Aufgaben zur Vorlesung **WiSe 23/24**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Kunz/Peters **08.02.2024**

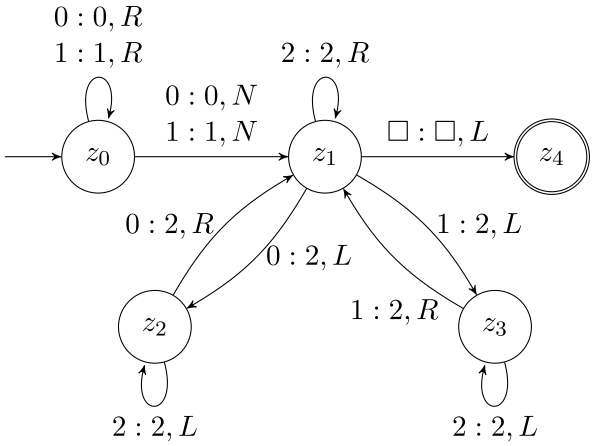
15. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 12.02.2024–18.02.2023)

Aufgabe 1. Analyse einer Turing-Maschine (schriftlicher Test WS20/21)
Betrachten Sie die folgende Turing-Maschine

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_4\}),$$

wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



(a) Wird das Wort 00110 von M akzeptiert?

(b) Zeigen Sie, dass es ein Eingabewort der Länge 3 gibt, das von M nicht akzeptiert wird.

(c) Geben Sie die von M akzeptierte Sprache $T(M)$ an (ohne Begründung).

(d) Ist die von M akzeptierte Sprache $T(M)$ in der Komplexitätsklasse P, das heißt, ist $T(M)$ von einer deterministischen Turing-Maschine in polynomieller Zeit entscheidbar?

——————Lösungsskizze——————

(a) Ja, vermöge folgender Konfigurationsfolge:

$$z_000110 \vdash 0z_00110 \vdash 00z_0110 \vdash 001z_010 \vdash 001z_110 \vdash 00z_3120 \vdash 002z_120 \vdash 0022z_10$$
$$\vdash 002z_222 \vdash 00z_2222 \vdash 0z_20222 \vdash 02z_1222 \vdash 022z_122 \vdash 0222z_12 \vdash 02222z_1\square \vdash 0222z_42.$$

(b) Die Maschine akzeptiert das Wort 010 nicht. Man beobachte: Der Endzustand kann nur erreicht werden, wenn das letzte Zeichen auf dem Band eine 2 ist. Eine 2 wird aber nur dann geschrieben, wenn z_2 oder z_3 besucht werden. Damit z_2 (z_3) aber besucht und verlassen werden kann, müssen initial zwei aufeinanderfolgende 0en (1en) auf dem Band stehen. Das Wort 010 erfüllt diese Eigenschaft nicht.

(c) $\{0,1\}^* \cdot w \cdot \mathrm{rev}(w)$ wobei $w \in \{0,1\}^+$ und $\mathrm{rev}(w)$ das Wort gespiegelt darstellt, ($\mathrm{rev}(011) = 110$).

(d) Ja. Für Eingabe w können wir z.B. mittels brute-force ausprobieren, in welchem Schritt wir den Übergang zu z_1 machen und dann die Maschine M ab Zustand z_1 mit dieser Kopfposition simulieren. Da M ohne z_0 deterministisch ist und höchstens $O(|w|^2)$ viele Schritte braucht und wir nur $O(|w|)$ Brute-Force-Versuche durchprobieren, brauchen wir insgesamt $\mathrm{poly}(|w|)$ Schritte.

Aufgabe 2. Polynomzeitreduktion (Schriftlicher Test WS 20/21)
Betrachten Sie die Probleme A und B, die wie folgt definiert sind:

Problem A
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Teilmenge $X \subseteq V_G$ mit $|X| = k$, sodass jede Kante in E_G einen Endpunkt in X hat?

Problem B
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $H = (V_H, E_H)$ und eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Menge $Y \subseteq E_H$ mit $|Y| = \ell$, sodass es für jede Kante $e \in E_H \setminus Y$ mindestens eine Kante $f \in Y$ mit $f \cap e \neq \emptyset$ gibt?

