Anwendung: Relationale Datenbanken

Beispiel: Relationale Datenbanken

Eine relationale Datenbank ist eine endliche Menge von "Tabellen".

Z. B. könnte eine Filmdatenbank wie imdb.org wie folgt aussehen

Schauspieler		
Schausp.	ID	Geburtsdatum
George Clooney	1	6. Mai 1961
Scarlett Johansson	2	22. November 1984
Jeff Daniels	3	19. Februar 1955
...	...	...

Flime		
Titel	Regie	Schau.
Good night ... and good luck	George Clooney	1
Good night ... and good luck	George Clooney	3
Lost in translation	Sofia Coppola	2
...	...	...

Die Menge τ von Tabellennamen heißt Datenbankschema.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Relationale Datenbanken.

- Jede Spalte einer Tabelle in der Datenbank enthält Einträge vom selben Typ, z.B. Wörter oder Zahlen.

  In Datenbankterminologie werden Spaltenname Attribute genannt.

  Jedes Attribut i hat einen Typ D_i, genannt domain.
- Jede Zeile der Tabelle enthält ein Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Relationale Datenbanken.

- Jede Spalte einer Tabelle in der Datenbank enthält Einträge vom selben Typ, z.B. Wörter oder Zahlen.

  In Datenbankterminologie werden Spaltenname Attribute genannt.

  Jedes Attribut i hat einen Typ D_i, genannt domain.
- Jede Zeile der Tabelle enthält ein Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$.

Eine Datenbanktabelle kann daher als n-stellige Relation über der Menge $D := D_1 \cup \cdots \cup D_n$ aufgefasst werden.

Eine relationale Datenbank mit Schema τ kann also als τ-Struktur $\mathcal{D}$ wie folgt geschrieben werden:

- Das Universum $A := D$ ist die Vereinigung aller Domains.
- für jede Tabelle $R \in \tau$ enthält die Struktur eine Relation $R^{\mathcal{D}}$, die alle Tupel der Tabelle enthält.

Beispiel: Relationale Datenbanken

Der domain aller Einträge sind Zeichenketten. Sei Σ^* die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet $\{a, \dots, z, A, \dots, Z, 0, \dots, 9\}$.

Die Filmdatenbank entspricht folgender Struktur $\mathcal{D}$ über der Signatur

$$\sigma := \{ \text{ Actors, Movies } \}:$$

- Das Universum ist $D := \Sigma^*$
- Die Relation

$$\text{Actors}^{\mathcal{D}} := \left\{ \begin{array}{c} \text{(George Clooney, 1, 6 May 1961),} \\ \text{(Scarlett Johansson, 2, 22 November 1984),} \\ \text{(Jeff Daniels, 3, 19 February 1955)} \end{array} \right\}$$

- Die Relation

$$\text{Movies}^{\mathcal{D}} := \left\{ \begin{array}{c} \text{(Good night ... and good luck, George Clooney, 1),} \\ \text{(Good night ... and good luck, George Clooney, 3),} \\ \text{(Lost in translation, Sofia Coppola, 2)} \end{array} \right\}$$

Datenbankanfragen

Datenbank als Struktur.

Die Filmdatenbank entspricht der Struktur $\mathcal{D} = (D, Actors^{\mathcal{D}}, Movies^{\mathcal{D}})$ mit

Actors$^{\mathcal{D}}$:= { (George Clooney, 1, 1.5.1961),
(Scarlett Johansson, 2, 22.11.1984),
(Jeff Daniels, 3, 19.2.1955) }

Movies$^{\mathcal{D}}$:= { (Good night ... , George Clooney, 1),
(Good night ... , George Clooney, 3),
(Lost in translation, Sofia Coppola, 2) }

Datenbankanfragen als Formeln.

