Aufgaben zur Vorlesung **WiSe 22/23**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche **24.11.2022**

6. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 28.11.2022–02.12.2022)

Aufgabe 1. Mengendiagramm der Entscheidbarkeit

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm, in dem die folgenden Mengen auftreten:

(a) die Klasse 2^{Σ^*} aller Sprachen (für eine Menge A ist $2^A = \{A' \mid A' \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A),

(b) die Klasse der entscheidbaren Sprachen,

(c) die Klasse der co-entscheidbaren Sprachen (eine Sprache $L \in \Sigma^*$ ist co-entscheidbar genau dann, wenn $\Sigma^* \setminus L$ entscheidbar ist),

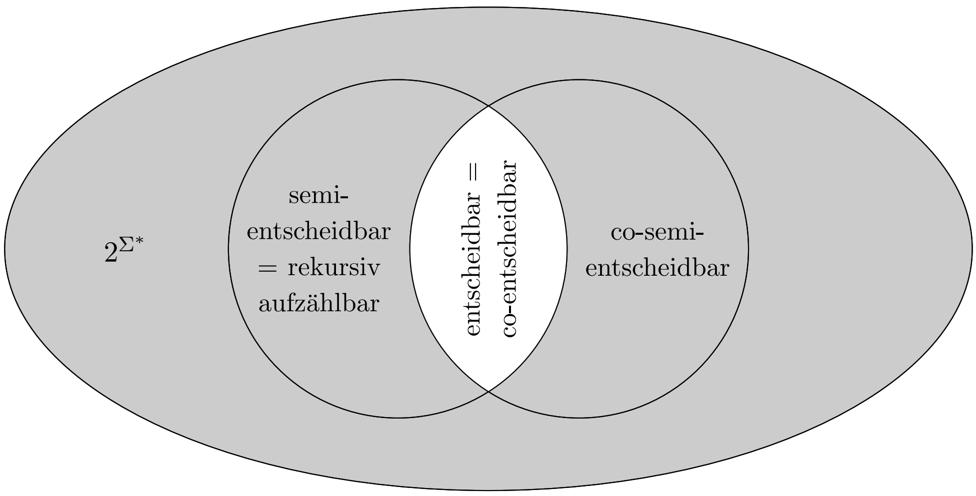
(d) die Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen,

(e) die Klasse der co-semi-entscheidbaren Sprachen, (eine Sprache $L \in \Sigma^*$ ist co-semi-entscheidbar genau dann, wenn $\Sigma^* \setminus L$ semi-entscheidbar ist),

(f) die Klasse der unentscheidbaren Sprachen,

(g) die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen.

——————Lösungsskizze——————



Die Menge der unentscheidbaren Sprachen ist grau schattiert.

Aufgabe 2. Komplement des speziellen Halteproblems

Im Folgenden sei $\overline{K} := \{0,1\}^* \setminus K$ das Komplement des speziellen Halteproblems $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$. Sie können im Folgenden verwenden, dass K aufzählbar ist.

(a) Ist $\overline{K}$ entscheidbar?

(b) Ist $\overline{K}$ semi-entscheidbar?

(c) Ist $\overline{K}$ co-semi-entscheidbar?

——————Lösungsskizze——————

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Sprache genau dann entscheidbar ist, wenn sowohl die Sprache als auch das Komplement der Sprache semi-entscheidbar sind. Daraus folgt außerdem folgendes: Eine Sprache ist genau dann entscheidbar wenn ihr Komplement auch entscheidbar ist. Da K nicht entscheidbar ist, kann $\overline{K}$ auch nicht entscheidbar sein.

(b) Wir wissen, dass K aufzählbar und somit semi-entscheidbar (siehe VL) ist. Wenn nun $\overline{K}$ semi-entscheidbar wäre, so wäre K entscheidbar – ein Widerspruch. Also ist $\overline{K}$ nicht semi-entscheidbar.

(c) Ja, denn das Komplement $\overline{\overline{K}} = K$ ist semi-entscheidbar.

Aufgabe 3. Abgeschlossenheit semi-entscheidbarer Sprachen

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind. Zeigen Sie, dass

(a) $A \cup B$ semi-entscheidbar ist,

(b) $A \cap B$ semi-entscheidbar ist,

(c) $\overline{A} := \Sigma^* \setminus A$ nicht semi-entscheidbar ist.

——————Lösungsskizze——————

Da A und B unentscheidbar sind, wissen wir, dass $A \neq \emptyset \neq B$. Seien also $f_A, f_B \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ berechenbare Funktionen mit $f_A(\mathbb{N}) = A$ und $f_B(\mathbb{N}) = B$.

