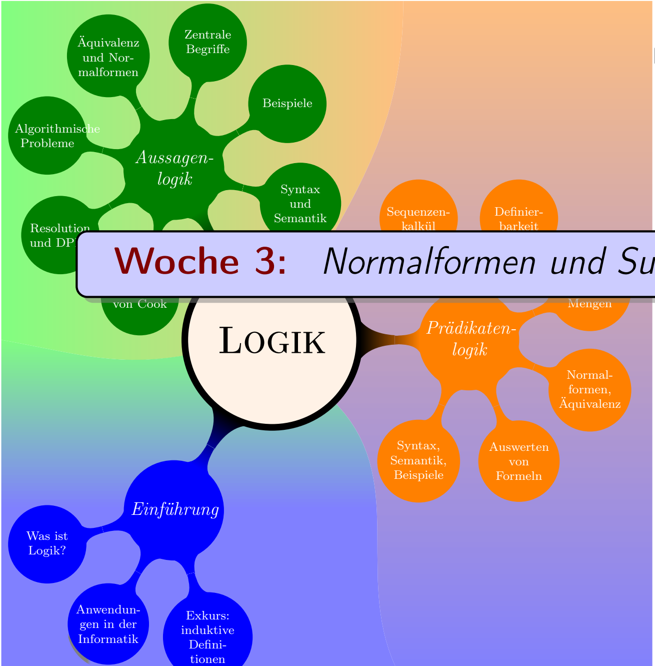
Logik im Wintersemester 2022/2023

Woche 3: *Normalformen und Substitution*



Nov.	17 18 19 20 21 22 23	*Einführung*
	24 25 26 27 28 29 30	*Aussagenlogik*
	31 1 2 3 4 5 6	*Normalformen*
	7 8 9 10 11 12 13	*Resolution*
Dez.	14 15 16 17 18 19 20	*Kompaktheit*
	21 22 23 24 25 26 27	*DPLL, Satz von Cook*
	[illegible] 2 3 4	*Strukturen und FO*
	5 6 7 8 9 10 11	*Prädikatenlogik*
	12 13 14 15 16 17 18	*Komplexität von FO*
Jan.	19 20 21 22 23 24 25	*Weihnachten*
	26 27 28 29 30 31 1	*Neujahr*
	2 3 4 5 6 7 8	*Normalformen*
	9 10 11 12 13 14 15	*Definierbarkeit*
	16 17 18 19 20 21 22	*EF-Spiele*
Feb.	23 24 25 26 27 28 29	*EF-Spiele*
	30 31 1 2 3 4 5	*Sequenzenkalkül AL*
	6 7 8 9 10 11 12	*Sequenzenkalkül FO*
	13 14 15 16 17 18 19	*Ausblick*

Wiederholung

Sudoku

Ziel. Konstruiere zu gegebenen Sudoku S eine Formel φ_S, so dass: erfüllenden Belegungen von φ_S entsprechen Lösungen des Sudokus

Herangehensweise.

Wir müssen uns als erstes überlegen, welche Variablen wir verwenden wollen und was die Variablen bedeuten sollen.

Variablen. Können nur wahr oder falsch werden.

Was soll es bedeuten, wenn eine Belegung β eine Variable X mit 1 belegt?

Idee 2. Für jede Position (i, j) und jede mögliche Beschriftung $c \in \{1, \dots, 9\}$ führen wir eine Variable $X^c_{i,j}$ ein.

$X^c_{i,j}$ wird wahr, wenn an der Stelle (i, j) die Zahl c steht.

				6	8	1		
1						7		
	4	3	2			5		
3						4		
8								9
		1						6
		6			4	8	5	
		2						7
	1		5	9				

Regeln.

Fülle Felder mit $1, \dots, 9$ s.d. jede Zahl genau einmal in

- jeder Zeile
- jeder Spalte
- jedem Block

vorkommt.

Sudoku

Ziel. Konstruiere zu gegebenen Sudoku S eine Formel φ_S, so dass: erfüllenden Belegungen von φ_S entsprechen Lösungen des Sudokus

Variablen. Für jede Position (i, j) und jede mögliche Beschriftung $c \in \{1, \dots, 9\}$ führen wir eine Variable $X^c_{i,j}$ ein.

$X^c_{i,j}$ wird wahr, wenn an der Stelle (i, j) die Zahl c steht.

Belegungen und Lösungen.

Aus Lösung L des Sudokus können wir Belegung β_L konstruieren:

$\beta_L(X^c_{i,j}) = 1$ gdw. L das Feld (i, j) mit c beschriftet.

Umgekehrt, wollen wir aus einer Belegung β eine Beschriftung L_β konstruieren:

L_β beschriftet Position (i, j) mit c gdw. $\beta(X^c_{i,j}) = 1$.

				6	8	1		
1						7		
	4	3	2			5		
3						4		
8								9
		1						6
		6			4	8	5	
		2						7
	1		5	9				

Regeln.
Fülle Felder mit $1, \dots, 9$ s.d. jede Zahl genau einmal in
- jeder Zeile
- jeder Spalte
- jedem Block

vorkommt.

Sudoku

Variablen. Für jede Position (i, j) und jede mögliche Beschriftung $c \in \{1, \dots, 9\}$ führen wir eine Variable $X^c_{i,j}$ ein.

$X^c_{i,j}$ wird wahr, wenn an der Stelle (i, j) die Zahl c steht.

Von Belegungen β zu Lösungen L_β.

L_β beschriftet die Position (i, j) mit der Zahl c gdw. $\beta(X^c_{i,j}) = 1$.

Dazu muss φ_S sicherstellen, dass es für alle (i, j) genau ein $c \in \{1, \dots, 9\}$ gibt, so dass $\beta_S(X^c_{i,j}) = 1$.

Sei

$$\varphi_{beschr} := \bigwedge_{1 \leq i,j \leq 9} \bigvee_{c=1}^{9} \Big(X^c_{i,j} \wedge \bigwedge_{\substack{d \neq c, \\ d \in \{1,\dots,9\}}} \neg X^d_{i,j} \Big)$$

Erfüllende Belegungen β von φ_{beschr} entsprechen genau Beschriftungen der Sudoku-Felder mit Zahlen aus $\{1, \dots, 9\}$.

				6	8	1		
1						7		
	4	3	2			5		
3						4		
8								9
		1						6
		6			4	8	5	
		2						7
	1		5	9				

Regeln.

Fülle Felder mit $1, \dots, 9$ s.d. jede Zahl genau einmal in

- jeder Zeile
- jeder Spalte
- jedem Block

vorkommt.

Sudoku

Variablen. Für jede Position (i, j) und jede mögliche Beschriftung $c \in \{1, \dots, 9\}$ führen wir eine Variable $X_{i,j}^c$ ein.

$X_{i,j}^c$ wird wahr, wenn an der Stelle (i, j) die Zahl c steht.

Belegungen und Beschriftungen. Die Formel φ_{beschr} garantiert uns, dass erfüllende Belegungen β genau möglichen Beschriftungen L_β der Sudoku-Felder entsprechen.

Aber: L_β muss keine gültige Lösung des gegebenen Sudokus sein!

Wir müssen noch folgendes sicherstellen:

- Die Beschriftung L_β entspricht den vorgegebenen Feldern.
- Die Beschriftung L_β erfüllt die Sudoku-Regeln.

