Stochastik für Informatiker:innen - Übungsaufgaben KW 26

Aufgabe 1

Ein äußerlich gefärbter Holzwürfel werde in 1000 kleinere, jeweils gleich große Würfel zersägt und einer davon zufällig ausgewählt. Geben Sie einen geeigneten Laplace-Raum für dieses Experiment an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Würfel genau zwei gefärbte Seiten hat.

Aufgabe 2

Hubert, Ilse und Markus schießen jeweils einmal auf eine Zielscheibe. Hubert trifft mit Wahrscheinlichkeit $6/10$, Ilse mit Wahrscheinlichkeit $5/10$ und Markus mit Wahrscheinlichkeit $4/10$. Dabei trifft jeder unabhängig von allen anderen. Die Zielscheibe zeigt zwei Treffer. Was ist wahrscheinlicher: Markus hat getroffen, oder Markus hat nicht getroffen?

Aufgabe 3

Sei $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$. Es gelte $P(a) = P(b) = 1/8$ und $P(c) = P(d) = P(e) = 3/16$. Betrachte $A := \{d, e, a\}$, $B := \{c, e, a\}$ und $C := \{c, d, a\}$.

a) Zeigen Sie, dass $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass A, B und C nicht unabhängig sind.

Aufgabe 4

Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $P(\omega_1) = 1/2$, $P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/4$. Die Zufallsvariablen X, Y und Z seien durch

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3
$X(\omega_i)$	1	2	2
$Y(\omega_i)$	2	1	1
$Z(\omega_i)$	1	2	1

definiert.

a) Zeigen Sie, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

b) Bestimmen Sie die Verteilungen der Zufallsvariablen $X + Y$, XYZ und X^Y.

Aufgabe 5

Eine Mannschaft gewinnt ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft

a) genau zwei,

b) mindestens ein,

c) über die Hälfte

von vier Spielen gewinnt?

Aufgabe 6

In einer Fabrik werden Geräte nacheinander auf Funktionstüchtigkeit geprüft. Ein Gerät wird dabei unabhängig von allen anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ als defekt erkannt. Begründen Sie jeweils kurz.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn geprüften Geräten genau eines defekt ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das k-te Gerät das erste defekte?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zehn aufeinanderfolgende Geräte funktionstüchtig sind, wenn die $m = 5$ unmittelbar vorher geprüften Geräte funktionieren. Hängt diese Wahrscheinlichkeit von m ab?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Erwartungswerte in den folgenden Situationen.

a) X sei die Anzahl der Versuche bis eine faire Münze das erste Mal Zahl oder dreimal Kopf gezeigt hat.

b) U sei der Kehrwert der gewürfelten Augenzahl eines fairen Würfels.

Aufgabe 8

Seien X und Z unabhängig mit derselben Verteilung und $Y := X + Z$. Berechnen Sie $\operatorname{cov}(X, Y)$ und $\operatorname{corr}(X, Y)$.

Aufgabe 9

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X und skizzieren Sie f_X und F_X.

b) Berechnen Sie die Varianz von X.

c) Berechnen Sie $P(c < X \leq d)$ für $0 < c < d < 2$.

Aufgabe 10

Eine faire Münze wird 40-mal geworfen. Sei S die Anzahl der beobachteten Köpfe. Berechnen Sie mittels Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 22 und 25 Köpfe beobachtet werden.

Aufgabe 11

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[\theta, 0], \theta < 0$.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer θ_n^* für den unbekannten Parameter θ.

b) Ist der Schätzer erwartungstreu? Falls nicht, bestimmen Sie c, sodass $c\theta_n^*$ ein erwartungstreuer Schätzer ist.