FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 23.10.2022

Nicht-öffentliche Lösungsvorschläge zum 0. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Wenn x^2 gerade ist, so ist auch x gerade.

(ii) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

(iii) Jeder Baum T mit mindestens einem Knoten enthält ein Blatt.

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Wir beweisen die Aussage mittels Kontraposition. Ist x ungerade, dann gibt es eine Zahl k so, dass $x = 2k + 1$. Dann ist $x^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Also ist x^2 auch ungerade.

(ii) Wir nehmen an, es gibt zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ so, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Wir wählen p und q so, dass sie teilerfremd sind. Somit gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2.$$

Daraus folgt, dass p^2 gerade ist, und aus (i) wissen wir, dass p auch eine gerade Zahl ist. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p = 2k$, und somit ist $2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Somit sind q^2 und q gerade Zahlen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, p und q seien teilerfremd.

(iii) Angenommen, alle Knoten in T haben Grad mindestens zwei. Sei P ein maximaler Pfad in T. Sei u ein Endpunkt von P. Da P maximal ist und $d(u) \geq 2$, hat u zwei Nachbarn $w_1, w_2 \in V(P)$. Andernfalls müsste u einen Nachbarn außerhalb von $V(P)$ besitzen und dies würde uns erlauben P zu verlängern, was der Maximalität von P widerspricht.

Nehmen wir den Teilpfad Q von P zwischen den Knoten w_1 und w_2. Fügen wir u samt der Kanten uw_1 und uw_2 zu Q hinzu, erhalten wir einen Kreis. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, T sei ein Baum.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) Sei T ein Baum mit $n \geq 1$ Knoten. Dann hat T genau $n - 1$ viele Kanten.

(ii) Für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $|V(T)|$.

IA: $|V(T)| = 1$

Dann ist $|E(T)| = 0 = |V(T)| - 1$.

IV: Für jeden Baum T mit n Knoten gilt $|E(T)| = n - 1$.

IS: zu zeigen: Für jeden Baum T mit $n + 1$ Knoten gilt $|E(T)| = n$.
Aus Aufgabe 1.(*iii*) wissen wir, dass T ein Blatt hat. Sei also v ein Blatt von T und $T' = T - v$. Laut **IV** gilt $|E(T')| = n - 1$. Da v Grad eins hat, gilt $|E(T)| = |E(T')| + 1 = n$.

(ii) Für jede ungerade Zahl n gilt, dass $n = 2m + 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen mittels Induktion über m, dass $(2m + 1)^2 - 1$ durch 8 teilbar ist.

IA: $m = 0$

Dann ist $(2m + 1)^2 - 1 = 0 = 0 \cdot 8$.

IV: $(2m + 1)^2 - 1$ ist durch 8 teilbar für ein $m \in \mathbb{N}$.

IS: zu zeigen: $(2(m + 1) + 1)^2 - 1$ ist durch 8 teilbar.
Es gilt

$$(2(m + 1) + 1)^2 - 1 = (2m + 1 + 2)^2 - 1 = (2m + 1)^2 + 4(2m + 1) + 4 - 1.$$

Laut IV ist $(2m + 1)^2 - 1$ durch 8 teilbar. Es genügt also zu zeigen, dass $4(2m + 1) + 4$ auch durch 8 teilbar ist:

$$4(2m + 1) + 4 = 4(2m + 2) = 8(m + 1).$$

Aufgabe 3

Der Multitrillardär Beff Jezos möchte seinen Angestellten etwas Gutes tun und wählt zufällig 100 von ihnen für ein Spiel aus. Er sammelt die 100 Angestellten in einem Raum. Bevor die Angestellten den Raum betreten, wird ihnen entweder ein blauer oder ein gelber Punkt auf die Stirn gemalt. Zusätzlich werden den Angestellten jegliche Möglichkeiten entzogen, die Farbe des Punktes durch Technologie zu ermitteln.

Sobald alle versammelt sind, werden die Türen verschlossen und ein großer Monitor spielt ein Video von Beff ab. «I want to play a game.», fängt der CEO an und wechselt dann auf Deutsch. «Für die nächsten 50 Stunden haben Sie, in den letzten 10 Minuten jeder Stunde, die Möglichkeit den Raum durch die blaue oder die gelbe Tür zu verlassen. Falls Sie den Raum durch die Tür verlassen, die zur Farben Ihres Punktes gehört, erhalten Sie eine Woche Sonderurlaub. Sollten Sie den Raum durch die falsche Tür verlassen, wird Ihnen hingegen eine Woche Urlaub abgezogen. Sie dürfen während des Spiels allerdings nicht miteinander kommunizieren. Wenn Sie die Regeln des Spiels missachten, wird Ihnen fristlos gekündigt.»

Entsetzt schauen sich die Spieler im Raum um. Ein freundlich aussehender älterer Herr winkt Ihnen aus einer Ecke zu. «Keine Sorge. Im Hinterraum gibt es Betten, ein Buffet und Toiletten.» Er schmunzelt ein bisschen. «Ich muss aber schon sagen, dass man die gelben Punkte auf den Stirnen etwas schlechter erkennen kann, als die blauen.»

Plötzlich sehen die Spieler erleichtert aus. Wie können sie gewinnen? Und was ist die Mindestsumme auf die sie Beff Jezos verklagen sollten?

Anmerkung: Sie dürfen annehmen, dass sich die Angestellten vollständig rational verhalten, im Gegensatz zu Beff.

Lösung zu Aufgabe 3

Falls eine Person nur blaue oder nur gelbe Punkte sieht, kann sie sofort die Farbe des eigenen Punkts erraten, denn sie weiß, dass beide Farben vorhanden sind. Nachdem sie ihre Tür wählt, wissen alle anderen Personen im Raum, dass sie die andere Farbe haben.

Ansonsten warten die Spieler*innen, bis der Countdown bei 49 ist. Wählt niemand eine Tür, wissen alle, dass keine Person nur blaue oder nur gelbe Punkte sieht. Sieht also eine Person genau einen blauen oder genau einen gelben Punkt, dann weiß sie nun, dass ihr Punkt die Farbe haben muss die ansonsten nur ein mal vertreten ist (sonst hätte die andere Person ihre Tür bereits gefunden).

Allgemein gilt: Am Ende der Stunde $50 - i$, gibt es mindestens $i + 1$ Punkte pro Farbe. Da es insgesamt 100 Personen gibt, werden alle Personen spätestens dann die eigene Tür finden, wenn das Ende der Stunde 50 anbricht.

Die Frage nach der Mindestsumme in einer Klage ist nicht allein mit Mathematik beantwortbar.