				6	8	1		
1						7		
	4	3	2			5		
3						4		
8								9
		1						6
		6			4	8	5	
		2						7
	1		5	9				

Regeln.
Fülle Felder mit $1, \dots, 9$ s.d. jede Zahl genau einmal in
- jeder Zeile
- jeder Spalte
- jedem Block

vorkommt.

Formalisieren algorithmischer Probleme in Aussagenlogik

Teilmengen einer Menge. Sei M eine Menge mit n Elementen.

Teilmengen $N \subseteq M$ können wir wie folgt durch Belegungen kodieren:

- Wir führen für jedes Element $m \in M$ eine Variable X_m ein.
- Eine Belegung $\beta : \{X_m : m \in M\} \to \{0, 1\}$ entspricht dann genau der Teilmenge $M_\beta = \{m \in M : \beta(X_m) = 1\}$.

$M = \{1, 2, 3\}$

$\beta(X_1) = 1 = \beta(X_3) \neq \beta(X_2) = 0$

$M_\beta = \{1, 3\}$

Formalisieren algorithmischer Probleme in Aussagenlogik

Teilmengen einer Menge. Sei M eine Menge mit n Elementen.

Teilmengen $N \subseteq M$ können wir wie folgt durch Belegungen kodieren:

- Wir führen für jedes Element $m \in M$ eine Variable X_m ein.
- Eine Belegung $\beta : \{X_m : m \in M\} \to \{0, 1\}$ entspricht dann genau der Teilmenge $M_\beta = \{m \in M : \beta(X_m) = 1\}$.

Kodieren von Funktionen. Seien M und N endliche Mengen.

Funktionen $f : M \to N$ können wir wie folgt durch Belegungen β_f kodieren.

Variablen. $V := \{X_{m,n} : m \in M, n \in N\}$

Belegung. $\beta : V \to \{0, 1\}$ entspricht $f_\beta : M \to \mathcal{P}(N)$ mit $f_\beta(m) = \{n \in N : \beta(X_{m,n}) = 1\}$.

Bedingungen. Betrachte Formel $\varphi := \bigwedge\{\bigvee_{n\in N} \big(X_{m,n} \wedge \bigwedge_{n' \neq n} \neg X_{m,n'}\big) : m \in M\}$.

Wenn $\beta \models \varphi$, dann entspricht β einer Funktion $f_\beta : M \to N$.

Zusammenfassung

Reduktion auf SAT. SATISFIABILITY Erfüllbarkeit

- Bestimmte algorithmische Probleme lassen sich recht einfach in der Aussagenlogik formalisieren.
- Dies gilt z.B. für viele *Constraint Satisfaction Probleme* oder NP-vollständige Probleme aus der Graphentheorie.
- Wir erhalten damit ein sehr allgemeines und mächtiges Werkzeug um schwere algorithmische Probleme in der Praxis effizient zu lösen.

Formalisierungstricks.

- Welcher Teil des Problems soll den erfüllenden Belegungen entsprechen?
- Kodierungstricks helfen bei der konkreten Formalisierung.

3.1 Die zentralen Begriffe der Aussagenlogik

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

$\Rightarrow$

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Model. Eine zu φ passende Belegung β erfüllt φ, oder ist ein Modell von φ, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Wir schreiben $\beta \models \varphi$.

kontextabhängige Bedeutung

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Model. Eine zu φ passende Belegung β erfüllt φ, oder ist ein Modell von φ, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Wir schreiben $\beta \models \varphi$.

Erfüllbarkeit. φ ist erfüllbar, wenn es eine Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Model. Eine zu φ passende Belegung β erfüllt φ, oder ist ein Modell von φ, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Wir schreiben $\beta \models \varphi$.

Erfüllbarkeit. φ ist erfüllbar, wenn es eine Belegung β gibt, die φ erfüllt.

Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

Allgemeingültigkeit. φ ist allgemeingültig, oder eine Tautologie, wenn jede zu φ passende Belegung φ erfüllt.

Logische oder semantische Folgerung

Definition (semantische Folgerung).

1. Eine Formel ψ *folgt* aus einer Formel φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung β gilt:

   $$\text{Wenn } \beta \models \varphi, \text{ dann auch } \beta \models \psi.$$

2. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ eine Formelmenge und $\psi \in \mathsf{AL}$ eine Formel.

   ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Wir schreiben $\Phi \models \psi$.

Logische oder semantische Folgerung

Definition (semantische Folgerung).

1. Eine Formel ψ *folgt* aus einer Formel φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung β gilt:

   Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

2. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge und $\psi \in \mathrm{AL}$ eine Formel.

   ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Wir schreiben $\Phi \models \psi$.

Beispiele.

1. $\{(X \wedge Y)\} \models (X \vee Y)$?

   $\beta(X) = \beta(Y) = 1$

Logische oder semantische Folgerung

Definition (semantische Folgerung).

1. Eine Formel ψ *folgt* aus einer Formel φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung β gilt:

   Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

2. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge und $\psi \in \mathrm{AL}$ eine Formel.

   ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Wir schreiben $\Phi \models \psi$.

Beispiele.

1. $\{(X \wedge Y)\} \models (X \vee Y)$
2. $\{X, Y\} \models (X \vee Y)$?

Logische oder semantische Folgerung

Definition (semantische Folgerung).

1. Eine Formel ψ *folgt* aus einer Formel φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung β gilt:

   Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

2. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge und $\psi \in \mathrm{AL}$ eine Formel.

   ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Wir schreiben $\Phi \models \psi$.

Beispiele.

1. $\{(X \wedge Y)\} \models (X \vee Y)$
2. $\{X, Y\} \models (X \vee Y)$
3. $\{X\} \models (X \wedge Y)$? $\beta(X) = 1$ $\beta(Y) = 0$

Logische oder semantische Folgerung

Definition (semantische Folgerung).

1. Eine Formel ψ *folgt* aus einer Formel φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung β gilt:

   Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

2. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge und $\psi \in \mathrm{AL}$ eine Formel.

   ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Belegung β, die Φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Wir schreiben $\Phi \models \psi$.

Beispiele.

1. $\{(X \wedge Y)\} \models (X \vee Y)$
2. $\{X, Y\} \models (X \vee Y)$
3. $\{X\} \not\models (X \wedge Y)$

Ein Beispiel

Beispiel. Sei G ein Graph. Betrachten wir folgende Annahmen.

Annahmen.

1. Wenn ein Graph zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält, dann enthält er genau $n-1$ Kanten.
2. G enthält $> n-1$ Kanten.
3. G ist zusammenhängend.

Folgerung.

Daraus wollen wir folgern, dass G einen Kreis enthält.

Semantische Folgerung

Wie können wir solche logische Schlüsse formalisieren?

Gegeben eine Menge von Voraussetzungen:

1. „Wenn G zusammenhängend und
   G enthält keinen Kreis
   dann hat G genau $n-1$ Kanten“,
2. „G hat mehr als $n-1$ Kanten“,
3. „G ist zusammenhängend“

können wir daraus „G enthält einen Kreis“ schließen?

Semantische Folgerung

Wie können wir solche logische Schlüsse formalisieren?

