Relative Definierbarkeit

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$

Wir schreiben $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Sprachen als Modellklassen. Sei $\mathfrak{W}$ die Klasse aller σ_Σ-Wortstrukturen.

Dann ist $L \subseteq \Sigma^+$ FO-definierbar gdw. es $\varphi \in \text{FO}[\sigma_\Sigma]$ gibt mit

$$\{\mathcal{W}_w : w \in \mathcal{L}\} \quad = \quad \text{Mod}_{\mathfrak{W}}(\varphi).$$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^+ : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^+ : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Vereinfachung. Ob $w \in \mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ hängt nur von den vorkommenden as ab.

Es reicht daher, Wörter über dem Alphabet $U := \{a\}$ zu betrachten, d.h.

$$\sigma_U\text{-Wortstrukturen } \mathcal{W} := (W, \leq^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}) \text{ mit } P_a^{\mathcal{W}} = W.$$

Da $P_a^{\mathcal{W}} = W$, können wir die Relation $P_a^{\mathcal{W}}$ ignorieren und nur die lineare Ordnung $(W, \leq^{\mathcal{W}})$ betrachten.

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^+ : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Vereinfachung. Ob $w \in \mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ hängt nur von den vorkommenden as ab.

Es reicht daher, Wörter über dem Alphabet $U := \{a\}$ zu betrachten, d.h.

$$\sigma_U\text{-Wortstrukturen } \mathcal{W} := (W, \leq^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}) \text{ mit } P_a^{\mathcal{W}} = W.$$

Da $P_a^{\mathcal{W}} = W$, können wir die Relation $P_a^{\mathcal{W}}$ ignorieren und nur die lineare Ordnung $(W, \leq^{\mathcal{W}})$ betrachten.

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$. Die Frage, ob $\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ FO-definierbar ist, reduziert sich auf die FO-Definierbarkeit der Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen.

Beispiele dieses Abschnitts

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}} \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Zusammenfassung

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.

2. $\mathcal{C}$ ist FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, oder *endlich axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\varphi)$ für einen einen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
   Äquivalent. $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine endlich Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

4. Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass
   $$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$
   Wir schreiben $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

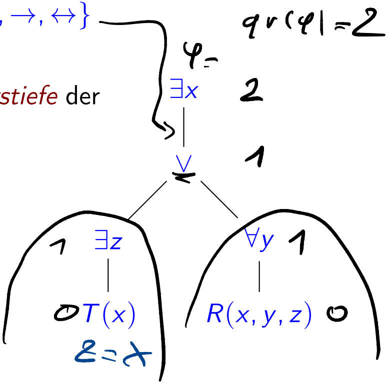
11.2 Der Quantorenrang von Formeln

Der Quantorenrang einer Formel

Definition. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathsf{FO}$ ist induktiv definiert durch:

- $\mathrm{qr}(\psi) := 0$ für quantorenfreie Formeln ψ
- $\mathrm{qr}(\neg\psi') := \mathrm{qr}(\psi')$
- $\mathrm{qr}((\varphi * \psi)) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{qr}(\exists x\varphi) = \mathrm{qr}(\forall x\varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$

Der Quantorenrang ist also die maximale *Schachtelungstiefe* der Quantoren in einer Formel.



Der Quantorenrang einer Formel

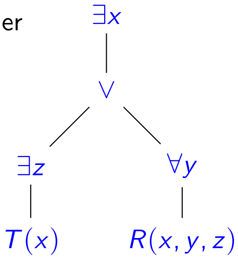
Definition. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathrm{FO}$ ist induktiv definiert durch:

- $\mathrm{qr}(\psi) := 0$ für quantorenfreie Formeln ψ
- $\mathrm{qr}(\neg\psi') := \mathrm{qr}(\psi')$
- $\mathrm{qr}((\varphi * \psi)) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{qr}(\exists x\varphi) = \mathrm{qr}(\forall x\varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$

Der Quantorenrang ist also die maximale *Schachtelungstiefe* der Quantoren in einer Formel.

Beispiel.

- $\mathrm{qr}\Big(\exists x\forall y(x = y \vee R(x,y,z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big(\exists x(\exists z T(x) \vee \forall y\, R(x,y,z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big((\forall z\neg E(x,z) \vee \forall z E(z,x))\Big) = 1$



Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Definition. Wir nennen eine Signatur σ *relational*, wenn σ nur Relationssymbole enthält.