Betrachten Sie folgende Reduktion von Problem A auf Problem B:

1. Starte mit $V_H = \emptyset$ und $E_H = \emptyset$.
2. Für jeden Knoten $v \in V_G$ füge einen Knoten $v' \in V_H$ hinzu.
3. Füge $2k$ Knoten $v_1, \dots, v_k$ und $v'_1, \dots, v'_k$ zu V_H hinzu.
4. Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, füge die Kante $\{v_i, v'_i\}$ zu E_H hinzu.
5. Für jede Kante $\{v, w\} \in E_G$ füge die Kante $\{v', w'\}$ zu E_H hinzu.
6. Für jedes Paar von Kanten $\{v, w\} \in E_G$ und $\{x, y\} \in E_G$ mit $w = x$ und $v \neq y$ füge die Kante $\{v', y'\}$ zu E_H hinzu.
7. Für jeden Knoten $v \in V_G$ und jedes $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ füge die Kanten $\{v_i, v'\}$ zu E_H hinzu.
8. Setze $\ell := k$.

(a) Durch Weglassen eines der acht Schritte der Reduktion ergibt sich eine Polynomzeitreduktion von Problem A auf Problem B. Welcher der acht Schritte muss hierfür weggelassen werden? (Ohne Begründung)

(b) Zeigen Sie, dass nach Weglassen des in (a) genannten Schrittes die Reduktion eine Polynomzeitreduktion von Problem A auf Problem B ist. Zeigen Sie dafür, dass die Reduktion in polynomieller Zeit berechnet werden kann, total ist und korrekt ist.

——————Lösungsskizze——————

(a) Man lässt Schritt 6 weg.

(b) Sei $I = (G, k)$ eine Instanz von Problem A. Wir können annehmen, dass $k \leq |V|$. Somit ist die obige Konstruktion in polynomieller Zeit durchführbar. Sei $I' = (H, \ell)$ die von der Reduktion generierte Instanz von Problem B. Wir zeigen nun, dass I eine Ja-Instanz ist genau dann wenn I' eine Ja-Instanz ist.

Sei I eine Ja-Instanz, also existiert $X = \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V_G$, sodass jede Kante in E_G einen Endpunkt in X hat. Wir behaupten, dass $Y := \{\{v_i, u'_i\} \mid 1 \leq i \leq k\}$ eine Lösung für Instanz I' ist. Klar ist $|Y| = k = \ell$. Wenn Y keine Lösung wäre, dann gäbe es eine Kante $e \in E_H \setminus Y$, sodass für alle Kanten $f \in Y$ gilt, dass $f \cap e = \emptyset$. Klar gilt das für keine der Kanten inzident zu $v_1, v_2, \dots, v_k$. Sei $e = \{v', w'\} \in E_H$ also eine unabgedeckte Kante. Dann gilt also für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dass $\{\{v', v_i\}, \{w', v_i\}\} \not\subseteq Y$. Aber dann gilt in G, dass $\{v, w\} \in E_G$, aber $v, w \notin X$, ein Widerspruch zu der Wahl von X. Also ist Y eine Lösung für I'.

Sei nun I' eine Ja-Instanz, also existiere eine Teilmenge $Y \subseteq E_H$ mit $|Y| = \ell = k$, sodass es für jede Kante $e \in E_H \setminus Y$ mindestens eine Kante $f \in Y$ mit $f \cap e \neq \emptyset$ gibt. Wenn für ein $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ die Kante $\{v_i, v_i'\} \in Y$ ist, so ist $(Y \setminus \{v_i, v_i'\}) \cup \{v_i, v'\}$ für eine beliebige Kante $\{v_i, v'\} \in E_H$ mit $v' \neq v_i'$ auch eine Lösung für I', denn die neue Kante deckt sowohl die Kante $\{v_i, v_i'\}$ als auch jede zu v_i inzidente Kante ab. Wir können also annehmen, dass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt, dass $\{v_i, v_i'\} \notin Y$. Dann enthält Y also für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ eine Kante die inzident zu v_i ist, und keine weiteren Kanten. Wir wählen nun $X := \{v \mid \{v_i, v'\} \in Y\}$ als Lösung für I. Klar ist $|X| = k$. Wenn X keine Lösung wäre, so gäbe es eine Kante $\{v, w\} \in E_G$ mit $v, w \notin X$. Aber dann gäbe es für die Kante $\{v', w'\} \in E_H$ keine Kante $f \in Y$ mit $f \cap \{v', w'\} \neq \emptyset$, ein Widerspruch zu der Wahl von Y. Also ist X eine Lösung für I.

Aufgabe 3. „Lösungen“ einiger offener Probleme der Komplexitätstheorie

Wo liegen die Fehler in folgenden „Beweisen“?

(a) Wir zeigen, dass P $\neq$ NP. Angenommen, dass P $=$ NP. Diese Aussage führen wir zu einem Widerspruch, indem wir zeigen, dass das spezielle Halteproblem K in NP liegt und damit entscheidbar ist.

