Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 0

Themen: Lineare Transformationen, Basiswechsel

Ugo & Gabriel

25. Oktober 2022

Aufgabe 1: Lineare Transformationen

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit linearen Transformationen.

1. Was bedeutet es, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist?

   Lösung

   Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt, dass:

   $$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

   Lösung Ende

2. Lineare Funktionen kann man bekanntlich als Matrix darstellen. Welche der folgenden Abbildungen sind linear und wie sieht die Matrix dazu aus?
   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (2x + 3y, x - y + 2z, 3z - 2y)^\mathsf{T}$
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) = (2x^2 + 4y, 3y - z)^\mathsf{T}$
   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $h(x, y) = (2x - y, x + y, y - x)^\mathsf{T}$
   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $k(x, y) = (x + 3, y - 2)^\mathsf{T}$

   Lösung

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
   b) Nicht linear.
   c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
   d) Nicht linear.

   Lösung Ende

3. Welche der folgenden Arten von Transformationen sind im Allgemeinen linear?
   a) Streckungen
   b) Translationen
   c) Rotationen

Lösung

Streckungen, Rotationen

Lösung Ende

4. Die Verknüpfung mehrerer linearer Transformationen ist ebenfalls eine lineare Transformation. Dies kann man dadurch begründen, dass, falls die Dimensionen der zugehörigen Matrizen passen, das Produkt der Transformationsmatrizen ebenfalls eine Matrix ist. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ drei lineare Transformationen. Wie sieht die Transformationsmatrix aus, falls
   a) man zuerst $\mathbf{A}$, dann $\mathbf{B}$ und letztendlich $\mathbf{C}$ ausführen will?
   b) man zuerst $\mathbf{C}$, dann $\mathbf{A}$ und letztendlich $\mathbf{B}$ ausführen will?

Lösung

a) $\mathbf{CBA}$
b) $\mathbf{BAC}$

Lösung Ende

5. Wie kann man die Multiplikation von Matrix mit Vektor sowie Matrix mit Matrix veranschaulichen? Führen Sie hierzu folgende Rechnungen durch:
   a) $\mathbf{Av}$
   b) $\mathbf{AB}$

   mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösung

a) Linearkombination der Spaltenvektoren

$$\mathbf{Av} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt aus Zeilen der Matrix und Spaltenvektor:

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} \langle (1,2,-1),(3,1,2)\rangle \\ \langle (0,-1,1),(3,1,2)\rangle \\ \langle (3,1,-2),(3,1,2)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b) Das Produkt von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{B}$ entspricht dem Produkt von $\mathbf{A}$ mit jedem Spaltenvektor von $\mathbf{B}$ einzeln, d.h. die obigen Veranschaulichungen funktionieren auch.

Lösung Ende

6. Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Welche Laufzeit (ohne algorithmische Tricks) wird benötigt, um das Produkt $\mathbf{AB}$ zu berechnen?

Lösung

Die Laufzeit ist $\mathcal{O}(mnp)$.

Lösung Ende

7. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 100}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{100\times 4}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times 100}$ wollen wir das Produkt $\mathbf{ABC}$ berechnen. Welche der folgenden Reihenfolgen sollten wir zugunsten der Laufzeit präferieren?
   a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$
   b) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$
   c) Die Reihenfolge ist egal

   Lösung

   Die Reihenfolge $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ ist zu präferieren.

   Lösung Ende

8. Nun möchten wir uns angucken, was lineare Transformationen mit geometrischen Objekten machen. Wir betrachten nicht jeden Punkt einzeln, sondern eine Menge von Punkten auf einmal. Gegeben sind die folgenden Matrizen:
   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
   c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}$

   Wir schauen uns dies exemplarisch für zwei geometrische Objekte an: Den uns wohlbekannten Einheitskreis sowie ein Quadrat, welches dem Einheitskreis bezüglich der ∞-Norm entspricht.

