

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 3.1

Eigenzerlegung

27.11.2023 bis 01.12.2023

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Wir sagen $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von \mathbf{A} mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, falls $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Der Eigenvektor \mathbf{v} wird durch die von \mathbf{A} beschriebene Abbildung lediglich um den Faktor λ skaliert.

1. Was ist das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$? Wie lassen sich die Eigenwerte mithilfe dessen analytisch berechnen? Wie berechnet man die zugehörigen Eigenräume?

Lösung

Definition von Eigenwerten und -vektoren: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Daraus folgt:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Der Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist genau dann ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ , wenn $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ singulär ist und er im Kern jener Matrix liegt. Eine quadratische Matrix ist genau dann singulär, wenn ihre Determinante Null ist. Man definiert das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, das ein Polynom n -ten Grades ist und dessen Nullstellen die Eigenwerte von \mathbf{A} sind. Die zugehörigen Eigenräume sind $\text{Eig}(\mathbf{A}, \lambda) = \text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Insbesondere sind Eigenräume lineare Unterräume.

Lösung Ende

2. Was ist die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes? Wie hängen diese zusammen?

Lösung

- Algebraische Vielfachheit: Wie oft λ die Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.
- Geometrische Vielfachheit: Die Dimension des zugehörigen Eigenraums $\text{Eig}(\mathbf{A}, \lambda)$.

Dabei ist die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mindestens Eins (also hat jeder Eigenwert mindestens einen linear unabhängigen Eigenvektor), aber maximal so groß wie die algebraische Vielfachheit. Damit kann die geometrische Vielfachheit auch kleiner sein.

Lösung Ende

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume folgender Matrizen:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung

- a) Da \mathbf{A} eine Diagonalmatrix ist, stehen ihre Eigenwerte auf der Diagonalen: Sie hat den Eigenwert 3 mit algebraischer Vielfachheit 2. Der Eigenraum ist:

$$\text{Eig}(\mathbf{A}, 3) = \text{Kern}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2$$

- b) Wir berechnen das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen:

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 1$$

Dessen Nullstellen und die Eigenwerte von \mathbf{B} sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Die Eigenwerte sind offensichtlich nicht reell, was bei einer Rotationsmatrix um den Winkel $\pi/2$ zu erwarten. Für die Eigenräume gilt:

$$\begin{aligned}\text{Eig}(\mathbf{B}, -i) &= \text{Kern} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ \text{Eig}(\mathbf{B}, i) &= \text{Kern} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

- c) Da \mathbf{C} eine Dreiecksmatrix ist, kann man ihre Eigenwerte an den Diagonalen ablesen. Sie hat den Eigenwert 1 mit einer algebraischen Vielfachheit von 3. Der zugehörige Eigenraum ist:

$$\text{Eig}(\mathbf{C}, 1) = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Lösung Ende

4. Was bedeutet es, dass eine Matrix diagonalisierbar ist? Welche der Matrizen aus der vorherigen Aufgabe sind diagonalisierbar?

Lösung

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Matrix nur reelle Eigenwerte hat. Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls

- es eine Basis des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von \mathbf{A} gibt.
- die algebraische und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes übereinstimmt.
- es eine reguläre Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

Die drei Aussagen sind äquivalent.

- Die Matrix \mathbf{A} ist offensichtlich diagonalisierbar, da sie eine Diagonalmatrix ist.
- Die Matrix \mathbf{B} ist auch diagonalisierbar, aber nicht im Reellen. Man erkennt dies zum Beispiel daran, dass sie nur unterschiedliche Eigenwerte hat.
- Die Matrix \mathbf{C} ist nicht diagonalisierbar, da ihr Eigenwert die algebraische Vielfachheit von 3, der zugehörige Eigenraum nur die Dimension 1 hat.

Lösung Ende

5. Wie hängt die Determinante der Matrix mit ihren Eigenwerten zusammen?

Lösung

Die Determinante ist das Produkt aller Eigenwerte (in ihrer algebraischen Vielfachheit): $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Lösung Ende

6. Wie hängt der Rang einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit ihren Eigenwerten und -vektoren zusammen?