(evtl. mögl. Konstanten)

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Definition. Wir nennen eine Signatur σ *relational*, wenn σ nur Relationssymbole enthält.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Folgerung. Für $m \geq 0$ (und $k = 0$) sei

$$\mathtt{Qr}_m := \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : qr(\varphi) \leq m\}$$

und

$$\equiv_m := \{(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \mathtt{Qr}_m \text{ und } \psi \equiv \varphi\}.$$

Dann ist $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathtt{Qr}_m$ mit endlichem Index.

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad \neg\varphi \in BK(\Phi)$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad \neg\varphi \in BK(\Phi) \quad$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi \quad$ für alle $\varphi \in \Phi$,

dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi \quad$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

Beispiel. Sei $\Phi := \{P(x), E(x,y), \exists z(E(x,z) \land E(z,y))\}$ und

$\psi(x,y) := \big(P(x) \land E(x,y)\big) \lor \big(\neg P(x) \land \exists z(E(x,z) \land E(z,y))\big)$.

Dann $\psi_{\mathsf{AL}} := \big(X_{P(x)} \land X_{E(x,y)}\big) \lor \big(\neg X_{P(x)} \land X_{\exists z(E(x,z) \land E(z,y))}\big)$

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_{\mathcal{I}}, \beta_{\mathcal{J}}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\begin{array}{l} \beta_{\mathcal{I}}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_{\mathcal{J}}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta \end{array} \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Beispiel. Sei $\Phi := \{P(x), E(x,y), \exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))\}$ und

$\psi(x,y) := \big(P(x) \wedge E(x,y)\big) \vee \big(\neg P(x) \wedge \exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))\big)$.

Dann $\psi_{\mathsf{AL}} := \big(X_{P(x)} \wedge X_{E(x,y)}\big) \vee \big(\neg X_{P(x)} \wedge X_{\exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))}\big)$

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_\mathcal{I}, \beta_\mathcal{J}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\begin{array}{l} \beta_\mathcal{I}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_\mathcal{J}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta \end{array} \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Nach Konstruktion gilt $(*)$:
$\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{I} \models \psi_{\text{AL}}$ und
$\mathcal{J} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{J} \models \psi_{\text{AL}}$.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_\mathcal{I}, \beta_\mathcal{J}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\begin{array}{l} \beta_\mathcal{I}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_\mathcal{J}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta \end{array} \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Nach Konstruktion gilt $(*)$:
$\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{I} \models \psi_{\mathsf{AL}}$ und
$\mathcal{J} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{J} \models \psi_{\mathsf{AL}}$.

Da $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, folgt $\beta_\mathcal{I} = \beta_\mathcal{J}$ und (wegen $(*)$):

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \beta_\mathcal{I} \models \psi_{\mathsf{AL}} \text{ gdw. } \beta_\mathcal{J} \models \psi_{\mathsf{AL}} \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \psi. \qquad \square$$

Erweiterung des Lemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Beweis. Wie zuvor definieren wir

$$\begin{array}{rcll} V & := & \{X_\varphi : \varphi \in \Phi\} & \\ \psi \in BK(\Phi) & \rightsquigarrow & \psi_{\mathsf{AL}} \in \mathsf{AL} & \text{ersetze Unterformeln } \theta \in \Phi \text{ durch } X_\theta \\ \sigma\text{-Interpretation } \mathcal{I} & \rightsquigarrow & \text{mit Belegung } \beta_{\mathcal{I}} & \beta_{\mathcal{I}}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta, \text{ für alle } \theta \in \Phi. \end{array}$$

Wie eben gilt für alle $\psi \in BK(\Phi)$ und σ-Interpretationen $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \beta_{\mathcal{I}} \models \psi_{\mathsf{AL}}.$$

Falls also $\psi_{\mathsf{AL}} \equiv \psi'_{\mathsf{AL}}$, dann auch $\psi \equiv \psi'$.

Wir wissen bereits, dass es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln über der Variablenmenge V gibt.

Also gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

$\square$

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Notation. Sei X eine Menge und $\overline{y}$ ein Tupel.

Wir schreiben $\overline{y} \subseteq X$ als Abkürzung für „$y_i \in X$ für alle i“.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Notation. Sei X eine Menge und $\overline{y}$ ein Tupel.

Wir schreiben $\overline{y} \subseteq X$ als Abkürzung für „$y_i \in X$ für alle i“.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Induktionsverankerung. Sei $m = 0$ (und k beliebig).

Da σ endlich und relational ist, existieren nur endlich viele verschiedene atomare Formeln $\psi(y_1, \dots, y_r)$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Beispiel. $\sigma := \{E, P\}$

$X = \{x_1, x_2\}$ $(k = 2)$

Atomare Formeln:

$E(x_1, x_2), E(x_1, x_1),$
$E(x_2, x_1), E(x_2, x_2),$
$P(x_1), P(x_2)$

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Induktionsverankerung. Sei $m = 0$ (und k beliebig).