Gegeben eine Menge von Voraussetzungen:

1. „Wenn G zusammenhängend und G enthält keinen Kreis dann hat G genau $n-1$ Kanten“,
2. „G hat mehr als $n-1$ Kanten“,
3. „G ist zusammenhängend“

können wir daraus „G enthält einen Kreis“ schließen?

Wenn A **und** $\neg B$

dann C**,**

$\neg C$**,**

A

Es folgt B

Semantische Folgerung

Wie können wir solche logische Schlüsse formalisieren?

Gegeben eine Menge von Voraussetzungen:

1. „Wenn G zusammenhängend und
   G enthält keinen Kreis
   dann hat G genau $n-1$ Kanten",
2. „G hat mehr als $n-1$ Kanten",
3. „G ist zusammenhängend"

können wir daraus „G enthält einen Kreis" schließen?

Wenn A **und** $\neg B$

dann C,

$\neg C$,

A

Es folgt B

Formalisierung. $\beta(B)=1$ $\beta(C)=0$ $\beta(A)=1$

$$\left\{ (A \wedge \neg B \rightarrow C), \quad \neg C, \quad A \right\} \quad \models \quad B?$$

Anwendungen in der Wissensrepräsentation

Auf ähnliche Art kann man Wissensrepräsentationssysteme oder Expertensysteme aufbauen.

Wissensbasis. $\mathit{temp}_{>39} \rightarrow \mathit{Fieber}$

$$\big(\mathit{Fieber} \wedge \big(\mathit{Nacken\ steif} \vee \mathit{Kopfschmerz}\big)\big) \rightarrow \mathit{Meng.\text{-}mögl.}$$

$\ldots$

Anwendungen in der Wissensrepräsentation

Auf ähnliche Art kann man Wissensrepräsentationssysteme oder Expertensysteme aufbauen.

Wissensbasis. $\mathit{temp}_{>39} \rightarrow \mathit{Fieber}$

$$\big(\mathit{Fieber} \wedge \big(\mathit{Nacken\ steif} \vee \mathit{Kopfschmerz}\big)\big) \rightarrow \mathit{Meng.\text{-}m\ddot{o}gl.}$$

$\dots$

Konkrete Situation.

Arzt fragt Symptome *Temperatur*, *Kopfschmerz* ... ab.

D.h. es wird eine partielle Variablenbelegung β erstellt.

Testen von Hypothesen.

Arzt kann Hypothesen testen.

Folgt $\neg$ *„Meng.-mögl.“* aus der Wissenbasis und β?

Hier werden sog. *Wissensrepräsentationslogiken* verwendet.

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Model. Eine zu φ passende Belegung β erfüllt φ, oder ist ein Modell von φ, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Wir schreiben $\beta \models \varphi$.

Erfüllbarkeit. φ ist erfüllbar, wenn es eine Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

Allgemeingültigkeit. φ ist allgemeingültig, oder eine Tautologie, wenn jede zu φ passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den einzelnen Begriffen

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und $\psi, \psi' \in \mathsf{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β erfüllt φ, ist Modell von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist erfüllbar, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

φ allgemeingültig wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und $\psi, \psi' \in \mathsf{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.
2. $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β **erfüllt** φ, ist **Modell** von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist **erfüllbar**, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ **unerfüllbar**.

φ **allgemeingültig** wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{AL}$ und $\psi, \psi' \in \text{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.
2. $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.
3. Φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \text{AL}$ gilt.

Was wenn Φ allgemeingültig ist? Dann folgen nur allgemeingültige Formeln aus Φ.

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β **erfüllt** φ, ist **Modell** von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist **erfüllbar**, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ **unerfüllbar**.

φ **allgemeingültig** wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\psi, \psi' \in \mathrm{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.
2. $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.
3. Φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt.
4. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Wenn $\Phi_0 \models \psi$, dann auch auch $\Phi \models \psi$.

B

Bel. die Φ_0 erfüllen

B'

Bel. die Φ erfüllen

$B' \subseteq B$

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β **erfüllt** φ, ist **Modell** von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist **erfüllbar**, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ **unerfüllbar**.

φ **allgemeingültig** wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und $\psi, \psi' \in \mathsf{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.
2. $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.
3. Φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt.
4. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Wenn $\Phi_0 \models \psi$, dann auch auch $\Phi \models \psi$.
5. $\varphi \equiv \psi$ genau dann, wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist.

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β erfüllt φ, ist Modell von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist erfüllbar, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

φ allgemeingültig wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Beziehungen zwischen den Begriffen

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und $\psi, \psi' \in \mathsf{AL}$.

1. $\psi \equiv \psi'$ genau dann, wenn $\psi \models \psi'$ und $\psi' \models \psi$.
2. $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.
3. Φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt.
4. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Wenn $\Phi_0 \models \psi$, dann auch auch $\Phi \models \psi$.
5. $\varphi \equiv \psi$ genau dann, wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist.
6. φ ist allgemeingültig $\iff \varphi \equiv \top$.

Zentrale Begriffe

Folgerung $\varphi \models \psi$: für alle β gilt:
Wenn $\beta \models \varphi$, dann $\beta \models \psi$.

Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: für alle β gilt:
$\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \psi$.

β **erfüllt** φ, ist **Modell** von φ,
kurz $\beta \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$.

φ ist **erfüllbar**, wenn es Belegung β gibt, die φ erfüllt.
Anderenfalls ist φ **unerfüllbar**.

φ **allgemeingültig** wenn jede passende Belegung φ erfüllt.

Definition der wichtigsten Begriffe der Logik

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ Formeln und $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ Formelmengen.

Folgerung. ψ *folgt* aus φ, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt: Wenn $\beta \models \varphi$, dann auch $\beta \models \psi$.

Äquivalenz. φ und ψ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle zu φ, ψ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ genau dann, wenn $\beta \models \psi$.

Model. Eine zu φ passende Belegung β erfüllt φ, oder ist ein Modell von φ, wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$. Wir schreiben $\beta \models \varphi$.

Erfüllbarkeit. φ ist erfüllbar, wenn es eine Belegung β gibt, die φ erfüllt.

Anderenfalls ist φ unerfüllbar.

Allgemeingültigkeit. φ ist allgemeingültig, oder eine Tautologie, wenn jede zu φ passende Belegung φ erfüllt.

3.2 Nützliche Äquivalenzen

Wiederholung: Äquivalenz

Definition. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ der Aussagenlogik sind *äquivalent*, wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen β gilt:

$$\beta \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta \models \psi.$$

Nützliche Äquivalenzen

Theorem. Für alle $\psi, \varphi, \vartheta \in \mathrm{AL}$:

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (Elimination doppelter Negation)
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ (Elimination der Implikation)
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (Elimination der Biimplikation)
4. $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$ (de Morgansche Regeln)
   $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$
5. $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$ (Distributivität)
   $\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$
6. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \quad \equiv \quad \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \quad \equiv \quad \psi$ (Absorbtionsgesetz)
7. $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$ (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)
   $\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$
8. $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$ (Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)
   $\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi.$$

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi.$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Dann gilt

$[\![\neg(\psi \wedge \varphi)]\!]^{\beta} = 1$ gdw.

