FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 15. November 2022

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 3. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Wandeln Sie die Formel $\varphi := (X \to Y) \to \neg Z$ in disjunktive und konjunktive Normalform um.

Lösung zu Aufgabe 1

Man kann durch Umformen mit Äquivalenzumformungsregeln die Normalformen erreichen:

$$\begin{aligned}(X \to Y) \to \neg Z &\equiv \neg(\neg X \lor Y) \lor \neg Z \\ &\equiv (X \land \neg Y) \lor \neg Z && \text{(DNF)} \\ &\equiv (X \lor \neg Z) \land (\neg Y \lor \neg Z) && \text{(KNF)}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Nachdem M vergeblich K sowohl im Café, als auch in der Kneipe, gesucht hat, empfängt er eine weitere Nachricht von ihr. Sie entschuldigt sich, dass sie sich nicht mit ihm treffen konnte, und beschreibt wann sie wieder Zeit hat sich mit M verdeckt zu besprechen. Dazu trifft K folgende Aussagen:

(1) Ich kann am Montag nicht.

(2) Wenn wir uns vormittags treffen, dann müssen wir das am Montag tun.

(3) Wir treffen uns am Montag, irgendwann vormittags, oder am Freitag.

(4) Wenn wir uns am Freitag treffen, dann tun wir das vormittags.

M formalisiert ihre Aussagen mit einer Formel

$$\varphi := \neg X \land (Y \to X) \land (X \lor Y \lor Z) \land (Z \to Y)$$

aber dann merkt er, dass irgendwas nicht stimmt.

Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass φ unerfüllbar ist.

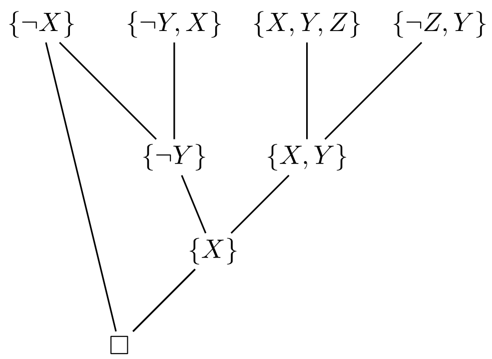
Lösung zu Aufgabe 2

Wir stellen fest, dass die Formel nicht in KNF ist. Also wandeln wir als nächstes die Formel φ in KNF um, indem wir die Äquivalenzen $Y \to X \equiv \neg Y \lor X$ und $Z \to Y \equiv \neg Z \lor Y$ benutzen. Danach wandeln wir die Formel in KNF in eine Klauselmenge um.

$$\{\{\neg X\}, \{\neg Y, X\}, \{X, Y, Z\}, \{\neg Z, Y\}\}$$

Nun müssen wir korrekte Resolutionsschritte anwenden, um die leere Klausel herzuleiten.

Eine Lösung ist das folgende Diagramm von Resolutionsschritten:



Durch die Ableitung der leeren Klausel haben wir gezeigt, dass die ursprüngliche Klauselmenge und somit auch φ unerfüllbar sind.

Aufgabe 3

(i) Seien C_1, C_2 zwei Klauseln mit $L_1, L_2 \in C_1$ und $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in C_2$. Wir definieren $C' := (C_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}_1, \overline{L}_2\})$ als *Doppelresolvente* und nennen die Operationen die diese erzeugt *Doppelresolution*. Ist der Resolutionskalkül immer noch korrekt, wenn wir Doppelresolution zulassen? Ist er noch vollständig?

(ii) Ist es sinnvoll wenn wir die Resolutionsregeln auf eine Klauselmenge einer Formel in DNF anwenden? Was bedeutet es, wenn wir so auf die leere Klausel kommen?

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Der Resolutionskalkül bleibt vollständig, da wir die Doppelresolution einfach ignorieren und immer noch die leere Klausel aus einer unerfüllbaren Formelmenge herleiten können.

Er ist aber nicht mehr korrekt, denn die Formel $(X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$ ist erfüllbar, aber mit Doppelresolution wird die leere Klausel hergeleitet.

(ii) Resolution auf einer disjunktiven Normalform ist sinnvoll. Eine Ableitung der leeren Klausel beweist dann die Allgemeingültigkeit der ursprünglichen Klauselmenge.

Beweisalternative 1: Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine beliebige Formel in DNF, d.h. φ ist von der Form

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\neg\varphi \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{k_i} \overline{L_{i,j}} = \varphi'.$$

Hierfür beweisen wir eine Verallgemeinerung der de Morganschen Regeln, welche die obige Äquivalenz (zusammen mit der Elimination der doppelten Negation) direkt impliziert: Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{AL}$, dann gilt

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i \quad \text{und} \quad \neg \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\psi_i.$$

Sei β eine zu $\psi_1, \ldots, \psi_n$ passende Belegung. Falls $\beta \models \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ gilt, so muss ein $i \in [n]$ mit $\beta \not\models \psi_i$ existieren. Somit gilt aber auch $\beta \models \neg\psi_i$ und deshalb $\beta \models \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i$.

Sollte stattdessen $\beta \not\models \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ gelten, so muss $\beta \models \psi_i$ für alle $i \in [n]$ gelten. Somit gilt dann aber, dass $\beta \not\models \neg\psi_i$ für alle $i \in [n]$ und deshalb $\beta \not\models \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i$.

Die andere Äquivalenz lässt sich analog beweisen. Wir wissen nun also, dass $\neg\varphi \equiv \varphi'$ gilt. Nun konstruieren wir aus einer Resolutionsableitung von $\Box$ aus φ (in DNF) eine Resolutionsableitung von $\Box$ aus φ'. Als Konsequenz ist φ' als unerfüllbar, wenn es eine Resolutionsableitung von $\Box$ aus φ gibt und somit ist dann φ auch allgemeingültig.