Da σ endlich und relational ist, existieren nur endlich viele verschiedene atomare Formeln $\psi(y_1, \dots, y_r)$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Aus dem vorherigen Lemma folgt, dass es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente quantorenfreie Formeln $\psi(\overline{y})$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ gibt.

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ endlich. Es gibt nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1,\dots,x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y\psi$ oder $\forall y\psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y \psi$ oder $\forall y \psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

Beispiel. Sei $m = 2$.

$$\varphi := E(x_1, x_2) \vee \neg \exists x_1 \forall y P(x_1, y) \vee \exists z \big(\forall x_2 E(z, x_2) \vee \exists x_3 (P(x_3) \wedge E(z, x_2)) \big)$$

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y \psi$ oder $\forall y \psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

Konsequenz.

Da $\exists y \psi \equiv \exists x_{k+1} \psi[y/x_{k+1}]$ und $\forall y \psi \equiv \forall x_{k+1} \psi[y/x_{k+1}]$ für alle $y \notin X$, können wir O.B.d.A. annehmen, dass φ eine Bool. Komb. von Formeln

1. $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ und Formeln
2. $\exists z \psi$ oder $\forall z \psi$ mit $z \in \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ und $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}$.

Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_{m-1,k} \cup \{\exists z \psi, \forall z \psi : z \in \{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}\}$.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1,\dots,x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Konsequenz.

Da $\exists y\psi \equiv \exists x_{k+1}\psi[y/x_{k+1}]$ und $\forall y\psi \equiv \forall x_{k+1}\psi[y/x_{k+1}]$ für alle $y \notin X$, können wir O.B.d.A. annehmen, dass φ eine Bool. Komb. von Formeln

1. $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ und Formeln
2. $\exists z\psi$ oder $\forall z\psi$ mit $z \in \{x_1,\dots,x_k,x_{k+1}\}$ und $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}$.

Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_{m-1,k} \cup \{\exists z\psi, \forall z\psi : z \in \{x_1,\dots,x_{k+1}\}, \psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}\}$.

Nach IV sind $\mathcal{L}_{m-1,k}, \mathcal{L}_{m-1,k+1}$ und daher auch $\mathcal{L}'$ endlich.

Aus vorherigem Lemma folgt, dass $BK(\mathcal{L}')$ und somit $\mathcal{L}_{m,k}$ endlich ist. $\square$

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ endlich. Es gibt nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Zusammenfassung

Quantorenrang. Max. Schachtelungstiefe der Quantoren.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad \neg\varphi \in BK(\Phi)$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,

dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

11.3 Elementare Äquivalenz

Wiederholung: Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Signatur. $\sigma := \{E, s, t\}$ E 2-stelliges Rel.symb, s, t Konstantensymb.

$\cancel{\forall k \geq 1 \; \varphi_k \notin \mathrm{FO}[\sigma]}$

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

REACH $:= \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}$.

$\cancel{\exists k \in \mathbb{N} \; \varphi_k \notin \mathrm{FO}[\sigma]}$

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s, t)$
2. Ein Stopp : $\varphi_2 := \exists x_1 \big(E(s, x_1) \wedge E(x_1, t)\big)$
3. Zwei Stopps : $\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \big(E(s, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, t)\big)$

φ_k

Beobachtung. Für jede feste Zahl von Stopps existiert eine Formel.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\mathsf{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

In anderen Worten.

Es existiert kein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass für alle $\mathcal{A} \in \mathsf{REACH}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und für alle $\mathcal{B} \notin \mathsf{REACH}$ gilt: $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

für alle $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt es ein $\mathcal{A} \in \mathsf{REACH}$ mit $\mathcal{A} \not\models \varphi$ oder es existiert ein $\mathcal{B} \notin \mathsf{REACH}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi$.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

In anderen Worten.

Es existiert kein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass für alle $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und
für alle $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt es ein $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ mit $\mathcal{A} \not\models \varphi$ oder
es existiert ein $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi$.

Beweisversuch. Wir wollen zeigen, dass es für jeden Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, so dass

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (d.h. in $\mathcal{A}$ ex. ein Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ aber nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Beweisversuch. Zeige, dass es für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt, mit

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Problem. Wir müssen für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ neue Strukturen finden.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Beweisversuch. Zeige, dass es für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt, mit

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Problem. Wir müssen für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ neue Strukturen finden.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ:
$\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ:
$\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. ~~$\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$~~
3. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ:
$\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \mathrm{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \mathrm{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. ~~$\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$~~
3. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Problem. Solche Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kann es nicht geben.