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi.$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Dann gilt

$$[\![\neg(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 1 \quad \text{gdw.} \quad [\![(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 0$$

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \land \varphi) \equiv \neg\psi \lor \neg\varphi.$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Dann gilt

$$\begin{aligned} [\![\neg(\psi \land \varphi)]\!]^\beta = 1 \quad & \text{gdw.} \quad [\![(\psi \land \varphi)]\!]^\beta = 0 \\ & \text{gdw.} \quad \text{mindestens eins von } [\![\psi]\!]^\beta, [\![\varphi]\!]^\beta \text{ gleich } 0 \end{aligned}$$

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi.$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![\neg(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 1 \quad & \text{gdw.} \quad [\![(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 0 \\
& \text{gdw.} \quad \text{mindestens eins von } [\![\psi]\!]^\beta, [\![\varphi]\!]^\beta \text{ gleich } 0 \\
& \text{gdw.} \quad \text{mindestens eins von } [\![\neg\psi]\!]^\beta, [\![\neg\varphi]\!]^\beta \text{ gleich } 1.
\end{aligned}$$

Beweis der de Morganschen Regeln

Lemma (de Morgansche Regel). Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi.$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![\neg(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 1 \quad & \text{gdw.} \quad [\![(\psi \wedge \varphi)]\!]^\beta = 0 \\
& \text{gdw.} \quad \text{mindestens eins von } [\![\psi]\!]^\beta, [\![\varphi]\!]^\beta \text{ gleich } 0 \\
& \text{gdw.} \quad \text{mindestens eins von } [\![\neg\psi]\!]^\beta, [\![\neg\varphi]\!]^\beta \text{ gleich } 1. \\
& \text{gdw.} \quad [\![(\neg\psi \vee \neg\varphi)]\!]^\beta = 1.
\end{aligned}$$

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt
$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^{\beta} = 0$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 0$ und $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 0$ und $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Daraus folgt, dass $[\![\varphi]\!]^\beta = 0$ oder $[\![\vartheta]\!]^\beta = 0$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathrm{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 0$ und $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Daraus folgt, dass $[\![\varphi]\!]^\beta = 0$ oder $[\![\vartheta]\!]^\beta = 0$.

O.B.d.A. sei $[\![\varphi]\!]^\beta = 0$.

Dann gilt aber $[\![\psi \vee \varphi]\!]^\beta = 0$ und somit $[\![(\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt
$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$.

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Fall 2 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 1$ oder $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt
$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$.

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Fall 2 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 1$ oder $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Falls $[\![\psi]\!]^\beta = 1$ so folgt $[\![\psi \vee \varphi]\!]^\beta = 1$ und $[\![\psi \vee \vartheta]\!]^\beta = 1$

und somit $[\![(\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Beweis der Distributivität

Lemma (Distributivität). Für alle $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathsf{AL}$ gilt

$$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta).$$

Beweis. Sei β eine passende Belegung.

Fall 1 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 0$.

Fall 2 $[\![\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Es gilt also $[\![\psi]\!]^\beta = 1$ oder $[\![(\varphi \wedge \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Falls $[\![\psi]\!]^\beta = 1$ so folgt $[\![\psi \vee \varphi]\!]^\beta = 1$ und $[\![\psi \vee \vartheta]\!]^\beta = 1$

und somit $[\![(\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)]\!]^\beta = 1$.

Anderenfalls gilt $[\![\varphi]\!]^\beta = [\![\vartheta]\!]^\beta = 1$.
Dann aber gilt $[\![\psi \vee \varphi]\!]^\beta = [\![\psi \vee \vartheta]\!]^\beta = 1$ und somit

$[\![(\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)]\!]^\beta = 1$. □

Große Disjunktionen und Konjunktionen

Erinnerung. Die folgende Notation ist oft nützlich:

$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ als Abkürzung für $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$

$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ als Abkürzung für $(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n)$

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$$

$$\prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Beispiel. $\bigwedge_{i=1}^{999} X_i \rightarrow Y$

„Wenn alle 999 X_i wahr sind, so muss auch Y wahr sein.“

Rechtfertigung. Wegen der Assoziativitätsregeln

$$\begin{aligned} \psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) &\equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta \\ \psi \vee (\varphi \vee \vartheta) &\equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta \end{aligned}$$

ändert die Klammerung den Wahrheitswert nicht.

3.3 Substitution

Substitution

Erinnerung. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi \Leftrightarrow \beta \models \psi$.

Beispiel. Für alle $X, Y \in \mathsf{AVar}$:

$$X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$$

$$X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$$

Substitution

Erinnerung. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi \Leftrightarrow \beta \models \psi$.

Beispiel. Für alle $X, Y \in \mathrm{AVar}$:

$$\begin{aligned} X \rightarrow Y &\equiv \neg X \vee Y \\ X \leftrightarrow Y &\equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \end{aligned}$$

Beweis mittels Wahrheitstafeln.

$[\![X]\!]^\beta$	$[\![Y]\!]^\beta$	$[\![X \rightarrow Y]\!]^\beta$	$[\![\neg X \vee Y]\!]^\beta$	$[\![X \leftrightarrow Y]\!]^\beta$	$[\![(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)]\!]^\beta$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Substitution

Erinnerung. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi \Leftrightarrow \beta \models \psi$.

Beispiel. Für alle $X, Y \in \mathsf{AVar}$:

$$\begin{aligned} X \to Y &\equiv \neg X \vee Y \\ X \leftrightarrow Y &\equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X) \end{aligned}$$

Lemma (Substitutionslemma, intuitiv).

Wenn wir in einer Äquivalenz alle Vorkommen von Variablen $X_1, \ldots, X_n$ durch Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ersetzen, bleibt die Äquivalenz erhalten.

Substitution

Erinnerung. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi \Leftrightarrow \beta \models \psi$.

Beispiel. Für alle $X, Y \in \mathrm{AVar}$:

$$\begin{aligned} X \rightarrow Y &\equiv \neg X \vee Y \\ X \leftrightarrow Y &\equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \end{aligned}$$

Lemma (Substitutionslemma, intuitiv).

Wenn wir in einer Äquivalenz alle Vorkommen von Variablen $X_1, \ldots, X_n$ durch Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ersetzen, bleibt die Äquivalenz erhalten.

Korollar. Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \psi &\equiv \neg \varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Substitution

Definition. Eine Substitution ist eine partielle Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathsf{AVar} \to \mathsf{AL}$$

von Aussagenvariablen auf aussagenlogische Formeln mit endlichem Definitionsbereich,

d.h. $\mathcal{S}$ ist nur für endlich viele Variablen definiert.

Substitution

Definition. Eine Substitution ist eine partielle Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathsf{AVar} \to \mathsf{AL}$$

von Aussagenvariablen auf aussagenlogische Formeln mit endlichem Definitionsbereich,

d.h. $\mathcal{S}$ ist nur für endlich viele Variablen definiert.

Beispiel. Sei

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \to \mathsf{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und
$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathrm{AL}$ induktiv wie folgt:

$\mathcal{S}(\varphi)$

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathrm{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \to \mathrm{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und

$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathsf{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathsf{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \ * \ \psi\mathcal{S}).$$

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathsf{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und

$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathrm{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathrm{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \ * \ \psi\mathcal{S}).$$

Informell. $\varphi\mathcal{S}$ entsteht aus φ indem alle Variablen $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ durch $\mathcal{S}(X)$ ersetzt werden.

