FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 16. März 2023

3. Hausarbeit – Logik

Abgabe: 13.04.2023 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 13. April 2023, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 10 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 40 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Jeder Punkt in der Hausarbeit entspricht dabei $\frac{1}{4}$ Portfoliopunkten. Es sind also bis zu 10 Portfoliopunkte zu erreichen.

Sie dürfen Aussagen aus dem Teil der Vorlesung und des Skripts zur Aussagenlogik, und aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden, ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Alle Antworten sind zu begründen, außer dies wird explizit ausgeschlossen.

Hausaufgabe 1

3+2+7 = 12 Punkte

Wir definieren die erweiterte Aussagenlogik AL(M), indem wir die Syntax der Aussagenlogik durch folgende Formelbildungsregel erweitern:

Wenn $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}(M)$ Formeln sind, dann ist auch $M(\varphi, \psi, \chi)$ eine Formel in $\mathrm{AL}(M)$.

Die Semantik des Junktors $M(\varphi, \psi, \chi)$ ist dabei so definiert, dass $[\![M(\varphi, \psi, \chi)]\!]^\beta = 1$, für eine passende Belegung β, genau dann, wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Wenn $[\![\varphi]\!]^\beta = 1$ und $[\![\chi]\!]^\beta = 1$, oder
- Wenn $[\![\chi]\!]^\beta = 0$, dann ist mindestens $[\![\varphi]\!]^\beta = 0$ oder $[\![\psi]\!]^\beta = 0$.

(i) Seien $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathrm{AL}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert eine Formel $\varphi_M \in \mathrm{AL}$, so dass für alle zu ψ_1, ψ_2, ψ_3 passenden Belegungen β gilt: $[\![M(\psi_1, \psi_2, \psi_3)]\!]^\beta = 1 \Leftrightarrow \beta \models \varphi_M$.

Sei $\mathrm{AL}_{\perp,M} \subseteq \mathrm{AL}(M)$ die Klasse der Formeln der erweiterten Aussagenlogik, welche nur Variablen, $\perp$ und den Junktor M verwenden.

(ii) Sei $X \in \mathrm{AVar}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert eine Formel $\psi \in \mathrm{AL}_{\perp,M}$ mit $\psi \equiv \neg X$.

Sei $\mathrm{AL}_{\perp,\neg,\rightarrow} \subseteq \mathrm{AL}$ die Klasse der Formeln, welche nur Variablen, $\perp$, $\neg$ und $\rightarrow$ verwenden.

(iii) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion: Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_{\perp,\neg,\rightarrow}$ existiert eine Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_{\perp,M}$ mit $\varphi \equiv \varphi'$.

Hausaufgabe 2 3+3+4 = 10 Punkte

Sei C eine Klausel, dann definieren wir die *negierte Klausel* $C^\neg := \{\bar{L} \mid L \in C\}$. Wir betrachten eine abgewandelte Version des Resolutionskalküls: In der *alternierenden Resolution* ist die Resolvente aus zwei Klauseln C_1 und C_2 wie folgt definiert: Sei L ein Literal so dass $L \in C_1$ und $\bar{L} \in C_2$. Dann heißt

$$C := \big((C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{L}\})\big)^\neg$$

eine *negierte Resolvente* von C_1 und C_2. Wir sagen, dass C_1 und C_2 *negiert resolviert* werden und schreiben $\mathrm{Res}^\neg(C_1, C_2)$ für die Menge der negierten Resolventen von C_1 and C_2. Eine *negierte Resolutionswiderlegung* ist analog zur standardmäßigen Resolutionswiderlegung definiert, mit der Ausnahme, dass wir in jedem Schritt negierte Resolventen bilden.

Falls Sie in dieser Aufgabe ein Gegenbeispiel angeben, darf dieses höchstens 4 Variablen verwenden.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie: Die alternierende Resolution ist korrekt.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Die alternierende Resolution ist vollständig.

Sei Φ eine Klauselmenge. Wir definieren die *negierte Klauselmenge* $\Phi^\neg := \{C^\neg \mid C \in \Phi\}$. Weiter definieren wir den *alternierenden DPLL* Algorithmus wie folgt. Der Algorithmus funktioniert analog zu dem in der Vorlesung vorgestellten DPLL Algorithmus (siehe Abbildung 3.1 auf Seite 49 des Skripts) bis auf folgende Änderung: Man ersetze

- *Ergibt* $\mathrm{DPLL}(\Phi \cup \{\{\mathrm{L}\}\})$ *oder* $\mathrm{DPLL}(\Phi \cup \{\{\bar{\mathrm{L}}\}\})$ *erfüllbar, gib erfüllbar zurück, sonst unerfüllbar.*

durch

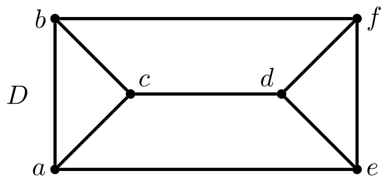
- *Ergibt* $\mathrm{DPLL}(\Phi^\neg \cup \{\{\mathrm{L}\}\})$ *oder* $\mathrm{DPLL}(\Phi^\neg \cup \{\{\bar{\mathrm{L}}\}\})$ *erfüllbar, gib erfüllbar zurück, sonst unerfüllbar.*

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie: Der alternierende DPLL Algorithmus gibt unerfüllbar zurück genau dann, wenn eine Klauselmenge unerfüllbar ist.

Hausaufgabe 3 1+1+8+8=18 Punkte

Sei G ein ungerichteter Graph und sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine Funktion $c : V(G) \to [k]$ ist eine *k-Kreis-Färbung für G*, wenn für alle Kreise $C \subseteq G$ gilt, dass es mindestens einen Knoten $u \in V(C)$ gibt, sodass $c(u) \neq c(v)$, für alle $v \in V(C) \setminus \{u\}$. Ein Graph G heißt *k-Kreis-färbbar*, falls für G eine k-Kreis-Färbung existiert.

Sei G ein Graph, sodass $V(G)$ abzählbar unendlich viele Knoten enthält. Weiter sei H ein endlicher Teilgraph von G und sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fest gewählt. Außerdem sei der Graph D durch die folgende Abbildung gegeben.



(i) Geben Sie ohne Begründung eine 4-Kreis-Färbung für D an.

(ii) Zeigen Sie: Wenn G k-Kreis-färbbar ist, dann ist auch H k-Kreis-färbbar.

(iii) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{H,k}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn H k-Kreis-färbbar ist. Zeigen Sie, wie man aus jeder Belegung, die $\varphi_{H,k}$ erfüllt, eine k-Kreis-Färbung c_H konstruieren kann und wie man aus einer k-Kreis-Färbung c_H eine Belegung konstruiert, welche $\varphi_{H,k}$ erfüllt.

(iv) Zeigen Sie: Wenn jeder endliche Teilgraph G' von G eine k-Kreis-Färbung besitzt, dann ist G k-Kreis-färbbar.

Anmerkung: Sie können den Ausdruck $\varphi_{H,k}$, mitsamt seiner geforderten Eigenschaften, aus der vorherigen Unteraufgabe in dieser Unteraufgabe verwenden, unabhängig von der von Ihnen dort angegebenen Lösung.