Nach Voraussetzung enthält $\mathcal{A}$ einen $s^{\mathcal{A}} - t^{\mathcal{A}}$-Pfad

$$P = (s = v_0, v_1, \cdots, v_n = t).$$

Also $\mathcal{A} \models \psi_k := \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_n \big(x_0 = s \wedge x_n = t \wedge \bigwedge_{0 \leq i < n} E(x_i, x_{i+1})\big)$.

Aus $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{B} \models \psi_k$ und daher existiert auch in $\mathcal{B}$ ein $s^{\mathcal{B}} - t^{\mathcal{B}}$-Pfad.

m-Äquivalenz

Erinnerung. Der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathsf{FO}$ ist die maximale Schachtelungstiefe der Quantoren.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$.

Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind m-äquivalent, geschrieben $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Beobachtung. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

m-Äquivalenz

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *m-äquivalent*, $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$ für alle ψ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik. m-Äquivalenz eignet sich oft besser als elementare Äquivalenz zum Beweis der Nicht-Definierbarkeit bestimmter Aussagen.

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Beweisansatz. Es reicht, für alle $m \geq 0$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ zu finden, so dass

- $\mathcal{A}_m \in$ REACH aber $\mathcal{B}_m \notin$ REACH und
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

$\varphi \in$ FO

$qr(\varphi) = r$

Reach

$\mathcal{A}_r$

$\mathcal{B}_r$

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

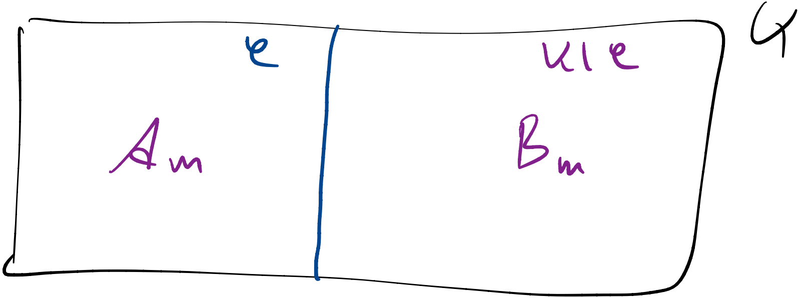
dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.



m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).
Ang., es gäbe $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Da aber $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$, gilt auch $\mathcal{B}_m \models \varphi$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \;=\; \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-*Äquivalenz und Definierbarkeit*

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

Vor

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \;=\; \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Beweis (durch Widerspruch).

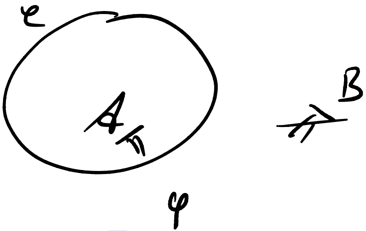
Ang., es gäbe $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Da aber $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$, gilt auch $\mathcal{B}_m \models \varphi$.

Widerspruch zu $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$. $\square$



m-Äquivalenz

Wir erweitern die elementare und m-Äquivalenz noch auf Strukturen mit ausgezeichneten Elementen und Formeln mit freien Variablen.

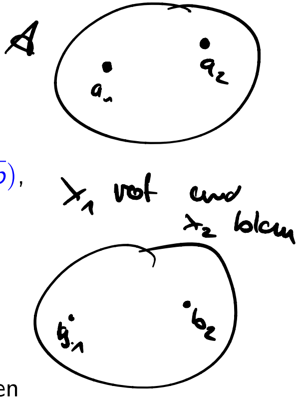
Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.

1. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind m-äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

2. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind elementar äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$



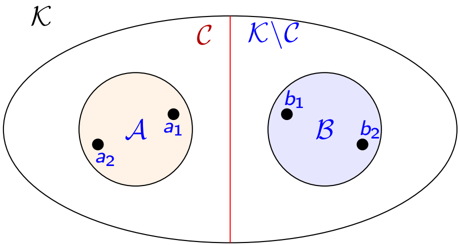
Wiederholung: m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 0$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.



Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
für alle $\psi(\overline{x})$ mit $\text{qr}(\psi) \leq m$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass
$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$
$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

11.4 Partielle Isomorphismen

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

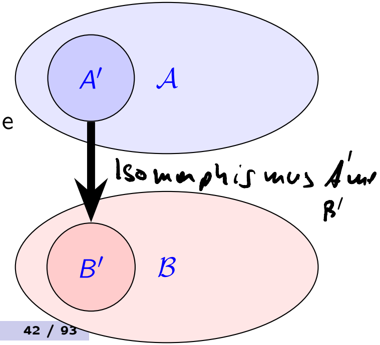
Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, ..., a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \qquad \text{gdw.} \qquad (h(a_1), ..., h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$



Partielle Isomorphismen

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
$h : A \to B$ bijektiv, so dass für alle $R \in \sigma$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

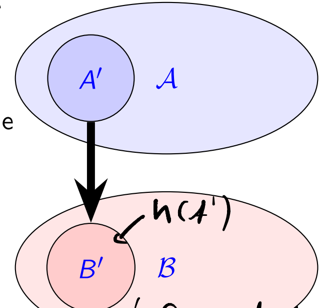
Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

$\mathcal{A}'$ $\mathcal{B}'$

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, \dots, a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$



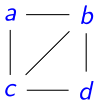
$B' = \{b \in B : b = h(a), a \in A'\}$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:

$\mathcal{A}$: 1 — 2 — 3 — 4

$\mathcal{B}$:

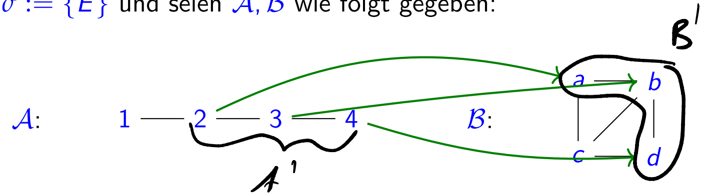


Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:



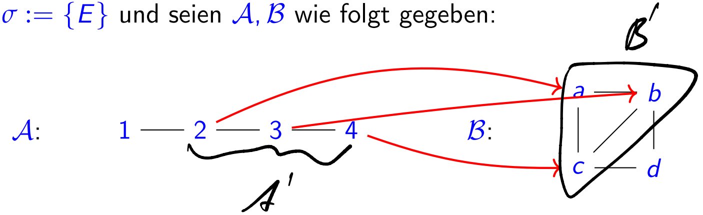
Die Abbildung $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto d$ ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:



Die Abbildung $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto d$ ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

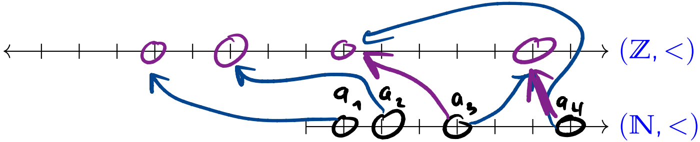
Die Abbildung definiert durch $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto c$ ist jedoch kein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{<\}$, $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{B}})$.



$\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$

$\mathcal{A}'$

$a_3 < a_4$
aber $h(a_3) \not< h(a_4)$

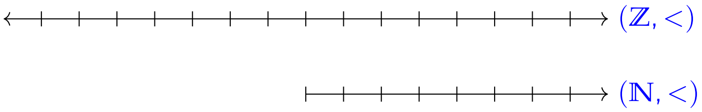
$a_1 < a_2$

$h(a_1) < h(a_2)$

Frage. Was sind die partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{<\}$, $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{B}})$.



Frage. Was sind die partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Antwort. Alle Abbildungen $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die ordnungserhaltend sind.

D.h. wenn π die Menge $A' \subseteq \mathbb{N}$ auf $B' \subseteq \mathbb{Z}$ abbildet und

$$A = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

dann gilt

$$\pi(a_1) < \pi(a_2) < \cdots < \pi(a_n).$$

0-Äquivalenz

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung

$$h : \begin{array}{ccc} \{a_1, \dots, a_k\} & \to & \{b_1, \dots, b_k\} \\ a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$

   ist ein partieller Isomorphismus.

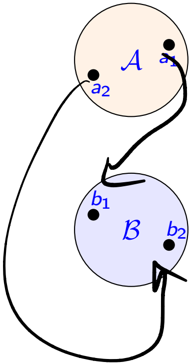
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$

3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$

4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$



0-Äquivalenz

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} h: & \{a_1, \dots, a_k\} & \to & \{b_1, \dots, b_k\} \\ & a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$

   ist ein partieller Isomorphismus.

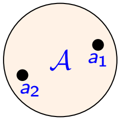
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

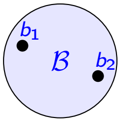
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$

3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

Def. $\equiv_0$ $\quad \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$

4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$





Beweis $(1) \Rightarrow (2)$

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis $(1) \Rightarrow (2)$

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) ⇒ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

a_{i_1} a_{i_j}

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$ Semantik von FO

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$	gdw.	$(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$	Semantik von FO
	gdw.	$(b_{i_1}, \dots, b_{i_j}) \in R^{\mathcal{B}}$	Definition partieller Isomorphismen

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$
mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$	gdw.	$(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$	Semantik von FO
	gdw.	$(b_{i_1}, \dots, b_{i_j}) \in R^{\mathcal{B}}$	Definition partieller Isomorphismen
	gdw.	$\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.	