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathrm{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und

$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathrm{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathrm{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \; * \; \psi\mathcal{S}).$$

Informell. $\varphi\mathcal{S}$ entsteht aus φ indem alle Variablen $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ durch $\mathcal{S}(X)$ ersetzt werden.

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathrm{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und

$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Beispiel. Sei $\varphi := V_1 \wedge V_2 \rightarrow V_1 \vee V_3$.

Dann gilt

$\varphi\mathcal{S} =$

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathsf{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathsf{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \; * \; \psi\mathcal{S}).$$

Informell. $\varphi\mathcal{S}$ entsteht aus φ indem alle Variablen $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ durch $\mathcal{S}(X)$ ersetzt werden.

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathsf{AL}$$

definiert durch

$$\mathcal{S}(V_1) := V_2 \text{ und}$$
$$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1).$$

Beispiel. Sei $\varphi := V_1 \wedge V_2 \rightarrow V_1 \vee V_3$.

Dann gilt

$$\varphi\mathcal{S} = (V_1 \wedge V_2)\mathcal{S} \rightarrow (V_1 \vee V_3)\mathcal{S}$$

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathsf{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathsf{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \; * \; \psi\mathcal{S}).$$

Informell. $\varphi\mathcal{S}$ entsteht aus φ indem alle Variablen $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ durch $\mathcal{S}(X)$ ersetzt werden.

Beispiel.
$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathsf{AL}$$
definiert durch
$$\mathcal{S}(V_1) := V_2 \text{ und}$$
$$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1).$$

Beispiel. Sei $\varphi := V_1 \wedge V_2 \rightarrow V_1 \vee V_3$.

Dann gilt
$$\varphi\mathcal{S} = (V_1 \wedge V_2)\mathcal{S} \rightarrow (V_1 \vee V_3)\mathcal{S}$$
$$= V_1\mathcal{S} \wedge V_2\mathcal{S} \rightarrow V_1\mathcal{S} \vee V_3\mathcal{S}$$

Substitution

Definition. Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ und Substitution $\mathcal{S}$ definieren wir die Formel $\varphi\mathcal{S} \in \mathrm{AL}$ induktiv wie folgt:

Induktionsbasis.

- $\bot\mathcal{S} := \bot \qquad \top\mathcal{S} := \top$
- Wenn $X \in \mathrm{AVar}$, dann $X\mathcal{S} := \begin{cases} \mathcal{S}(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt.

- $(\neg\varphi)\mathcal{S} := \neg(\varphi\mathcal{S})$
- Für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ definieren wir

$$(\varphi * \psi)\mathcal{S} := (\varphi\mathcal{S} \; * \; \psi\mathcal{S}).$$

Informell. $\varphi\mathcal{S}$ entsteht aus φ indem alle Variablen $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ durch $\mathcal{S}(X)$ ersetzt werden.

Beispiel.

$$\mathcal{S} : \{V_1, V_2\} \rightarrow \mathrm{AL}$$

definiert durch

$\mathcal{S}(V_1) := V_2$ und

$\mathcal{S}(V_2) := (V_0 \vee V_1)$.

Beispiel. Sei $\varphi := V_1 \wedge V_2 \rightarrow V_1 \vee V_3$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi\mathcal{S} &= (V_1 \wedge V_2)\mathcal{S} \rightarrow (V_1 \vee V_3)\mathcal{S} \\ &= V_1\mathcal{S} \wedge V_2\mathcal{S} \rightarrow V_1\mathcal{S} \vee V_3\mathcal{S} \\ &= V_2 \wedge (V_0 \vee V_1) \rightarrow V_2 \vee V_3. \end{aligned}$$

Das Substitutionslemma (formal)

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.
Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.

Dann gilt $\quad \varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.

Dann gilt $\quad \varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$

Beweisansatz.

Voraussetzungen. Wir wissen bereits, dass $\varphi \equiv \varphi'$.

D.h. für alle (passenden) Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \varphi'$

Dieses Wissen müssen wir im Beweis irgendwie benutzen.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.

Dann gilt $\quad \varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$.

Beweisansatz.

Voraussetzungen. Wir wissen bereits, dass $\varphi \equiv \varphi'$.

D.h. für alle (passenden) Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi$ gdw. $\beta \models \varphi'$

Dieses Wissen müssen wir im Beweis irgendwie benutzen.

Zu zeigen. Wir müssen zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$. D.h.

für alle (passenden) Belegungen muss β gelten: $\beta \models \varphi\mathcal{S}$ gdw. $\beta \models \varphi'\mathcal{S}$

Da wir über φ, φ' nichts wissen, müssen wir also irgendwie Fragen wie

$\beta \models \varphi\mathcal{S}$ oder $\beta \models \varphi'\mathcal{S}$ auf $\beta' \models \varphi$ bzw. $\beta' \models \varphi'$ reduzieren,

möglicherweise für eine andere Belegung β'.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.

Dann gilt $\quad \varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Eine Belegung β ist passend für $\mathcal{S}$, wenn sie passend für alle Formeln $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ ist.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.

Dann gilt $\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$.

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Eine Belegung β ist passend für $\mathcal{S}$, wenn sie passend für alle Formeln $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ ist.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) & \text{wenn } X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und
$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist
$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und
$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln.
Dann gilt $\quad \varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$.

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Eine Belegung β ist passend für $\mathcal{S}$, wenn sie passend für alle Formeln $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \operatorname{def}(\mathcal{S})$ ist.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^\beta & \text{wenn } X \in \operatorname{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) & \text{wenn } X \in \operatorname{def}(\beta) \setminus \operatorname{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und
$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist
$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und
$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^\beta = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

β passend für $\mathcal{S}$, wenn β zu allen $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ passt.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} : & X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) : & X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und

$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis. Strukturelle Induktion über den Formelaufbau.

Induktionsbasis.

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

β passend für $\mathcal{S}$, wenn β zu allen $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ passt.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^\beta : & X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) : & X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und

$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^\beta = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

β passend für $\mathcal{S}$, wenn β zu allen $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \text{def}(\mathcal{S})$ passt.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} : & X \in \text{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) : & X \in \text{def}(\beta) \setminus \text{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis. Strukturelle Induktion über den Formelaufbau.

Induktionsbasis.

- Für $\varphi \in \{\top, \bot\}$ gilt $\varphi\mathcal{S} = \varphi$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und
$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi\mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis. Strukturelle Induktion über den Formelaufbau.

Induktionsbasis.

- Für $\varphi \in \{\top, \bot\}$ gilt $\varphi\mathcal{S} = \varphi$
- Für $\varphi := X$, wobei $X \in \mathrm{AVar} \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S})$, gilt:

$$\beta\mathcal{S}(X) = \beta(X) \text{ und } \varphi = \varphi\mathcal{S} \text{ und daher } [\![\varphi\mathcal{S}]\!]^{\beta} = [\![\varphi]\!]^{\beta\mathcal{S}}.$$

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

β passend für $\mathcal{S}$, wenn β zu allen $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$ passt.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta} : & X \in \mathrm{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) : & X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und

$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

β passend für $\mathcal{S}$, wenn β zu allen $\mathcal{S}(X)$ mit $X \in \text{def}(\mathcal{S})$ passt.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ durch

$$\beta\mathcal{S}(X) := \begin{cases} [\![\mathcal{S}(X)]\!]^\beta : & X \in \text{def}(\mathcal{S}) \\ \beta(X) : & X \in \text{def}(\beta) \setminus \text{def}(\mathcal{S}) \end{cases}$$

Lemma A. Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt: $\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis. Strukturelle Induktion über den Formelaufbau.