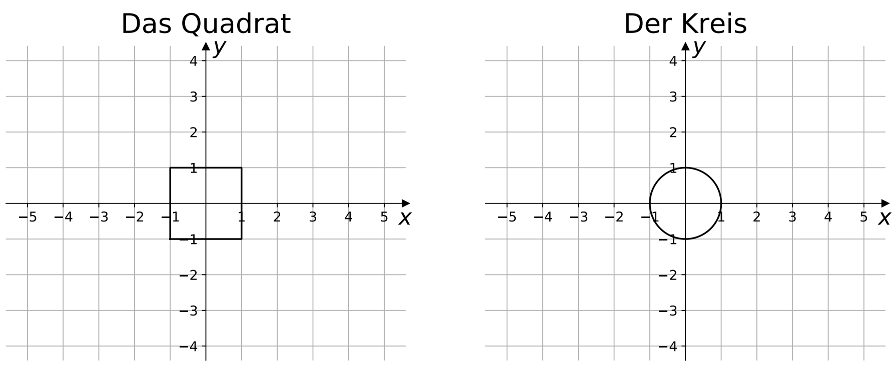

Abbildung 1: Die geometrischen Objekte

a) Welche Transformation des Quadrats gehört zu welcher Matrix?

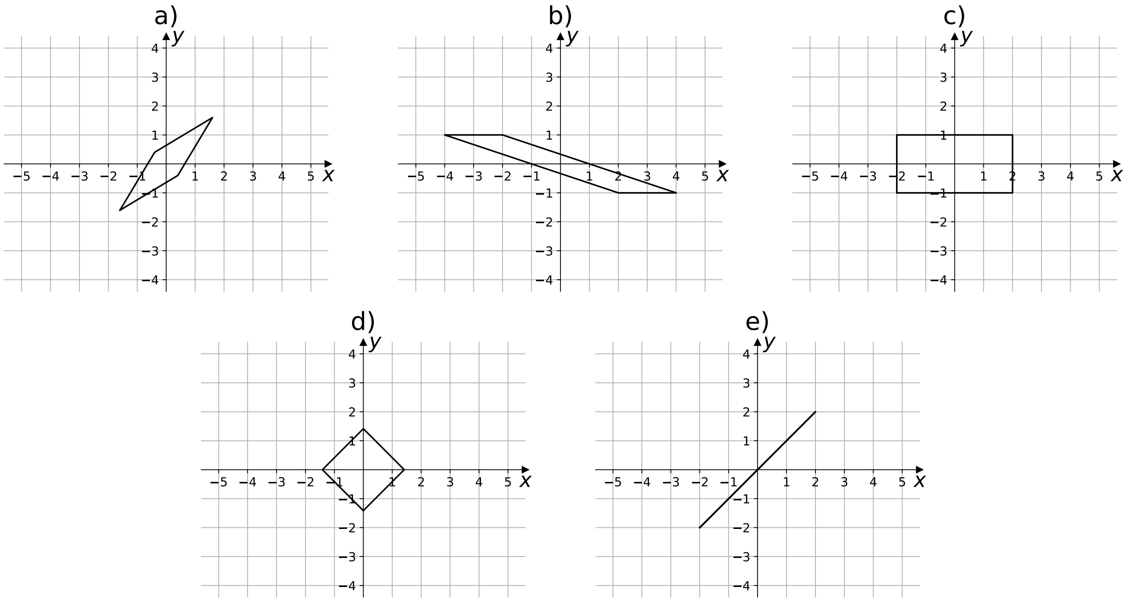

Abbildung 2: Transformationen des Quadrats

Lösung

a) **E**
b) **A**
c) **D**
d) **B**
e) **C**

Lösung Ende

b) Welche Transformation des Einheitskreises bzgl. der 2-Norm gehört zu welcher Matrix?