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (2) $\Rightarrow$ (3)

Voraussetzung. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}].$$

Zu Zeigen. Die gleiche Aussage gilt für alle quantorenfreien Formeln.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma BK. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn

$\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ f.a. $\varphi \in \Phi$,

dann

$\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ f.a. $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis (2) ⇒ (3)

Voraussetzung. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}].$$

Zu Zeigen. Die gleiche Aussage gilt für alle quantorenfreien Formeln.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Lemma BK.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma BK. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \varphi \quad \text{f.a. } \varphi \in \Phi,$$

dann

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \psi \quad \text{f.a. } \psi \in BK(\Phi).$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \le i \le k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Dann gilt $\mathcal{A} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{a}]$.

$(x_i \neq x_j)[x_i / a_i, x_j / a_j]$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Dann gilt $\mathcal{A} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{a}]$.

Aus der Voraussetzung folgt daher $\mathcal{B} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{b}]$ und somit

$$b_i \neq b_j \quad \text{d.h.} \quad h(a_i) \neq h(a_j).$$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}}$

□

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{a}]$$

$\square$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$\begin{aligned}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad & \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})[\overline{a}] \\ & \text{gdw. } \mathcal{B} \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})[\overline{b}]\end{aligned}$$

□

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad & \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{a}] \\ & \text{gdw. } \mathcal{B} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{b}] \\ & \text{gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

$\square$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

0-Äquivalenz

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} h: & \{a_1, \dots, a_k\} & \to & \{b_1, \dots, b_k\} \\ & a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$

   ist ein partieller Isomorphismus.

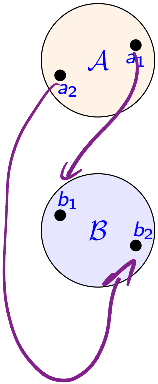
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$

3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$

4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$



Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

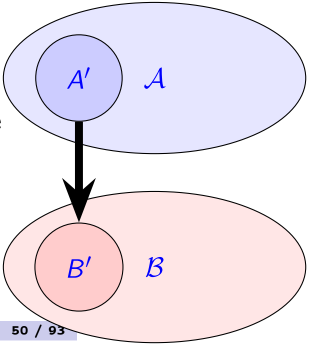
Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, ..., a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), ..., h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
$h : A \to B$ bijektiv, so dass für alle $R \in \sigma$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$



11.5 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Wiederholung: m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

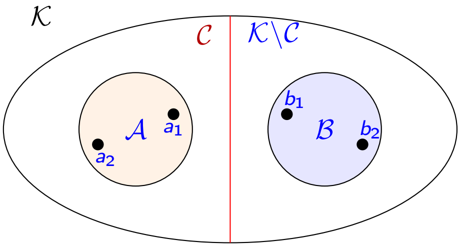
- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

für alle $\psi(\overline{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.



Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Partielle Isomorphismen

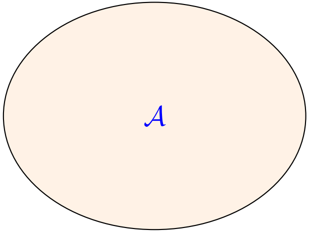
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot"

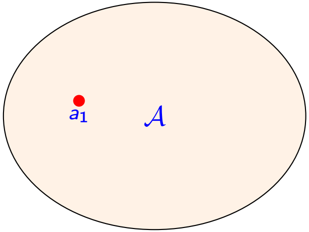
Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y) \big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

x / a_1

Partielle Isomorphismen

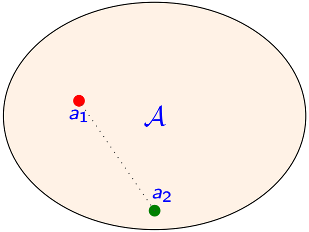
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y) \big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partielle Isomorphismen

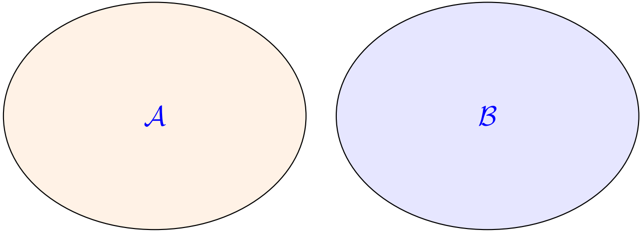
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.
$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$
$R(x)$: „x ist rot“

