Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 4.1

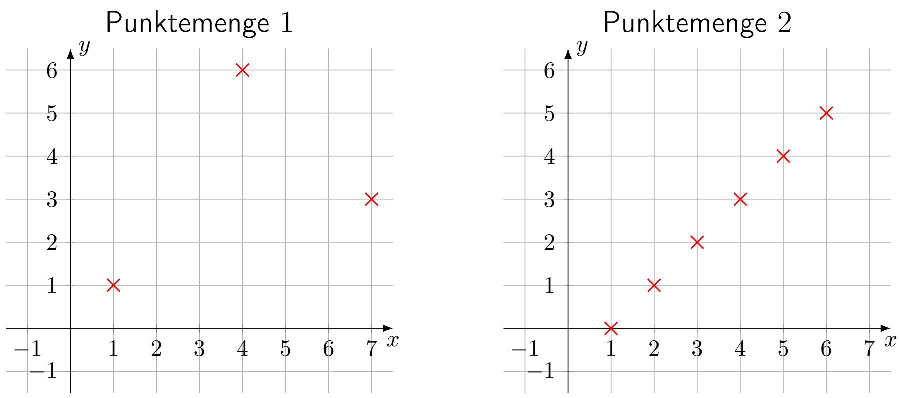
Themen: Globale Interpolation

Ugo & Gabriel

13. Dezember 2022

Aufgabe 1: Globale Interpolation

1. Gegeben seien die folgenden zwei Punktemengen $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$:



   Welche Menge an (Basis-)Funktionen genügt, um die Punkte mittels einer Regressionsfunktion zu *interpolieren*?

   a) $\{x\}$
   b) $\{1, x\}$
   c) $\{1, x, x^2\}$
   d) $\{1, x^3, x^5\}$
   e) $\{\exp(x), \exp(2x), \exp(3x)\}$
   f) $\{1, x^2, \exp(x)\}$
   g) $\{1, \cos^2(x), \sin^2(x)\}$
   h) $\{1, x, x^2\cos(x), \sin(x), \exp(x)\}$

2. Stellen Sie die folgenden Polynome (falls möglich) in der Monombasis dar, welche alle Polynome 3. Grades darstellen kann.

   a) $p_1(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 2$
   b) $p_2(x) = -x^2 + 1x + 7$
   c) $p_3(x) = 0$
   d) $p_4(x) = x^3$

e) $p_5(x) = 3x^4 + 3x - 2$

3. Konstruieren Sie die Vandermode-Matrix für die Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1. Aus welcher Basis entspringt diese Matrix?

4. Berechnen Sie das Polynom 2. Grades, welche alle Punkte aus der Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1 interpoliert.

5. Gegeben drei Punkte $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Geben Sie eine polynomielle Funktion $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (also $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, wobei f_1 und f_2 jeweils Polynome darstellen) an, welche die drei Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$ interpoliert. Dabei soll gelten, dass $\mathbf{f}(0) = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{f}(\frac{1}{3}) = \mathbf{p}_2$, $\mathbf{f}(\frac{2}{3}) = \mathbf{p}_3$ und wieder $\mathbf{f}(1) = \mathbf{p}_1$.

Aufgabe 2: Lagrange-Interpolation

1. Gegeben die Stützstellen aus Aufgabe 1.1 Punktmenge 1. Konstruieren Sie die Lagrange-Basispolynome.

2. Berechnen Sie mithilfe der Lagrange-Interpolation das Polynom 2. Grades, welche alle Punkte aus der Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1 interpoliert. Unterscheiden sich dieses Polynom von dem aus Aufgabe 1.4?

3. Stellen Sie die in Aufgabe 2.1. gefundene Lagrage-Basispolynome in der Monombasis dar.

4. Wie kann man mithilfe der Vandermonde-Matrix überprüfen, ob die gefundene Basis korrekt ist?

5. Gegeben die folgenden zwei Polynome 2. Grades: $p_1(x) = -x^2 + 3x - 2$ und $p_2(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
   a) Stellen Sie die Polynome in der Monombasis dar, welche alle Polynome 4. Grades darstellen kann.
   b) Stellen Sie die Polynome in der Lagrange-Basis dar, mit den Stützstellen $[0, 1, 2, 3, 4]$.
   c) Berechnen Sie das Produktpolynom $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$. Welche Basisrepräsentation eignet sich besser?
   d) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Monombasis zu der Lagrange-Basis durchführt.
   e) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Lagrange-Basis zu der Monombasis durchführt.

6. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige Stützstellen mit $x_1 < \ldots < x_n$. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Basispolynome ℓ_i, $i \in [1, n]$ eine Zerlegung der Eins bilden, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$