FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 20. Januar 2023

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 12. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie folgende σ-Strukturen aus Tutorium 11. Zur Erinnerung: Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Geben Sie eine unterscheidende Formel φ für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, wobei $\mathrm{qr}(\varphi)$ minimal ist.

Lösung zu Aufgabe 1

Die Struktur $\mathcal{B}$ hat zwei Knoten, deren Nachbarschaften disjunkt sind. Solche Knoten existieren aber nicht in $\mathcal{A}$. Wir beschreiben diese Eigenschaft mit folgender Formel

$$\psi = \exists x \exists y \forall z ((E(x,z) \to \neg E(y,z)) \wedge (E(y,z) \to \neg E(x,z)) \wedge \neg E(x,y)).$$

Somit gilt $\mathcal{A} \not\models \psi$ und $\mathcal{B} \models \psi$.

Die Formel ψ hat Quantorenrang drei. Weil die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, gibt es keine unterscheidende Formel φ' für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{qr}(\varphi') \leq 2$.

Aufgabe 2

Sei τ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ τ-Strukturen mit den Universen A und B.

(i) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind, dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Wir nutzen aus, dass zwei τ-Strukturen genau dann elementar äquivalent sind, wenn die Duplikatorin jedes Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel zwischen diesen beiden Strukturen gewinnt.

Angenommen $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, dann existiert ein Isomorphimus $\pi : A \to B$ zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Die Duplikatorin antworten nun mit $\pi(a)$, wenn der Herausforderer ein Element a aus A wählt und mit $\pi^{-1}(b)$, wenn der Herausforderer ein Element b aus B wählt. Am Ende des Spiels entsteht so ein partieller Isomorphismus zwischen den gespielten Elementen, da π ein Isomorphismus ist. Also sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent.

(ii) Wir definieren $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$, jeweils mit den Universen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, wobei $R^{\mathcal{N}} = R^{\mathcal{R}} = \emptyset$ für alle Relationssymbole $R \in \tau$ gilt. Da $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{card}(\mathbb{R})$ kann es keinen Isomorphismus zwischen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ geben. Aber $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ sind elementar äquivalent, da die Duplikatorin in einer beliebigen Runde eines jeden EF-Spiels einfach mit einem beliebigen noch nicht gespielten Element antworten kann, falls der Herausforderer ein noch nicht gespieltes Element wählt, oder ansonsten die bereits gespielten Elemente mit Hilfe des bis dahin etablierten partiellen Isomorphismus zuordnet.

Aufgabe 3

Falsum öffnet die Türen zum Thronraum des Logikzwergenkönigs mit einem gewaltigen Schwung. «Ha! Da bin ich alter Mann! Jetzt wird alles falsch!» Der Logikzwergenkönig gibt sich standfest und erhebt sich von seinem Thron. «Nichts wird passieren, du Schelm! Die Logik der Logikzwerge lässt sich nicht so einfach verbiegen!»

Der Bösewicht grinst. «Ach wirklich?», erwidert er belustigt. «Aber was wenn die Logik schon von selbst nicht viel sagt?» Falsum kann sich kaum zusammenreißen und seine Herausforderung bricht förmlich aus ihm heraus. «Erklär mir doch bitte mal wie man ungerade und gerade Dinge unterscheidet!»

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E.

Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen σ-Strukturen mit einem Universum gerader Größe ist, in der Klasse der endlichen, zusammenhängenden Graphen, nicht FO[σ]-definierbar.

Lösung zu Aufgabe 3

Angenommen eine solche Formel φ existiert und sei m der Quantorenrang dieser Formel. Wir definieren $\mathcal{A} = ([m], E^{\mathcal{A}} = \{(i,j) \mid i,j \in [m] \text{ und } i \neq j\})$ und $\mathcal{B} = ([m+1], E^{\mathcal{B}} = \{(i,j) \mid i,j \in [m+1] \text{ und } i \neq j\})$. Eine der beiden Strukturen besitzt ein Universum gerader Größe und die andere besitzt ein Universum ungerader Größe. Wir wollen nun zeigen, dass das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ von der Duplikatorin (D) gewonnen wird.

Hierfür reicht es, wenn die D auf jeden Zug des Herausforderers (H) mit einem noch nicht gespielten Element der anderen Struktur antwortet, wenn der H ein noch nicht gespieltes Element zieht. Ansonsten kann die D mit dem Element antwortet was ihm zuvor zugeordnet wurde, in der Runde in der das vom H gespielte Element gezogen wurde. Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide m oder mehr Elemente besitzen, lässt sich diese Strategie durch das gesamte Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ verfolgen. Da $(x,y), (y,x) \in E^{\mathcal{A}}$ bzw. $(x,y), (y,x) \in E^{\mathcal{B}}$ genau dann gilt, wenn $x \neq y$, ist dies eine Gewinnstrategie für D.

Somit gilt, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$. Also gilt auch, dass $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \models \varphi$. Da genau eine der beiden Strukturen ungerade viele Elemente im Universum hat, ist dies ein Widerspruch zur Annahme, dass φ existiert.