Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.
4. Wenn es ausgezeichnete Elemente $\overline{a}' \in A^k$ und $\overline{b}' \in B^k$ gibt, dann gewinnt Duplikatorin $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann, wenn $h : a'_i \mapsto b'_i$, für alle i, ein partieller Isomorphismus ist.

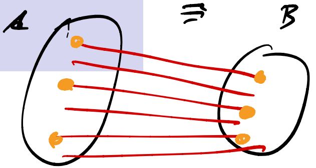
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

gdw.

$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen



h Isomorphismus

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.
4. Wenn es ausgezeichnete Elemente $\overline{a}' \in A^k$ und $\overline{b}' \in B^k$ gibt, dann gewinnt Duplikatorin $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann, wenn $h : a'_i \mapsto b'_i$, für alle i, ein partieller Isomorphismus ist.
5. Wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, dann gewinnt die Duplikatorin $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m \geq 0$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

EF-Spiele auf linearen Ordnungen

Theorem.

Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

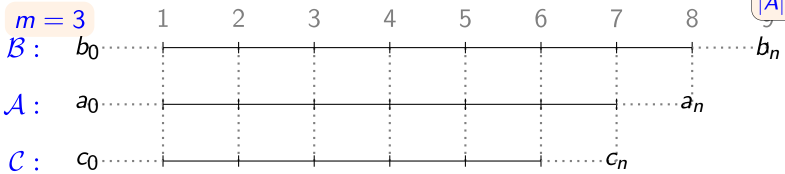
$$\text{Die Duplikatorin gewinnt das Spiel } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

$$\iff$$

$$|A| = |B| \quad \text{oder} \quad |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Beweisskizze

Theorem. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$ $|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

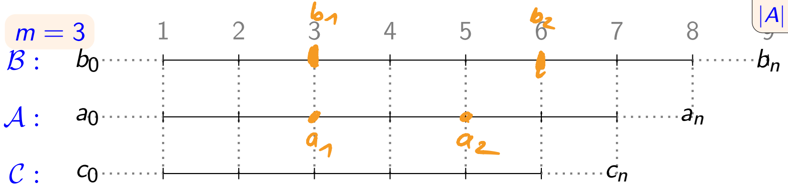


Strukturen. Seien $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $A = \{1, \ldots, n_a\}$ und $B := \{1, \ldots, n_b\}$.

Zur Vereinfachung sei $a_0 = b_0 = 0$, $a_n = n_a + 1$ und $b_n = n_b + 1$.

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. Seien $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $A = \{1, \ldots, n_a\}$ und $B := \{1, \ldots, n_b\}$.

Zur Vereinfachung sei $a_0 = b_0 = 0$, $a_n = n_a + 1$ und $b_n = n_b + 1$.

Invariante. Ang., nach Runde i wurden $a_1, \ldots, a_i$ und $b_1, \ldots, b_i$ gezogen.

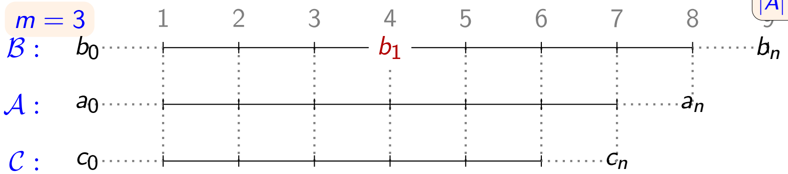
Dann gilt für alle $j, j' \in \{0, \ldots, i, n\}$:

1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $|A(j, j')|, |B(j, j')| \geq 2^{m-i} - 1$.

($B(j, j') := \{b \in B : b_j < b < b_{j'}$ oder $b_{j'} < b < b_j\}$ $A(j, j')$ analog)

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \ldots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \ldots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Runde 1.

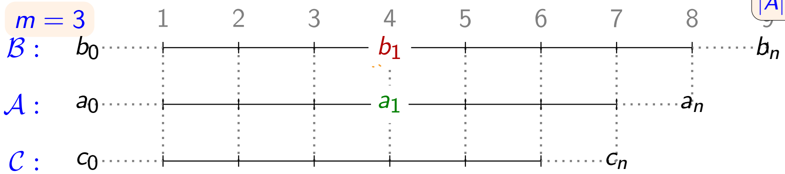
Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

a_1 existiert, da $|A| \geq 2^m - 1$ und $2 \cdot (2^{m-1} - 1) - 1 = 2^m - 1$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$
$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

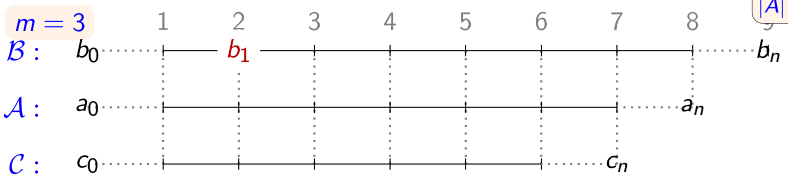
a_1 existiert, da $|A| \geq 2^m - 1$ und $2 \cdot (2^{m-1} - 1) - 1 = 2^m - 1$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{matrix} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$
$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

