Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

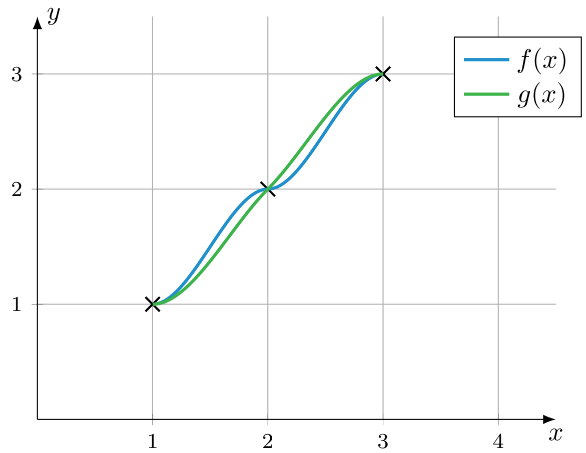
Wissenschaftliches Rechnen - Übung 4.2

Lokale Interpolation

18.12.2023 bis 22.12.2023

Aufgabe 1: Hermite-Interpolation

Gegeben sind drei Paare (x_i, y_i) aus Stützstelle x_i und Funktionswert y_i mit den Werten $(1,1)$, $(2,2)$ und $(3,3)$, welche nochmal in dieser Abbildung dargestellt sind.



1. Konstruieren Sie die linearen Gleichungssysteme (LGS), welche sich ergeben, wenn man die Punkte mithilfe eines Splines $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, das aus zwei kubischen Polynomen p_1 und p_2 besteht, interpolieren will und der Spline an allen Stützstellen eine Ableitung von null haben sollen.

Lösung

Sei $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ das kubische Polynom, dessen Koeffizienten bezüglich der Monombasis $(x^3, x^2, x, 1)$ wir bestimmen möchten. Dessen erste Ableitung ist gegeben durch

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

und ist ein Polynom, welches sich ebenfalls bezüglich der gleichen Monombasis darstellen lässt. Damit können wir als lineare Gleichungen formulieren, dass es die Stützpunkte (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) treffen soll und außerdem an diesen die vorgegebene Ableitung y'_i, y'_{i+1} haben muss:

$$\begin{array}{llllll}
p(x_i) & = y_i & \Leftrightarrow ax_i^3 & + bx_i^2 & + cx_i & + d = y_i \\
p(x_{i+1}) & = y_{i+1} & \Leftrightarrow ax_{i+1}^3 & + bx_{i+1}^2 & + cx_{i+1} & + d = y_{i+1} \\
p'(x_i) & = y'_i & \Leftrightarrow 3ax_i^2 & + 2bx_i & + c & = y'_i \\
p'(x_{i+1}) & = y'_{i+1} & \Leftrightarrow 3ax_{i+1}^2 & + 2bx_{i+1} & + c & = y'_{i+1}
\end{array}$$

Als LGS in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} x_i^3 & x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ 3x_i^2 & 2x_i & 1 & 0 \\ 3x_{i+1}^2 & 2x_{i+1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y'_i \\ y'_{i+1} \end{bmatrix}$$

Mit den konkreten Zahlenwerten sieht das LGS für das erste kubische Polynom wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das zweite ist analog:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

2. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme aus der vorherigen Aufgabe und zeichnen Sie den Spline in die obere Abbildung hinein.

Lösung

Die Lösungsvektoren sind $(-2, 9, -12, 6)^\mathsf{T}$ sowie $(-2, 15, -36, 30)^\mathsf{T}$. Damit ist unser Spline:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 + 9x^2 - 12x + 6, & \text{falls } x \in [1, 2], \\ -2x^3 + 15x^2 - 36x + 30, & \text{falls } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Lösung Ende

3. Das Ergebnis der letzten Aufgabe sieht (abhängig vom Anwendungsfall) unpassend aus. Wie kann man das Plateau entfernen?

