Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Multiple-Choice-Test zu Berechenbarkeit und Komplexität (A)
TU Berlin, 01.12.2022

(Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche, Wintersemester 2022/2023)

Arbeitszeit: 45 Minuten, Gesamtpunktzahl: 25

Hinweis: Je Aufgabe ist **mindestens** eine Antwortmöglichkeit korrekt.
Wenn eine **falsche** Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde, so gibt es **Null** Punkte für die betroffene (Teil-)Aufgabe.
Jede Aufgabe ist annotiert mit der Anzahl erreichbarer Punkte

Wir erinnern an folgende Definitionen aus der Vorlesung:

- Die Null ist eine natürliche Zahl.
- Die Komposition zweier Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert als $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(f \circ g)(n) \coloneqq f(g(n))$.
- Die Ackermannfunktion ack und die modernisierte Ackermannfunktion a sind definiert durch

$$\begin{aligned} \operatorname{ack}(0,y) &:= y+1, \\ \operatorname{ack}(x,0) &:= \operatorname{ack}(x-1,1), \\ \operatorname{ack}(x,y) &:= \operatorname{ack}(x-1,\operatorname{ack}(x,y-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(0,y) &:= 1, \\ a(1,y) &:= 3y+1, \\ a(x,y) &:= \underbrace{a(x-1,a(x-1,\ldots,a(x-1,y)\ldots)}_{y \text{ mal}} \end{aligned}$$

Aufgabe 1: **Berechenbarkeit** (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch LOOP-berechenbar.
- [X] Jede LOOP-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar.
- [X] Jede GOTO-berechenbare Funktion ist auch WHILE-berechenbar.
- [X] Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch GOTO-berechenbar.
- [ ] Jede totale Funktion ist LOOP-berechenbar.
- [ ] Jede totale Funktion ist WHILE-berechenbar.
- [X] Sind zwei Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar, so ist ihre Komposition $f \circ g$ ebenfalls LOOP-berechenbar.

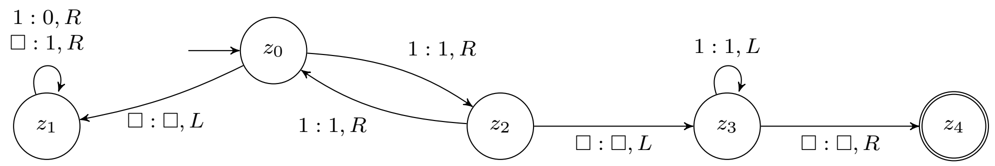
Aufgabe 2: **Turing-Berechenbarkeit** (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Eine Turing-Maschine, die auf keiner Eingabe hält, berechnet keine Funktion.
- [X] Jede Turing-Maschine berechnet eine Funktion.
- [ ] Jede Turing-Maschine berechnet eine totale Funktion.
- [X] Jede Funktion, die von einer Mehrband-Turing-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer Einband-Turing-Maschine berechnet werden.

Aufgabe 3: **Turing-Maschinen** (2+3+3 Punkte)

Gegeben sei die Turing-Maschine $M := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_4\})$ mit $Z = \{z_i \mid 0 \leq i \leq 4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$ und δ beschrieben durch den folgenden Zustandsgraphen.



Hinweis zur Formulierung: ein Wort w *besteht* aus k Einsen (bzw. Nullen), wenn w die Länge k hat und kein Symbol außer 1 (bzw. 0) in w vorkommt. Ein Wort w *enthält* k Einsen (bzw. Nullen) wenn man beliebig Symbole aus w löschen kann um ein Wort zu erhalten, das aus k Einsen (bzw. Nullen) besteht. Das Wort 1101 *enthält* eine Null und *enthält* drei Einsen, aber es *besteht* nicht aus drei Einsen.

(a) Welche der folgenden Wörter werden von M akzeptiert?

[ ] 101 [X] 1 [X] 111 [ ] 11

(b) Welche Aussagen über M sind korrekt?

- [ ] M akzeptiert mindestens ein Wort, das eine 0 enthält.
- [ ] M akzeptiert alle Wörter über Σ, die eine ungerade Anzahl Einsen enthalten.
- [ ] M akzeptiert die Sprache $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- [X] M akzeptiert die Sprache $\{1^n 1^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- [ ] M akzeptiert keine Sprache, da M eine Funktion berechnet.

