vdash az_0bb \vdash aaz_1b \vdash aabz_1\Box \vdash aaz_2bc \vdash az_3abc \vdash aaz_0bc \vdash aaaz_1c \vdash aaacz_1\Box \vdash aaaz_2cc \vdash aaz_2acc \vdash aaz_4acc.$

c) Das Eingabewort muss von der Form a^ib^j, $i \geq 0, j > 0$, sein. Denn: Zustand z_0 durchläuft alle a's, hat aber keinen Übergang für $\Box$. Wir verlassen z_0 also nur, wenn mindestens ein b vorhanden ist. Da z_1 keinen Übergang für a hat, darf nach dem ersten b kein a mehr auftauchen.

Jedes Wort der obigen Form wird auch tatsächlich akzeptiert, da in der Schleife über die Zustände z_0, z_1, z_2, z_3 jeweils ein b durch ein a ersetzt wird und ein c ans Ende des Wortes geschrieben wird. Wenn in z_2 keine b's mehr vorhanden sind, wird in z_4 akzeptiert. Für das Eingabewort a^ib^j lautet das „Ergebnis" also $a^{i+j}c^j$.

d) Nein. Für $w = bbb$ ($n = 3$) benötigt M $21 > 14 = 4n + 2$ Schritte...

$z_0bbb \vdash az_1bb \vdash abz_1b \vdash abbz_1\Box \vdash abz_2bc \vdash az_3bbc \vdash z_3abbc \vdash az_0bbc \vdash aaz_1bc \vdash aabz_1c \vdash aabcz_1\Box \vdash aabz_2cc \vdash aaz_2bcc \vdash az_3abcc \vdash aaz_0bcc \vdash aaaz_1cc \vdash aaacz_1c \vdash aaaccz_1\Box \vdash aaacz_2cc \vdash aaaz_2ccc \vdash aaz_2accc \vdash aaz_4accc$

Aufgabe 2. Konstruktion einer Turing-Maschine

Für ein Alphabet Σ sei die Funktion $\mathrm{rev}\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Funktion, die ein Wort umdreht (z.B. ist $\mathrm{rev}(abc) = cba$). Formal ist sie wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{rev}(\varepsilon) &= \varepsilon && \text{für das leere Wort } \varepsilon \in \Sigma, \\ \mathrm{rev}(w\,x) &= x\,\mathrm{rev}(w) && \text{für ein Wort } w \in \Sigma^* \text{ und einen Buchstaben } x \in \Sigma. \end{aligned}$$

a) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die genau bei Eingabewörtern aus der Sprache

$$L := \{w\,c\,\mathrm{rev}(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

in einem Endzustand stoppt. Das Eingabealphabet der TM sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Erläutern Sie das Funktionsprinzip Ihrer Turing-Maschine.

(Hinweis: Sie können Ihre Turing-Maschine als Graph angeben. Bedenken Sie auch, dass das Bandalphabet größer als das Eingabealphabet sein darf.)

——————Lösungsskizze——————

Eine TM, die L erkennt kann folgendermaßen vorgehen: Das Bandalphabet ist $\Sigma \cup \{\Box\}$.

(1) Prüfe ob exakt ein c auf dem Band ist.