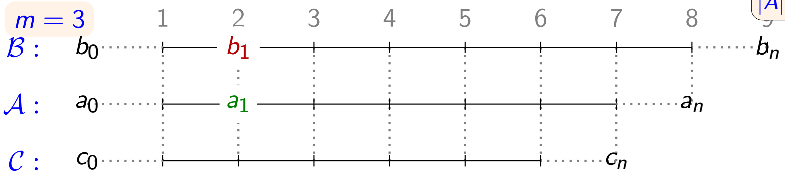
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

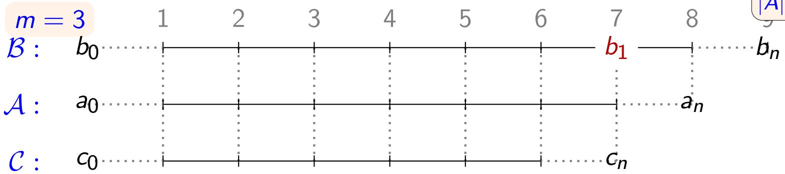
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

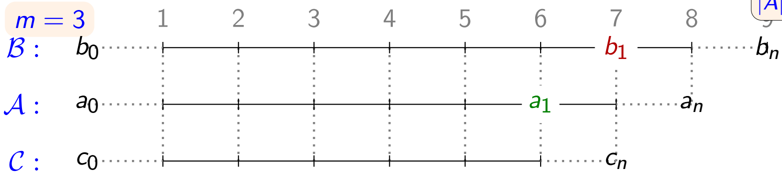
Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| \cancel{\geq} < 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

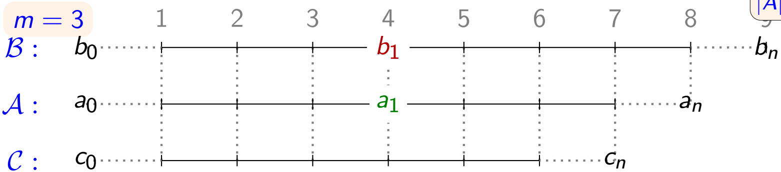
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder

$$\left.\begin{matrix}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| > 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

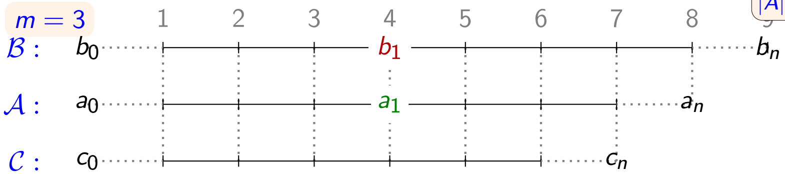
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Runde 2.

Beobachtung. Wenn H in $B(b_0, b_1)$ oder $A(a_0, a_1)$ zieht, muss H in $A(a_0, a_1)$ bzw. $B(b_0, b_1)$ antworten.

Analog wenn H in $B(b_1, b_n)$ oder $A(a_1, a_n)$ zieht.

Nach Runde 1 spielen wir also eigentlich zwei getrennte Spiele $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}[A(a_0, a_1)], \mathcal{B}[B(b_0, b_1)])$ und $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}[A(a_1, a_n)], \mathcal{B}[B(b_1, b_n)])$.

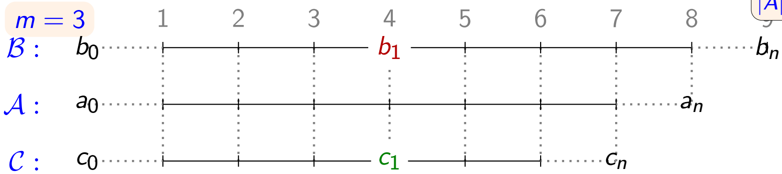
Wegen der Invariante gelten für beide Spiele wieder die Voraussetzungen des Theorems.

Wir können also einfach rekursiv weiter spielen.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

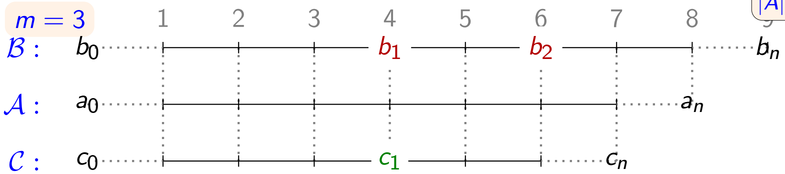
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|$, $|B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \ldots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

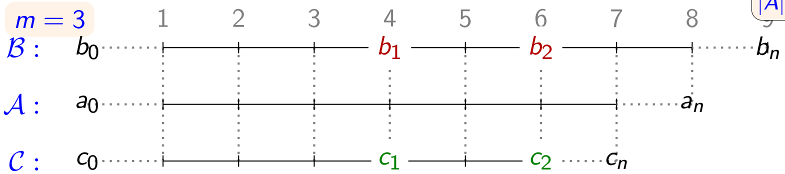
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \ldots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \ldots, i, n\}$:

1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

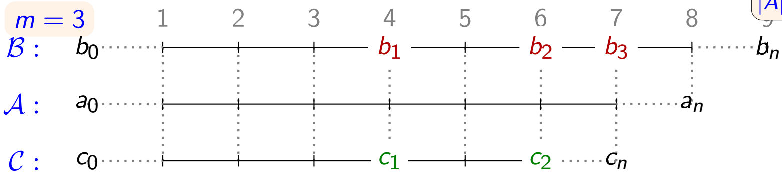
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

