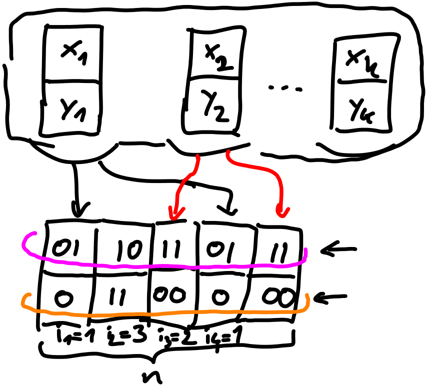
Das Postsche Korrespondenzproblem I

Definition

Für ein endliches Alphabet Σ ist das Postsche Korrespondenzproblem die Menge

$$\mathrm{PCP} := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^k \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1,2,\dots,k\}} : x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\}$$

$01 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 01 \cdot 11 \neq 0 \cdot 11 \cdot 00 \cdot 0 \cdot 00$



Das Postsche Korrespondenzproblem I

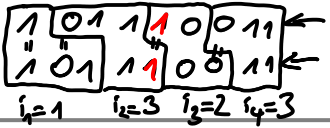
Definition

Für ein endliches Alphabet Σ ist das Postsche Korrespondenzproblem die Menge

$$\text{PCP} := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^k \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : \underbrace{x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}}\}$$

Beispiel 1

$$\left(\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{101}, \binom{x_2}{y_2} = \binom{10}{00}, \binom{x_3}{y_3} = \binom{011}{11}\right) \in \text{PCP}$$



$n=4$

Das Postsche Korrespondenzproblem I

Definition

Für ein endliches Alphabet Σ ist das Postsche Korrespondenzproblem die Menge

$$\mathrm{PCP} := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^k \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\}$$

Beispiel 1

$$\left(\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{101}, \binom{x_2}{y_2} = \binom{10}{00}, \binom{x_3}{y_3} = \binom{011}{11}\right) \in \mathrm{PCP}$$

Wähle $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 2, i_4 = 3$.

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \cdot 011 \cdot 10 \cdot 011 = 101110011$$

$$y_1 \cdot y_3 \cdot y_2 \cdot y_3 = 101 \cdot 11 \cdot 00 \cdot 11 = 101110011$$

Das Postsche Korrespondenzproblem I

Definition

Für ein endliches Alphabet Σ ist das Postsche Korrespondenzproblem die Menge

$$\mathrm{PCP} := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^k \mid \exists_{n \geq 1}\, \exists_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\}$$

Beispiel 1

$$\left(\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{101}, \binom{x_2}{y_2} = \binom{10}{00}, \binom{x_3}{y_3} = \binom{011}{11}\right) \in \mathrm{PCP}$$

Wähle $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 2, i_4 = 3$.

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_3 = \boxed{1} \cdot 011 \cdot 10 \cdot \boxed{011} = 101110011$$

$$y_1 \cdot y_3 \cdot y_2 \cdot y_3 = \boxed{101} \cdot 11 \cdot 00 \cdot \boxed{11} = 101110011$$

Beispiel 2

$$\left(\binom{1}{10}, \binom{10}{1}, \binom{01}{0}, \binom{0}{001}\right) \notin \mathrm{PCP}$$

Das Postsche Korrespondenzproblem I

Definition

Für ein endliches Alphabet Σ ist das Postsche Korrespondenzproblem die Menge

$$\mathrm{PCP} := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^* \times \Sigma^*)^k \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\}$$

Beispiel 1

$$\left(\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{101}, \binom{x_2}{y_2} = \binom{10}{00}, \binom{x_3}{y_3} = \binom{011}{11}\right) \in \mathrm{PCP}$$

Wähle $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 2, i_4 = 3$.