Die Menge der Paare von Filmtiteln und SchauspielerInnen, die in dem Film mitspielen, wird durch folgende Formel definiert:

$$\varphi(F, S) := \exists x_{id} \big(\exists x_{dat} \text{Actors}(S, x_{id}, x_{dat}) \wedge \exists x_{reg} \text{Movies}(F, x_{reg}, x_{id})\big)$$

„Gib alle Paare $\big($*Filmtitel*, *Schausp.*$\big)$ aus, wobei Filmtitel der Titel eines Films ist, in dem Schausp. mitspielt“

Datenbanken vs. Logik

Datenbanken	*Logik*
Datenbankschema τ	(Relationale) Signatur τ
Datenbank $\mathcal{D}$	τ-Struktur $\mathcal{A}$
SQL-Abfrage `Q(Title)`	Formel $\varphi(x_{title}) \in \mathrm{FO}[\tau]$

`SELECT Title`
`FROM Movies`
`WHERE Director=''G. Clooney''`	

durch `Q` definierte *View*	$\varphi(\mathcal{A}) := \{a \in A : (\mathcal{A}, [x_{title} / a]) \models \varphi\}$
(materialisiert oder nicht)	(die durch φ in $\mathcal{A}$ definierte Relation)

7.6 Substrukturen und Homomorphismen

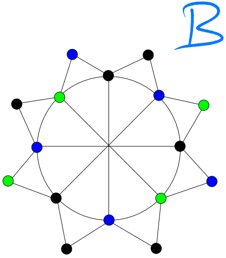
Substrukturen und Äquivalenz zwischen Strukturen

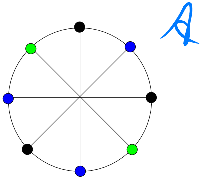
Substrukturen

Definition.

Sei τ eine Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen.

1. $\mathcal{A}$ ist eine Substruktur von $\mathcal{B}$, geschrieben als $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
   - für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $\bar{a} \in A^k$ gilt
   $$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad \bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$$
   - für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und alle $\bar{a} \in A^k$ gilt
   $$f^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{B}}(\bar{a})$$
   - für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ gilt $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.
2. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}$ eine Erweiterung von $\mathcal{A}$.





τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

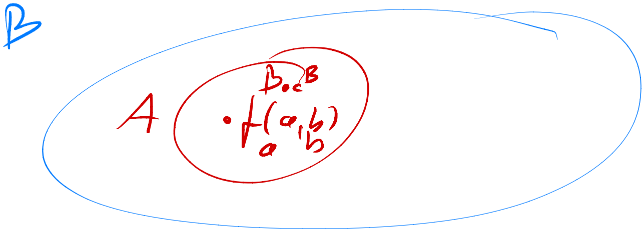
1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\bar{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\bar{a}) \in A$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und

für alle $R \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$

für alle $f \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{B}}(\bar{a})$

für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.



τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen?

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen? Ja.

Antwort. Ja, denn wenn $a, b \in N$, dann ist auch $a +^{\mathcal{Z}} b \in N$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\bar{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\bar{a}) \in A$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{B}}(\bar{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen? Ja.

Frage. Ist die Menge $M := \{-1, 0, 1, 2, ...\}$ τ-abgeschlossen?

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen? Ja.

Frage. Ist die Menge $M := \{-1, 0, 1, 2, ...\}$ τ-abgeschlossen? Nein.

Antwort. Nein, denn $-1 \in M$ aber $-1 +^{\mathcal{Z}} -1 = -2 \notin M$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen? Ja.

Frage. Ist die Menge $M := \{-1, 0, 1, 2, ...\}$ τ-abgeschlossen? Nein.

Frage. Ist die Menge $G := \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ τ-abgeschlossen?

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\bar{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\bar{a}) \in A$.

Beispiele. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$ und $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ ist.

Frage. Ist die Menge $N := \{0, 1, ...\}$ τ-abgeschlossen? Ja.

Frage. Ist die Menge $M := \{-1, 0, 1, 2, ...\}$ τ-abgeschlossen? Nein.

Frage. Ist die Menge $G := \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ τ-abgeschlossen?

Antwort. Ja, denn wenn $a, b \in G$, dann sind a, b gerade Zahlen und die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\bar{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{B}}(\bar{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Lemma. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-abgeschlossen.