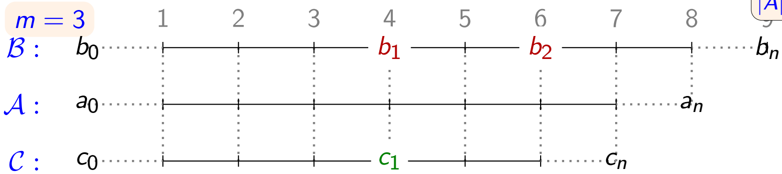
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')| \\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

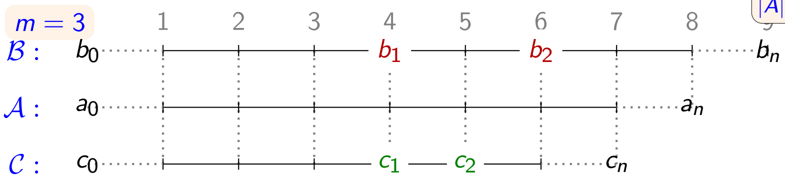
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \ldots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \ldots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \ldots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{matrix} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$
$$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$$

Beweisskizze



Theorem. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$ $|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.

$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$

$A = \{1, \dots, n_a\}$

$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

$B := \{1, \dots, n_b\}$.

$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:

Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.

Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:

1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

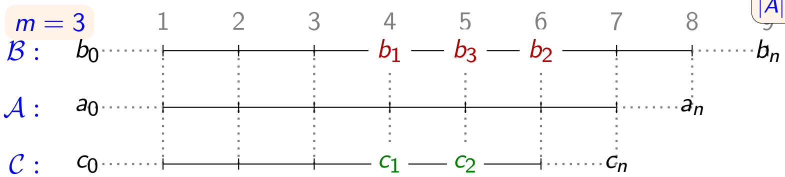
Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|$, $|B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')| \\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

EF-Spiele auf linearen Ordnungen

Theorem.

Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A| = |B| \quad \text{oder} \quad |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Wichtige Variante des m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiels:

Spiel $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ mit unbeschränkter Zugzahl.

Hier wählt der Herausforderer zunächst eine Zahl $m \geq 0$ und dann wird das m-Runden Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ gespielt.

Theorem (Satz von Ehrenfeucht). Sei σ eine Signatur, $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen mit $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}((\mathcal{A}, \overline{a}), (\mathcal{B}, \overline{b}))$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m((\mathcal{A}, \overline{a}), (\mathcal{B}, \overline{b}))$

Lehrevaluation

Lehrevaluation.

Vorlesung.	https://befragung.tu-berlin.de/evasys/online.php?p=3THTU
Übung.	https://befragung.tu-berlin.de/evasys/online.php?p=HF1GA

Vorlesung.

Übung.

11.6 Der Satz von Ehrenfeucht

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\hat{=}$ Gewinnstrategie)

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Theorem. Für $m \geq 0$: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Beobachtung.
D hat eine Gewinnstrategie in $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. sie

- für jeden Zug a_1 von H in $\mathcal{A}$ ein Element $b_1 \in B$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat und
- für jeden Zug b_1 von H in $\mathcal{B}$ ein Element $a_1 \in A$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Beobachtung.

D hat eine Gewinnstrategie in $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. sie

- für jeden Zug a_1 von H in $\mathcal{A}$ ein Element $b_1 \in B$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat und
- für jeden Zug b_1 von H in $\mathcal{B}$ ein Element $a_1 \in A$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat.

Es bietet sich daher ein Beweis des Satzes per Induktion über m an.

Theorem. Für $m \geq 0$: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Der Basisfall $m = 0$.

Sei $m = 0$.

Zu zeigen.

$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b}')$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Der Basisfall $m = 0$.

Sei $m = 0$.

Zu zeigen.

$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b}')$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$.

Beweis.

D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

gdw.

$h : a'_1 \mapsto b'_1, \dots, a'_l \mapsto b'_l$ ein partieller Isomorphismus ist.

Daher ist zu zeigen, dass dies genau dann gilt, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Genau das besagt das schon bewiesene Lemma.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\widehat{=}$ Gewinnstrategie)

m-Isomorphietypen

Als Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Ehrenfeucht verwenden wir folgende induktiv definierte Formeln $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$:

m-Isomorphietypen oder Hintikka-Formeln. Sei σ eine Signatur.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$

m-Isomorphietypen

Als Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Ehrenfeucht verwenden wir folgende induktiv definierte Formeln $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$:

m-Isomorphietypen oder Hintikka-Formeln. Sei σ eine Signatur.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

und für $m \geq 0$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \}.$$

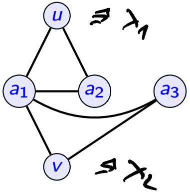
Beispiel

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \right\}$$
$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\}$$

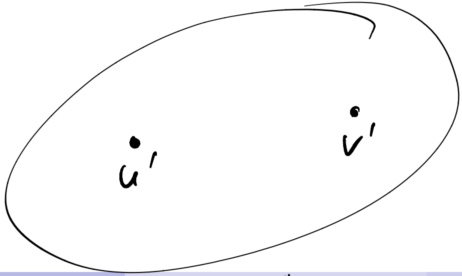
$m = 0$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},uv}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \neg E(x_1, x_2) & \wedge & \neg E(x_2, x_1) & \wedge \\ \neg E(x_1, x_1) & \wedge & \neg E(x_2, x_2) & \wedge \\ \neg x_1 = x_2 & \wedge & \neg x_2 = x_1 & \wedge \\ x_1 = x_1 & \wedge & x_2 = x_2 & \end{pmatrix}.$$

Graph $\mathcal{A}$.

