Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 4.1

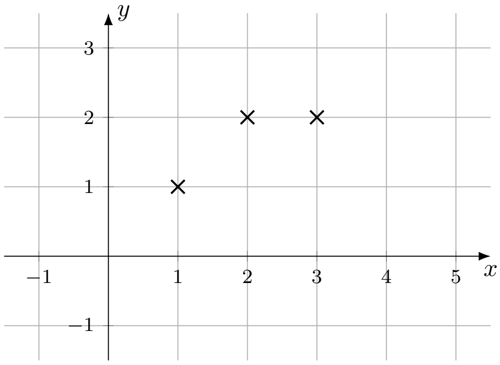
Globale Interpolation

11.12.2023 bis 15.12.2023

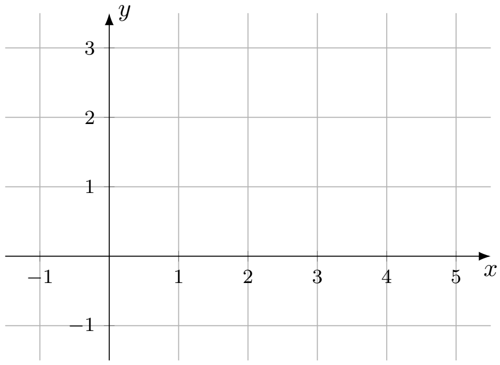
Aufgabe 1: Globale Polynominterpolation

Gegeben sind die Stützpunkte $(1,1),(2,2)$ und $(3,2)$, welche in der folgenden Abbildung nochmal dargestellt sind.

Datenpunkte und Funktion



Lagrange-Basispolynome



Im Folgenden möchten wir die Punkte mithilfe eines Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ interpolieren, welches einen möglichst geringen Grad hat.

1. Was ist der Unterschied zwischen einer Approximation und einer Interpolation dieser Datenpunkte?
2. Was ist der geringste Grad, den ein Polynom haben muss, um die drei Punkte zu interpolieren? Welchen Grad benötigt ein Polynom, um n beliebige Punkte zu interpolieren?
3. Lösen Sie das Interpolationsproblem mithilfe eines linearen Gleichungssystems. Stellen Sie das gefundene Polynom f in Monombasis dar und zeichnen Sie es in die Abbildung.
4. Berechnen Sie die Lagrange-Basispolynome $\ell_1(x), \ell_2(x)$ und $\ell_3(x)$ und zeichnen Sie diese in die Abbildung auf der rechten Seite ein.
5. Welche besonderen Eigenschaften erfüllen die Lagrange-Basispolynome? Woran erkennt man in der Abbildung, welches Basispolynom zu welcher Stützstelle gehört?
6. Geben Sie den Koeffizientenvektor von f bezüglich der von Ihnen berechneten Lagrange-Basis an. Was stellen Sie fest?
7. Geben Sie die Matrizen an, welche den Basiswechsel aus der Lagrange- in die Monombasis und andersherum durchführt.

Aufgabe 2: Approximation durch Polynome

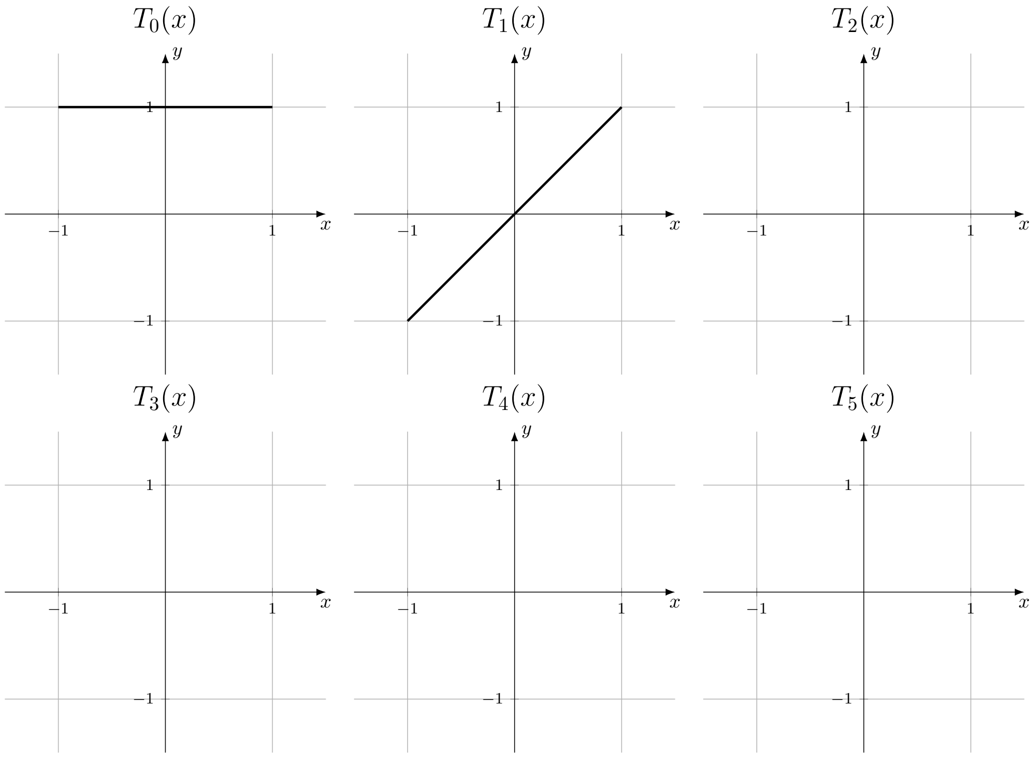
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wird Runges Funktion genannt. Im Folgenden möchten wir diese in einem Intervall $[a, b]$ mithilfe eines Interpolationspolynoms approximieren. Dabei definieren wir den folgenden Approximationsfehler:

$$\mathcal{E}(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Für die globale Polynominterpolation benötigen wir Stützstellen, an denen wir die Funktion abtasten. Eine intuitive Art, sich die Stützstellen auszusuchen, ist die gleichmäßigen Abtastung der Funktion im Intervall $[-t, t]$.

1. Was ist Runges Phänomen? Warum ist die gleichmäßige Abtastung im Allgemeinen keine gute Idee?

2. Die Tschebyscheff-Polynome (erster Art) $T_n(x)$ sind rekursiv durch $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ definiert. Berechnen Sie alle weiteren Tschebyscheff-Polynome bis einschließlich Grad fünf und skizzieren Sie diese. Welche geschlossene Darstellung besitzen sie im Intervall $[-1, 1]$?



3. Berechnen Sie die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_5 im Intervall $[-1, 1]$.

4. Was ist der betragsmäßig größte Funktionswert, den die Tschebyscheff-Polynome T_n im Intervall $[-1, 1]$ annehmen? Was macht sie in dieser Hinsicht besonders?

5. Geben Sie die Stützstellen $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ an, deren globale Polynominterpolation die Runge-Funktion im Intervall $[-3, 3]$ bestmöglich approximiert. Was sind die besten Stützstellen für das Intervall $[1, 5]$?

6. Stellen Sie das Monom $p(x) = x^3$ bezüglich der Basis $(T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x))$ dar. Geben Sie die Matrix an, welche den Basiswechsel aus der Monombasis $(1, x, x^2, x^3)$ in die Tschbyscheff-Basis repräsentiert.

$*$ Geben Sie das Polynom ersten Grades an, das das Monom x^3 im Intervall $[-1, 1]$ bestmöglich approximiert.