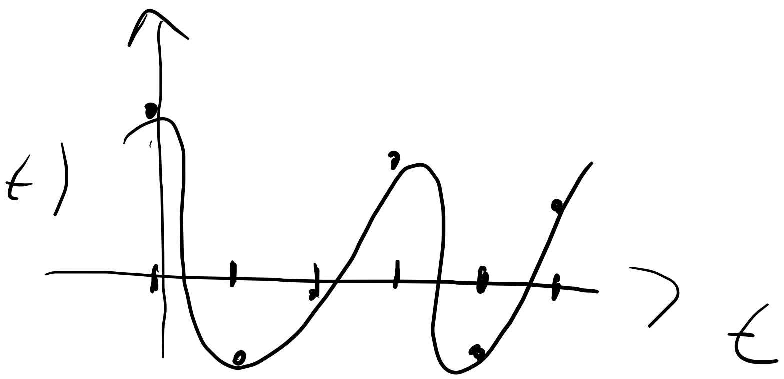
Diskrete Fouriertransformation

Signale

Filter $A:(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ $s(t)$



$s\in\mathbb{R}^n$

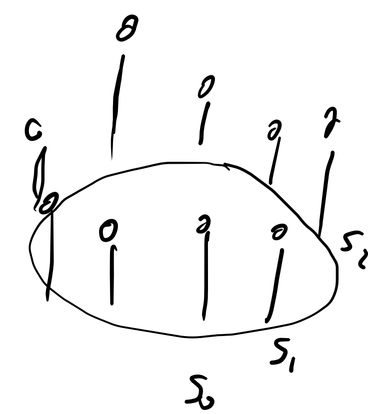
Modellannahmen für Filter

1. Linear $\to$ A ist eine Matrix

   Filtern ist $A\cdot s$

2. zeitinvariant (ortsinvariant, stationär)

   $\to$ Signal s periodisch: $s_i = s_{i+n\cdot k}$



Faltung (diskret, zyklisch)

zeitinvariant $\quad \tilde{A} \circ s(t+d) = (\tilde{A} \circ s)(t+d)$

Verschiebung (in der Zeit) des Signals $s \in \mathbb{R}^n$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (Zs)_i = s_{i+1}$$

$$\rightarrow \boxed{A Z^k s = Z^k A s}$$

$$a' = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \rightarrow ZA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = AZ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$A = a_0 \cdot I + a_1 \cdot Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_{n-1} Z^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot Z^i$$

$\boxed{A \cdot s =: a' * s}$ diskrete Faltung von a' und s

Eigenwerte, -vektoren von A (bzw. Z)

$$Zv = \lambda v \Rightarrow Z^k v = Z^{k-1} \cdot Z v = Z^{k-1} \lambda v = \lambda Z^{k-1} v$$
$$\dots = \lambda^k v$$

$$Av = \left(\sum a_i Z^i\right) v = \sum a_i Z^i v = \sum a_i \lambda^i v$$
$$= \left(\sum a_i \lambda^i\right) v$$

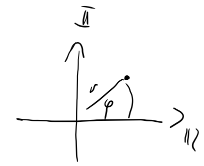
Eigenwerte von Z

$Z^n = I$ $\qquad$ $Z^n v = \lambda^n v = I v$

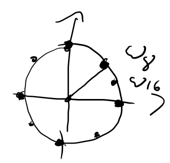
$$\Rightarrow \boxed{\lambda^n = 1}$$

Einheitswurzeln

komplexe Zahl $r \cdot e^{i\varphi}$



$$\lambda^n = r^n e^{i\varphi n} = 1$$
$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



$\to$ $\omega_n^n = 1$, $\omega_n^{2n} = 1$, $\omega^{3n} = 1$

$\omega_n^{k \cdot n} = 1$

$$\to \boxed{\lambda = \omega_n^k, \quad k = 0, \dots, n-1}$$

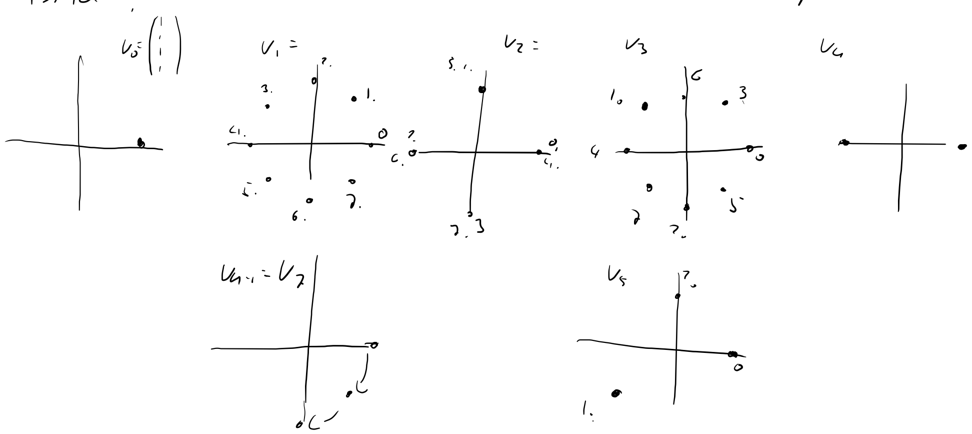
Eigenvektoren von Z

$Zv = \omega_n^k v$ $\qquad$ $v_{i+1} = \omega_n^k v_i$

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \omega_n^{3k} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$v_k^* \cdot v_k = \sqrt{n}$, $\quad v_j^* \cdot v_k = 0 \quad j \neq k$ (Rechnung macht jeder selbst) $\qquad$ (oder man glaubt es einfach)

Bild? $\quad n = 8$



$v_0 \quad v_1 \quad \dots \quad v_{\frac{n}{2}} \quad \dots \quad v_{n-1}$

Konstanten $\qquad$ höhere Frequenzen

Diskrete Fourier-transformation

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & & \end{pmatrix} \qquad \omega_n = e^{-2\pi i / n}$$

$\hat{s} = \Omega s$ DFT von s

$s = \Omega^{-1} \hat{s}$ invers DFT

$\Omega^{-1} = \Omega^* = \overline{\Omega}$ $\overline{\omega_n^k} = \omega_n^{-k} = \omega_n^{n-k}$

$= \Omega_n J$, $J = J^T = J^{-1}$

$\Omega^{-1} = \overline{\Omega} = \Omega_n J = J \Omega_n$

Faltungssatz

Fugenlaut

$$A\Omega = \Lambda\Omega \qquad A = \Omega\Lambda\Omega]$$

$$A v_k = \left(\sum a_i (\omega_n^k)^i\right) v$$

$$\lambda_k = \sum a_i \omega_n^{ki} = v_k \cdot a$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\Omega a) = \mathrm{diag}(\Omega] a')$$

$$a' * s = As = \Omega \cdot \mathrm{diag}(\Omega] a') \cdot \Omega] s$$

Faltung im Ortsraum $\hat{=}$ Produkt im Frequenzrau

Produkt im Ortsraum = Faltung im Frequenzraum