Aufgaben zur Vorlesung **WiSe 22/23**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche **17.11.2022**

5. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 21.11.2022–25.11.2022)

Aufgabe 1. Die Sudan-Funktion

Die partielle Sudan-Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$f(n,x,y) := \begin{cases} x+y, & \text{falls } n=0, \\ x, & \text{falls } n>0 \text{ und } y=0, \\ f(n-1, f(n,x,y-1), f(n,x,y-1)+y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Ist f total?
2. Berechnen Sie $f(1,1,1)$ und $f(2,1,1)$.
3. Zeigen Sie, dass $f(1,x,y) = f(1,0,y) + 2^y \cdot x$.
4. Diskutieren Sie (ohne formalen Beweis) ob f μ-rekursiv ist.

Aufgabe 2. Ackermannfunktion und primitive Rekursion

Betrachten Sie folgende Version der Ackermannfunktion:

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \\ h(0,0,z) &:= z+1 \\ h(0,y,0) &:= h(0,y-1,1) \\ h(0,y,z) &:= h(0,y-1,h(0,y-1,z-1)) \\ h(x,0,0) &:= h(x-1,1,1) \\ h(x,0,z) &:= h(x,z,0)+1 \\ h(x,y,z) &:= h(x,y-1,z+1). \end{aligned}$$

Diskutieren Sie, warum diese Version der Ackermannfunktion nicht primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 3. Ackermannfunktion und geschlossene Formeln

Sei ack die Ackermannfunktion (in der Variante von Rósza Péter)

$$\begin{aligned} \operatorname{ack}(0,y) &:= y+1, \\ \operatorname{ack}(x,0) &:= \operatorname{ack}(x-1,1), \text{ und} \\ \operatorname{ack}(x,y) &:= \operatorname{ack}(x-1, \operatorname{ack}(x,y-1)). \end{aligned}$$

1. Leiten Sie eine geschlossene Formel für $\operatorname{ack}(2,y)$ her, die nur Addition und Multiplikation enthält. (Hinweis: Sie können verwenden, dass $\operatorname{ack}(2,y)$ eine lineare Funktion in y ist, d.h., dass $\operatorname{ack}(2,y) = b \cdot y + c$ für gewisse Konstanten b und c gilt.)
2. Beweisen Sie, dass $\operatorname{ack}(3,y) = 2^{y+3} - 3$.
3. Beweisen Sie, dass $\operatorname{ack}(4,y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, wobei der Turm (inkl. der Basis) genau $y+3$ mal die 2 enthält.