Lösung

Das Plateau kommt dadurch zustande, dass wir am mittleren Stützpunkt die Ableitung von null vorgegeben haben. Bei der stückweise kubischen Hermite-Interpolation muss die Ableitung eben vorgegeben werden. Um einen natürlicheren Spline zu erhalten, können wir die Ableitung am mittleren Punkt mithilfe des Differenzenquotienten der beiden anderen Punkte wählen:

$$y_2' := \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 1$$

Das Ergebnis g ist in der obigen Abbildung ebenfalls dargestellt.

Lösung Ende

4. Wie viele LGS muss man lösen, wenn man n Punkte mit gegebenen Ableitungen an den Punkten mit stückweise definierten kubischen Polynomen naiv interpolieren will?

Lösung

Für jedes Segment muss ein LGS mit einer 4×4 Matrix gelöst werden. Da man bei n Stützpunkten $n - 1$ Abschnitte hat, löst man bei der stückweisen kubischen Hermite-Interpolation $n - 1$ LGS.

Hinweis: In der Praxis muss man tatsächlich kein LGS lösen, da man die kubischen Hermite-Basispolynome auf dem Intervall $[0, 1]$ verwenden kann. Mehr dazu ist im Skript oder Wikipedia zu finden. Es genügt, die Bedingungen korrekt als lineare Gleichungssysteme ausdrücken zu können.

Lösung Ende

5. Wie hoch ist der Rechenaufwand, falls sich eine Stützstelle oder deren Funktionswert/Ableitung ändert?

Lösung

Falls sich nur ein Punkt oder dessen vorgegebene Ableitung ändert, dann müssen zwei bzw. ein kubisches Polynom (je nachdem, ob es ein Randpunkt ist) neu bestimmt werden.

Lösung Ende

6. Gesucht ist nun ein (globales) Polynom, welches an den Stützstellen den entsprechenden Funktionswert sowie die gegebene Ableitung hat. Welche Monombasis muss man wählen? Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösung die Koeffizienten des gesuchten Polynoms in Monombasis liefert.

Lösung

Da wir sechs Freiheitsgrade benötigen, verwenden wir die Monombasis $(x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1)$. Unser Lösungspolynom fünften Grades ist $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ und dessen Ableitung ist $p'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$. Wir formulieren nun ein LGS, um dessen Koeffizienten zu bestimmen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 80 & 32 & 12 & 4 & 1 & 0 \\ 405 & 108 & 27 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

Aufgabe 2: Kubische Spline-Interpolation

Gegeben sind n Paare (x_i, y_i) aus Stützstelle und Funktionswert. Bei der kubischen Spline-Interpolation wird zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten $(x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1})$ ein kubisches Polynom $p_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j$ bestimmt, sodass die zusammengesetzte Funktion (genannt Spline) C^2-stetig ist, d.h. es ist an jeder Stelle zweimal stetig differenzierbar.

1. Wie viele Freiheitsgrade stehen insgesamt zur Verfügung, falls man n Datenpunkte mithilfe eines kubischen Splines interpolieren möchte?

   Lösung

   Jedes kubische Polynom $p_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j$ hat vier Freiheitsgrade a_j, b_j, c_j, d_j. Da wir bei n Datenpunkten nach $n-1$ kubischen Funktionen suchen, haben wir insgesamt $4n-4$ Freiheitsgrade zur Verfügung.

   Lösung Ende

2. Gegeben ein Stützpunkt (x_{j+1}, y_{j+1}) und die beiden angrenzenden kubischen Polynome $p_j(x)$ und $p_{j+1}(x)$. Wie kann man als lineare Gleichung formulieren, dass die ersten und zweiten Ableitungen von p_j und p_{j+1} an der Stelle x_{j+1} übereinstimmen sollen?