Beweis. Per Definition gilt:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$, also $c^{\mathcal{B}} \in A$.
- $f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$, also ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$, für alle $\overline{a} \in A^k$. $\square$

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Lemma. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-abgeschlossen.

Umgekehrt. Für jede τ-abgeschlossene Menge $A \subseteq B$ existiert genau eine Substruktur $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit Universum A.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Lemma. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-abgeschlossen.

Umgekehrt. Für jede τ-abgeschlossene Menge $A \subseteq B$ existiert genau eine Substruktur $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit Universum A.

Definition. Der *τ-Abschluss* einer Menge $A \subseteq B$ ist die kleinste τ-abgeschlossene Menge $\mathrm{cl}_\tau(A)$ mit $A \subseteq \mathrm{cl}_\tau(A)$.

Für $A \subseteq B$ definieren wir die durch A induzierte Substruktur von $\mathcal{B}$ als die Substruktur von $\mathcal{B}$ mit Universum $\mathrm{cl}_\tau(A)$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

τ-abgeschlossene Mengen

Definition.
Sei τ eine Signatur und $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur mit Universum B.

Eine Menge $A \subseteq B$ heißt τ-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, wenn

1. $c^{\mathcal{B}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$ und
2. wenn $f \in \tau$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $\overline{a} \in A^k$ ein k-Tupel von Elementen, so ist $f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) \in A$.

Lemma. Wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, dann ist A τ-abgeschlossen.

Umgekehrt. Für jede τ-abgeschlossene Menge $A \subseteq B$ existiert genau eine Substruktur $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit Universum A.

Definition. Der *τ-Abschluss* einer Menge $A \subseteq B$ ist die kleinste τ-abgeschlossene Menge $\mathrm{cl}_\tau(A)$ mit $A \subseteq \mathrm{cl}_\tau(A)$.

Für $A \subseteq B$ definieren wir die durch A induzierte Substruktur von $\mathcal{B}$ als die Substruktur von $\mathcal{B}$ mit Universum $\mathrm{cl}_\tau(A)$.

Definition.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und
für alle $R \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $\overline{a} \in R^{\mathcal{B}}$
für alle $f \in \tau$ und $\overline{a} \in A^k$,
$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\overline{a})$
für alle $c \in \tau$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

Beispiel. Sei $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{Z}}, +^{\mathcal{Z}})$, wobei $<^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Ordnung und Addition auf $\mathbb{Z}$ sind.

Die von $\{0, 1\}$ induzierte Substruktur von $\mathcal{Z}$ ist $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}})$.

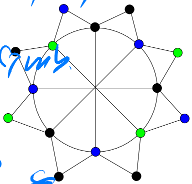
Denn: $\mathcal{N}$ muss 0 und 1 enthalten, und wegen des Abschlusses unter $+^{\mathcal{Z}}$ auch $1 + 1 = 2$ und daher auch $1 + 2 = 3$ etc.

Expansionen und Redukte

$\mathcal{B}$

$\tau = \{\text{Grün}, \text{Blau}, E\}$

Grün, Blau 1-stell. Relationen



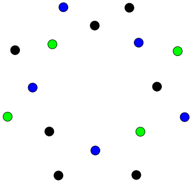
Definition. Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine Signatur und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur.

Das σ-Redukt $\mathcal{B}_{|\sigma}$ von $\mathcal{B}$ ist definiert als die σ-Struktur $\mathcal{B}_{|\sigma}$ mit

- Universum B und
- $S^{\mathcal{B}_{|\sigma}} = S^{\mathcal{B}}$ für jedes (Relations-, Funktions-, Konstanten-) Symbol $S \in \sigma$.

$\mathcal{B}$ heißt Expansion von $\mathcal{B}_{|\sigma}$.

