Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 2.1

Lineare Gleichungssysteme

13.11.2023 bis 17.11.2023

Aufgabe 1: Geometrische Bedeutung

Zunächst schauen wir uns die geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen an. Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

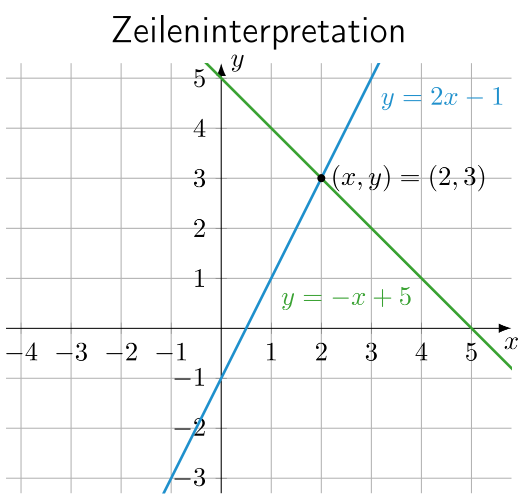
1. Schreiben Sie das LGS in Matrixschreibweise um.

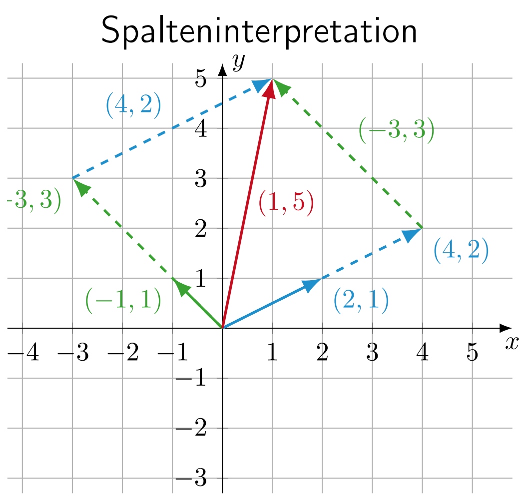
Lösung

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

2. Visualisieren Sie sich das Problem in Zeilen- sowie Spalteninterpretation.





3. Was bedeuten die folgenden Begriffe und wie hängen sie mit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zusammen?
   a) Form (m und n)
   b) Rang
   c) Kern

   Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus und erklären Sie, wie der Lösungsraum und dessen Dimension mit dem Kern und dem Rang zusammenhängt.

	Form	$\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$	$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$	Anzahl Lösungen
Quadratisches System mit regulärer Matrix	$m = n$	Voller Rang $(= m = n)$	0	Genau eine
Unterbestimmtes System	$m > n$	Voller Rang $(= n)$	$m - \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$	Unendlich viele
Überbestimmtes System	$m < n$	Voller Rang $(= m)$	0	Keine oder genau eine
Systemmatrix mit Rangdefizit	m, n beliebig	Kein voller Rang $(< m, < n)$	$m - \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$	Keine oder unendlich viele

