3. Vorlesung: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Nikolas Tapia

22. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Beispiel (Test auf Krankheit)

Eine Krankheit tritt bei 2% der Bevölkerung auf.
Ein Bluttest erkennt sie in 99% der Fälle, aber er zeigt bei 3% der gesunden Personen falsch positiv an.

Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit

Aussage 3.0

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Additionsregel

Aussage 3.1

In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch **Addition** der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf den Blättern des Baumes.

Allg. Formel der Gesamtwahrscheinlichkeit

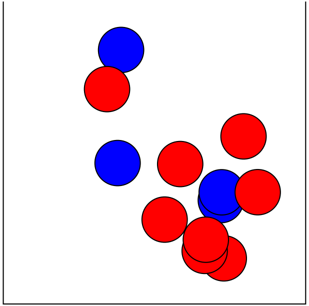
Aussage 3.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine *disjunkte* Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein positives Testergebnis zu erhalten?

Beispiel (2-fache Ziehung)



Unabhängigkeit

Definition 3.0

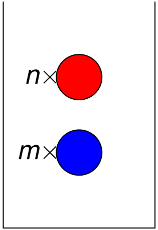
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B heißen **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

gilt.

Unabhängigkeit

Beispiel (2-fache Ziehung)



Unabhängigkeit

Aussage 3.3

Seien A, B Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$.
Dann sind A und B genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Beispiel (Leitungssysteme)

Allg. Unabhängigkeit

Definition 3.1

Seien $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse auf $(\Omega, \mathbb{P})$. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen **unabhängig**, falls für alle $2 \leq k \leq n$ und Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, $i_l \neq i_j$ für $l \neq j$, gilt:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Anmerkung 1

Die Ereignisse A, B, C sind genau unabhängig, wenn **alle** folgenden Gleichungen gelten:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

und

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Es gibt Beisipele für paarweise unabhängige, aber nicht unabhängige Ereignisse. Ebenso gibt es Beispiele, in denen $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ gilt, aber A, B, C nicht unabhängig sind.

Beispiel (Test auf Krankheit)

Bayes'sche Umkehrformel

Theorem 1

Seien A, B Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Anmerkung 1

Mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)$ folgt

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}.$$

Beispiel (Test auf Krankheit)