Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 6.1

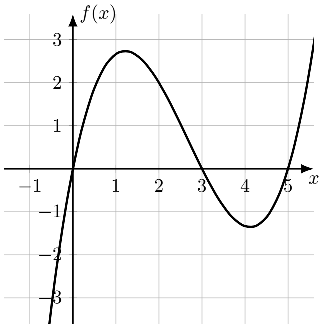
Nullstellensuche & Mehrdimensionale Analysis

29.01.2024 bis 02.02.2024

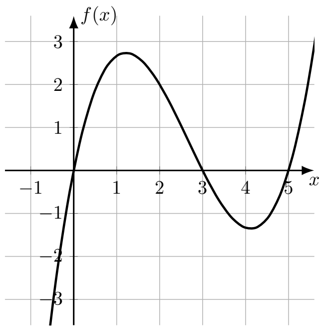
Aufgabe 1: Nullstellensuche

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + 5x$, welche in den unteren Abbildungen nochmal skizziert ist.

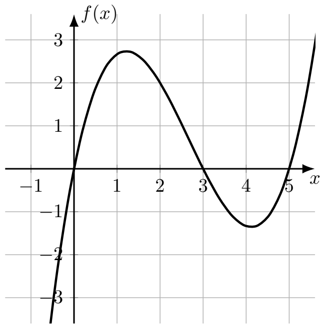
Bisektion



Regula falsi



Newton-Verfahren



Von dieser möchten wir eine Nullstelle mithilfe von Bisektion, Regula falsi und des Newton-Verfahrens finden.

1. Wie lautet der Iterationsschritt der drei oben genannten Verfahren zum Finden einer Nullstelle einer univariaten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Führen Sie einen Iterationsschritt mit jedem dieser Verfahren durch. Wählen Sie $x^- = 4$ und $x^+ = \frac{3}{2}$ für Bisektion und Regula falsi und $x_0 = \frac{3}{2}$ für das Newton-Verfahren. Visualisieren Sie den Iterationsschritt der Verfahren in den Abbildungen. Gegen welche Nullstelle konvergiert das jeweilige Verfahren?

2. Vergleichen Sie die drei zuvor angewandten Verfahren zur Nullstellensuche. Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus.

Verfahren	Bisektion	Regula falsi	Newton-Verfahren
Startbedingungen			
Zusätzliche Voraussetzungen			
Garantie auf Konvergenz			
Konvergenz-ordnung			

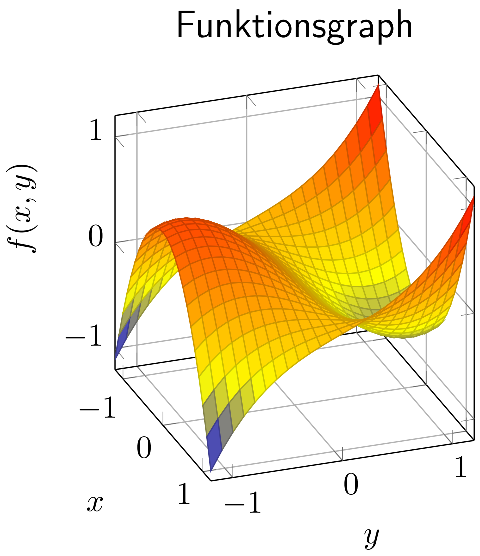
3. Diskutieren Sie sinnvolle Abbruchbedingungen für alle drei Verfahren. Erläutern Sie den Einfluss der Verwendung von Gleitkommazahlen auf die oben genannten Verfahren.

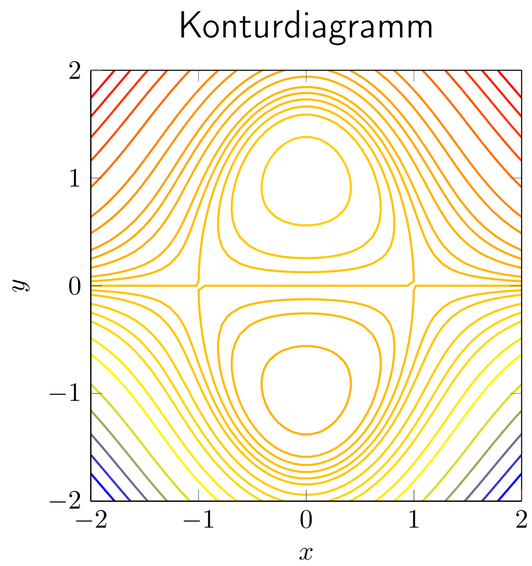
4. Das Newton-Verfahren kann, anders als die anderen beiden, exakt so verwendet werden, um komplexe Nullstellen zu finden. In diesem Kontext spricht man von Newton-Fraktalen. Worum handelt es sich bei diesen und was sagt ihre Struktur über das Newton-Verfahren aus?

5. Wie kann man Algorithmen zur Nullstellensuche zum Optimieren nutzen, d.h. um Minima bzw. Maxima zu finden? Wie sieht die entsprechende Iteration des Newton-Verfahrens aus?

Aufgabe 2: Mehrdimensionale Analysis

Im Folgenden möchten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - y + x^2y$ analytisch optimieren. Diese ist im Folgenden auf zwei Arten dargestellt: der Funktionsgraph als Fläche und ein Konturdiagramm, in welchem einige Niveaumengen von f dargestellt sind.





1. Was ist eine Niveaumenge?
2. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f. Welche geometrische Bedeutung hat die partielle Ableitung?
3. Was ist der Gradient ∇f einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und welche Eigenschaften hat er im Allgemeinen? Geben Sie den Gradienten von f explizit an.
4. Was ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und welche Eigenschaften hat sie? Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f.
5. Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f. Untersuchen Sie, ob es sich bei diesen um ein lokales Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.
6. Ist unter den gefundenen kritischen Punkten das globale Maximum bzw. Minimum dabei?