   Lösung

   Zunächst berechnen wir die erste und zweite Ableitung des Polynoms $p_j(x)$:

$$p_j'(x) = 3a_j x^2 + 2b_j x + c_j, \quad p_j''(x) = 6a_j x + 2b_j$$

   Was zwar offensichtlich ist, wir aber nochmal herausstellen wollen, ist, dass die Ableitungen ebenfalls Polynome sind und ebenso bezüglich der Monombasis, mit der p_j darstellt werden kann, dargestellt werden können. Damit der Spline an der Stelle x_{j+1} stetig differenzierbar ist, muss folgendes gelten:

$$p_j'(x_{j+1}) = p_{j+1}'(x_{j+1}) \Leftrightarrow 3a_j x_{j+1}^2 + 2b_j x_{j+1} + c_j = 3a_{j+1} x_{j+1}^2 + 2b_{j+1} x_{j+1} + c_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow 3a_j x_{j+1}^2 + 2b_j x_{j+1} + c_j - 3a_{j+1} x_{j+1}^2 - 2b_{j+1} x_{j+1} - c_{j+1} = 0$$

   Für eine stetige zweite Ableitung muss folgendes gelten:

$$p_j''(x_{j+1}) = p_{j+1}''(x_{j+1}) \Leftrightarrow 6a_j x_{j+1} + 2b_j = 6a_{j+1} x_{j+1} + 2b_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow 6a_j x_{j+1} + 2b_j - 6a_{j+1} x_{j+1} - 2b_{j+1} = 0$$

   Bei diesen Bedingungen handelt es sich um lineare Gleichungen.

   Lösung Ende

3. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise auf, welches die Bedingungen aus der vorherigen Teilaufgabe für alle $n-1$ kubischen Polynome formuliert.

Lösung

Aufgrund der „Verkettung" der Bedingungen muss man ein großes LGS aufstellen und kann dieses nicht in mehrere kleine aufteilen:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \overbrace{\hphantom{x_1^3 \quad x_1^2 \quad x_1 \quad 1}}^{p_1} & \overbrace{\hphantom{-3x_2^2 \quad -2x_2 \quad -1 \quad 0}}^{p_2} & \overbrace{\hphantom{-3x_3^2 \quad -2x_3 \quad -1 \quad 0}}^{p_3} & \hphantom{\ddots} & \overbrace{\hphantom{x_{n-1}^3 \quad x_{n-1}^2 \quad x_{n-1} \quad 1}}^{p_{n-1}} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
3x_2^2 & 2x_2 & 1 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 & -1 & 0 & & & & & & & & & \\
6x_2 & 2 & 0 & 0 & -6x_2 & -2 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 3x_3^2 & 2x_3 & 1 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 & -1 & 0 & & & & & \\
 & & & & 6x_3 & 2 & 0 & 0 & -6x_3 & -2 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & x_{n-1}^3 & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

4. Erläutern Sie, warum dem Gleichungssystem noch Randbedingungen hinzugefügt werden müssen. Was bedeuten die folgenden Randbedingungen und wie sehen sie als zusätzliche lineare Gleichungen aus?

   a) Natürliche Randbedingungen
   b) Periodische Randbedingungen
   c) Vorgabe ersten Ableitung y'_1 und y'_n an den Randpunkten

Lösung

Das lineare Gleichungssystem hat folgende Bedingungen:

- Jedes kubische Polynom trifft die zwei Stützpunkte am Rande dessen Definitionsintervalls ($2n-2$ Bedingungen).
- An jedem Stützpunkt, an welchem zwei kubische Polynome angrenzen (das sind alle bis auf die äußeren) stimmen die ersten und zweiten Ableitungen der angrenzenden Polynome überein ($2n-4$ Bedingungen).

Das LGS verwendet nur $4n-6$ Freiheitsgrade, hat somit zwei Freiheitsgrade übrig und ist unterbestimmt. Somit gibt es unendlich viele Lösungen und damit unendlich viele Splines, die die Punkte mit den gegebenen Bedingungen interpolieren. Darum nutzt man Randbedingungen, in welchen man zusätzliche Eigenschaften des Splines an den äußeren Punkten fordert. Beliebte Randbedingungen sind (unter anderen):