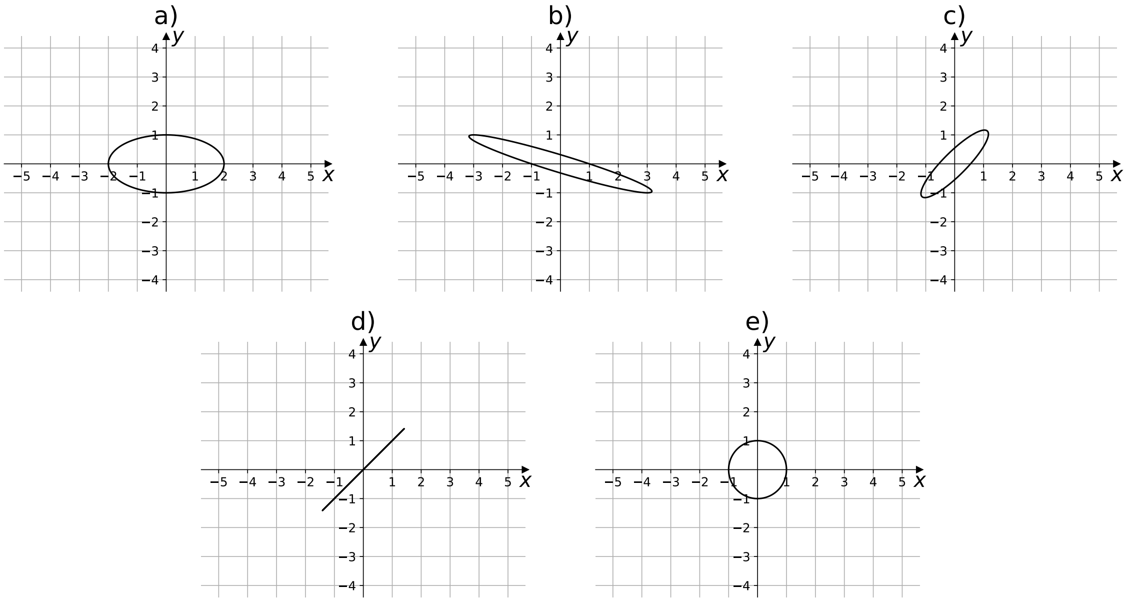

Abbildung 3: Transformationen des Kreises

Lösung

a) **D**
b) **A**
c) **E**
d) **C**
e) **B**

Lösung Ende

c) Bonusfrage: Um welche Art von Abbildungen handelt es sich bei den Matrizen $\mathbf{A}$ bis $\mathbf{E}$?

Lösung

A Scherung
B Rotation
C Drehstreckung (singulär)
D Streckung
E Drehstreckung (regulär)

Lösung Ende

d) Bonusfrage: Was kann man ahnand der Bilder in a) und b) über die Determinante der Transformationsmatrix sagen?

i. Welche geometrische Bedeutung hat die Determinante?

Lösung

$|\det \mathbf{A}|$ entspricht dem Faktor der Volumenänderung zwischen dem originalen Objekt und dessen Transformation. Das Vorzeichen der Determinante sagt aus, ob die Orientierung von Vektoren im Urbild nach der Transformation erhalten bleibt (positive Determinante) oder umgedreht wird (negative Determinante).

Lösung Ende

ii. Welche Matrix hat eine Determinante mit einem Betrag größer als Eins, kleiner als Eins bzw. gleich Eins?

Lösung

Man sieht sofort, dass $\mathbf{C}$ eine Determinante von Null haben muss. Des Weiteren hat $\mathbf{E}$ eine Determinante, welche im Betrag kleiner als Eins ist, die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ eine Determinante mit Betrag genau Eins und $\mathbf{D}$ eine mit Betrag größer als Eins.

Lösung Ende

iii. Welche Matrix hat eine positive und welche eine negative Determinante?

Lösung

Dies ist schwer zu erkennen, da in den Abbildungen lediglich gezeigt wird, wie das gesamte Objekt nach der Transformation aussieht. Schaut man sich aber spezielle Punkte und deren Transformationen an, so sieht man, dass $\mathbf{D}$ eine negative Determinante und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$ eine positive Determinante haben.