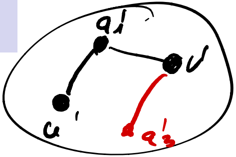


B



$\mathcal{B} \models \varphi^0_{\mathcal{A},uv}[x_1/u', x_2/v']$

Beispiel



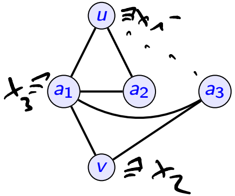
$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{\psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\right\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a\in A} \left\{\exists x_{k+1}\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\}$$

$m = 0.$

$$\varphi^0_{\mathcal{A},uv}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \neg E(x_1, x_2) & \wedge & \neg E(x_2, x_1) & \wedge \\ \neg E(x_1, x_1) & \wedge & \neg E(x_2, x_2) & \wedge \\ \neg x_1 = x_2 & \wedge & \neg x_2 = x_1 & \wedge \\ x_1 = x_1 & \wedge & x_2 = x_2 & \end{pmatrix}.$$

Graph $\mathcal{A}$.



$m > 0.$

$$\varphi^1_{\mathcal{A},uv}(x_1, x_2) :=$$

$$\underline{\exists x_3} \begin{pmatrix} \underline{E(x_1, x_3)} & \wedge & \underline{E(x_2, x_3)} & \wedge \dots \\ \neg x_3 = x_1 & \wedge & \neg x_2 = x_3 & \wedge \\ & \varphi^0_{\mathcal{A},uv}\cdots & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (\varphi^0_{\mathcal{A},uva_1} \text{für } a = a_1) \\ x_1 \hat{=} u \quad x_2 \hat{=} v \\ x_3 \hat{=} a_1 \end{pmatrix}$$

$\wedge \dots$ (entspr. für $a = a_2, a_3, a = u, a = v$)

$x_3 \hat{=} a_3$: $\exists x_3 \, (\neg E(x_1, x_3) \wedge E(x_2, x_3))$

m-Isomorphietypen

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a\in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beobachtung.

- Der Quantorenrang von $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ ist genau m.

m-Isomorphietypen

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \right\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beobachtung.

- Der Quantorenrang von $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ ist genau m.
- Wir haben bereits bewiesen, dass es für jedes $m \geq 0$ und jede feste Menge X von Variablen nur eine endliche Anzahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln mit Quantorenrang $\leq m$ und freien Variablen aus X gibt.

  Weil hier der Quantorenrang m und die freien Variablen $x_1, \dots, x_{k+1}$ beschränkt sind, sind die großen Konjunktionen und Disjunktionen endlich, auch wenn das Universum A unendlich groß ist.

Ein technisches Hilfslemma

Lemma.

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ und $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis $3 \Rightarrow 2$

Beweis $(3) \implies (2)$.

Voraussetzung: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$

Zu zeigen: $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Beweis $3 \Rightarrow 2$

Beweis $(3) \implies (2)$.

Voraussetzung: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$

Zu zeigen: $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\overline{b}]$.

Angenommen $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{a}]$ und $\mathrm{qr}(\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}) = m$

folgt sofort $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$$

$$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beweis $1 \Longleftrightarrow 2$

Beweis $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$$\mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$$

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \Big\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \Big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \Big\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \Big\}$$

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$$\mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$$

gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\}$$

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$$\mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$$

gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

gdw. $\mathcal{B} \models \varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$ (haben wir eben bewiesen).

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{\psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \left\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\}$$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Longleftrightarrow$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\}$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Longleftrightarrow$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt und
für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt

$\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow}$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$ und
für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$
$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$
$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$
$$\bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$
$$\bigwedge_{a\in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\}$$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Longleftrightarrow$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt

$\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow}$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$ und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B} \models \Big(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \ \wedge \ \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \Big) \ [\bar{b}]$

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$
$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$
$\bigwedge_{a\in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\}$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}) \\
\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt} \\
\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow}\ & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b] \text{ und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b] \\
\Longleftrightarrow\ & \mathcal{B} \models \Big(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \ \wedge\ \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \Big)\ [\bar{b}] \\
\Longleftrightarrow\ & \mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}].
\end{aligned}
$$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \big\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \big\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\}$$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Lemma.
1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{\psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \Big\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\Big\} \wedge$$
$$\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \Big\{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\Big\}$$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Angenommen, D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3)

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3).

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Angenommen, D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Sei $\psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in$ FO mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ und $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$.

Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}'] \iff \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$

$$\bar{a}' := (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \qquad \bar{b}' := (b_{i_1}, \dots, b_{i_n}).$$

ψ ist eine Boolsche Kombination aus Formeln

1. mit Quantorenrang $< m$ und
2. Formeln der Form $\exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Es reicht daher, Formeln des Typs 2 zu betrachten.

