

2. freiwillige Hausaufgabe – Logik

Abgabe: bis 10:30 am 18.11.2022 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Aus Zeitgründen werden wir wahrscheinlich die erste Aufgabe nicht in der Großübung besprechen.

Hausaufgabe 1

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen mittels Äquivalenzumformungen.

$$(i) \neg(X \wedge Y \rightarrow (Z \leftrightarrow X)) \vee Y \equiv Y$$

$$(ii) \neg(X \wedge Y \rightarrow Z) \vee \neg(\neg Z \wedge Y \wedge X) \equiv \top$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz ohne von Wahrheitstafeln Gebrauch zu machen.

$$(iii) \neg(X \leftrightarrow Y) \equiv \neg X \leftrightarrow Y$$

Hausaufgabe 2

Sei β eine zu den Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ passende Belegung. Wir erweitern die Semantik der Aussagenlogik um den Operator \ominus wie folgt:

$$\llbracket \varphi \ominus \psi \rrbracket^\beta := \begin{cases} 1 & , \llbracket \varphi \rrbracket^\beta = \llbracket \psi \rrbracket^\beta = 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede aussagenlogische Formel φ eine äquivalente aussagenlogische Formel φ' existiert, welche ausschließlich den Operator \ominus verwendet.

Anmerkung: In L^AT_EX kann man \ominus als Operator wie folgt implementieren:

`\newcommand{\nor}[2]{\ensuremath{\#1 \operatorname{\ominus} \#2}}.`

Hausaufgabe 3

Lemma 1 Seien $\varphi, \psi \in \text{AL}$ mit $|\text{var}(\varphi)| \geq 1$ und $\varphi \equiv \psi$. Dann gibt es eine Formel $\psi' \in \text{AL}$, welche die gleichen Junktoren benutzt wie ψ , für die $\psi' \equiv \varphi$ und $\text{var}(\psi') \subseteq \text{var}(\varphi)$ gilt.

Optional: Zeigen Sie Lemma 1.

Wir definieren AL^+ als die Menge der Formeln $\varphi \in \text{AL}$, die weder \neg noch \perp enthalten.

Zeigen Sie: Es gibt keine zu $\neg X$ äquivalente Formel $\varphi \in \text{AL}^+$. (Lemma 1 ist hier sehr hilfreich.)