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \cdot 011 \cdot 10 \cdot 011 = 101110011$$

$$y_1 \cdot y_3 \cdot y_2 \cdot y_3 = 101 \cdot 11 \cdot 00 \cdot 11 = 101110011$$

Beispiel 2

$$\left(\binom{1}{10}, \binom{10}{1}, \binom{01}{0}, \binom{0}{001}\right) \notin \mathrm{PCP}$$

„Suffixfreiheit“: jedes x_i endet mit einem anderen Zeichen als y_i

Das Postsche Korrespondenzproblem II

$\boxed{PCP \leq Z \Rightarrow Z \text{ unentscheidbar}}$

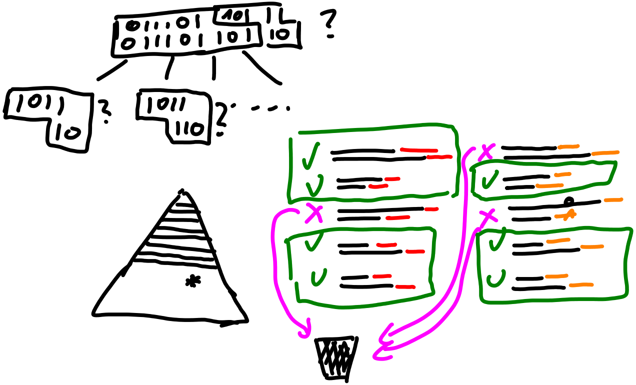
Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt

Das Postsche Korrespondenzproblem II

Hinweise:

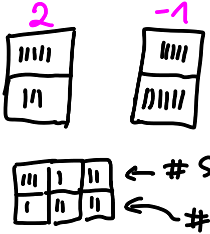
1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).



Das Postsche Korrespondenzproblem II

Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).
3. „unäres PCP“ ($|\Sigma| = 1$) entscheidbar:



Striche oben = # Striche unten

Das Postsche Korrespondenzproblem II

Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).
3. „unäres PCP" ($|\Sigma| = 1$) entscheidbar:

   Beweisidee: Es kommt nur darauf an, dass

   $$\sum_{j \le n} |x_{i_j}| = \sum_{j \le n} |y_{i_j}| \quad \text{also} \quad \sum_{j \le n} (|x_{i_j}| - |y_{i_j}|) = 0.$$

   $\{1, 3\}$

   $\{2, -5\}$

   $5\times \quad 2\times \rightsquigarrow \Sigma = 0$

   $\rightsquigarrow$ unäres PCP äquivalent zur Frage:

   "lassen sich k gegebene ganze Zahlen $(|x_i| - |y_i|) \in \mathbb{Z}$ nichttrivial linear zu 0 kombinieren?"

   $\rightsquigarrow$ genau dann unmöglich wenn alle Zahlen positiv oder alle negativ

   $\exists n \geq 1$

Das Postsche Korrespondenzproblem II

Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).
3. „unäres PCP“ ($|\Sigma| = 1$) entscheidbar:

   Beweisidee: Es kommt nur darauf an, dass

   $$\sum_{j \le n} |x_{i_j}| = \sum_{j \le n} |y_{i_j}| \quad \text{also} \quad \sum_{j \le n} (|x_{i_j}| - |y_{i_j}|) = 0.$$

   $\rightsquigarrow$ unäres PCP äquivalent zur Frage:

   “lassen sich k gegebene ganze Zahlen $(|x_i| - |y_i|) \in \mathbb{Z}$ nichttrivial linear zu 0 kombinieren?”

   $\rightsquigarrow$ genau dann unmöglich wenn alle Zahlen positiv oder alle negativ
4. PCP entscheidbar für $\underline{k = 2}$ Eingabepaare, aber unentscheidbar für $\underline{k \ge 4}$ Eingabepaare.

Das Postsche Korrespondenzproblem II

Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).
3. „unäres PCP" ($|\Sigma| = 1$) entscheidbar:

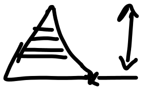
   Beweisidee: Es kommt nur darauf an, dass

   $$\sum_{j \le n} |x_{i_j}| = \sum_{j \le n} |y_{i_j}| \quad \text{also} \quad \sum_{j \le n} (|x_{i_j}| - |y_{i_j}|) = 0.$$

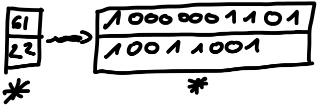
   $\rightsquigarrow$ unäres PCP äquivalent zur Frage:

   "lassen sich k gegebene ganze Zahlen $(|x_i| - |y_i|) \in \mathbb{Z}$ nichttrivial linear zu 0 kombinieren?"