Induktionsbasis.

- Für $\varphi \in \{\top, \bot\}$ gilt $\varphi\mathcal{S} = \varphi$
- Für $\varphi := X$, wobei $X \in \text{AVar} \setminus \text{def}(\mathcal{S})$, gilt:

  $\beta\mathcal{S}(X) = \beta(X)$ und $\varphi = \varphi\mathcal{S}$ und daher $[\![\varphi\mathcal{S}]\!]^\beta = [\![\varphi]\!]^{\beta\mathcal{S}}$.
- Für $\varphi := X \in \text{def}(\mathcal{S})$ gilt: $\varphi\mathcal{S} = \mathcal{S}(X)$ und $\beta\mathcal{S}(X) = [\![\mathcal{S}(X)]\!]^\beta$.

  Somit, $\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

IV: Für zwei Formeln $\psi, \chi \in AL$ gilt die Aussage.

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und

$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^\beta = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ als

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta}$ wenn $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$

$\beta\mathcal{S}(X) := \beta(X)$ wenn $X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S})$

Induktionsschritt.

- **Negation.**

$$\begin{aligned} \beta \models (\neg\varphi)\mathcal{S} &\iff \beta \models \neg(\varphi\mathcal{S}) && \text{Def. der Substitution} \\ &\iff \beta \not\models \varphi\mathcal{S} \\ &\iff \beta\mathcal{S} \not\models \varphi && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &\iff \beta\mathcal{S} \models \neg\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und

$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist

$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ als

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta}$ wenn $X \in \mathrm{def}(\mathcal{S})$

$\beta\mathcal{S}(X) := \beta(X)$ wenn $X \in \mathrm{def}(\beta) \setminus \mathrm{def}(\mathcal{S})$

Induktionsschritt.

- Negation.

$$
\begin{aligned}
\beta \models (\neg\varphi)\mathcal{S} \quad &\iff \quad \beta \models \neg(\varphi\mathcal{S}) && \text{Def. der Substitution}\\
&\iff \quad \beta \not\models \varphi\mathcal{S}\\
&\iff \quad \beta\mathcal{S} \not\models \varphi && \text{Induktionsvoraussetzung}\\
&\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \neg\varphi.
\end{aligned}
$$

- Konjunktion.

$$
\begin{aligned}
\beta \models (\varphi \wedge \psi)\mathcal{S} \quad &\iff \quad \beta \models (\varphi\mathcal{S} \wedge \psi\mathcal{S}) && \text{Def. der Subst.}\\
&\iff \quad \beta \models \varphi\mathcal{S} \text{ und } \beta \models \psi\mathcal{S}\\
&\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi \text{ und } \beta\mathcal{S} \models \psi && \text{Ind. Vor.}\\
&\iff \quad \beta\mathcal{S} \models (\varphi \wedge \psi).
\end{aligned}
$$

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und
$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist
$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und
$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Notation. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution.

Ist β eine zu $\mathcal{S}$ passende Belegung, so definieren wir $\beta\mathcal{S}$ als

$\beta\mathcal{S}(X) := [\![\mathcal{S}(X)]\!]^{\beta}$ wenn $X \in \text{def}(\mathcal{S})$

$\beta\mathcal{S}(X) := \beta(X)$ wenn $X \in \text{def}(\beta) \setminus \text{def}(\mathcal{S})$

Induktionsschritt.

- Negation.

$$\begin{array}{rcll} \beta \models (\neg\varphi)\mathcal{S} & \iff & \beta \models \neg(\varphi\mathcal{S}) & \text{Def. der Substitution} \\ & \iff & \beta \not\models \varphi\mathcal{S} & \\ & \iff & \beta\mathcal{S} \not\models \varphi & \text{Induktionsvoraussetzung} \\ & \iff & \beta\mathcal{S} \models \neg\varphi. & \end{array}$$

- Konjunktion.

$$\begin{array}{rcll} \beta \models (\varphi \wedge \psi)\mathcal{S} & \iff & \beta \models (\varphi\mathcal{S} \wedge \psi\mathcal{S}) & \text{Def. der Subst.} \\ & \iff & \beta \models \varphi\mathcal{S} \text{ und } \beta \models \psi\mathcal{S} & \\ & \iff & \beta\mathcal{S} \models \varphi \text{ und } \beta\mathcal{S} \models \psi & \text{Ind. Vor.} \\ & \iff & \beta\mathcal{S} \models (\varphi \wedge \psi). & \end{array}$$

- Das Argument für $* \in \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ist analog.

Beispiel.
Sei $\mathcal{S} : X \mapsto (Y \vee \neg Z)$ und
$\beta : Y \mapsto 1 \quad Z \mapsto 1$.

Dann ist
$\beta\mathcal{S}(Y) := 1$ und
$\beta\mathcal{S}(X) := [\![Y \vee \neg Z]\!]^{\beta} = 1$.

Sei $\varphi := X \vee Y$.

Dann ist $\varphi\mathcal{S} := (Y \vee \neg Z) \vee Y$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und $\varphi, \varphi' \in$ AL Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis. Seien φ, φ' äquivalente Formeln.

Wir zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$, d.h. dass für alle passenden Belegungen β:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta \models \varphi'\mathcal{S}.$$

Lemma A.
Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:
$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis. Seien φ, φ' äquivalente Formeln.

Wir zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$, d.h. dass für alle passenden Belegungen β:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta \models \varphi'\mathcal{S}.$$

Sei β eine zu $\varphi\mathcal{S}$ und $\varphi'\mathcal{S}$ passende Belegung. Dann ist $\beta\mathcal{S}$ passend für φ.

Lemma A.
Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:
$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma A.
Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:
$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und $\varphi, \varphi' \in \mathrm{AL}$ Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis. Seien φ, φ' äquivalente Formeln.

Wir zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$, d.h. dass für alle passenden Belegungen β:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta \models \varphi'\mathcal{S}.$$

Sei β eine zu $\varphi\mathcal{S}$ und $\varphi'\mathcal{S}$ passende Belegung. Dann ist $\beta\mathcal{S}$ passend für φ.

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \quad \iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi \qquad \text{nach vorherigem Lemma}$$

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis. Seien φ, φ' äquivalente Formeln.

Wir zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$, d.h. dass für alle passenden Belegungen β:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta \models \varphi'\mathcal{S}.$$

Sei β eine zu $\varphi\mathcal{S}$ und $\varphi'\mathcal{S}$ passende Belegung. Dann ist $\beta\mathcal{S}$ passend für φ.

$$\begin{aligned} \beta \models \varphi\mathcal{S} \quad &\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi && \text{nach vorherigem Lemma} \\ &\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi' && \text{da } \varphi \equiv \varphi' \end{aligned}$$

Lemma A.
Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:
$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Beweis des Substitutionslemmas

Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und $\varphi, \varphi' \in$ AL Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Beweis. Seien φ, φ' äquivalente Formeln.

