

## 10. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 08.01.2024–12.01.2024)

### Aufgabe 1. O-Notation

Welche der folgenden Beziehungen sind korrekt?

- (a)  $n^{10} \in O((1,001)^n)$
- (b)  $2^n + n \in O(2^n \cdot n)$
- (c)  $3^n \in O(2^n \cdot n^3)$
- (d)  $(\ln n)^2 \in O(\sqrt{n})$

### Aufgabe 2. Nichtdeterministische Turing-Maschinen

- (a) Geben Sie eine nichtdeterministische Turing-Maschine  $M$  an, sodass:

$$T(M) = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass die folgende Sprache in NP liegt:

$$B := \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist keine Binärdarstellung einer Primzahl}\}.$$

Beschreiben Sie dafür die Arbeitsweise einer nichtdeterministischen Turing-Maschine  $M$  mit  $T(M) = B$  und  $\text{time}_M(n) \in O(n^c)$ , wobei  $c \in \mathbb{N}$ .

*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass die Sprache

$$L = \{w\#a\#b \in \{0,1,\#\}^* \mid w, a, b \in \{0,1\}^* \text{ und } w = a \circ b\}$$

in P ist, wobei  $\circ$  zwei Binärzahlen multipliziert.

### Aufgabe 3. 2-COLORING

Betrachten Sie das 2-COLORING-Problem.

#### 2-COLORING

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

**Frage:** Gibt es eine totale Funktion  $f : V \rightarrow \{1, 2\}$ , sodass für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt, dass  $f(u) \neq f(v)$ ?

1. Zeigen Sie, dass 2-COLORING in NP liegt.
2. Zeigen Sie, dass 2-COLORING in P liegt.

#### Aufgabe 4. PROBLEME IN NP

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in NP liegen.

1. **VERTEX COVER**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und  $k \in \mathbb{N}$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $X \subseteq V$  der Größe höchstens  $k$ , sodass für jede Kante  $e \in E$  gilt, dass  $e \cap X \neq \emptyset$ ?

2. **CYCLE COLORING**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

**Frage:** Gibt es eine totale Funktion  $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ , sodass

- für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt:  $f(u) \neq f(v)$  und
- jeder Kreis in  $G$  enthält drei Knoten  $v_1, v_2$  und  $v_3$  mit  $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2$  und  $f(v_3) = 3$ ?