   $\rightsquigarrow$ genau dann unmöglich wenn alle Zahlen positiv oder alle negativ
4. PCP entscheidbar für $k = 2$ Eingabepaare, aber unentscheidbar für $k \ge 4$ Eingabepaare.
5. PCP entscheidbar falls nur nach einer Lösung mit Länge $\underline{\le n}$ gesucht



Das Postsche Korrespondenzproblem II



Hinweise:

1. PCP oft in Unentscheidbarkeitsbeweisen (Reduktionen) benutzt
2. PCP semi-entscheidbar für beliebiges Σ (vermöge Brute-Force-Algorithmus).
3. „unäres PCP“ ($|\Sigma| = 1$) entscheidbar:

   Beweisidee: Es kommt nur darauf an, dass

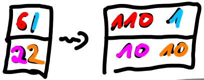
   $$\sum_{j \leq n} |x_{i_j}| = \sum_{j \leq n} |y_{i_j}| \quad \text{also} \quad \sum_{j \leq n} (|x_{i_j}| - |y_{i_j}|) = 0.$$

   $\leadsto$ unäres PCP äquivalent zur Frage:

   “lassen sich k gegebene ganze Zahlen $(|x_i| - |y_i|) \in \mathbb{Z}$ nichttrivial linear zu 0 kombinieren?”

   $\leadsto$ genau dann unmöglich wenn alle Zahlen positiv oder alle negativ
4. PCP entscheidbar für $k = 2$ Eingabepaare, aber unentscheidbar für $k \geq 4$ Eingabepaare.
5. PCP entscheidbar falls nur nach einer Lösung mit Länge $\leq n$ gesucht
6. Für beliebiges Σ lässt sich PCP auf PCP mit $\Sigma' = \{0, 1\}$ zurückführen

Frage: warum funktioniert die Reduktion für 6. nicht so:



Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified") sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdots y_{i_n} \right\}$$

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified") sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdot \cdots \cdot y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified“) sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdot \cdots \cdot y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Verwende neue Symbole $\$, \# \notin \Sigma$

Definiere für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:

$$(aw)^{\text{li}} = \#aw^{\text{li}} \qquad (aw)^{\text{re}} = a\#w^{\text{re}} \qquad \varepsilon^{\text{li}} = \varepsilon^{\text{re}} = \varepsilon$$

Reduktion f

1 $\binom{x_j}{y_j} \mapsto \binom{x_j^{\text{re}}}{y_j^{\text{li}}}$ a# #a

Sowie neue Paare

2 $\binom{\#x_1^{\text{re}}}{y_1^{\text{li}}} \binom{\$}{\#\$}$

Noch zu zeigen: f ist Reduktion, also $P \in \text{MPCP} \Leftrightarrow f(P) \in \text{PCP}$.

$aba \rightsquigarrow aba^{li} = \#a(ba)^{li} = \#a\#b\#a$

$(ba)^{li} = \#b(a)^{li} = \#b\#a$

$a^{li} = \#a(\varepsilon)^{li} = \#a$

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified") sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdot \cdots \cdot y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Verwende neue Symbole $\$, \# \notin \Sigma$

Definiere für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:

$$(aw)^{\text{li}} = \#aw^{\text{li}} \qquad (aw)^{\text{re}} = a\#w^{\text{re}} \qquad \varepsilon^{\text{li}} = \varepsilon^{\text{re}} = \varepsilon$$

Noch zu zeigen: f ist Reduktion, also $\boxed{P \in \text{MPCP} \Leftrightarrow f(P) \in \text{PCP}}$.

Reduktion f

$$\binom{x_j}{y_j} \mapsto \binom{x_j^{\text{re}}}{y_j^{\text{li}}}$$

Sowie neue Paare

$$\binom{\#x_1^{\text{re}}}{y_1^{\text{li}}} \binom{\$}{\#\$}$$

Beispiel (Lösung $(1,3,2,3) \mapsto (4,3,2,3,5)$)

$$\left(\binom{1}{101}, \binom{10}{00}, \binom{011}{11} \right) \mapsto \left(\binom{1\#}{\#1\#0\#1}, \binom{1\#0\#}{\#0\#0}, \binom{0\#1\#1\#}{\#1\#1}, \binom{\#1\#}{\#1\#0\#1}, \binom{\$}{\#\$} \right) \in \text{PCP?}$$

MPCP?