Lösung Ende

Aufgabe 2: Basiswechsel

In dieser Aufgabe möchten wir das Thema Basiswechsel anhand von Autos veranschaulichen. Wir nehmen vereinfachend[1] an, dass die Menge aller Autos ein vierdimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen ist. Dazu schauen wir den Steckbrief zweier Autos an:

Auto A:	Auto B:
• Gewicht: 2 Tonnen	• Gewicht: 2000 kg
• Höhe: 1,5 m	• Höhe: 150 cm
• 4 Räder	• Zwei vom Motor betriebene Achsen
• Allrad-Antrieb	• Keine nicht vom Motor betriebene Achse

1. Was ist eine Basis?

Lösung

Eine Basis ist eine geordnete Menge linear unabhängiger Vektoren, welche den Vektorraum aufspannt, d.h. jedes Element des Vektorraums kann eindeutig aus diesen Basisvektoren linear kombiniert werden.

Lösung Ende

2. Welche der folgenden Tupel stellen für welchen Raum eine Basis dar?

a) $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

b) $(1, \sin^2(x), \exp(x), \cos^2(x))$

c) $\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\5 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}\right)$

d) $(x, x^2, 1)$

Lösung

a) Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Keine Basis, da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

c) Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

d) Basis des Raumes der Polynome 2. Grades.

Lösung Ende

3. Worin unterscheiden sich die zwei beschriebenen Autos A und B?

Lösung

Es handelt sich um dasselbe Auto, welches auf zwei unterschiedliche Arten beschrieben wird.

Lösung Ende

[1] Autos haben deutlich mehr als vier Parameter und natürlich beschreibt nicht jeder vierelementige Vektor ein physikalisch mögliches Auto.

4. Aus den Beschreibungen der Autos kann man zwei verschiedene Basen herleiten. Welche wären das? Wie sieht die Darstellung der Autos (als Vektor) bezüglich diesen Basen aus?

Lösung

Basis 1: (Gewicht in Tonnen, Höhe in Metern, Anzahl Räder, Anzahl vom Motor betriebenen Achsen)
Basis 2: (Gewicht in kg, Höhe in cm, Anzahl vom Motor betriebenen Achsen, Anzahl nicht vom Motor betriebene Achsen)

$$\text{Bezüglich Basis 1}: \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Bezüglich Basis 2}: \begin{bmatrix} 2000 \\ 150 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

5. Gegeben ein 1,7 Tonnen schweres Auto mit 1,6 m Höhe mit 4 Rädern und einer Achse (à 2 Rädern), welche vom Motor betrieben wird. Wie sieht die Representation dieses Autos in den jeweiligen Basen aus?

Lösung

$$\text{Bezüglich Basis 1}: \begin{bmatrix} 1{,}7 \\ 1{,}6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Bezüglich Basis 2}: \begin{bmatrix} 1700 \\ 160 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

6. Die Representationen lassen sich ineinadner überführen. Beschreiben Sie die Abbildung von der einen Basis in die andere sowie die Rücktransformation mithilfe einer Matrix.

Lösung

Aus Basis 1 in Basis 2:

$$\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

Aus Basis 2 in Basis 1 ist die Inverse davon:

$$\begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

7. Gegeben zwei beliebige Basen A, B des $\mathbb{R}^n$, wie sieht die Transformationsmatrix
   a) von A in die Standardbasis,
   b) von der Standardbasis nach A,
   c) von A nach B und

d) von B nach A aus?

Lösung

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Basis } A} \arrow[r, bend left, "\mathbf{A}"] & \boxed{\text{Standardbasis}} \arrow[l, bend left, "\mathbf{A}^{-1}"] \arrow[r, bend left, "\mathbf{B}^{-1}"] & \boxed{\text{Basis } B} \arrow[l, bend left, "\mathbf{B}"]
\end{tikzcd}$$

a) $\mathbf{A}$

b) $\mathbf{A}^{-1}$

c) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

d) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Hinweis: Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ enthalten die Basisvektoren von A und B jeweils als Spalten.

Lösung Ende