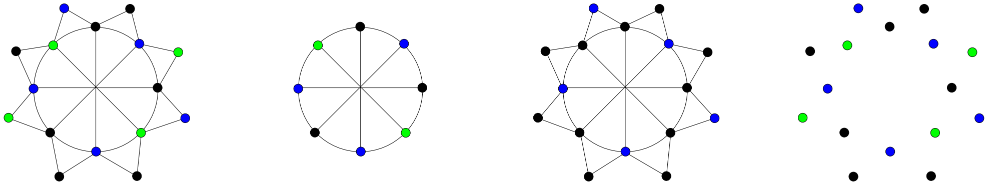
$\text{Grün}^{B} \subseteq B$



$B|\{\text{Grün}, \text{Blau}\}$

Beispiel

Beispiel. Eine $\sigma := \{E, \text{Blue}, \text{Green}\}$-Struktur, Substruktur und Redukte.



$\mathcal{G}$

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$
Substruktur

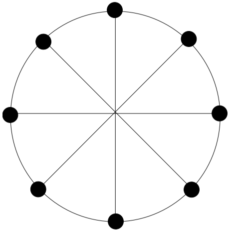
$\mathcal{G}_{|\{E,\text{Blue}\}}$
Redukt

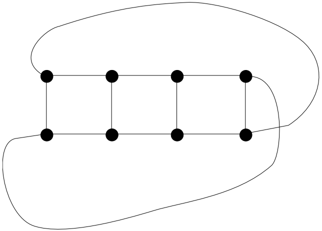
$\mathcal{G}_{|\{\text{Blue},\text{Green}\}}$
Redukt

Homomorphismen

Wann sind zwei Strukturen gleich?

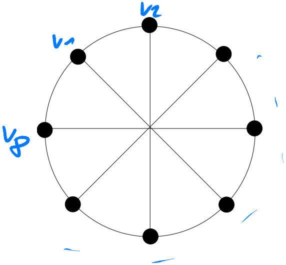
Frage. Sind die folgenden zwei Graphen verschieden?

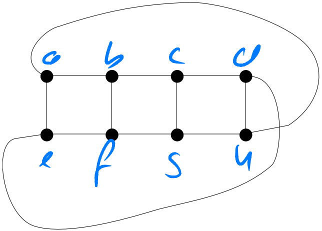




Wann sind zwei Strukturen gleich?

Frage. Sind die folgenden zwei Graphen verschieden?



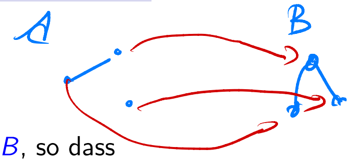


$\cong$

Mogliche Antworten.

- **Ja** wenn wir daran interessiert sind, wie sie gezeichnet sind.
- **Nein** wenn wir uns nur für ihre Knoten und Verbindungen dazwischen interessieren.

Homomorphismen



Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Ein **Homomorphismus** von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $h : A \to B$, so dass

- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt

  wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann auch $\big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}$.

- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt

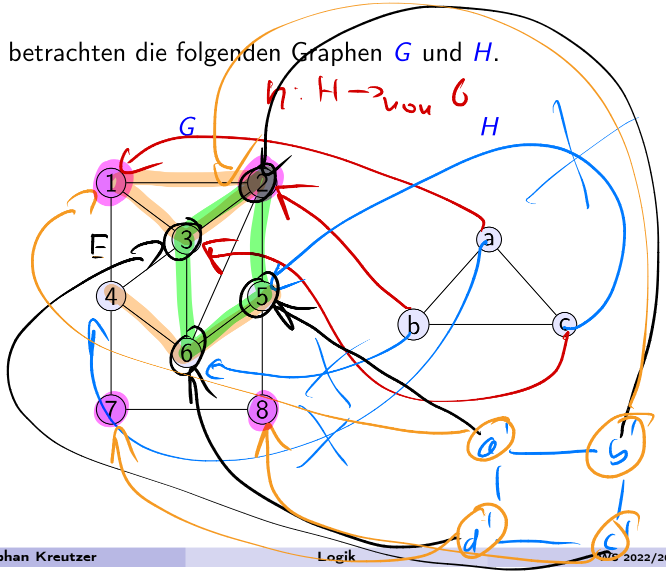
  $$h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}\big(h(a_1), \dots, h(a_k)\big).$$

- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Notation. $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$: h ist ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Beispiel

Wir betrachten die folgenden Graphen G und H.



