

13. Tutorium – Logik
Besprochen in der Woche vom 06.02.2023.

Geht Wählen!

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Sequenzen, ob sie gültig sind oder nicht.

(i) $\emptyset \Rightarrow X$

(ii) $X \Rightarrow \emptyset$

(iii) $X, \neg X \Rightarrow \emptyset$

(iv) $X \Rightarrow X, \neg Y$

(v) $Y \Rightarrow X, \neg X$

Aufgabe 2

Sei $\varphi, \psi \in \text{AL}$. Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

Anmerkung: Im Anhang befinden sich die Regeln des Sequenzenkalküls.

Aufgabe 3

Der Logikzwergenkönig zeigt sich standhaft. «Auch wenn nicht alles was du für offensichtlich hältst sich definieren lässt, so lässt uns unsere Logik doch wenigstens Gewissheit!» Unbeeindruckt nähert sich Falsum dem Thron. «Ach ja? Und was gibt dir diese Gewissheit alter Mann? Was sagt dir, dass nicht alles falsch ist?»

«Ich weiß was wahr ist, weil ich nur mit korrekten Regeln folgere!» Falsum lässt nicht nach und steht jetzt direkt vor dem Logikzwergenkönig. «Ach, so ist das! Na dann wirst du mir ja auch beantworten können welche Regeln überhaupt korrekt sind.»

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Regeln korrekt sind. Sie dürfen dafür keine der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

(i)
$$\frac{\Phi, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

(ii)
$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

(iii)
$$\frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$\begin{array}{ll}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 \hline
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad (*) \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad (*) & (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow S) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \quad (=) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}
 \end{array}$$

(*) wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.