#1#0#1#1#1#0#1 0#1#1#$

#1#0#1#1#1#0#0#1#1#$

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified“) sehr nützlich

$$\mathrm{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \mathrm{PCP} \mid \exists_{n \geq 1}\, \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdots y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Verwende neue Symbole $\$, \# \notin \Sigma$

Definiere für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:

$$(aw)^{\text{li}} = \#aw^{\text{li}} \qquad (aw)^{\text{re}} = a\#w^{\text{re}} \qquad \varepsilon^{\text{li}} = \varepsilon^{\text{re}} = \varepsilon$$

Reduktion f

$$\binom{x_j}{y_j} \mapsto \binom{x_j^{\text{re}}}{y_j^{\text{li}}}$$

Sowie neue Paare

$$\underbrace{\binom{\#x_1^{\text{re}}}{y_1^{\text{li}}}}\ \underbrace{\binom{\$}{\#\$}}$$

Noch zu zeigen: f ist Reduktion, also $\underline{P \in \mathrm{MPCP}} \Leftrightarrow f(P) \in \mathrm{PCP}$.

"$\Rightarrow$": $(\underline{1}, i_2, \ldots, i_n)$ Lösung für $P \Rightarrow (\underline{k+1}, \underline{i_2, \ldots, i_n}, \underline{k+2})$ Lösung für $f(P)$

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified") sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2,\ldots,i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdots y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Verwende neue Symbole $\$, \# \notin \Sigma$

Definiere für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:

$$(aw)^{\text{li}} = \#aw^{\text{li}} \qquad (aw)^{\text{re}} = a\#w^{\text{re}} \qquad \varepsilon^{\text{li}} = \varepsilon^{\text{re}} = \varepsilon$$

Reduktion f

$$\binom{x_j}{y_j} \mapsto \binom{x_j^{\text{re}}}{y_j^{\text{li}}}$$

Sowie neue Paare

$$\underline{\binom{\#x_1^{\text{re}}}{y_1^{\text{li}}}} \; \underline{\binom{\$}{\#\$}}$$

Noch zu zeigen: f ist Reduktion, also $P \in \text{MPCP} \Leftrightarrow f(P) \in \text{PCP}$.

"$\Rightarrow$": $(1, i_2, \ldots, i_n)$ Lösung für $P \Rightarrow (k+1, i_2, \ldots, i_n, k+2)$ Lösung für $f(P)$

"$\Leftarrow$": $(\underline{k+1}, \underline{i_2, \ldots}, i_n, \underline{k+2})$ Lösung für $f(P)$

oBdA. $i_m \neq \underline{k+2}$, sonst $(k+1, i_2, \ldots, i_m)$ auch Lösung

Das Modifizierte PCP

Folgende Variante MPCP (M wie „Modified“) sehr nützlich

$$\text{MPCP} := \left\{ \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \ldots, \binom{x_k}{y_k} \right) \in \text{PCP} \mid \exists_{n \geq 1} \exists_{i_2, \ldots, i_n \in \{1,2,\ldots,k\}} : x_1 \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_n} = y_1 \cdot y_{i_2} \cdot \cdots \cdot y_{i_n} \right\}$$

Lemma

MPCP $\leq$ PCP.

Reduktion f

$$\binom{x_j}{y_j} \mapsto \binom{x_j^{\text{re}}}{y_j^{\text{li}}}$$

Sowie neue Paare

$$\binom{\#x_1^{\text{re}}}{y_1^{\text{li}}} \binom{\$}{\#\$}$$

Verwende neue Symbole $\$, \# \notin \Sigma$

Definiere für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:

$$(aw)^{\text{li}} = \#aw^{\text{li}} \qquad (aw)^{\text{re}} = a\#w^{\text{re}} \qquad \varepsilon^{\text{li}} = \varepsilon^{\text{re}} = \varepsilon$$

Noch zu zeigen: f ist Reduktion, also $P \in \text{MPCP} \Leftrightarrow f(P) \in \text{PCP}$.

“$\Rightarrow$”: $(1, i_2, \ldots, i_n)$ Lösung für $P \Rightarrow (k+1, i_2, \ldots, i_n, k+2)$ Lösung für $f(P)$

“$\Leftarrow$”: $(k+1, i_2, \ldots, i_n, k+2)$ Lösung für $f(P)$

oBdA. $i_m \neq k+2$, sonst $(k+1, i_2, \ldots, i_m)$ auch Lösung $\rightsquigarrow (1, i_2, \ldots, i_n)$ Lösung für P.