Lösung

Zunächst gilt für den Rang einer quadratischen Matrix: $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n - \dim \text{Kern}(\mathbf{A})$. Der Kern einer quadratischen Matrix ist der Eigenraum zum Eigenwert Null: $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \text{Eig}(\mathbf{A}, 0)$. Nun ist hier zu beachten, dass die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes nicht mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmen muss. Somit kann man folgende Aussage treffen: Falls Null ein Eigenwert von \mathbf{A} mit algebraischer Vielfachheit $k \geq 1$ ist, dann gilt:

$$n - k \leq \text{Rang}(\mathbf{A}) \leq n - 1.$$

Falls \mathbf{A} diagonalisierbar ist, so entspricht ihr Rang genau der Anzahl an Eigenwerten ungleich Null (in ihrer algebraischen Vielfachheit).

Lösung Ende

7. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Wie verhalten sich die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen $2\mathbf{A}$, \mathbf{A}^2 und \mathbf{A}^{-1} zu denen von \mathbf{A} ?

———— Lösung ————

Sei \mathbf{v} ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ . Da \mathbf{A} regulär ist, gilt stets $\lambda \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A}\mathbf{v} &= 2\lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} \end{aligned}$$

Alle dieser Matrizen haben dieselben Eigenräume wie \mathbf{A} , aber zu unterschiedlichen Eigenwerten $(2\lambda, \lambda^2, \frac{1}{\lambda})$.

———— Lösung Ende ————

Aufgabe 2: Eigenzerlegung symmetrischer Matrizen

1. Welche Eigenschaften im Bezug auf Eigenwerte und -vektoren besitzen symmetrische Matrizen, die quadratische Matrizen im Allgemeinen nicht besitzen?

———— Lösung ————

- Symmetrische Matrizen besitzen ausschließlich reelle Eigenwerte.
- Eigenräume zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.
- Sie sind diagonalisierbar.

Somit existiert für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthonormale Eigenbasis des \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren von \mathbf{A} besteht.

———— Lösung Ende ————

Jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich in ein Produkt dreier Matrizen zerlegen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1^T & - \\ \vdots & & \\ - & \mathbf{u}_n^T & - \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix und $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, d.h. $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$. Diese Zerlegung wird (reelle) Eigenzerlegung genannt.

2. Was steht in den Spalten von \mathbf{U} und in der Diagonalen von $\mathbf{\Lambda}$?

———— Lösung ————

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$: Eigenvektoren von \mathbf{A} , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: Eigenwerte von \mathbf{A} .

———— Lösung Ende ————

3. Was für eine Art von Transformation beschreiben die Matrizen? Welche geometrische Interpretation ergibt sich daraus für symmetrische Matrizen?

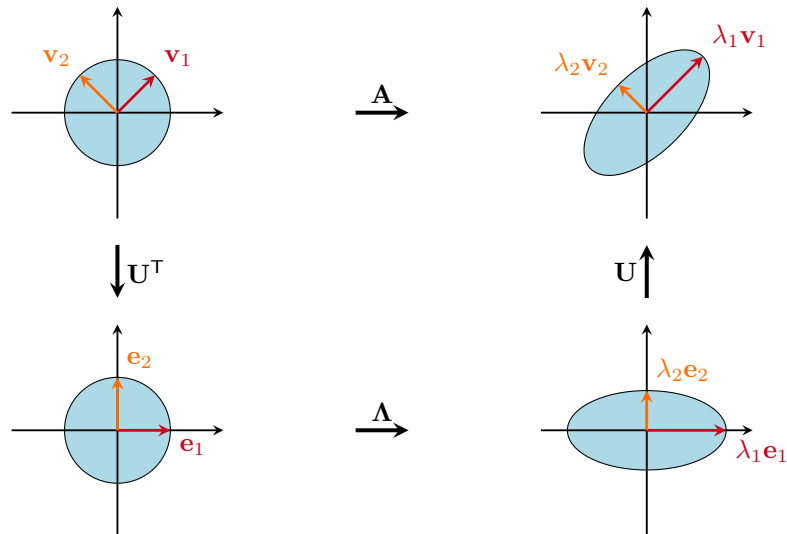
———— Lösung ————

In der Multiplikation von rechts nach links:

\mathbf{U}^T : Rotation/Spiegelung in die Eigenbasis von \mathbf{A}

$\mathbf{\Lambda}$: Streckung entlang der Standardbasisvektoren (in Eigenbasis)

\mathbf{U} : Rückrotation/-spiegelung in die Standardbasis



Symmetrische Matrizen sind damit Skalierungsmatrizen entlang ihrer orthogonalen Eigenvektoren.