Wir zeigen, dass $\varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}$, d.h. dass für alle passenden Belegungen β:

$$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta \models \varphi'\mathcal{S}.$$

Sei β eine zu $\varphi\mathcal{S}$ und $\varphi'\mathcal{S}$ passende Belegung. Dann ist $\beta\mathcal{S}$ passend für φ.

$$\begin{aligned} \beta \models \varphi\mathcal{S} \quad &\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi && \text{nach vorherigem Lemma} \\ &\iff \quad \beta\mathcal{S} \models \varphi' && \text{da } \varphi \equiv \varphi' \\ &\iff \quad \beta \models \varphi'\mathcal{S} && \text{nach vorherigem Lemma} \end{aligned}$$

Das schließt den Beweis des Substitutionslemmas ab. □

Lemma A.
Für alle Formeln φ und alle zu φ und $\mathcal{S}$ passenden Belegungen β gilt:
$\beta \models \varphi\mathcal{S} \iff \beta\mathcal{S} \models \varphi$.

Notation

Notation.

1. Sei $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine Formel.

   Wenn $X_1, \dots, X_n$ Variablen in φ sind und $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathsf{AL}$, dann schreiben wir

   $$\varphi[X_1/\psi_1, \dots, X_n/\psi_n]$$

   für die Formel $\varphi\mathcal{S}$, wobei $\mathcal{S}$ die wie folgt definierte Substitution ist

   $$\mathrm{def}(\mathcal{S}) := \{X_1, \dots, X_n\} \text{ und } \mathcal{S}(X_i) := \psi_i.$$

Notation

Notation.

1. Sei $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine Formel.

   Wenn $X_1, \dots, X_n$ Variablen in φ sind und $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathsf{AL}$, dann schreiben wir
   $$\varphi[X_1/\psi_1, \dots, X_n/\psi_n]$$
   für die Formel $\varphi\mathcal{S}$, wobei $\mathcal{S}$ die wie folgt definierte Substitution ist
   $$\mathrm{def}(\mathcal{S}) := \{X_1, \dots, X_n\} \text{ und } \mathcal{S}(X_i) := \psi_i.$$

2. Wir schreiben $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathsf{AL}$ um anzudeuten, dass $\varphi \in \mathsf{AL}$ und $\mathrm{var}(\varphi) := \{X_1, \dots, X_n\}$.

   Wir legen damit die Reihenfolge $X_1, \dots, X_n$ fest und können dann $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ für $\varphi[X_1/\psi_1, \dots, X_n/\psi_n]$ schreiben.

Beispiel

Substitutionslemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \text{AL}$ Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Äquivalenzen. Wir wissen bereits, dass

$$X \to Y \equiv \neg X \vee Y \qquad \text{und} \qquad X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X)$$

Korollar. Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$:

$$\begin{aligned} \varphi \to \psi &\equiv \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \end{aligned}$$

Beispiel

Substitutionslemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Substitution und seien $\varphi, \varphi' \in \mathsf{AL}$ Formeln. Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi\mathcal{S} \equiv \varphi'\mathcal{S}.$$

Äquivalenzen. Wir wissen bereits, dass

$X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$ und $X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$

Korollar. Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$:

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \psi &\equiv \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Können wir daraus folgern, dass

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)?$$

Das Ersetzungslemma

Lemma. Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine Formel und ψ eine Unterformel von φ.

Sei φ' eine Formel, die man aus φ erhält, indem man ein Vorkommen der Unterformel ψ durch eine äquivalente Formel $\psi' \equiv \psi$ ersetzt.
Dann gilt $\varphi \equiv \varphi'$.

Das Ersetzungslemma

Lemma. Sei $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine Formel und ψ eine Unterformel von φ.

Sei φ' eine Formel, die man aus φ erhält, indem man ein Vorkommen der Unterformel ψ durch eine äquivalente Formel $\psi' \equiv \psi$ ersetzt.
Dann gilt $\varphi \equiv \varphi'$.

Korollar. Für alle Formeln φ, ψ:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \equiv \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \quad \equiv \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

3.4 Einschub: Boolesche Funktionen

Boolesche Funktionen

Definition. Eine (n-stellige) Boolesche Funktion, nach George Boole benannt, ist eine Funktion

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}.$$

Wir definieren $\mathbb{B}^n$ als Menge aller n-stelligen Booleschen Funktionen.

Boolesche Funktionen

Definition. Eine (n-stellige) Boolesche Funktion, nach George Boole benannt, ist eine Funktion

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Wir definieren $\mathbb{B}^n$ als Menge aller n-stelligen Booleschen Funktionen.

Proposition. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$ mit

$$\begin{aligned} f_\varphi &: \{0,1\}^n \to \{0,1\} \\ f_\varphi(v_1, \dots, v_n) &:= [\![\varphi]\!]^\beta \end{aligned}$$

wobei $\beta(X_i) := v_i$, für alle $1 \leq i \leq n$.

Boolesche Funktionen

Definition. Eine (n-stellige) Boolesche Funktion, nach George Boole benannt, ist eine Funktion

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Wir definieren $\mathbb{B}^n$ als Menge aller n-stelligen Booleschen Funktionen.

Beispiel.
$\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$	$f_\varphi(0,1,1) = 1$
$f_\varphi(1,1,0) = 1$	$f_\varphi(1,1,1) = 1$
$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$	sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Proposition. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$ mit

$$\begin{aligned} f_\varphi \quad &: \quad \{0,1\}^n \to \{0,1\} \\ f_\varphi(v_1, \dots, v_n) \quad &:= \quad [\![\varphi]\!]^\beta \end{aligned}$$

wobei $\beta(X_i) := v_i$, für alle $1 \le i \le n$.

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(0,1,1) = 1$

$f_\varphi(1,1,0) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(1,1,1) = 1$

$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$ sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beweis. Für jede Sequenz $\overline{v} := (v_1, \ldots, v_n) \in \{0,1\}^n$ definieren wir

$$\varphi_{\overline{v}} := \left(\bigwedge_{v_i=1} X_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{v_i=0} \neg X_i\right)$$

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(0,1,1) = 1$

$f_\varphi(1,1,0) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(1,1,1) = 1$

$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$ sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beweis. Für jede Sequenz $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ definieren wir

$$\varphi_{\overline{v}} := \left(\bigwedge_{v_i=1} X_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{v_i=0} \neg X_i \right)$$

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(0,1,1) = 1$

$f_\varphi(1,1,0) = 1$ $\quad$ $f_\varphi(1,1,1) = 1$

$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$ $\quad$ sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist

$$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beweis. Für jede Sequenz $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ definieren wir

$$\varphi_{\overline{v}} := \left(\bigwedge_{v_i=1} X_i \right) \ \wedge \ \left(\bigwedge_{v_i=0} \neg X_i \right)$$

Offensichtlich gilt für jede Belegung β, wenn $\beta \models \varphi_{\overline{v}}$ dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$\beta(X_i) = 1 \iff v_i = 1.$$

Beispiel. $\varphi :=$ $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$	$f_\varphi(0,1,1) = 1$
$f_\varphi(1,1,0) = 1$	$f_\varphi(1,1,1) = 1$
$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$	sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist

$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$.