Lemma.
1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge\nolimits_{a \in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee\nolimits_{a \in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\}$$

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi \ = \ \exists x_{k+1} \ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da D $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass D $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a] \iff \mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b].$$

Mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$ folgt daraus $\mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b]$ und daher $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m-1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a] \iff \mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b].$$

Mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$ folgt daraus $\mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b]$ und daher $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$.

Der Fall $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}']$ folgt analog.

Ein technisches Hilfslemma

Lemma.

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ und $\overline{b} := (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$.

Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\hat{=}$ Gewinnstrategie)

Bemerkung

Bemerkung. Sei σ eine Signatur und $m \in \mathbb{N}$.

Aus dem technischen Hilfslemma folgt, dass $\equiv_m$ nur *endlich* viele Äquivalenzklassen hat.

Die Äquivalenzklasse, zu der eine gegebene Struktur $\mathcal{A}$ gehört, wird dabei durch den Satz $\varphi^m_{\mathcal{A}}$ definiert.

11.7 Anwendungen von EF-Spielen

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\hat{=}$ Gewinnstrategie)

Ein technisches Hilfslemma

Lemma.

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ und $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Wiederholung: m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 0$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

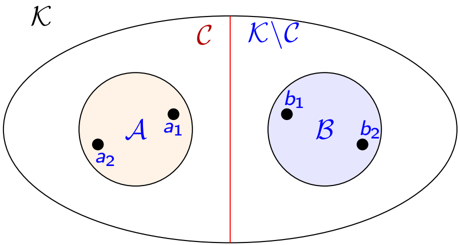
- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

für alle $\psi(\overline{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.



Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \;=\; \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Wiederholung: Beispiele dieses Abschnitts

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}} \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Zählen in der Prädikatenlogik

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle
$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) & \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\} \\ \mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) & \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}. \end{array}$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle
$$\mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) \quad \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\}$$
$$\mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) \quad \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Theorem. Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$
$$\iff$$
$$|A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) & \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\} \\ \mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) & \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}. \end{array}$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Wie in Video 12.2 bewiesen, gewinnt D das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$, und, nach dem Satz von Ehrenfeucht, gilt $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

Somit ist $\text{EVEN}_{\leq}$ nicht in $\mathcal{O}$ definierbar (siehe Video 11.3).

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Theorem. Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\ \mathcal{A} \quad : \quad \mathcal{A} \quad \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\ \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Erreichbarkeit

$(\mathcal{A}, \bar{a})$ $(\mathcal{A}$

s, t

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

~~s, t Konstantensymbole~~

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t) \ \sigma\text{-Struktur}, s, t \in A, \text{ es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

~~s, t Konstantensymbole~~

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t)\ \sigma\text{-Struktur},\ s, t \in A,\ \text{es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\ \}.$$

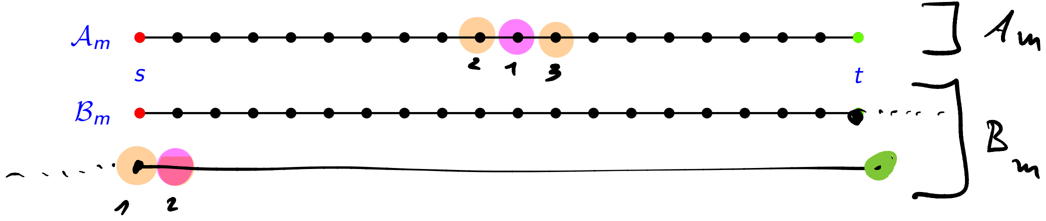
Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Antwort. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

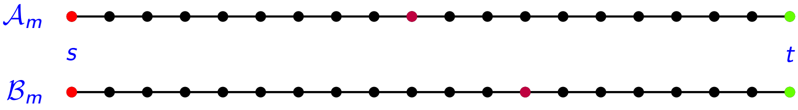
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

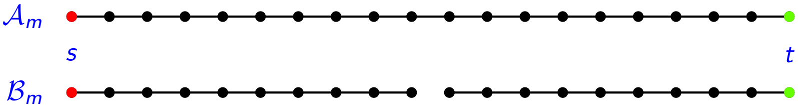
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

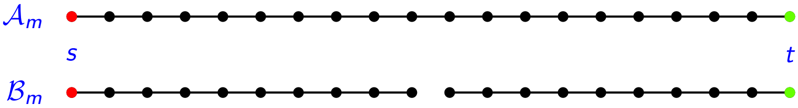
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.

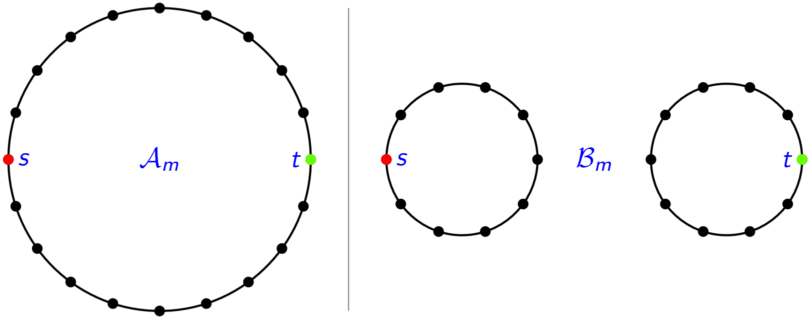


Problem. $\mathcal{B}_m$ hat jetzt 4 Knoten vom Grad 1, $\mathcal{A}_m$ aber nur 2.