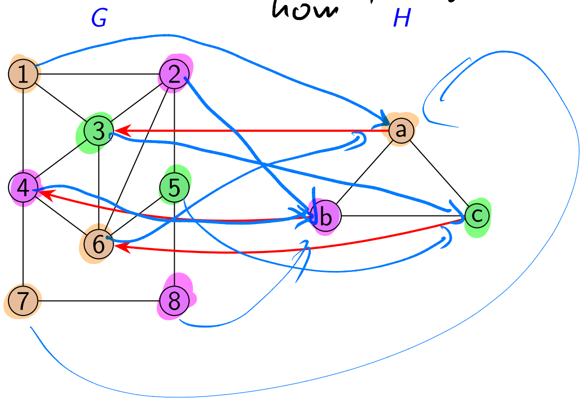
Homomorphismus $h : \mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$.
Funktion $h : A \rightarrow B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \ldots, a_k \in A^k$:
   wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann
   $(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \ldots, a_k \in A^k$:
   $h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Beispiel

Wir betrachten die folgenden Graphen G und H.

$h : G \to_{hom} H$?

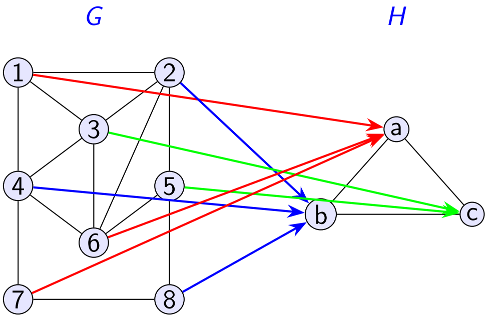


Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$.
Funktion $h : A \to B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann
   $(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Beispiel

Wir betrachten die folgenden Graphen G und H.



Es gilt $G \rightarrow_{hom} H$ und $H \rightarrow_{hom} G$.

Homomorphismus $h : \mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$.
Funktion $h : A \rightarrow B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann
   $(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Isomorphismen

Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $I : A \to B$, so dass

- I eine Bijektion zwischen A und B ist
- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ gilt
$$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \qquad \text{gdw.} \qquad (I(a_1), \ldots, I(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$
- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ gilt
$$I(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \ldots, I(a_k)).$$
- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt $I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Notation. $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$: I ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Isomorphismen

Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $I : A \to B$, so dass

- I eine Bijektion zwischen A und B ist
- für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt
$$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \qquad \text{gdw.} \qquad (I(a_1), \dots, I(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$
- für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt
$$I(f^{\mathcal{A}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \dots, I(a_k)).$$
- für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt $I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Notation. $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$: I ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$.
Funktion $h : A \to B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: wenn $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann $(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: $h(f^{\mathcal{A}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Iso- und Homomorphismen

Definition. Sei σ eine Signatur.

1. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph, geschrieben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt.
2. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind homomorph, geschrieben $\mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

Homomorphismus $h : \mathcal{A} \rightarrow_{hom} \mathcal{B}$. Funktion $h : A \rightarrow B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: wenn $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann $(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: $h(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

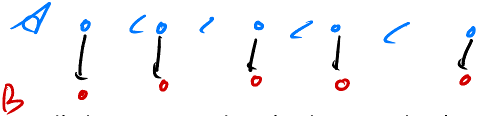
Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Bijektion $I : A \rightarrow B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw $(I(a_1), \dots, I(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$: $I(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \dots, I(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Iso- und Homomorphismen

Definition. Sei σ eine Signatur.

1. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph, geschrieben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt.
2. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind homomorph, geschrieben $\mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.



Beispiele.