Sei nun $\mathcal{C}$ die zu φ gehörige Klauselmenge und sei $(C_1, C_2, \ldots, C_n = \Box)$ eine Resolutionsableitung für $\mathcal{C}$. Wenn wir nun $\mathcal{C}'$ die zu φ' gehörige Klauselmenge sein lassen, so konstruieren wir folgende Sequenz: $(C'_1, C'_2, \ldots, C'_n)$, wobei $C'_i = \{\overline{L} \mid L \in C_i\}$ für alle $i \in [n]$. Wir wollen nun zeigen, dass $(C'_1, C'_2, \ldots, C'_n = \Box)$ eine Resolutionswiderlegung für $\mathcal{C}'$ ist.

Wenn $C_i \in \mathcal{C}$, mit $i \in [n]$, gilt nach Konstruktion von φ', dass $C'_i \in \mathcal{C}'$. Falls $C_i \notin \mathcal{C}$, dann seien $a, b \in [n]$ mit $a < b < i$, sodass $C_i \in \text{Res}(C_a, C_b)$. Somit existiert ein $L \in C_a$ mit $\overline{L} \in C_b$, sodass $C_i = (C_a \setminus \{L\}) \cup (C_b \setminus \{\overline{L}\})$. Dann gilt aber nach Definition von C'_i, dass $C'_i \in \text{Res}(C'_a, C'_b)$. Dies entspricht der Definition einer Resolutionsableitung, also sind wir fertig.

Beweisalternative 2: Sei $\varphi \in \text{AL}$ in DNF und $\mathcal{C}$ die dazu gehörigen Klauselmenge. Sei außerdem $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ eine Resolutionsableitung von C_n aus $\mathcal{C}$. Um Unklarheiten wegen der Definition von semantischen Folgerung für KNF Klauseln zu vermeiden, definieren wir für jedes C_i ein ψ_i als die entsprechende Unterformel von φ, aus der die Klausel C_i konstruiert wurde. Wir zeigen mittels Induktion über $i \in [n]$: Wenn $\mathcal{C} \vdash_R C_i$, dann gilt auch $\psi_i \models \varphi$.

IA: $i = 1$

Da C_1 bereits eine Klausel von φ ist, gilt $\psi_1 \models \varphi$, da φ in DNF ist.

IV: Für ein festes $i \in \mathbb{N}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq i$, dass $\psi_j \models \varphi$.

IS: zu zeigen: $\psi_{i+1} \models \varphi$
Falls C_{i+1} eine Klausel von φ ist, dann gilt $\psi_{i+1} \models \varphi$ wie im Induktionsanfang. Sonst gibt es $j < i + 1$ und $k < i + 1$ mit $C_{i+1} \in \text{Res}(C_j, C_k)$.

Sei L ein Literal, wobei L in C_j und $\bar{L}$ in C_k liegt. Falls $\beta \models \psi_{i+1}$ für eine zu φ passende Belegung β, dann erfüllt β alle Literale in C_{i+1}. Falls $\beta \models L$ dann gilt $\beta \models \psi_j$ und $\beta \models \varphi$ da $\psi_j \models \varphi$ laut IV. Sonst gilt $\beta \models \bar{L}$ und $\beta \models \psi_k$. In diesem Fall gilt $\beta \models \varphi$ da $\psi_k \models \varphi$ laut IV. In beiden Fälle gilt $\beta \models \varphi$, also gilt $\psi_{i+1} \models \varphi$.

Falls $\mathcal{C} \vdash_R \Box$, dann gilt $\top \models \varphi$, da die leere Klausel in DNF äquivalent zu $\top$ ist. Somit ist φ allgemeingültig, wenn eine Resolutionsableitung von $\Box$ aus $\mathcal{C}$ existiert.

Aufgabe 4

Eine Formel $\varphi \in \text{AL}$ ist in 3-KNF, falls φ in KNF ist und jede Klausel von φ höchstens drei Literale enthält. Zeigen Sie, dass eine aussagenlogischen Formel φ existiert, die zu keiner aussagenlogischen Formel in 3-KNF äquivalent ist.

Lösung zu Aufgabe 4

Sei $\varphi := W \vee X \vee Y \vee Z$ und sei $\psi = \bigwedge_{i=1}^{k} C_i$ eine Formel in 3-KNF mit $\varphi \equiv \psi$, wobei, für alle $i \in [k]$, die Formel C_i eine Klausel mit höchstens drei Literalen ist. Wir wissen, dass $k \geq 1$ gelten muss, denn sonst wäre $\psi \equiv \top$.

Falls ein C_i ein Literal L und das duale Literal $\overline{L}$ enthält, wissen wir, dass für jede Belegung β die zu ψ passt gilt, dass $[\![C_i]\!]^\beta = 1$. Also können wir C_i aus ψ streichen und würden eine Formel erhalten die äquivalent zu ψ ist. Wir können deshalb davon ausgehen, dass keine solche Klausel in ψ enthalten ist.

Wähle nun eine Belegung β, sodass für alle Literale $L \in C_1$ gilt $[\![L]\!]^\beta = 0$ und für alle Variablen $V \in \mathrm{var}(\varphi) \setminus \mathrm{var}(C_1)$ gilt $\beta(V) = 1$. Weil ψ in 3-KNF ist, enthält C_1 maximal 3 Literale. Mindestens eine der vier Variablen aus φ wird von β daher mit 1 belegt, also gilt $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Andererseits gilt $[\![\psi]\!]^\beta = 0$, weil $[\![C_1]\!]^\beta = 0$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass ψ äquivalent zu φ ist. Weil ψ beliebig gewählt war, folgt damit, dass es keine zu φ äquivalente Formel in 3-KNF gibt.