Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 1.1

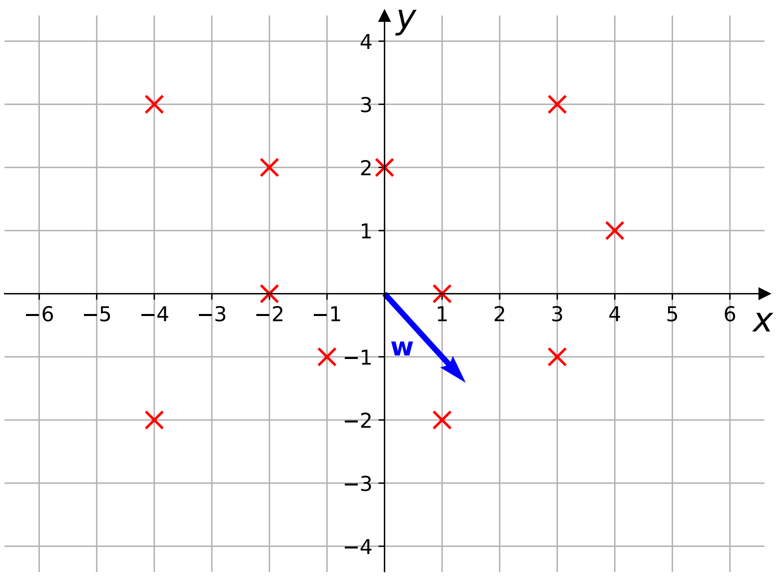
Themen: Skalarprodukt, Zahlen

Ugo & Gabriel

1. November 2022

Aufgabe 1: Skalarprodukt

1. Was ist ein Skalarprodukt?
2. Wie ist das Standardskalarprodukt definiert? Geben Sie die Definition auch in Matrixschreibweise an.
3. Welche geometrische Bedeutung besitzt das Standardskalarprodukt im euklidischen Raum?
4. Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ sowie eine Menge von Punkten. Mit welchen Punkten hat $\mathbf{w}$ ein positives Skalarprodukt, ein negatives Skalarprodukt bzw. ein Skalarprodukt gleich Null?



5. Berechne die folgenden Skalarprodukte $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{v}_i$:

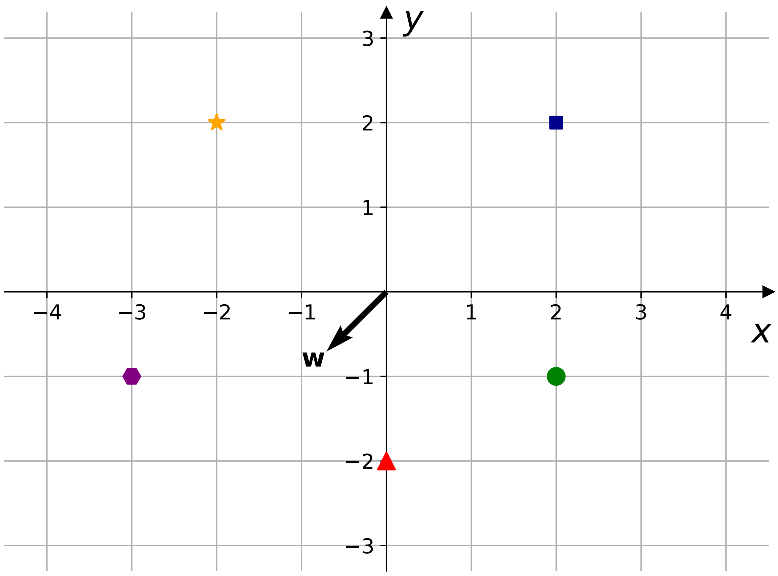
   a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

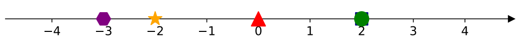
6. Welche Aussagen lassen sich mithilfe der Skalarprodukte aus der letzten Aufgabe über die Vektoren und deren Verhältnis zueinander treffen?