— Lösung Ende —

4. Zeigen Sie, dass eine Matrix A symmetrisch sein muss, um eine reelle Eigenzerlegung zu besitzen.

— Lösung —

$$A^T = (U\Lambda U^T)^T = U^T \Lambda^T U^T = U\Lambda U^T = A$$

— Lösung Ende —

5. Wie kann man mithilfe der Eigenzerlegung Matrixpotenzen $A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ mal}}$ effizient berechnen?

— Lösung —

Es gilt:

$$A^n = AA \dots A = U \underbrace{U^T U}_{I} A U^T \cdot \dots \cdot U A U^T = U A A \dots A U^T = U \Lambda^n U^T.$$

Es genügt also, die Eigenzerlegung zu berechnen, die Eigenwerte zu potenzieren und die Matrizen wieder ausmultiplizieren.

— Lösung Ende —

- * Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie folgende Aussage: Die Matrix A ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle ihre Eigenwerte größer oder gleich null sind.

— Lösung —

\Rightarrow : Falls A positiv definit ist, gilt für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, dass $x^T A x \geq 0$. Insbesondere gilt dies für ihre Eigenvektoren $v \in \mathbb{R}^n$: $v^T A v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 \geq 0$. Da $\|v\|^2 \geq 0$, ist auch der zugehörige Eigenwert $\lambda \geq 0$. Somit sind alle Eigenwerte von A nicht-negativ.

\Leftarrow : Seien v_1, \dots, v_n orthonormale Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Da A symmetrisch ist, hat sie eine Eigenzerlegung $A = V \Lambda V^T$ mit $V = [v_1, \dots, v_n]$ und $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Somit gilt:

$$x^T A x = x^T V \Lambda V^T x = u^T \Lambda u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2 \geq 0.$$

Somit ist A positiv semidefinit.

— Lösung Ende —

Aufgabe 3: Potenzmethode

Die Potenzmethode ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung des Eigenvektors zum betragsmäßig größten Eigenwertes einer (diagonalisierbaren) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei wird ein (zufälliger) Startvektor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ bestimmt und in jedem Schritt folgende Iterationsvorschrift iteriert:

$$\mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_t\|}.$$

Dabei nehmen wir stets an, dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$.

1. Warum wird der Vektor in jedem Schritt normiert?

Lösung

Dies hat numerische und praktische Gründe. Ohne die Normierung würde die Länge des Vektors gegen Null oder Unendlich gehen (abhängig davon, ob der betragsmäßig größte Eigenwert kleiner oder größer als Eins im Betrag ist). Außerdem kann die Normierung für die Abbruchbedingung notwendig sein.

Lösung Ende

2. Für welche Startvektoren \mathbf{v}_0 sollte das Verfahren in der Theorie nicht gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert konvergieren? Warum passiert dies häufig trotzdem?

Lösung

- Nullvektor (offensichtlich)
- Ein Eigenvektor zu einem anderen Eigenwert.
- Die beiden vorherigen Punkte sind ein Spezialfall vom Folgenden: Ein Vektor, der im Spann aller anderen Eigenvektoren ist (also derer, deren Eigenwert nicht betragsmäßig am größten ist). Dies erkennt man wie folgt: Seien $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ beliebige Eigenvektoren von \mathbf{A} zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die eine Basis des \mathbb{R}^n bilden. So eine Eigenbasis existiert, da per Annahme \mathbf{A} diagonalisierbar ist. Der Startvektor \mathbf{v}_0 hat keinen Anteil an \mathbf{u}_1 , also gilt $\mathbf{v}_0 = 0\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ mit den Koeffizienten $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für \mathbf{v}_1 ohne Normierung:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{v}_0 \\ &= \mathbf{A}(0\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \\ &= 0\mathbf{A}\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{A}\mathbf{u}_n \\ &= 0\mathbf{u}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Falls \mathbf{v}_0 keinen Anteil an \mathbf{u}_1 hat, haben alle folgenden weiterhin keinen Anteil, sodass das Verfahren nicht gegen den Eigenvektor konvergieren kann. Jedoch passiert dies aufgrund von numerischen Fehlern trotzdem.

