Gliederung

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \Box, a_1, \ldots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer "Übergangswörter" $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $0 \to 00,\ 1 \to 01,\ \# \to 11$).

$\rightsquigarrow$ Kodierung von M ist $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

$\rightsquigarrow$ Kodierung umkehrbar aber nicht alle Wörter über $\{0, 1\}^*$ kodieren eine Turing-Maschine.

$$M_w := \begin{cases} M & \text{falls } w = \langle M \rangle \\ M_\Omega & \text{sonst} \end{cases}$$

$w \in \{0, 1\}^*$ keine valide Kodierung
$\rightsquigarrow$ feste Maschine M_Ω, die die nigends definierte Funktion berechnet

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\leadsto$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

$\leadsto$ M' hält bei Eingabe w'
$\Leftrightarrow$ M gibt bei Eingabe w' eine 0 aus
$\Leftrightarrow$ $\chi_K(w') = 0$
$\Leftrightarrow$ $w' \notin K$
$\Leftrightarrow$ M' hält nicht bei Eingabe $\langle M' \rangle = w'$. $\lightning$