- Wenn A, B endliche Mengen der gleichen Kardinalität sind, dann sind die $\emptyset$-Strukturen $(A, \emptyset) \cong (B, \emptyset)$.
- Wenn A, B endliche Mengen gleicher Kardinalität und $<^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A, B sind, dann $(A, <^{\mathcal{A}}) \cong (B, <^{\mathcal{B}})$.

  Aber: $(\mathbb{Z}, <) \not\cong (\mathbb{N}, <)$

Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$.
Funktion $h : A \to B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   wenn $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ dann
   $(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $h(f^{\mathcal{A}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Bijektion
$I : A \to B$, so dass

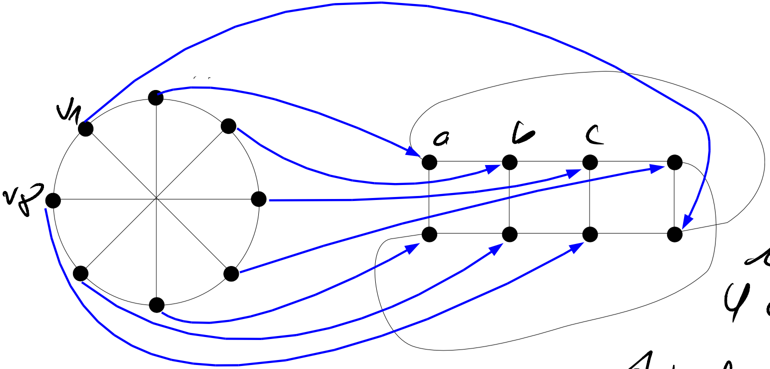
1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw $(I(a_1), \dots, I(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $I(f^{\mathcal{A}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \dots, I(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Beispiel

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Bijektion $I : A \to B$, so dass

1. für alle $R \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ gdw $(I(a_1), \dots, I(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.
2. für alle $f \in \sigma$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$:
   $I(f^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = f^{\mathcal{B}}(I(a_1), \dots, I(a_k))$.
3. für alle $c \in \sigma$ gilt $I(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Frage. Sind die beiden folgenden Graphen gleich?



$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

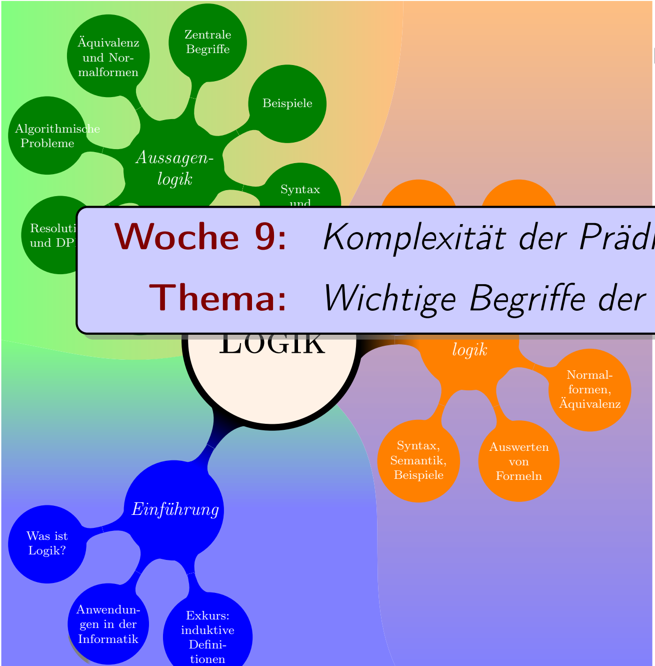
$\varphi \in$ FO Satz

$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$

Logik im Wintersemester 2022/2023

Woche 9: *Komplexität der Prädikatenlogik*

Thema: *Wichtige Begriffe der Prädikatenlogik*



Nov. 17 18 19 20 21 22 23 *Einführung*
24 25 26 27 28 29 30
31 1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20

Jan. 19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31 1
2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22
Feb. 23 24 25 26 27 28 29
30 31 1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19

Formeln mit freien Variablen vs. Sätze

Formeln mit freien Variablen vs. Sätze

$\mathcal{A}$ für welche $a \in A$ gilt:

Formeln mit freien Variablen

$(\mathcal{A}, [x/a]) \models \varphi$

$\varphi_1(x) := \forall y\, \forall z\big(y * z = x \to (y = 1 \lor z = 1)\big)$

$\varphi_4(x, y) := \exists z(x * x = y + z)$

Sätze

$\varphi_2 := \forall y \exists x\, \big(y < x \land \varphi_1(x)\big)$

$\varphi_3 := \forall x \forall y \forall z\big((x < y \land y < z) \to x < z\big)$

Formeln $\varphi(x)$.

