BeKo Modulkonferenz (Klausurvorbereitung) 13.02.24

zu zeigen: Für alle Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$:

A NP-vollständig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ coNP-vollständig

$\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$

Sei A NP-vollständig. Dann gilt ① $A \in NP$ und ② $\forall_{L \in NP}\ L \leq_m^p A$

I ① $\overset{VL}{\Leftrightarrow}$ $\overline{A} \in coNP$

II Sei $L \in coNP$. zu zeigen: $L \leq_m^p \overline{A}$.

* $L \in coNP \overset{VL}{\Rightarrow} \overline{L} \in NP \overset{②}{\Rightarrow} \overline{L} \leq_m^p A \overset{VL}{\Rightarrow} L \leq_m^p \overline{A}$ wzbw □

---

* A NP-vollständig $\Rightarrow$ $SAT \leq_m^p A$ $\qquad$ $\overline{A} \in coNP$ da $A \in NP$

$\Downarrow$ VL

$\overline{SAT} \leq_m^p \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ coNP-schwer, da $\overline{SAT}$ coNP-schwer.

A coNP-vollständig $\Rightarrow$ $\overline{A}$ NP-vollständig

$L \in NP \Rightarrow \overline{L} \in coNP \Rightarrow \overline{L} \leq_m^p A \overset{VL}{\Rightarrow} L \leq_m^p \overline{A}$

$L \leq_m^p \emptyset \iff \exists$ poly-zeit berechenbare Funktion f mit

$$\forall x \in \Sigma^* \quad \underline{x \in L} \iff \underline{f(x) \in \emptyset}$$

immer falsch $\Leftarrow$ immer falsch

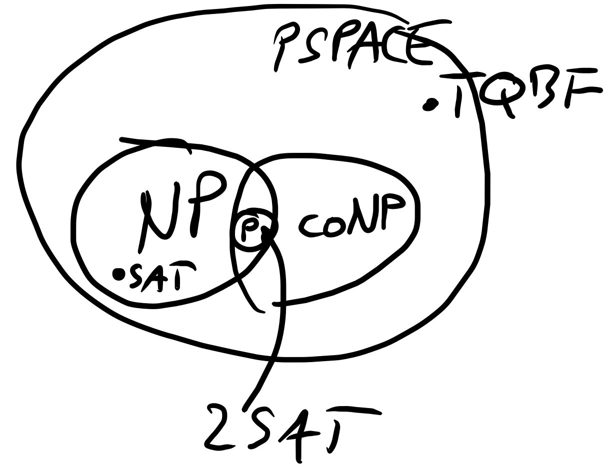
$\Downarrow$

$L = \emptyset$

1 ✓ PSPACE = coPSPACE (ähnlich zu $P = coP$)

$\forall L \subseteq \Sigma^*$ $\quad L \in PSPACE \Leftrightarrow L \in coPSPACE$

$(\Leftrightarrow \overline{L} \in PSPACE)$



$L \in PSPACE \Leftrightarrow L \le_m^p TQBF$

~~2~~ $\Leftrightarrow \exists$ poly-zeit berechenbares f mit

$x \in L \Leftrightarrow f(x) \in TQBF$

~~3~~ $\Leftrightarrow \exists$ poly-zeit ber. f mit

$x \notin L \Leftrightarrow f(x) \notin TQBF \Leftrightarrow \neg f(x) \in TQBF$

Beobachtung $\neg f(x)$ ist quantifizierte aussagenlogische Formel

4 $\Updownarrow$

$x \in \overline{L}$

~~5~~ $\Leftrightarrow \exists$ poly-zeit ber. g mit (nämlich $g(x) := \neg f(x)$)

$x \in \overline{L} \Leftrightarrow g(x) \in TQBF$

6 $\Leftrightarrow \overline{L} \in PSPACE$ $\square$

$L \in PSPACE \overset{VL}{\Leftrightarrow} \exists$ poly-platzbeschränkte DTM M mit $T(M) = L$

$\Leftrightarrow \exists$ poly-platzbeschränkte DTM M' mit $T(M') = \overline{T(M)} = \overline{L}$

denn M' lehnt ab falls M akzeptiert und akzeptiert falls M ablehnt oder mehr als $2^{O(n^c)}$ schritte macht für ein $c \in \mathbb{N}$, da es nicht mehr verschiedene Konfigurationen v. M gibt

$\overline{L} \in PSPACE \Leftrightarrow$

$SAT \leq_m^p TQBF$
f schreibt $\exists_{x_1} \exists_{x_2} \ldots$ vor φ

④ Sei $TQBF \leq_m^p SAT$

$NP \subseteq PSPACE$ folgt aus VL

noch zu zeigen $PSPACE \subseteq NP$

Sei $L \in PSPACE$. Dann $L \leq_m^p TQBF \overset{\text{vorraussetzung}}{\leq_m^p} SAT$.

Dann nach VL $L \in NP$. $\square$

---

nach $\overset{\text{Vorraussetzung}}{+\text{VL}}$ folgt $TQBF \in NP$.

Also gilt für alle $L \in PSPACE$: $L \leq_m^p TQBF$ also $L \in NP$ nach VL.

⑥ Sei $L \subseteq \Sigma^*$ $L \neq \Sigma^*, L \neq \emptyset$. Sei $y \in L, z \notin L$.

Sei $A \in NP$. Sei f eine Funktion die bei Eingabe x bestimmt ob $x \in A$ und ausgibt: y falls $x \in A$; z sonst

Also gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in L$

f ist offenbar polynomzeitberechenbar (da $P = NP$ und $A \in NP$) und total.