Bekanntlich ist ein Problem in NP, falls es durch einen „Guess-and-Check“-Algorithmus gelöst werden kann. Wenn eine Turing-Maschine M auf dem leeren Band hält, dann existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass M innerhalb von k Schritten hält. Wir können also eine Zahl k raten und dann M simulieren. Wenn M innerhalb von k Schritten hält, dann akzeptieren wir. Somit ist $K \in$ NP.

(b) Wir zeigen, dass P $=$ NP. Bekanntlich ist das Problem Clique NP-schwer. Wenn Clique in Polynomzeit gelöst werden kann, ist also P $=$ NP.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Folgender Algorithmus bestimmt, ob G eine Clique der Größe k enthält.

Zunächst iteriert der Algorithmus über alle k-elementigen Teilmengen $S \subseteq V$. Für jedes S bestimmt der Algorithmus, ob S eine Clique ist. Dazu muss er bloß für jedes Paar $u, v \in S$ mit $u \neq v$ prüfen, ob $\{u, v\} \in E$. Wenn S eine Clique ist, dann akzeptiert der Algorithmus. Wenn keine der überprüften Mengen eine Clique ist, dann lehnt er ab.

Korrektheit: Angenommen, (G, k) ist eine Ja-Instanz für Clique. Dann enthält G eine Clique S der Größe k. Da der Algorithums über alle Teilmengen von V der Größe k iteriert, überprüft er auch S. Dann stellt er fest, dass S eine Clique ist und akzeptiert.

Angenommen, der Algorithmus akzeptiert (G, k). Dann heißt das, dass der Algorithmus eine Menge S der Größe k gefunden hat, sodass S eine Clique ist. Folglich ist (G, k) eine Ja-Instanz für Clique.

Laufzeit: Sei $n := |V|$. Es gibt $\binom{n}{k}$ Teilmengen von V der Größe k. Zudem gilt $\binom{n}{k} \in \mathcal{O}(n^k)$. Um zu überprüfen, ob eine Menge der Größe k eine Clique ist, genügen k^2 Schritte. Also ist die Laufzeit dieses Algorithmus $\mathcal{O}(n^k \cdot k^2) \subseteq \mathcal{O}(n^k \cdot n^2) = \mathcal{O}(n^{k+2})$. Dies ist ein Polynom $(k + 2)$-ten Grades.

(c) Wir zeigen, dass P $\neq$ NP, indem wir zeigen, dass 3-SAT nicht in Polynomzeit entschieden werden kann. Für eine Formel F mit n Variablen gibt es 2^n verschiedene Belegungen, also mehr als polynomiell. Zu überprüfen, ob eine erfüllende Belegung existiert, erfordert daher mehr als polynomiell viele Schritte, da mit weniger Schritten nicht alle Belegungen überprüft werden können.

(d) Wir zeigen, dass NP $=$ PSPACE, indem wir zeigen, dass 3-SAT in PSPACE liegt. Da 3-SAT NP-schwer ist und PSPACE $\subseteq$ NP bereits bekannt ist, folgt daraus die

Aussage. Wir zeigen 3-SAT $\in$ PSPACE durch Angabe eines Algorithmus, der nur polynomiell viel Speicher benutzt. Der Algorithmus iteriert über alle Belegungen einer Formel mit n Variablen und überprüft, ob sie die Formel erfüllen. Um eine solche Belegung zu kodieren, genügen n Bits. Zu jedem Zeitpunkt stehen auf dem Band der Turing-Maschine nur die Formel F, sowie die aktuelle Belegung. Dann überprüft der Algorithmus, ob diese Belegung die Formel erfüllt. Um von einer Belegung zur nächsten zu iterieren, muss kein zusätzlicher Speicher verwendet werden.

——————Lösungsskizze——————

(a) Die Argumentation, dass $K \in$ NP ist, ist falsch (und verwendet auch gar nicht, die Annahme P=NP). Das Problem ist, dass k exponentiell groß in der Länge der Kodierung von M sein kann. Daher handelt es sich nicht um einen polynomiellen Guess-and-Check-Algorithmus.

(b) Da der Grad $k + 2$ des Polynoms von der Eingabe abhängt, ist dies keine polynomielle Laufzeit.

(c) Das ist kein Beweis. Es ist nicht klar, dass ein Algorithmus alle Belegungen überprüfen muss.

(d) Es stimmt nicht, dass PSPACE $\subseteq$ NP bereits bekannt ist.