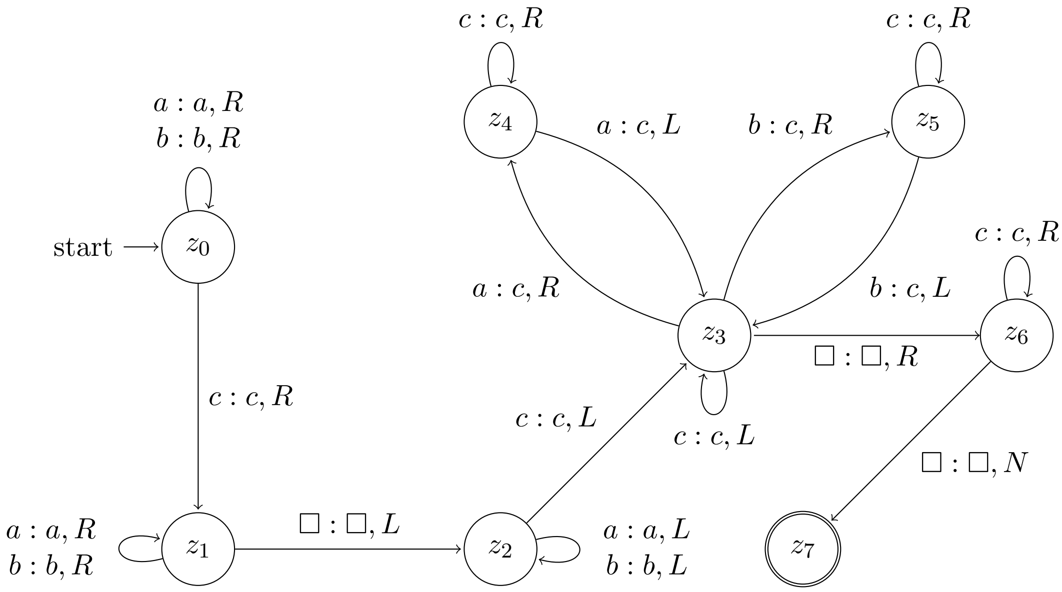
(2) Bewege den Kopf zu dem Zeichen links neben dem c.

(3) Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein a ist, dann ersetze es durch ein c, geh nach rechts und springe zu (4). Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein b ist, dann springe zu (5). Wenn das Zeichen unter dem Kopf $\Box$ ist, dann akzeptiere.

(4) Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein c ist, dann geh nach rechts und wiederhole. Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein a ist, dann ersetze es durch ein c, geh nach links und springe zu (3).

(5) Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein c ist, dann geh nach rechts und wiederhole. Wenn das Zeichen unter dem Kopf ein b ist, dann ersetze es durch ein c, geh nach links und springe zu (3).

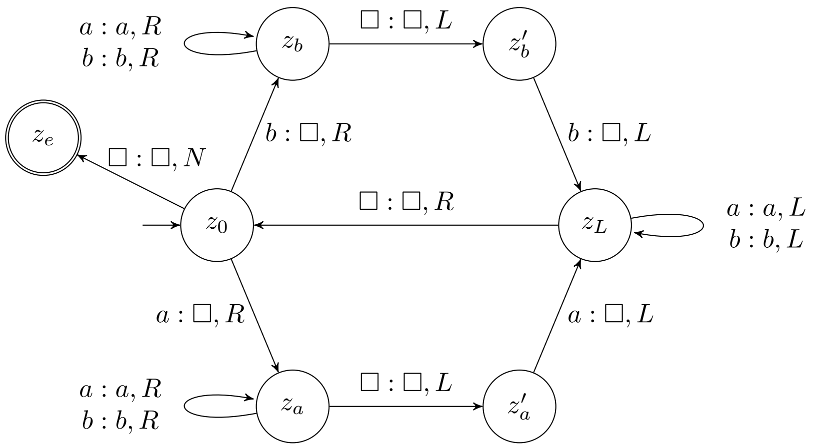
Der Graph für diese TM:



---

b) Geben Sie für die Sprache $\{w\, \mathrm{rev}(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$ eine Turing-Maschine an, die diese erkennt. Als Begründung ist es dabei ausreichend, die prinzipielle Arbeitsweise Ihrer Turing-Maschine in Worten zu beschreiben.

———————Lösungsskizze———————



Die Turing-Maschine iteriert "von außen nach innen" über das Wort und überprüft ob am Anfang und Ende jeweils derselbe Buchstabe steht. Hierfür kann sie sich mit verschiedenen Zuständen "merken", ob sie ein a (Zustände z_a, z_a') oder b (Zustände z_b, z_b') am Wortanfang gelesen hat (siehe auch TM für $\{0^n 1^n\}$ aus der VL Slide 16). Bei übereinstimmenden Anfangs- und Endbuchstaben können diese durch $\Box$ ersetzt werden. Die Maschine akzeptiert, falls das Ersetzen von Anfangs- und Endbuchstaben erfolgreich war und alles durch $\Box$ ersetzt wurde.