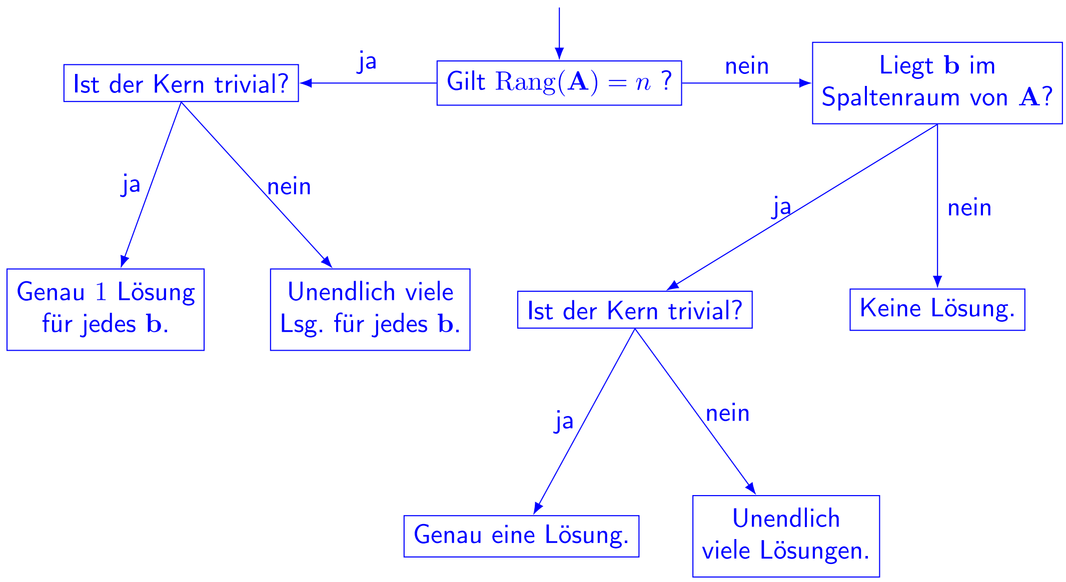
Lösung

Zunächst die Definitionen:

- Die Zahl n ist die Anzahl der Zeilen der Matrix und damit die Anzahl an Gleichungen, wohingegen m die Anzahl der Spalten von $\mathbf{A}$ und somit die Anzahl an zu bestimmenden Variablen $x_1, \dots, x_m$ ist.
- Der Kern ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ und ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^m$ (liegt also im Urbildraum von $\mathbf{A}$).
- Der Rang ist die Dimension des Spaltenraums (des Bildes) von $\mathbf{A}$ und damit die Anzahl an linear unabhängigen Spalten: $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Span}(\mathbf{A})$. Die Anzahl an linear unabhängigen Zeilen entspricht der Anzahl an linear unabhängigen Spalten. Es gilt offensichtlich $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} \leq \min\{n, m\}$. Die Matrix hat vollen Spaltenrang, falls $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m$, und vollen Zeilenrang, falls $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat vollen Rang, falls $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \min\{n, m\}$. Der Rangdefizit von $\mathbf{A}$ entspricht $\min\{n, m\} - \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$.

Es gilt stets, dass die Dimension des Kerns der Anzahl Spalten von $\mathbf{A}$ abzüglich des Ranges gilt:

$$\dim \mathrm{Kern}\,\mathbf{A} = m - \mathrm{Rang}\,\mathbf{A}.$$



Des Weiteren stellen wir fest, dass man zu jeder Lösung $\mathbf{x}^*$ des LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ addieren kann, um eine weitere Lösung zu erhalten:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}) = \mathbf{Ax}^* + \mathbf{Av} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Der Lösungsraum des LGS, angenommen das LGS hat mindestens eine Lösung, sieht wie folgt aus:

$$L = \left\{ \underbrace{\mathbf{x}^*}_{\text{Spezielle Lösung}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i}_{\text{Kern von } \mathbf{A}} \right\}.$$

wobei k die Dimension des Kerns ist und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ eine Basis des Kerns von $\mathbf{A}$ sind. Dabei gilt:

- Falls das LGS homogen ist (also $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), dann kann für $\mathbf{x}^*$ der Nullvektor gewählt werden und die Lösungsmenge L ist ein linearer Unterraum.
- Falls das LGS inhomogen ist (also $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), dann ist $\mathbf{x}^*$ ungleich dem Nullvektor und die Lösungsmenge L ist ein echter affiner Unterraum, d.h. er geht nicht durch den Ursprung.

Lösung Ende

Aufgabe 2: Lösungsverfahren

1. Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a) Unter welchen Bedingungen besitzt es genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

b) Geben Sie, unter der Annahme, dass es genau eine Lösung gibt, die Lösung an.

c) Welche Laufzeit benötigt das Lösen eines solchen LGS mit $n \times n$-Matrix?

Lösung

a) Das LGS besitzt genau eine Lösung, falls $a_{1,1} \neq 0$, $a_{2,2} \neq 0$ und $a_{3,3} \neq 0$. Es besitzt keine Lösung, falls $a_{i,i} = 0$ und $b_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$. Es besitzt unendlich viele Lösungen, falls für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt, dass $a_{i,i} = 0$ und $b_i = 0$ und für alle $j \in \{1, 2, 3\}$ gilt, dass, wenn $a_{j,j} = 0$, dann auch $b_j = 0$.

b) Die Lösung ist einfach: $x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$, $x_2 = \frac{b_2}{a_{2,2}}$ und $x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}}$.

c) Die asymptotische Laufzeit beträgt $\mathcal{O}(n)$.