- Natürliche Randbedingungen: Der Spline am Rand ist nicht gekrümmt

$$p''_1(x_1) = 0 \quad \text{sowie} \quad p''_{n-1}(x_n) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6x_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ & & & & \dots & 6x_n & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg| \Bigg| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Periodische Randbedingungen: Spline kann periodisch fortgesetzt werden

$$p'_1(x_1) = p'_{n-1}(x_n) \quad \text{sowie} \quad p''_1(x_1) = p''_{n-1}(x_n)$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & \dots & -3x_n^2 & -2x_n & -1 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & -6x_n & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg| \Bigg| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

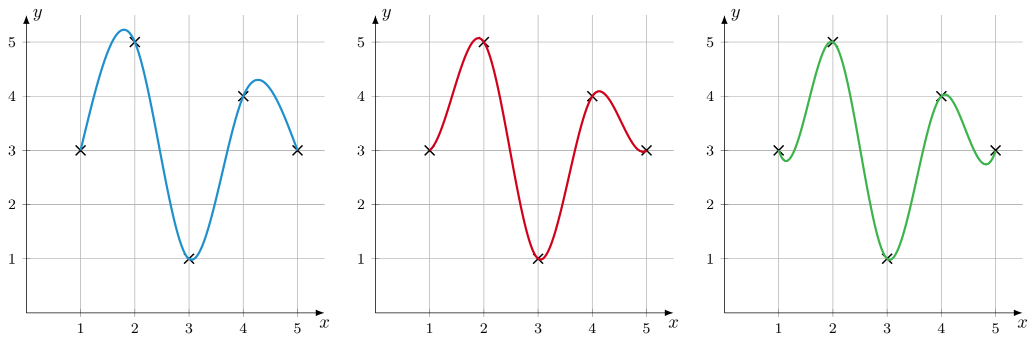
- Vorgabe der Steigung an den Randpunkten:

$$p'_1(x_1) = y'_1 \quad \text{sowie} \quad p'_{n-1}(x_n) = y'_n$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & \dots & & & & \\ & & & & \dots & 3x_n^2 & 2x_n & 1 & 0 \end{bmatrix} \Bigg| \Bigg| \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_n \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

5. Gegeben sind fünf Stützpunkte, die dreimal mit einem kubischen Spline unter verschiedenen Randbedingungen interpoliert wurden.



Dabei wurden folgende Randbedingungen verwendet:

a) Natürliche Randbedingungen links
b) Periodische Randbedingungen in der Mitte
c) Vorgabe der Steigung $f'(x_1) = -3$ und $f'(x_5) = 3$ rechts

Ordnen Sie die Funktion den zugehörigen Randbedingungen zu.

6. Können wir, falls wir quadratische statt kubische Polynome verwenden, ebenfalls stetige erste Ableitungen garantieren? Können wir sowohl stetige erste als auch zweite Ableitungen erhalten?

Lösung

Ein quadratisches Polynom hat drei Freiheitsgrade, bei n Stützpunkten und somit $n-1$ Abschnitten hätten wir $3n-3$ Freiheitsgrade zur Verfügung. Dass jedes Teilpolynom seine beiden Randpunkte trifft, benötigt $2n-2$ Freiheitsgrade. Wir hätten also $n-1$ Freiheitsgrade übrig. Dass an allen inneren Punkten die erste Ableitung zweier aufeinanderfolgender Polynome übereinstimmt, erfordert $n-2$ Freiheitsgrade. Somit wäre es möglich, stetige erste Ableitungen zu garantieren (C^1-Stetigkeit), wobei ein Freiheitsgrad (evtl. für eine Randbedingung) übrig bleibt. Stetige zweite Ableitungen benötigen ebenso $n-2$ Freiheitsgrade, sodass wir bei quadratischen Splines diese nicht mehr gewährleisten können.

Lösung Ende

7. Welchen Rechenaufwand hat die Spline-Interpolation, im Vergleich zur stückweisen Hermite-Interpolation, wenn sich der Wert einer Stützstelle ändert?

Lösung

Anders als bei der stückweise Hermite-Interpolation muss hier das ganze LGS neu gelöst werden.

Lösung Ende