Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Multiple-Choice-Test zu Berechenbarkeit und Komplexität (B)
TU Berlin, 05.12.2023

(Weller/Froese/Kellerhals/Kunz/Peters, Wintersemester 2023/2024)

Arbeitszeit: 45 Minuten, Gesamtpunktzahl: 25

Hinweis: Je Aufgabe ist **mindestens** eine Antwortmöglichkeit korrekt.
Wenn eine **falsche** Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde, so gibt es **Null** Punkte für die betroffene (Teil-)Aufgabe.
Jede Aufgabe ist annotiert mit der Anzahl erreichbarer Punkte.

Wir erinnern an folgende Definitionen aus der Vorlesung:

- Die Null ist eine natürliche Zahl.
- Binärdarstellungen von Zahlen enthalten im Folgenden **keine** führenden Nullen.
- Die Komposition zweier Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to A$ ist definiert als $f \circ g : C \to B$ mit $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.
- Eine Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ berechnet eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$, falls für alle $x \in \Sigma^*$, $y \in \Pi^*$ gilt:

$$f(x) = y \iff \exists_{z \in E}\ z_0 x \vdash_M^* zy.$$

- Die charakteristische Funktion $\chi_L\colon \Sigma^* \to \{0,1\}$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als $\chi_L(w) := \begin{cases} 1, & w \in L \\ 0, & w \notin L \end{cases}$.
- Die halbe charakteristische Funktion $\chi'_L\colon \Sigma^* \to \{1\}$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als $\chi'_L(w) := \begin{cases} 1, & w \in L \\ \perp, & w \notin L \end{cases}$.
- Die Ackermannfunktion ack ist wie folgt definiert: $\operatorname{ack}(0, y) := y + 1$, $\operatorname{ack}(x, 0) := \operatorname{ack}(x-1, 1)$ und $\operatorname{ack}(x, y) := \operatorname{ack}(x-1, \operatorname{ack}(x, y-1))$.

Aufgabe 1: LOOP, WHILE und GOTO (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [X] Alle LOOP-berechenbaren Funktionen sind total.
- [ ] Es gibt nur endlich viele LOOP-berechenbare Funktionen.
- [X] Es gibt mindestens so viele WHILE-berechenbare Funktionen, wie LOOP-berechenbare Funktionen.
- [ ] Alle GOTO-berechenbaren Funktionen sind total.

Aufgabe 2: Ackermannfunktion (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über die Ackermannfunktion ack sind korrekt?

- [ ] Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := \operatorname{ack}(n, 0)$ ist LOOP-berechenbar.
- [X] ack ist WHILE-berechenbar, aber nicht LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := \operatorname{ack}(0, n)$ ist LOOP-berechenbar.
- [ ] Die Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) := \left\lceil \sqrt{\operatorname{ack}(x, y)} \right\rceil$ ist LOOP-berechenbar.

Aufgabe 3: Turing-Berechenbarkeit (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Es gibt Funktionen, die nur von einer Mehrband-Turing-Maschine, und nicht von einer Einband-Turing-Maschine berechnet werden können.
- [X] Jede Turing-Maschine, die eine totale Funktion berechnet, hält auf jeder Eingabe.
- [ ] Jede Turing-berechenbare Funktion ist total.
- [X] Jede Turing-Maschine berechnet eine Funktion.

Aufgabe 4: **Primzahlen** (3 Punkte)

Eine Primzahl p besitzt einen Primzahlzwilling, falls $p+2$ ebenfalls eine Primzahl ist.

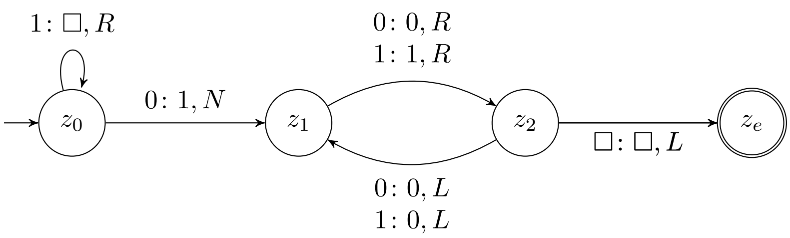
Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $n \mapsto \begin{cases} n, & \text{falls die } (n+1)\text{-te Primzahl einen Primzahlzwilling besitzt} \\ \bot, & \text{sonst.} \end{cases}$

Die Primzahlen sind hierbei nach Größe geordnet. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Die Funktion f ist primitiv-rekursiv.
- [X] Die Funktion f ist berechenbar.
- [ ] Es ist möglich, dass die Funktion f nicht berechenbar ist.

Aufgabe 5: **Turing-Maschinen** (2+4 Punkte)

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



(a) Auf welchen der folgenden Wörtern hält M?

[X] 11110 [ ] 000 [X] 111 [ ] 11101

(b) Sei $L \coloneqq \{1^n0 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Welche Aussagen über M sind korrekt?

- [X] M berechnet die Funktion χ'_L.
- [ ] M akzeptiert jedes Wort, das auf 0 endet.
- [ ] M akzeptiert keine Sprache, da M eine Funktion berechnet.
- [X] M akzeptiert die Sprache L.

Aufgabe 6: **Berechenbarkeit** (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Es existieren berechenbare Funktionen f und g, sodass $f \circ g$ unberechenbar ist.
- [X] Wenn f eine totale, injektive und berechenbare Funktion ist, dann ist f^{-1} berechenbar.
- [X] Jede Funktion mit endlichem Definitionsbereich ist berechenbar.
- [X] Es existieren unberechenbare Funktionen f und g, sodass $f \circ g$ berechenbar ist.
- [ ] Jede Funktion mit endlichem Wertebereich ist berechenbar.

Aufgabe 7: **Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit** (4 Punkte)

Sei $f\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ eine totale Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [X] Wenn f Turing-berechenbar ist, dann ist die Sprache $\{w\#f(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$ entscheidbar.
- [X] Es ist möglich, dass die Sprache $\{f(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$ entscheidbar, aber f nicht Turing-berechenbar ist.
- [X] Wenn f Turing-berechenbar ist, dann ist die Sprache $\{f(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$ semi-entscheidbar.
- [X] Wenn die Sprache $\{w\#f(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$ entscheidbar ist, dann ist f Turing-berechenbar.