Gliederung

Primitive und partielle Rekursion

Quelle: commons.wikimedia.org/wiki/File:Barnsley_fern_mutated_-Leptosporangiate_fern.png

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \dots, x_k) = c$

ii) die Nachfolgerfunktion $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{succ}(n) = n + 1$

iii) die Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$

(b) **und** abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

i) **Komposition** von $g_1, \dots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = h \circ (g_1, \dots, g_m) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \dots, x_k) = h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k))$$

ii) **primitive Rekursion** mit $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(n + 1, x_1, \dots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k).$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$
$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$
$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Bemerkung: Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind total.

Theorem (ohne Beweis)

primitiv-rekursiv $\equiv$ LOOP-berechenbar

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi_2^3, \pi_1^1)$ d.h.

$$\mathrm{add}(0, x) = \pi_1^1(x) = x$$
$$\mathrm{add}(n+1, x) = (\mathrm{succ} \circ \pi_2^3)(n, \mathrm{add}(n, x), x)$$
$$= \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x))$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3), 0_1)$ d.h.

$$\mathrm{mul}(0, x) = 0_1(x) = 0$$
$$\mathrm{mul}(n+1, x) = (\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3))(n, \mathrm{mul}(n, x), x)$$
$$= \mathrm{add}(\mathrm{mul}(n, x), x)$$

Frage: Konstruieren Sie mittels primitiver Rekursion: (1) modifizierte Vorgängerfunktion $f(x) = \max\{x-1, 0\}$, (2) modifizierte Subtraktion $f(x, y) = max\{x - y, 0\}$, (3) Fakultätsfunktion $f(x) = x!$

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und

b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

   i) Komposition,

   ii) primitive Rekursion und

   iii) μ-**Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min \{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \land \forall_{0 \le i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \ne \bot\}$$

$\leadsto$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

Frage: Welche uns bekannte Funktion verbirgt sich hinter $\mu(1_2)$?

Theorem (ohne Beweis)

μ-rekursiv $\equiv$ Turing/WHILE/GOTO-berechenbar

Theorem (Kleene'sche Normalform, ohne Beweis)

Zu jeder μ-rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es 2 primitiv-rekursive Funktionen g und h sodass

$$f(x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k, \mu(h)(x_1, \ldots, x_k)).$$