Eine Formel $\varphi(x)$ sagt etwas über ein Element innerhalb einer Struktur aus. D.h. $\varphi(x)$ beschreibt eine Eigenschaft eines Elements.

Wenn $\beta(x) = a$ eine Belegung von x ist, dann gilt $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi(x)$, wenn a die Eigenschaft φ hat.

Sätze ψ.

Ein Satz ψ sagt etwas über die Struktur insgesamt aus.

Ohne freie Variablen brauchen wir keine Belegung β.

D.h. $\mathcal{A} \models \psi$, wenn die Struktur die Eigenschaft ψ hat.

Modellklassen und die Relation $\varphi(\mathcal{A})$

Formeln $\varphi(x)$. Eine Formel $\varphi(x)$ sagt etwas über ein Element innerhalb einer Struktur aus.

Sätze ψ. Ein Satz ψ sagt etwas über die Struktur insgesamt aus.

Oft interessieren wir uns für die „Menge" aller Objekte, die eine Formel bzw. einen Satz erfüllen.

Formeln. Bei Formeln $\varphi(x)$ ist diese „Menge"' die Menge $\varphi(\mathcal{A})$ der Elemente einer Struktur $\mathcal{A}$, die die Formel erfüllen.

Sätze. Bei einem Satz ψ ist diese „Menge"' die Klasse aller Strukturen, in denen der Satz gilt.

$Mod(\psi)$

Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$

Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Wir definieren

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : (\mathcal{A}, [x_1/a_1, \ldots, x_k/a_k]) \models \varphi\}. \quad \subseteq A^k$$

Hinweis. Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$ hängt nicht nur von $\mathcal{A}$ sondern auch von der Sequenz $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Var}^k$ ab.

Wir müssen daher diese Sequenz jeweils angeben, bevor wir die Notation benutzen können.

Vergleiche mit Methoden in Java.

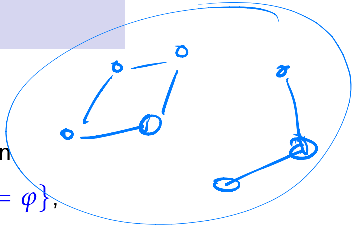
```
Boolean phi(int x_1, ..., int x_k)
```

Mit $x_1, \ldots, x_k$ wird eine Ordnung der Parameter festgelegt.

Wir können dann `Boolean b = phi(3, 5, ..., 17);` benutzen.

Modellklassen und definierbare Relationen

G



Definition (definierbare Relationen).

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$. Wir definieren

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k : (\mathcal{A}, [x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]) \models \varphi\},$$

und sagen, dass φ die Relation $\varphi(\mathcal{A})$ *in $\mathcal{A}$ definiert*.

$R = \{(a,b) :$ b ist von a aus erreichbar in $G\}$

Umgekehrt nennen wir eine Relation $R \subseteq A^k$ FO-*definierbar in $\mathcal{A}$*, wenn es eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}$ gibt, so dass $\varphi(\mathcal{A}) = R$.

Definition (Modellklassen).

Sei σ eine Signatur und $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Menge von σ-Sätzen.

Die *Modellklasse* von Φ, geschrieben $\text{Mod}(\Phi)$, ist die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$.

Falls $\Phi := \{\varphi\}$ nur einen Satz enthält, schreiben wir kurz $\text{Mod}(\varphi)$.

