FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 23. Januar 2023

13. freiwillige Hausaufgabe – Logik
Abgabe: bis 10:30 am 17.02.2022 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Hausaufgabe 1

Betrachten Sie die folgende Signatur $\sigma = \{R\}$ wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\{\forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))\ ,\ \exists x \forall y R(x,y)\} \Rightarrow \{\forall y \exists x R(y,x)\}$$

Hausaufgabe 2

Betrachten Sie die Signatur $\sigma = \{\cdot, e\}$ wobei $\cdot$ ein 2-stelliges Funktionssymbol ist und e ein Konstantensymbol. Geben Sie einen Beweisbaum für die folgende Sequenz an.

$$\{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ \forall x\ e \cdot x = x,\ \forall x\ x \cdot e = x,\ \forall x \forall y \forall z\ (y \cdot x = z \cdot x \to y = z),\ \forall x \exists y\ x \cdot y = e\} \\ \Rightarrow \quad \{\forall x \exists y\ y \cdot x = e\}\,.$$

Anmerkung: Der Beweis ist lang. Es lohnt sich vorher den Beweis der Aussage ohne den Sequenzenkalkül zu formulieren und diesen dann zu übersetzen.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (*)$$

$$(\exists\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*) \qquad (\Rightarrow\exists)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(S\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \qquad (=)\ \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln stehen t und t' für einen beliebigen Term und $t \doteq t'$ bedeutet, dass wir $t = t'$ oder $t' = t$ verwenden können.