$\boxed{H_0}$ reduzierbar auf $\boxed{\text{MPCP}}$

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

H_0 reduzierbar auf MPCP

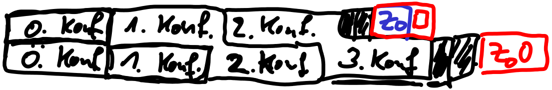
Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\Box z_0 \Box$, Maschine M mit $\delta(z_0, \Box) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$$\underbrace{\binom{\#}{\#\Box z_0 \Box\#}}_{\text{Start}}, \underbrace{\binom{\#}{\#}, \binom{\Box}{\Box}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}}_{\text{Kopieren}}, \underbrace{\binom{\#}{\#\Box}, \binom{\#}{\Box\#}}_{\text{Band-Extension}}, \underbrace{\binom{z_0\Box}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}}_{\text{Übergänge}}$$



H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\underline{\binom{\#}{\#\square z_0 \square\#}}, \binom{\#}{\#}, \underline{\binom{\square}{\square}}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square$

$\#\square z_0 \square \# \mid$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \underline{\binom{\square}{\square}}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \underline{\binom{z_0\square}{z_0 0}}, \underline{\binom{z_0 0}{1 z_0}}$

$\# \square$ $z_0 \square$

$\# \square \underline{z_0 \square} \# \square$ $z_0 0$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0\square\#}, \binom{\#}{\underline{\#}}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\underline{\#\square}}, \binom{\#}{\underline{\square\#}}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0\square$

$\#\square z_0\square\#\square z_0 0$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\underline{\#}}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \#$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\Box z_0 \Box$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \Box) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\Box z_0\Box\#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\Box}{\Box}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\Box}, \underline{\binom{\#}{\Box\#}}, \binom{z_0\Box}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\Box z_0\Box\#\Box z_0 0\#\Box$

$\#\Box z_0\Box\#\Box z_0 0\#\Box 1 z_0\Box\#$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0\square\#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0\square\#\square z_0 0\#\square$

$\#\square z_0\square\#\square z_0 0\#\square 1 z_0\square\#\square$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0 \square \# \square 1$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0 \square$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0 \square \# \square 1 z_0 0$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0 \square \#$

$\#\square z_0 \square \# \square z_0 0 \# \square 1 z_0 \square \# \square 1 z_0 0 \#$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Imitation der Konfigurationsfolge - Beispiel

Initiale Konfiguration $\square z_0 \square$, Maschine M_w mit $\delta(z_0, \square) = (z_0, 0, N)$ und $\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R)$

$\binom{\#}{\#\square z_0\square\#}, \binom{\#}{\#}, \binom{\square}{\square}, \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}, \binom{z_0\square}{z_0 0}, \binom{z_0 0}{1 z_0}, \underbrace{\binom{z_e\square}{z_e}, \binom{z_e 0}{z_e}, \binom{z_e 1}{z_e}, \binom{z_e\#\#}{\#}}_{\text{ende}}$

$\#\square z_0\square\#\square z_0 0\#\square 1 z_0\square\#$ ...

$\#\square z_0\square\#\square z_0 0\#\square 1 z_0\square\#\square 1 z_0 0\#$ ...

$z_e \# \#$ ||

$z_e \square \underline{***}$ || $z_e ***$ || $z_e \# \#$ ||

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

$\binom{\#}{\#\Box z_0\Box\#}$ - **initiale Konfiguration**

$\binom{a}{a}$ für alle $\underline{a \in \Gamma}$ – **Kopierregeln**

$\binom{\#}{\#}, \binom{\#}{\#\Box}, \binom{\#}{\Box\#}$ – **Randregeln**

$\binom{z_e a}{z_e}$ für alle $a \in \Gamma$ – **Löschregeln**

$\binom{z_e\#\#}{\#}$ – **Abschlussregel**

Überführungsregeln: $\forall_{z_i, z_j \in Z}$ & $\forall_{a,b,c \in \Gamma}$

$\binom{z_i a}{z_j b}$ falls $\underline{\delta(z_i, a) = (z_j, b, N)}$

$\binom{z_i a}{b z_j}$ falls $\delta(z_i, a) = (z_j, b, \underline{R})$

$\binom{a z_i b}{z_j a c}$ falls $\delta(\underline{z_i}, \underline{b}) = (\underline{z_j}, \underline{c}, \underline{L})$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \underline{\{z_e\}})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Zeigen $\langle M\rangle \in H_0 \Leftrightarrow f(\langle M\rangle) \in MPCP$