Beweis: Idee 2

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

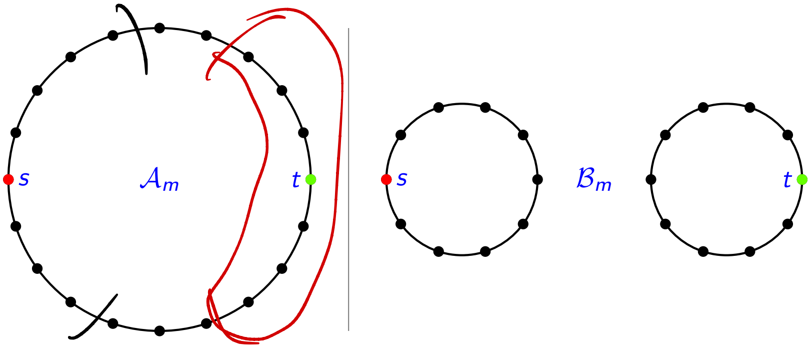
Versuch 2. Um das Problem zu vermeiden wählen wir statt langen Pfaden einfach lange Kreise.



Beweis: Idee 2

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

Versuch 2. Um das Problem zu vermeiden wählen wir statt langen Pfaden einfach lange Kreise.



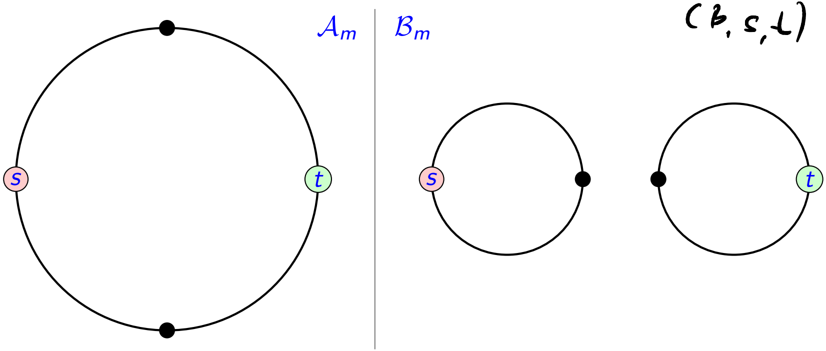
Frage. Wie lang müssen die Kreise sein?

Kreislänge für $m = 0$.

Reach-$\varphi(A, s, t)$:

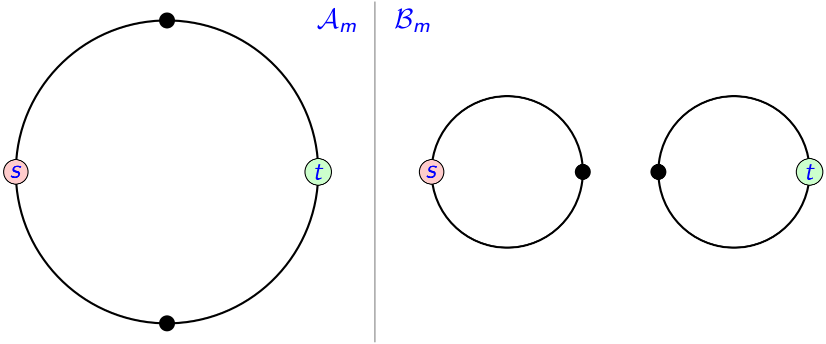
Das 0-Runden Spiel. (A_m, s, t)

(B, s, t)



Kreislänge für $m = 0$.

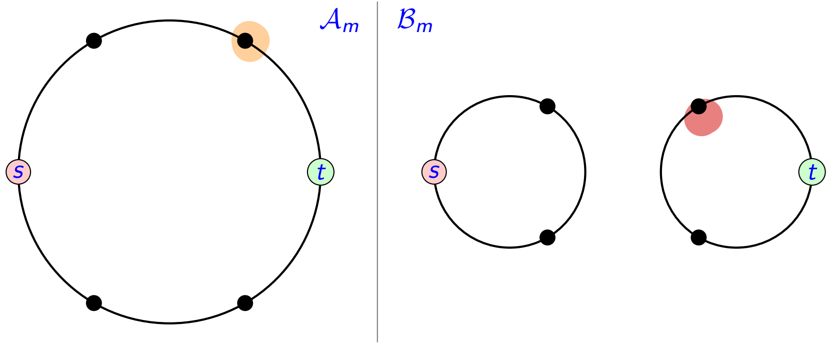
Das 0-Runden Spiel.



Für $m = 0$ muss in jede Richtung 1 Knoten zwischen s und t liegen.

Kreislänge für $m = 1$.

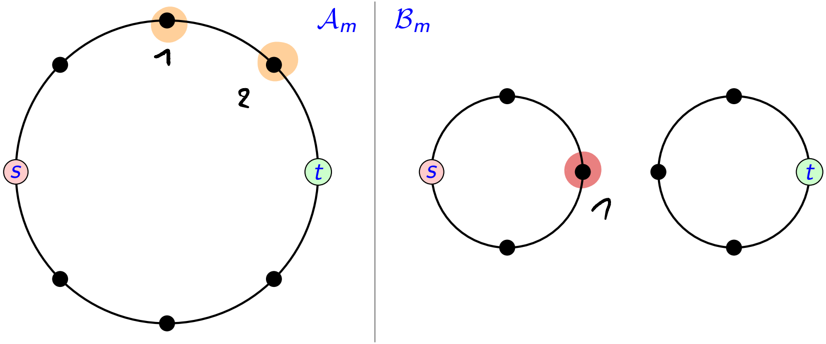
Das 1-Runden Spiel.