Lösung Ende

3. Wie kann man, unter der Annahme, dass \mathbf{A} symmetrisch ist, das Verfahren modifizieren, um weitere Eigenvektoren zu erhalten?

Lösung

- Da \mathbf{A} eine symmetrische Matrix ist, lässt sie sich wie folgt schreiben: $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ die zugehörigen, orthonormalen Eigenvektoren von \mathbf{A} sind (diese gewichtete Summe von äußeren Produkten ist im Wesentlichen die Eigenzerlegung). Wir können den betragsmäßig größten Eigenwert auf Null setzen, indem wir ihn aus der Matrix raus projizieren: $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T$. Es gilt:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1^T & - \\ \vdots & & \\ - & \mathbf{u}_n^T & - \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ die Eigenvektoren von \mathbf{A} sind. Das Rausprojizieren entspricht dem Setzen des ersten Eigenwertes auf Null. Damit ist λ_2 der betragsmäßig größte Eigenwert von \mathbf{A}' .

- Wir können alternativ den Vektor in manchen Iterationen mithilfe von \mathbf{u}_1 orthogonalisieren, sodass das Verfahren gegen \mathbf{u}_2 konvergiert.

Lösung Ende

4. Wie kann man mithilfe der Potenzmethode den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert direkt bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dafür haben?

Lösung

Wir bestimmen ihre Inverse \mathbf{A}^{-1} und führen die Potenzmethode für diese aus. Der betragsmäßig kleinste Eigenwert von \mathbf{A} ist der betragsmäßig größte von \mathbf{A}^{-1} , falls dieser nicht Null ist. Damit muss \mathbf{A} regulär sein.

Lösung Ende

- * Zeigen Sie, dass das Verfahren exponentiell mit dem Faktor $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$ konvergiert.

Lösung

Da \mathbf{A} diagonalisierbar ist, kann man den Startvektor \mathbf{v}_0 mithilfe der Eigenbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ von \mathbf{A} linear kombinieren:

$$\mathbf{v}_0 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

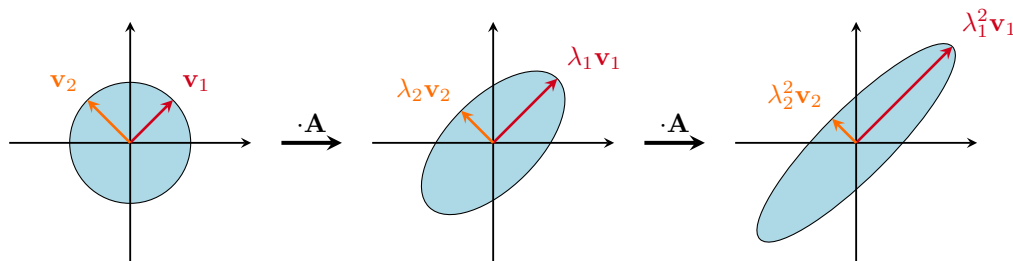
Offensichtlich muss \mathbf{v}_0 so gewählt werden, sodass $\alpha_1 \neq 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{v}_0 &= \alpha_1 \mathbf{A}^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}^t \mathbf{u}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n \\ \frac{\mathbf{A}^t \mathbf{v}_0}{\lambda_1^t} &= \frac{1}{\lambda_1^t} (\alpha_1 \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t \mathbf{u}_n) \\ &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Da $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, gilt $0 \leq \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ für $i \in \{2, \dots, n\}$. Somit ist $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t$ stets der größte Faktor, der exponentiell mit der Anzahl an Schritten gegen Null geht.

Es folgt noch eine Visualisierung der Potenzmethode, wenn man den Normierungsschritt weglässt. Die Matrix \mathbf{A} und ihre Potenzen drücken den Einheitskreis zu einer Ellipse, wobei sich die Richtung des betragsmäßig größten Eigenwertes am weitesten ausdehnt.



Lösung Ende