7. Gegeben ist ein Vetkor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ sowie fünf Punkte.

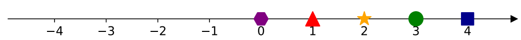


Welche der folgenden vier Optionen zeigt die orthogonale Projektion der Punkte in den Raum, der von dem Vektor $\mathbf{w}$ aufgespannt wird?

a)



b)



c)

d)

8. Wie sieht der Datensatz aus den obigen fünf Punkten aus, falls man sie auf $\mathbf{w}$ und dann mit $\mathbf{w}$ zurück in den $\mathbb{R}^2$ projiziert (mathematisch entspricht dies dem Ausdruck $\mathbf{w}\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i$)? Zeichnen Sie die mithilfe von $\mathbf{w}$ rekonstruierten Punkte in das Koordinatensystem ein!

Aufgabe 2: Zahlen

1. Wie viele Stellen benötigt man maximal, um die Summe zweier ganzen Zahlen mit n Stellen korrekt dazustellen?

2. Wie viele Stellen benötigt man maximal, um das Produkt zweier ganzen Zahlen mit n Stellen verlustfrei dazustellen?

3. Gegeben der Definition einer ganzen Zahl $[a, b] \in \mathbb{Z}$ als Paar von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, wie in der Vorlesung eingeführt. Geben Sie zwei weitere Elemente der ganzen Zahlen als Paar von natürlichen Zahlen an, die in der selben Äquivalenzklasse liegen wie $[8, 9]$.

4. Gegeben der Definition einer rationalen Zahl $[a, b] \in \mathbb{Q}$ als Paar von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, wie in der Vorlesung eingeführt. Geben Sie zwei weitere Elemente der rationalen Zahlen als Paar von natürlichen Zahlen an, die in der selben Äquivalenzklasse liegen wie $[6, 9]$.

5. Eine abelsche Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G sowie einer (abgeschlossenen) Verknüpfung $*\colon\ G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$, die folgende Gesetze erfüllt:

   (1) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

   (2) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in G$ gilt: $a * b = b * a$.

   (3) Neutrales Element: Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a * e = a$.

   (4) Inverses Element: Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = e$.

   Welche der folgenden Tupel sind eine abelsche Gruppe? Falls nein, welches Gesetz wird gebrochen? Falls ja, welches ist das neutrale Element?

   a) $(\mathbb{R}^{3\times 3}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Matrixmultiplikation ist

   b) $(\mathbb{N}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf $\mathbb{N}$ ist

   c) $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf $\mathbb{Z}$ ist

   d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ ist

   e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ ist

   f) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist

6. Ein Tupel $(K, +, n, \cdot, e)$ mit einer Grundmenge K ist ein Körper, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n.

   (2) $(K \setminus \{n\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e.

   (3) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$.

   Ein Beispiel für einen Körper ist $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$.

   Wir wollen nun einen Körper, der es erlaubt durch 0 zu teilen. Mit anderen Worten ein Tupel $(K, +, n, \cdot, e)$ mit einer Grundmenge K, sodass $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n und $(K, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e ist. Zusätzlich soll weiterhin das Distributivgesetz gelten. Überprüfen Sie ob eins der folgenden Tupel diese Bedinnung erfüllt. Wenn nein, welche Gesetze werden gebrochen?

a) $(\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

   i. $\infty + a = a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,

   ii. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{\infty\}$,

   iii. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$.

b) $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty, -\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

   i. $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$,

   ii. $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$,

   iii. $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0$,

   iv. $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$,

   v. $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{<0} \cup \{-\infty\}$,

   vi. $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$,

   vii. $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{<0} \cup \{-\infty\}$,

   viii. $(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 1$,

   ix. $(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 1$.

c) $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

   i. $\infty + a = a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

   ii. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$,

   iii. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$.