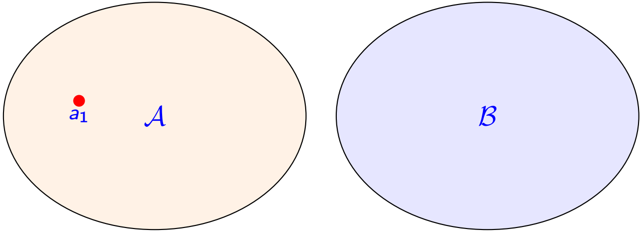
Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

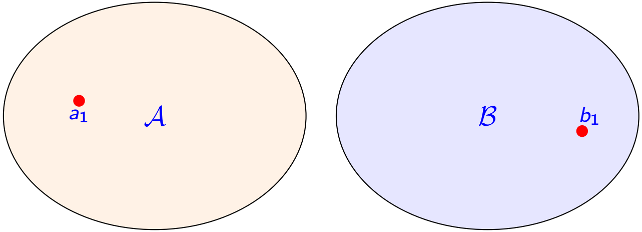
$R(x)$: „x ist rot“

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

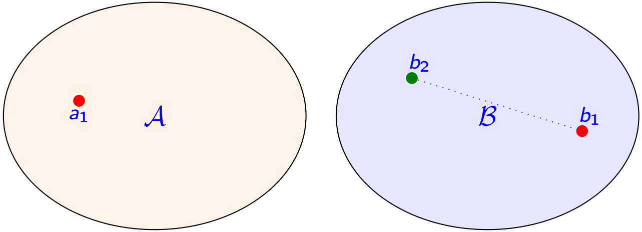
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.
$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y)\big)$$
$R(x)$: „x ist rot“

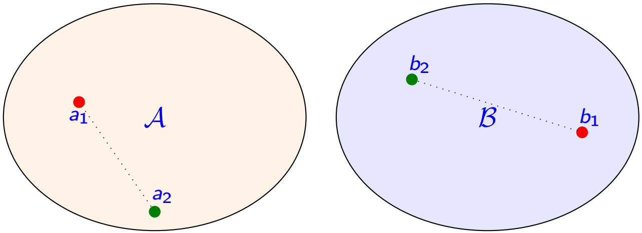
Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

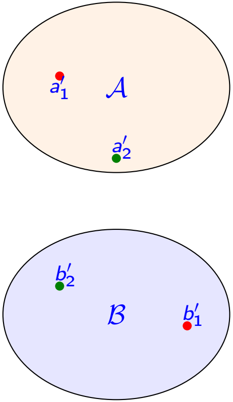
Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Seien σ eine relationale Signatur, $m, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$, $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.



Spieler und deren Ziele.

Das m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ wird von zwei Spielern, dem Herausforderer (H) und der Duplikatorin (D), gespielt.

Herausforderers Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$

Duplikatorins Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$

Notation.

Ist $k = 0$ so schreiben wir kurz $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

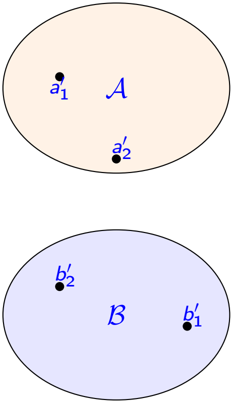
Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, ..., m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

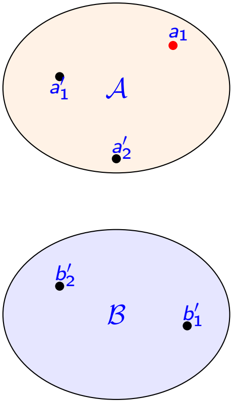
Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a_i' \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b_i' \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a_i' \in A$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

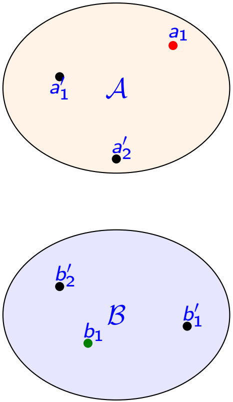
In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

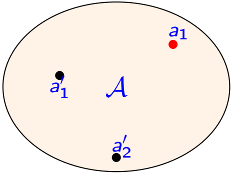
Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

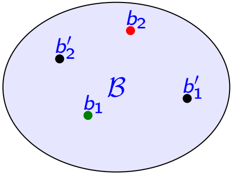
In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a_i' \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b_i' \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a_i' \in A$.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.





Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

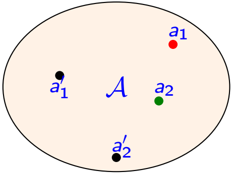
In Runde $i = 1, \dots, m$:

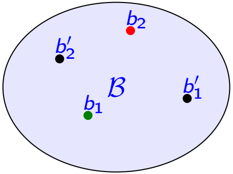
1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.





Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \ldots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a_i' \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b_i' \in B$.

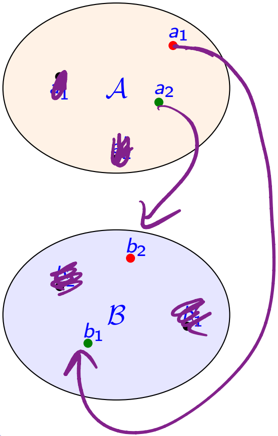
   Anderenfalls wählt sie $a_i' \in A$.

Gewinnbedingung. Nach Runde m wird der Gewinner ermittelt:

Die Duplikatorin hat gewonnen, wenn die Abbildung

$$h : a_1' \mapsto b_1', \ldots, a_k' \mapsto b_k', a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_m \mapsto b_m$$

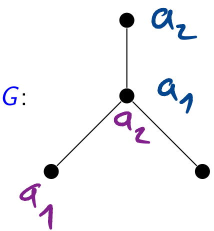
ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.



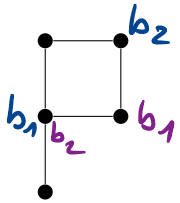
Beispiel

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen

G:



H:



! $a_1 \longmapsto b_1$!
$a_2 \longmapsto b_2$

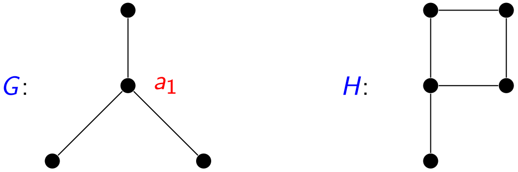
! $a_1 \longmapsto b_1$:
$a_2 \longmapsto b_2$

Kein part. Isom.

$\exists x \forall y \, (x = y \lor E(x, y))$

Beispiel

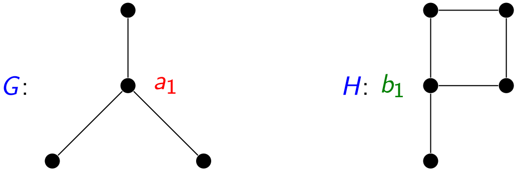
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

Beispiel

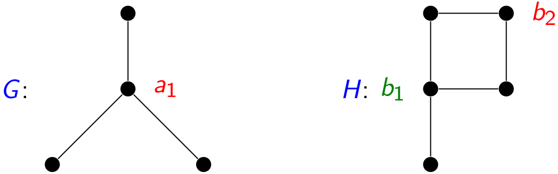
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

Beispiel

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen

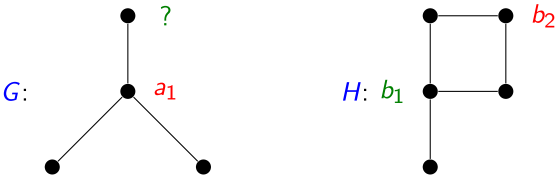


indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

In Runde 2 wählt der dann einen Knoten b_2 in H, der nicht zu Knoten b_1 benachbart ist.

Beispiel

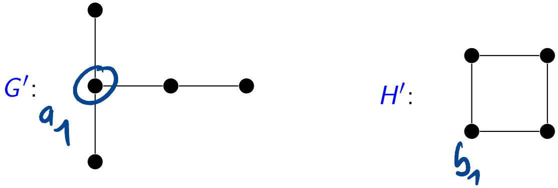
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

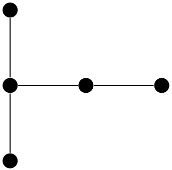
In Runde 2 wählt der dann einen Knoten b_2 in H, der nicht zu Knoten b_1 benachbart ist.

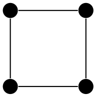
Beispiel



Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

Beispiel

G': 

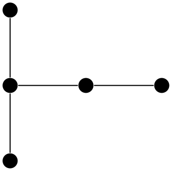
H': 

Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

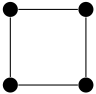
Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

Beispiel

G':



H':



Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_3(G', H')$, da es in G' drei Knoten gibt, die paarweise nicht benachbart sind.

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Lemma (determinierte Spiele). In jedem Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat genau eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie.

Was bedeutet eigentlich „gewinnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Lemma (determinierte Spiele). In jedem Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat genau eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie.

Das Spiel gewinnen. Hat eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie, dann sagen wir, dass sie das Spiel gewinnt.