Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 1.1

Lineare Algebra

30.10.2023 bis 03.11.2023

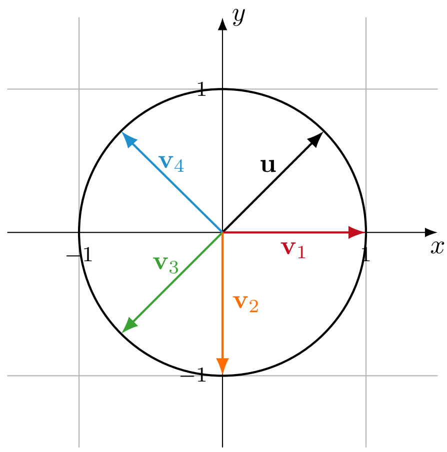
Allgemeine Hinweise

- Es wird jede Woche ein Aufgabenblatt zum aktuellen Thema veröffentlicht.
- Diese Aufgaben dienen primär zur Vorbereitung auf die Theorieaufgaben und den schriftlichen Test und werden in den Tutorien besprochen.
- Wir bemühen uns zeitnah Lösungsvorschläge auf ISIS hochzuladen.
- Bei den mit dem Stern ($*$) gekennzeichneten Aufgaben handelt es sich um Aufgaben, die teilweise über den Stoff des Kurses hinausgehen.
- Wir empfehlen jeder Person die Aufgaben vor- und nachzubereiten.

Aufgabe 1: Skalarprodukt

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dem uns wohlbekannten Skalarprodukt. Zwar existieren unterschiedliche Skalarprodukte für Vektorräume jeglicher Art, jedoch betrachten wir in dieser Aufgabe nur den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und das Standardskalarprodukt. Später im Kurs thematisieren wir den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ sowie Räume von Funktionen.

1. Was ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$? Wie lässt sich dieses mithilfe von Matrixmultiplikation schreiben?
2. Welche geometrische Bedeutung besitzt das Standardskalarprodukt im euklidischen Raum?
3. Gegeben ist ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sowie vier weitere Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$.



   Ordnen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ nach dem Wert ihres Skalarproduktes mit $\mathbf{u}$. Wie ist das Vorzeichen jedes der Skalarprodukte?

4. Was ist die euklidische/ℓ^2-Norm $\|\mathbf{u}\|$ eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$? Wie kann man sie mithilfe des Skalarproduktes schreiben?

Aufgabe 2: Lineare Transformationen

In diesem Abschnitt geht es um lineare Transformationen. Für diesen Kurs ist ein tiefes Verständnis von linearen Transformationen und insbesondere der dazu verwendeten Matrixmultiplikation essenziell.

1. Was bedeutet es, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist?
2. Lineare Funktionen kann man bekanntlich als Matrix darstellen. Welche der folgenden Abbildungen sind linear und wie sieht die Matrix dazu aus?
   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (2x + 3y, x - y + 2z, 3z - 2y)^\mathsf{T}$
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) = (2x^2 + 4y, 3y - z)^\mathsf{T}$
   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $h(x, y) = (2x - y, x + y, y - x)^\mathsf{T}$
   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $k(x, y) = (x + 3, y - 2)^\mathsf{T}$
3. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   Wie kann man die Multiplikation der Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Vektor $\mathbf{v}$ veranschaulichen?
4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ drei lineare Transformationen. Wie sieht die Transformationsmatrix aus, falls man zuerst $\mathbf{A}$, dann $\mathbf{B}$ und letztendlich $\mathbf{C}$ ausführen will?
5. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine beliebige Matrix.
   a) Was beschreiben die folgenden Begriffe und wann existieren diese für die Matrix $\mathbf{A}$?
      i. Transponierte Matrix
      ii. Inverse Matrix
      iii. Determinante
   b) Unter welchen Voraussetzungen erfüllt die Matrix folgende Eigenschaften?
      i. Symmetrisch
      ii. Diagonalmatrix
      iii. Orthogonal
6. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf diese Eigenschaften:
   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   Geben Sie zusätzlich, falls möglich, ihre Transponierte, Inverse und Determinante an.

Aufgabe 3: Lineare Unterräume und Basiswechsel

Besonders viel Verwirrung stiftet bei vielen das Thema Basiswechsel. Eine zentrale Erkenntnis dieses Kurses wird sein, dass man verschiedene Daten (Vektoren, Funktionen, ...) bezüglich unterschiedlichen Basen darstellen kann und jede von ihnen Vor- und Nachteile hat.

1. Was ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$? Wie sehen Unterräume geometrisch aus?
2. Was bedeuten die folgenden Begriffe in Bezug auf lineare Unterräume?
   a) Linearkombination
   b) Linear unabhängig
   c) Basis
   d) Dimension

3. Gegeben sind die vier Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Bei welchen von ihnen bilden die Spalten eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und/oder eine Basis eines linearen Unterraumes des $\mathbb{R}^3$?

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, der bezüglich der Standardbasis dargestellt wird:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Des Weiteren sei eine weitere Basis A des $\mathbb{R}^3$ als Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ der Basisvektoren in ihren Spalten gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis A dar.
   b) Mit welcher Matrix wird er transformiert, um die Koeffizienten bezüglich der Basis A zu erhalten?
   c) Sei $\mathbf{v}_B$ ein Vektor, der bezüglich einer weiteren Basis B des $\mathbb{R}^3$ dargestellt ist. Mit welcher Matrix muss er transformiert werden, um dessen Koeffizienten bezüglich der Basis A zu erhalten?

Aufgabe 4: Eigenwerte und Eigenvektoren

In dieser Aufgaben werden Eigenwerte- und Eigenvektoren kurz angeschnitten und die Grundlagen dieser wiederholt. Sie werden im Laufe des Semesters nochmals aufgegriffen und intensiver behandelt.

1. Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren? Welche geometrische Bedeutung obliegt diesen? Welche Eigenschaft muss eine Matrix erfüllen, um Eigenwerte zu besitzen?

2. Gegeben ist die folgende Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 8 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

   Welches der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$? Was ist der zugehörige Eigenwert?

   a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$