"$\Rightarrow$": M hält auf leerem Band

$\rightsquigarrow$ es gibt Konfigurationenfolge

$$\underline{\square z_0 \square} \vdash_M^* \underline{\alpha z_e \beta} \text{ mit } \alpha, \beta \in \Gamma^*.$$

Simulation durch MPCP wie im Beispiel,
am Ende β entfernt durch Löschregel,
Abschluss durch Abschlussregel

$\binom{\#}{\#\square z_0 \square \#}$ - **initiale Konfiguration**

$\binom{a}{a}$ für alle $a \in \Gamma$ – **Kopierregeln**

$\binom{\#}{\#}, \binom{\#}{\#\square}, \binom{\#}{\square\#}$ – **Randregeln**

$\binom{z_e a}{z_e}$ für alle $a \in \Gamma$ – **<u>Löschregeln</u>**

$\binom{z_e\#\#}{\#}$ – **<u>Abschlussregel</u>**

Überführungsregeln: $\forall_{z_i, z_j \in Z}$ & $\forall_{a,b,c \in \Gamma}$

$\binom{z_i a}{z_j b}$ falls $\delta(z_i, a) = (z_j, b, N)$

$\binom{z_i a}{b z_j}$ falls $\delta(z_i, a) = (z_j, b, R)$

$\binom{a z_i b}{z_j a c}$ falls $\delta(z_i, b) = (z_j, c, L)$

H_0 reduzierbar auf MPCP

Beweis (Skizze)

Reduktion f erhält des Codewortes von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ und erzeugt MPCP-Instanz.
oBdA: Eingabemaschine M hält $\Leftrightarrow$ M hält in akzeptierendem Zustand

Zeigen $M \in H_0 \Leftrightarrow f(\langle M \rangle) \in MPCP$

"$\Rightarrow$": M hält auf leerem Band

$\rightsquigarrow$ es gibt Konfigurationenfolge

$$\Box z_0 \Box \vdash_M^* \alpha z_e \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in \Gamma^*.$$

Simulation durch MPCP wie im Beispiel,
am Ende β entfernt durch Löschregel,
Abschluss durch Abschlussregel

"$\Leftarrow$": haben MPCP Lösung für $f(\langle M \rangle)$

$\rightsquigarrow$ Lösung beginnt mit initialer Konfiguraion
Überführungsregeln erzwingen valide Übergänge
$\# \rightsquigarrow$ Lösung hört mit Abschluss auf
$\rightsquigarrow$ z_e wird erreicht

$\binom{\#}{\#\Box z_0 \Box \#}$ - **initiale Konfiguration**

$\binom{a}{a}$ für alle $a \in \Gamma$ – **Kopierregeln**

$\binom{\#}{\#}, \binom{\#}{\#\Box}, \binom{\#}{\Box\#}$ – **Randregeln**

$\binom{z_e a}{z_e}$ für alle $a \in \Gamma$ – **Löschregeln**

$\binom{z_e\#\#}{\#}$ – **Abschlussregel**

Überführungsregeln: $\forall_{z_i, z_j \in Z}$ & $\forall_{a,b,c \in \Gamma}$

$\binom{z_i a}{z_j b}$ falls $\delta(z_i, a) = (z_j, b, N)$

$\binom{z_i a}{b z_j}$ falls $\delta(z_i, a) = (z_j, b, R)$

$\binom{a z_i b}{z_j a c}$ falls $\delta(z_i, b) = (z_j, c, L)$

Unentscheidbarkeit von PCP

semi-entscheidbar

Korollar

- $H \leq H_0 \leq \text{MPCP} \leq \text{PCP}$
- PCP (und MPCP) sind unentscheidbar.
- H_0 ist semi-entscheidbar (und damit H und K)
- es gibt "universelle Turing-Maschine"

$$\underbrace{\{w\#x \mid x \in T(M_w)\}}_{\text{semi entscheidbar}} \leq H$$