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition. Sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formel, $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge und $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

1. $\mathcal{I}$ *erfüllt* φ, wenn $\mathcal{I}$ zu φ passt und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

   Wir sagen auch: $\mathcal{I}$ ist ein *Modell* von φ und schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$.

2. $\mathcal{I}$ passt zu Φ, wenn sie zu allen $\psi \in \Phi$ passt. $\mathcal{I}$ erfüllt Φ, wenn $\mathcal{I}$ zu Φ passt und alle $\psi \in \Phi$ erfüllt.

   Wir sagen auch: $\mathcal{I}$ ist ein Modell von Φ und schreiben $\mathcal{I} \models \Phi$.

3. Φ ist erfüllbar, wenn es ein Modell hat. Ansonsten ist Φ unerfüllbar.

4. Φ ist *allgemeingültig*, oder eine *Tautologie*, wenn alle zu Φ passenden Interpretationen Φ erfüllen.

5. φ ist *erfüllbar/unerfüllbar/allgemeingültig*, wenn $\{\varphi\}$ erfüllbar/unerfüllbar/allgemeingültig ist.

Beispiel zu Erfüllbarkeit

Erinnerung. Satz $\varphi_{ord} \in \text{FO}[\{<\}]$ mit $\mathcal{A} \models \varphi_{ord}$ gdw. $<^{\mathcal{A}}$ ist lineare Ordnung.

Beispiele. Sei $\sigma := \{<\}$.

1. $\varphi := \varphi_{ord} \wedge \forall x \exists y\ y < x$ *ist erfüllbar, z.B. durch* $(\mathbb{Z}, <)$,

   aber nicht allgemeingültig, da $(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi$

2. $\psi := \varphi_{ord} \rightarrow \forall x \forall y \neg(y < x \wedge x < y)$ ist *allgemeingültig*.

   φ_{ord} gilt nur in $\{<\}$-Strukturen $\mathcal{A}$, in denen $<^{\mathcal{A}}$ eine strikte lineare Ordnung ist.

   Wenn $<^{\mathcal{A}}$ aber eine strikte Ordnung ist, dann ist $<^{\mathcal{A}}$ auch immer anti-symmetrisch, d.h. es kann keine Elemente a, b geben, so dass $a < b$ und $b < a$.

Logische Folgerung

Definition. Sei σ eine Signatur, $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

ψ ist eine Folgerung von Φ, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn für jede zu Φ und ψ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi.$$

Notation. Statt $\emptyset \models \psi$ schreiben wir $\models \psi$.

Beispiel zu logischer Folgerung

Erinnerung. Satz $\varphi_{ord} \in \mathsf{FO}[\{<\}]$ mit $\mathcal{A} \models \varphi_{ord}$ gdw. $<^{\mathcal{A}}$ ist lineare Ordnung.

Für einen Satz φ gilt also:

$$\varphi_{ord} \models \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \text{ gilt in allen linearen Ordnungen.}$$

Es gilt also z.B.

$$\varphi_{ord} \models \forall x \forall y \exists z \, (z \leq x \land z \leq y)$$

wobei $t \leq t'$ für die Formel $(t < t' \lor t = t')$ steht.

Eigenschaften der Folgerungsbeziehung

Lemma.

1. Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$:

$$\Phi \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\Phi \cup \{\neg\psi\} \quad \text{ist unerfüllbar}\Big)$$

2. Für alle $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$:

$$\models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\psi \ \text{ ist eine Tautologie}\Big)$$

Äquivalenz zwischen Formeln

Definition. Sei σ eine Signatur.

Zwei σ-Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ passend zu φ und ψ:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi.$$

Bemerkung. Nach Definition gilt für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$

$$\varphi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\varphi \leftrightarrow \psi \;\text{ ist allgemeingültig}\Big)$$

Zusammenfassung

1. Formeln mit freien Variablen vs. Sätze
2. Definierbare Relationen $\varphi(\mathcal{A})$.
3. Modellklassen $\mathrm{Mod}(\varphi)$.
4. Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit
5. Logische Folgerung
6. Äquivalenz