

## 14. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 06.02.2023–10.02.2023)

### Aufgabe 1. Subset Sum

Betrachten Sie das folgende Problem und den dazugehörigen Algorithmus.

SUBSET SUM

**Eingabe:** Eine Multi-Menge  $U := \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  von natürlichen Zahlen und eine Zahl  $B \in \mathbb{N}$ .

**Frage:** Existiert eine Teilmenge  $U' \subseteq U$ , die sich zu  $B$  aufsummiert?

---

#### Algorithm 1: Algorithmus für SUBSET SUM

---

**Input:** Eine Multi-Menge  $U := \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl  $B$ .

**Output:** **true** genau dann, wenn es eine Teilmenge  $U' \subseteq U$  mit  $\sum_{u \in U'} u = B$  gibt.

1  $\triangleright$  Sei  $T[i, j]$  eine Boolesche Tabelle mit  $0 \leq i \leq m$  und  $0 \leq j \leq B$ , die angibt, ob es in  $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$  eine Teilmenge gibt, die sich zu  $j$  aufsummiert. Initial sind alle Einträge **false**.

2 **foreach**  $0 \leq i \leq m$  **do**

3   |  $T[i, 0] \leftarrow \text{true}$

4 **end**

5 **foreach**  $1 \leq i \leq m$  (*aufsteigend*) **do**

6   | **foreach**  $1 \leq j \leq B$  (*aufsteigend*) **do**

7     | **if**  $j \geq u_i$  **then**

8       |  $T[i, j] \leftarrow T[i-1, j] \vee T[i-1, j-u_i]$

9     | **else**

10      |  $T[i, j] \leftarrow T[i-1, j]$

11      | **end**

12   | **end**

13 **end**

14 **return**  $T[m, B]$

---

1. Analysieren Sie die Laufzeit des Algorithmus.

2. Ist dadurch gezeigt, dass SUBSET SUM in P liegt?

*Hinweis:* Eine Multi-Menge ist eine Menge, in der Elemente mehrfach vorkommen können, d.h.  $\{1, 1\} \neq \{1\}$ .

### Aufgabe 2. NP, PSPACE, und deterministische Exponentialzeit

Diskutieren Sie, warum  $\text{NP} \subseteq \text{PSPACE} \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \text{DTIME}(2^{n^k})$  gilt.

### Aufgabe 3. Generalized Geography

In der Vorlesung wurde das generalisierte Geographiespiel eingeführt:

Eingabe: Ein gerichteter Graph  $G$  mit Startknoten  $v$ .

Spielregeln: Die Spielerinnen wählen abwechselnd einen “nächsten Knoten” unter den noch nicht gewählten Nachfolgern des aktuellen Knotens. Wer keinen Nachfolger mehr auswählen kann, verliert das Spiel.

Wir betrachten das dazugehörige Entscheidungsproblem.

#### **GENERALIZED GEOGRAPHY (GG)**

**Eingabe:** Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  und  $v \in V$ .

**Frage:** Hat Spielerin 1 eine Gewinnstrategie, die mit einem Nachbarn von  $v$  startet?

1. Zeigen Sie, dass entweder Spielerin 1 oder Spielerin 2 eine Gewinnstrategie hat.
2. Sei  $\phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \exists x_n F$  eine quantifizierte aussagenlogische Formel, wobei  $F$  in konjunktiver Normalform mit freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist.

Geben Sie eine polynomzeitberechenbare Instanz  $(G, v)$  an, sodass  $\phi$  genau dann wahr ist, wenn  $(G, v) \in \text{GG}$ .