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beweis. Für jede Sequenz $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ definieren wir

$$\varphi_{\overline{v}} := \left(\bigwedge_{v_i=1} X_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{v_i=0} \neg X_i\right)$$

Offensichtlich gilt für jede Belegung β, wenn $\beta \models \varphi_{\overline{v}}$ dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$\beta(X_i) = 1 \iff v_i = 1.$$

Wir definieren nun die Funktion f durch die Formel

$$\varphi_f(X_1, \dots, X_n) := \bigvee_{\substack{\overline{v} \in \{0,1\}^n \\ f(\overline{v})=1}} \varphi_{\overline{v}}.$$

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$	$f_\varphi(0,1,1) = 1$
$f_\varphi(1,1,0) = 1$	$f_\varphi(1,1,1) = 1$
$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$	sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist

$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$.

Boolesche Funktionen

Theorem. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

Beweis. Für jede Sequenz $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ definieren wir

$$\varphi_{\overline{v}} := \left(\bigwedge_{v_i=1} X_i \right) \ \wedge \ \left(\bigwedge_{v_i=0} \neg X_i \right)$$

Offensichtlich gilt für jede Belegung β, wenn $\beta \models \varphi_{\overline{v}}$ dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$\beta(X_i) = 1 \iff v_i = 1.$$

Wir definieren nun die Funktion f durch die Formel

$$\varphi_f(X_1, \dots, X_n) := \bigvee_{\substack{\overline{v} \in \{0,1\}^n \\ f(\overline{v})=1}} \varphi_{\overline{v}}.$$

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$$\begin{array}{ll} f_\varphi(1,0,1) = 1 & f_\varphi(0,1,1) = 1 \\ f_\varphi(1,1,0) = 1 & f_\varphi(1,1,1) = 1 \\ f_\varphi(v_1,v_2,v_3) = 0 & \text{sonst} \end{array}$$

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist

$$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

$$\begin{array}{lll} \varphi_f(X_1,X_2,X_3) := & & \\ & (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{0,1,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,0,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) & (=: \varphi_{1,1,0}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,1,1}) \end{array}$$

Boolesche Funktionen

Wir müssen nun zeigen, dass für alle $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n)$:

$$f(\overline{v}) = 1 \iff [\![\varphi_f]\!]^\beta = 1$$

wobei $\beta(X_i) := v_i$, für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$	$f_\varphi(0,1,1) = 1$
$f_\varphi(1,1,0) = 1$	$f_\varphi(1,1,1) = 1$
$f_\varphi(v_1, v_2, v_3) = 0$	sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0, 1, 1)$ ist

$$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

$$\begin{aligned}
\varphi_f(X_1, X_2, X_3) := \\
& (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) && (=: \varphi_{0,1,1}) \\
\vee \quad & (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) && (=: \varphi_{1,0,1}) \\
\vee \quad & (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) && (=: \varphi_{1,1,0}) \\
\vee \quad & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) && (=: \varphi_{1,1,1})
\end{aligned}$$

Boolesche Funktionen

Wir müssen nun zeigen, dass für alle $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n)$:

$$f(\overline{v}) = 1 \iff [\![\varphi_f]\!]^\beta$$

wobei $\beta(X_i) := v_i$, für alle $1 \leq i \leq n$.

1. Wenn $f(\overline{v}) = 1$, dann $\beta \models \varphi_{\overline{v}}$ und $\varphi_{\overline{v}}$ ist Teil der Disjunktion in φ_f. Also $\beta \models \varphi_f$.

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$f_\varphi(1,0,1) = 1$ $\quad f_\varphi(0,1,1) = 1$
$f_\varphi(1,1,0) = 1$ $\quad f_\varphi(1,1,1) = 1$
$f_\varphi(v_1,v_2,v_3) = 0$ sonst

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist
$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$.

$$\begin{array}{lll}\varphi_f(X_1,X_2,X_3) := & & \\ & (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{0,1,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,0,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) & (=: \varphi_{1,1,0}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,1,1})\end{array}$$

Boolesche Funktionen

Wir müssen nun zeigen, dass für alle $\overline{v} := (v_1, \dots, v_n)$:

$$f(\overline{v}) = 1 \iff [\![\varphi_f]\!]^\beta$$

wobei $\beta(X_i) := v_i$, für alle $1 \leq i \leq n$.

1. Wenn $f(\overline{v}) = 1$, dann $\beta \models \varphi_{\overline{v}}$ und $\varphi_{\overline{v}}$ ist Teil der Disjunktion in φ_f. Also $\beta \models \varphi_f$.
2. Umgekehrt, wenn $\beta \models \varphi_f$, dann muss es ein Disjunktionsglied $\varphi_{\overline{w}}$ geben, so dass $\beta \models \varphi_{\overline{w}}$.

   Nach Konstruktion von φ_f gilt $f(\overline{w}) = 1$.

   Aber $\beta \models \varphi_{\overline{w}}$ genau dann, wenn $w_i = \beta(X_i) = v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

   Also $f(\overline{v}) = 1$.

Das schließt den Beweis ab. $\square$

Beispiel. $\varphi := (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$

$$\begin{array}{ll} f_\varphi(1,0,1) = 1 & f_\varphi(0,1,1) = 1 \\ f_\varphi(1,1,0) = 1 & f_\varphi(1,1,1) = 1 \\ f_\varphi(v_1,v_2,v_3) = 0 & \text{sonst} \end{array}$$

$f_\varphi(\bar{v})$: Mehrheitsfunktion

Für $(v_1, v_2, v_3) = (0,1,1)$ ist

$$\varphi_{0,1,1} = (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

$$\begin{array}{lll} \varphi_f(X_1, X_2, X_3) := & & \\ & (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{0,1,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,0,1}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) & (=: \varphi_{1,1,0}) \\ \vee & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) & (=: \varphi_{1,1,1}) \end{array}$$

Formeln vs. Booleschen Funktionen

Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen aussagenlogischen Formeln und Booleschen Funktionen gezeigt:

1. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$.
2. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

D. h. eins-zu-eins Zusammenhang zwischen Formeln und Booleschen Funktionen.

Formeln vs. Booleschen Funktionen

Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen aussagenlogischen Formeln und Booleschen Funktionen gezeigt:

1. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$.
2. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

D. h. eins-zu-eins Zusammenhang zwischen Formeln und Booleschen Funktionen.

Korollar. Für alle $n \geq 0$ existieren genau 2^{2^n} paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln in den Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Formeln vs. Booleschen Funktionen

Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen aussagenlogischen Formeln und Booleschen Funktionen gezeigt:

1. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$.
2. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

D. h. eins-zu-eins Zusammenhang zwischen Formeln und Booleschen Funktionen.

Korollar. Für alle $n \geq 0$ existieren genau 2^{2^n} paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln in den Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Beweis. Es gibt 2^n verschiedene Belegungen der Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Formeln vs. Booleschen Funktionen

Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen aussagenlogischen Formeln und Booleschen Funktionen gezeigt:

1. Jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ definiert eine Boolesche Funktion $f_\varphi := f(\varphi)$.
2. Zu jeder Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, so dass $f(\varphi) = f$.

D. h. eins-zu-eins Zusammenhang zwischen Formeln und Booleschen Funktionen.

Korollar. Für alle $n \geq 0$ existieren genau 2^{2^n} paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln in den Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Beweis. Es gibt 2^n verschiedene Belegungen der Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Also existieren 2^{2^n} verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen und somit 2^{2^n} aussagenlogische Formeln in den Variablen $X_1, \dots, X_n$.