Also ist L NP-schwer. $\square$

$SAT \leq_m^p L$ via f: $f(\varphi) = \begin{cases} y & \text{falls } \varphi \in SAT \\ z & \text{sonst} \end{cases}$

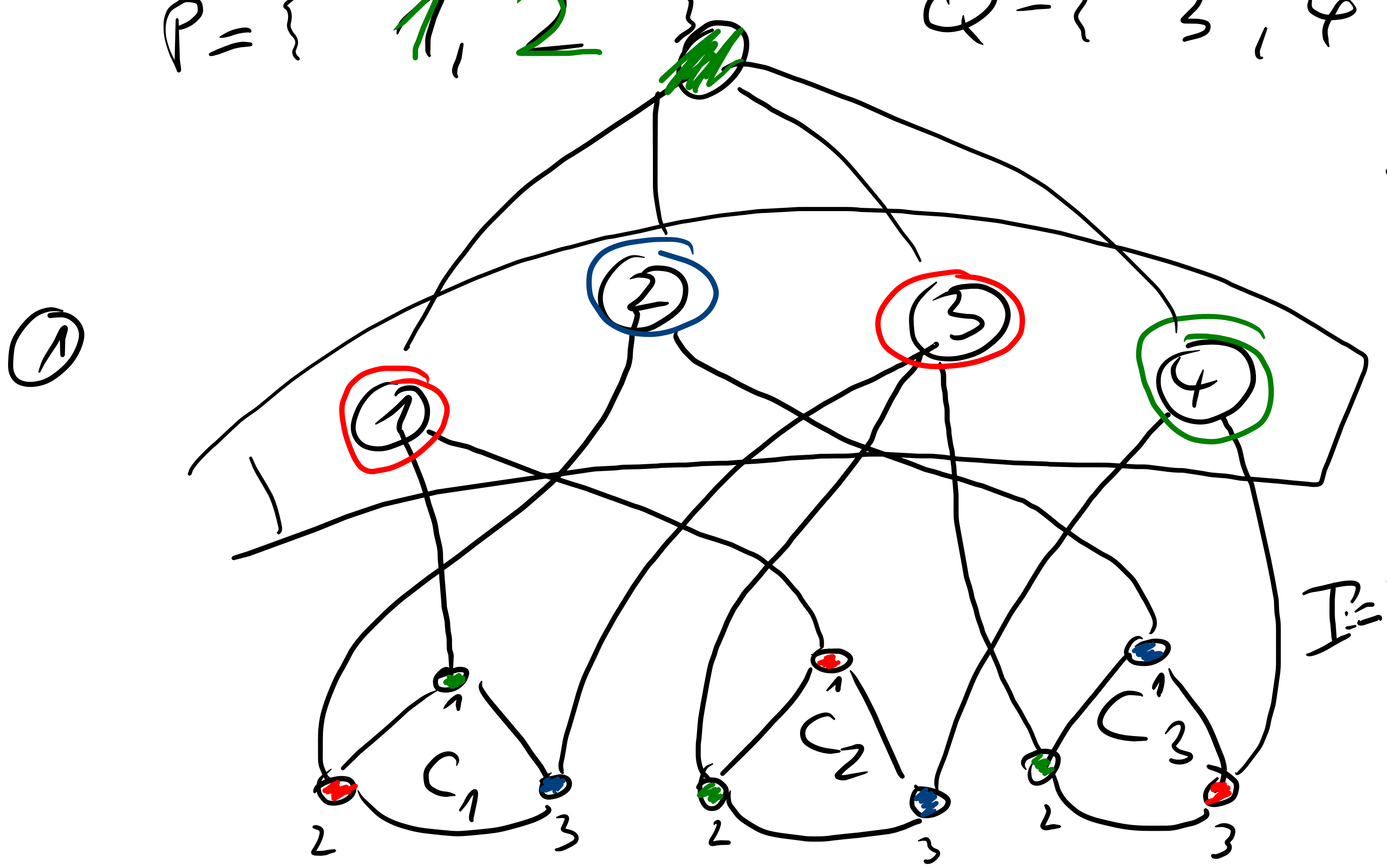
$\boxed{2}$ c) da $P = coP$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \Sigma^* = A$

Wichtig
$A \in P \not\Rightarrow A' \in P$ mit $A' \subseteq A$

$C_1 = \{1,2,3\}$ $C_2 = \{1,3,4\}$ $C_3 = \{2,3,4\}$ $n=4$

$P = \{1, 2\}$ $Q = \{3, 4\}$



f wie zuvor aber fügt Knoten z hinzu mit Kanten $\{z, i\}$ für alle $i \in [n]$

zz. f ist Reduktion

$I := \{C_j \mid 1 \leq j \leq m\} \in$ 3-SET SPLITTING

$\Rightarrow f(I) \in$ 3-COLORING

- wir färben alle $i \in [n]$ rot falls $i \in P$ und grün falls $i \in Q$
- wir färben z blau
- ~~für alle C_j^i färben wir mit derjenigen Farbe aus $\{$rot, grün$\}$~~
- Sei $j \leq m$. sei Farbe vom Nachbarn von C_1^1 verschieden der Farbe vom Nachbarn von C_1^2 (da $I \in$ 3-SET SPLITTING ist das der Fall) gib C_1^1, C_1^2 die Farbe in $\{$grün, rot$\}$ die der jeweilige Nachbar nicht hat. Gib C_1^3 die dritte Farbe. Das ist valide 3-Färbung da C_1^1 cf C_1^3 verschiedene Farben & verschieden v. den Nachbarfarben.