Lösung Ende

2. Nun sei folgendes lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Wir nehmen dabei an, dass das System genau eine Lösung besitzt.

a) Unter welchen Voraussetzungen hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?

b) Geben Sie die Lösung des Gleichungssystems an. Wie nennt sich das angewandte Lösungsverfahren?

c) Welche Laufzeit benötigt dieses Verfahren bei einer $n \times n$-Matrix?

Lösung

a) Das LGS hat genau dann eine Lösung, wenn die Systemmatrix regulär ist. Das ist dann der Fall, wenn $a_{i,i} \neq 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

b) Die Lösung kann durch Rückwärtseinsetzen bestimmt werden:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{2,3}x_3}{a_{2,2}}$$
$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3}{a_{1,1}}$$

Die Lösungen werden von unten nach oben bestimmt.

c) Das Verfahren hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$.

Lösung Ende

3. Gegeben ist folgendes LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, das genau eine Lösung besitzt:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a) Welches Lösungsverfahren kann hier angewandt werden?

b) Welche Laufzeit benötigt dieses Verfahren bei einer $n \times n$-Matrix?

Lösung

a) Ähnlich zum vorherigen Fall kann hier Vorwärtseinsetzen benutzt werden. Dies funktioniert analog zum Rückwärtseinsetzen, aber bestimmt die Lösung von oben nach unten.

b) Das Verfahren hat ebenso eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$.

Lösung Ende

4. Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Führen Sie die Gauß-Elimination ohne (Spalten)Pivoting für dieses so weit wie möglich durch. Welches Problem stellt sich dabei?

b) Führen Sie nun die Gauß-Elimination mit (Spalten)Pivoting durch, bis die Systemmatrix in eine obere Dreiecksmatrix transformiert wurde.

c) Begründen Sie, dass das LGS genau eine Lösung hat.

d) Wie kann nun die Lösung des LGS ermittelt werden?

e) Welche Laufzeit hat das Lösen von allgemeinen linearen Gleichungssystemen mit einer $n \times n$-Matrix?

Lösung

a)

$$\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - 1 \cdot R_1 \\ \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - (-2) \cdot R_1 \end{array} \end{array}$$

Der letzte Schritt der Elimination ist nicht durchführbar, da man durch 0 dividieren müsste. In diesem Beispiel ist (Spalten)Pivoting also notwendig, wie es in der nächsten Aufgabe demonstriert wird.

b)

$$\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_3 \\ \\ R_3 \leftarrow R_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{-1}{2} \cdot R_1 \\ \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{-1}{2} \cdot R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ * \\ * \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - 1 \cdot R_2 \end{array} \end{array}$$

$*$ In diesem Schritt wurde kein Pivoting durchgeführt.

c) Die obere Dreiecksmatrix nach der Elimination ist offensichtlich regulär, d.h. sie hat drei linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten. Das erkennt man zum Beispiel daran, dass ihre Diagonaleinträge ungleich null sind. Damit hat das LGS genau eine Losung.

d) Zur Ermittlung der Losung kann nun das Verfahren Rückwärtseinsetzen verwendet werden.

e) Die reine Gauß-Elimination (d.h. das Uberfuhren der Matrix in einer obere Dreiecksmatrix) hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(n^3)$. Da das anschließend benötigte Rückwärtseinsetzen eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, ergibt dies eine Laufzeit von $O(n^3)$ insgesamt.

Lösung Ende

5. Warum sollte Pivoting auch in Fällen durchgeführt werden, in denen es nicht notwendig ist?

Lösung

Zwar erhöht das Pivoting die Laufzeit (praktisch, nicht asymptotisch) der Gauß-Elimination, jedoch erhöht sich durch Anwendung dieser die numerische Stabilität (wodurch das numerische Ergebnis näher an der analytischen Lösung ist). Hierbei sollte angemerkt werden, dass es zusätzlich auch das Zeilenpivoting gibt, welches die Spalten der Matrix analog zum Spaltenpivoting permutiert.

Lösung Ende