(c) Welche Aussagen über M sind korrekt?

- [X] Es gibt Eingaben, auf denen M nicht hält.
- [X] M hält auf allen Eingaben, die eine 0 enthalten.
- [ ] M berechnet die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls die Binärdarstellung von } n \text{ aus einer ungeraden Anzahl Einsen besteht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

- [X] M berechnet die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(n) := \begin{cases} n, & \text{falls } n = 2 \cdot 4^q - 1 \text{ für ein } q \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}.$$

- [ ] M berechnet keine Funktion, da M eine Sprache akzeptiert.

Aufgabe 4: **Turing-Berechenbarkeit II** (3 Punkte)

Im Folgenden sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv und $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Die Funktion $f \circ g$ ist total, aber nie LOOP-berechenbar.
- [ ] Die Funktion $g \circ f$ ist immer primitiv-rekursiv.
- [X] Falls h total ist, dann ist $g \circ h$ total und Turing-berechenbar.
- [X] Die Funktion $h \circ f$ kann primitiv-rekursiv sein.
- [X] Es ist möglich, dass $h \circ (g \circ f)$ die nirgends definierte Funktion ist.

Aufgabe 5: **Diagonalisierung** (2 + 2 Punkte)

Sei $L = (L_0, L_1, \ldots)$ eine Liste aller 1-stelligen LOOP-berechenbaren Funktionen und sei $G = (G_0, G_1, \ldots)$ eine Liste aller 1-stelligen GOTO-berechenbaren Funktionen. Weiter seien folgende Funktionen definiert:

$$\ell(n) := L_n(n) + 1 \qquad \text{und} \qquad g(n) := \begin{cases} G_n(n) + 1, & \text{falls } G_n(n) \neq \perp \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen über L und ℓ sind korrekt?

- [ ] Die Liste L kann nicht existieren, da es zu viele LOOP-berechenbare Funktionen gibt.
- [X] Die Funktion ℓ ist **nicht** LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion ℓ ist total.
- [ ] Über die Berechenbarkeit von ℓ können keine Aussagen getroffen werden.

(b) Welche der folgenden Aussagen über G und g sind korrekt?

- [ ] Die Liste G kann nicht existieren, da es zu viele GOTO-berechenbare Funktionen gibt.
- [X] Die Funktion g ist **nicht** GOTO-berechenbar.
- [ ] Die Funktion g ist LOOP-berechenbar.
- [ ] Die Funktion g ist Turing-berechenbar.
- [X] Die Funktion g ist total.
- [ ] Über die Berechenbarkeit von g können keine Aussagen getroffen werden.

Aufgabe 6: **Ackermannfunktion** (2 Punkte)

Welche Aussagen über die in der Vorlesung präsentierte Ackermannfunktion $\operatorname{ack}(x, y)$ sind korrekt?

- [ ] Die Ackermannfunktion ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Ackermannfunktion ist Turing-berechenbar.
- [X] Die Ackermannfunktion ist total.
- [ ] Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede totale Funktion.

Aufgabe 7: **WHILE** (2 + 2 Punkte)

Gegeben sei das folgende WHILE-Programm, welches eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet (mit Eingabe x_1).

$x_0 := x_0 + 1$;
WHILE $x_1 \neq 0$ **DO**
  $x_2 := x_0 + 0$;
  WHILE $x_2 \neq 0$ **DO**
    $x_0 := x_0 + 2$;
    $x_2 := x_2 - 1$
  END;
  $x_1 := x_1 - 1$
END

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [X] $f(1) = 3$
- [ ] $f(1) = 2$
- [ ] $f(2) = \perp$
- [X] $f(0) = 1$

(b) Welche Funktion wird berechnet?

- [ ] $f(x_1) = 2x_1$
- [X] $f(x_1) = 3^{x_1}$
- [ ] Die nirgendes definierte Funktion
- [ ] $f(x_1) = x_1^2$
- [ ] $f(x_1) = 2^{x_1}$
- [ ] Keine der anderen Funktionen