Für $m = 1$ müssen in jede Richtung 2 Knoten zwischen s und t liegen.

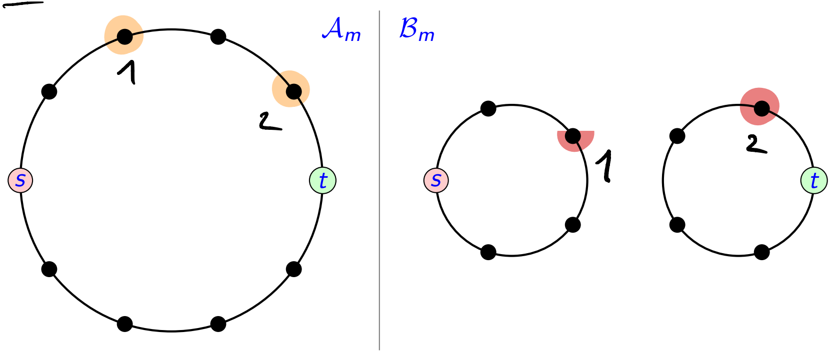
Kreislänge für $m = 2$*:* 3 *oder* 4*?*

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



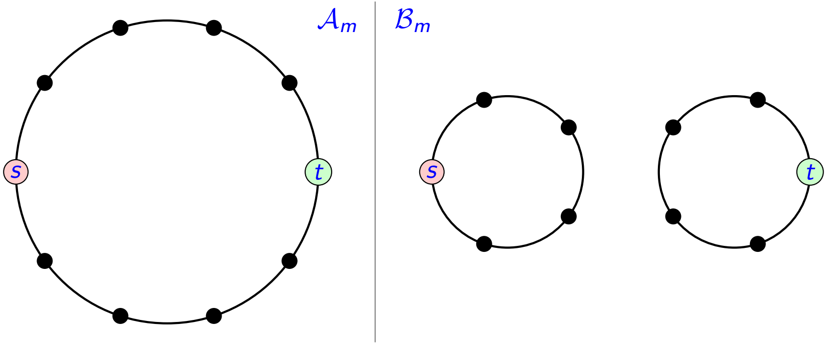
Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

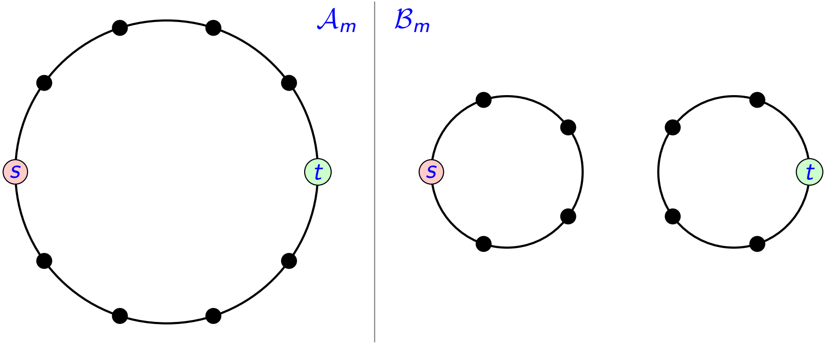
Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



Für $m = 2$ müssen in jede Richtung 4 Knoten zwischen s und t liegen.

Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



Für $m = 2$ müssen in jede Richtung 4 Knoten zwischen s und t liegen.

Beobachtung: Die Zahl der Knoten zwischen s und t verdoppelt sich in jedem Schritt.

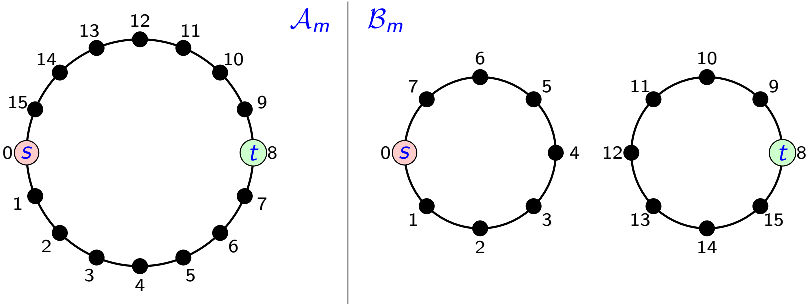
Beweis, dass Reach nicht definierbar ist

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beweis. Für $m \geq 0$ sei $M = 2^{m+2}$ und

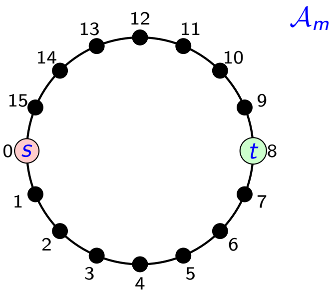
$\mathcal{A}_m := (A_m, E^{\mathcal{A}_m})$ ein Kreis der Länge M und
$\mathcal{B}_m := (B_m, E^{\mathcal{B}_m})$ zwei disjunkte Kreise der Länge $\frac{1}{2}M$.

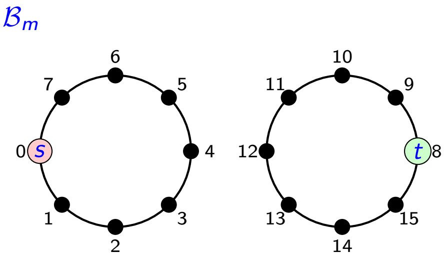
Sei $A_m := \{a_0, \dots, a_M\}$ und $B_m := \{b_0, \dots, b_M\}$.



Beweis, dass REACH nicht definierbar ist

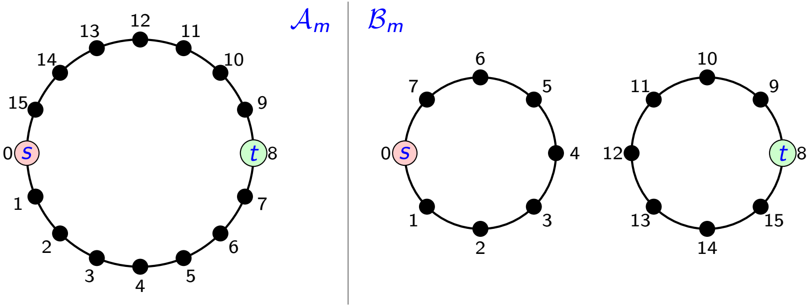
Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$





Beweis, dass REACH nicht definierbar ist

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



Notation.

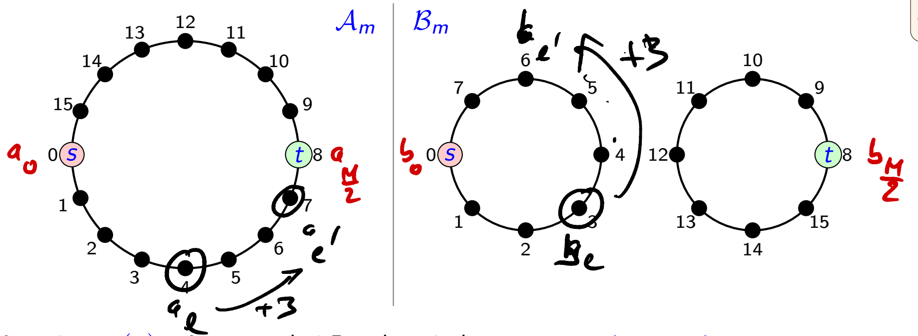
$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$

$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Beweis, dass REACH nicht definierbar ist

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



Invariante $(\star)$. Ang., nach i Runden sind $a_{j_1}, \dots, a_{j_i}$, $b_{j_1}, \dots, b_{j_i}$ gezogen.

Für alle $l, l' \in \{0, j_1, \dots, j_i, \frac{M}{2}\}$ und $r \leq 2^{m-i}$:

$$a_l \oplus r = a_{l'} \text{ gdw. } b_l \oplus r = b_{l'}.$$

Notation.

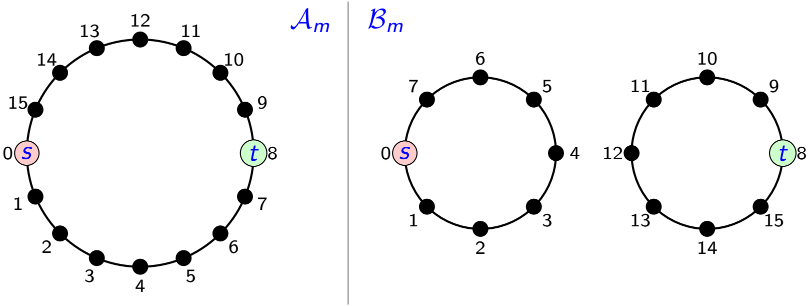
$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$

$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Beweis, dass REACH *nicht definierbar ist*

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



Invariante $(\star)$. Ang., nach i Runden sind $a_{j_1}, \dots, a_{j_i}$, $b_{j_1}, \dots, b_{j_i}$ gezogen.

Für alle $l, l' \in \{0, j_1, \dots, j_i, \frac{M}{2}\}$ und $r \le 2^{m-i}$:

$$a_l \oplus r = a_{l'} \text{ gdw. } b_l \oplus r = b_{l'}.$$

Notation.

$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$

$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Spielverlauf.

Nach Runde $i = m$:
$(\star) \Rightarrow h : a_{j_l} \mapsto b_{j_l}$ part Isom.

Nach Runde $i = 0$:
$(\star)$ nach Konst. erfüllt.

Wenn $(\star)$ nach Runde i gilt, kann D $(\star)$ nach Runde $i+1$ erfüllen.

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E\}$

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t)\ \sigma\text{-Struktur},\ s, t \in A,\ \text{es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\ \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Antwort. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beispiele Nicht-Definierbarer Klassen

Nicht-Definierbare Klassen.

- REACH ist nicht FO-definierbar.
- $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar.
- Die Sprache aller Wörter $w \in \{a, b\}^+$ mit genauso vielen a's wie b's ist nicht definierbar.
- Die Klasse aller unendlichen Strukturen.
- ...

Nicht-Axiomatisierbare Klassen.

- Die Klasse aller endlichen Strukturen.
- ...