(a) *Behauptung*: $A \cup B$ wird aufgezählt von

$$f(n) := \begin{cases} f_A(\frac{n}{2}), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ f_B(\frac{n-1}{2}), & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beweis. Offensichtlich ist f total und berechenbar. Zu zeigen: $f(\mathbb{N}) = A \cup B$.

Die Inklusion $f(\mathbb{N}) \subseteq A \cup B$ ist klar, da nur auf Wörter aus A oder B abgebildet werden kann.

Sei nun $w \in A \cup B$. Falls $w \in A$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f_A(k) = w$. Dann gilt $f(2k) = f_A(\frac{2k}{2}) = f_A(k) = w$. Falls $w \in B$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f_B(k) = w$ und es gilt $f(2k+1) = w$. In beiden Fällen haben wir damit $w \in f(\mathbb{N})$ gezeigt, woraus $A \cup B \subseteq f(\mathbb{N})$ folgt. $\square$

(b) Falls $A \cap B = \emptyset$, so ist $A \cap B$ klar semi-entscheidbar.

Sonst sei $w_0 \in A \cap B$ beliebig und sei $c \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine berechenbare Bijektion (z.B. die Cantorsche Paarungsfunktion) mit der (auch berechenbaren) Umkehrfunktion $d(n) = (d_1(n), d_2(n))$, wobei für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ gilt, dass $d_i(c(x_1, x_2)) = x_i$ für $i = 1, 2$.

Behauptung: $A \cap B$ wird aufgezählt von

$$f(n) := \begin{cases} w, & \text{falls } f_A(d_1(n)) = f_B(d_2(n)) =: w \\ w_0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Die Funktion f ist klar berechenbar und alle ihre Werte liegen in $A \cap B$. Es bleibt $A \cap B \subseteq f(\mathbb{N})$ zu zeigen. Sei dazu $w \in A \cap B$. Damit existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, sodass $w = f_A(k_1)$ und $w = f_B(k_2)$. Es folgt $f(c(k_1, k_2)) = w$, also $w \in f(\mathbb{N})$. $\square$

(c) Angenommen $\overline{A}$ ist semi-entscheidbar, dann ist nach VL A entscheidbar (da A semi-entscheidbar). Widerspruch.

Aufgabe 4. Streng monoton rekursiv aufzählbare Sprachen sind entscheidbar

Sei Σ ein endliches geordnetes Alphabet und $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf Σ^*. Wir definieren die Ordnung $\prec$ auf Σ^* so, dass für zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gilt:

$$a \prec b \quad \iff \quad |a| < |b| \vee (|a| = |b| \wedge a <_{\text{lex}} b).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ ist *streng monoton*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \prec f(y)$. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist *streng monoton rekursiv aufzählbar*, falls A von einer berechenbaren streng monotonen Funktion aufgezählt wird.

(a) Sei $A \subseteq \Sigma^*$ streng monoton rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass A entscheidbar ist.

(b) Sei $A \subseteq \Sigma^*$ unendlich groß und entscheidbar. Zeigen Sie, dass A streng monoton rekursiv aufzählbar ist.

——————Lösungsskizze——————

(a) Um zu zeigen, dass die Sprache A entscheidbar ist, beschreiben wir, wie sich die charakteristische Funktion χ_A berechnen lässt und zeigen dann die Korrektheit von diesem Algorithmus. Dafür sei f die Funktion, die A aufzählt.

Algorithmus: Für ein beliebiges Wort $w \in \Sigma^*$ berechnen wir χ_A, indem wir $f(0), f(1), \ldots$ berechnen, bis wir zu einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gelangen, sodass $f(n_0) = w$ oder $w \prec f(n_0)$ gilt. Falls dann $f(n_0) = w$ gilt, geben wir eine 1 zurück. Falls andererseits $w \prec f(n_0)$ gilt, geben wir eine 0 zurück.

Korrektheit: Falls $w \in A$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = w$. Da f streng monoton ist, gilt außerdem für alle $n' < n$, dass $f(n') \prec f(n) = w$. Also endet der Algorithmus mit $n_0 = n$ und gibt korrekt 1 aus. Falls $w \notin A$, gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = w$. Das heißt, der Algorithmus gibt niemals eine 1 zurück. Da es nur endlich viele Wörter $w' \in \Sigma^*$ mit $w' \prec w$ gibt und f wegen der strengen Monotonie auf jedes Wort in A genau einmal abbildet, gibt es also auch nur endlich viele $n' \in \mathbb{N}$ mit $f(n') \prec w$. Daher trifft der Fall $w \prec f(n_0)$ im Algorithmus immer für irgendein n_0 ein und es wird eine 0 ausgegeben.

(b) Da A entscheidbar ist, gibt es eine TM M, die die charakteristische Funktion χ_A berechnet. Um zu zeigen, dass A streng monoton rekursiv aufzählbar ist, geben wir eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ an, die streng monoton ist und A aufzählt.

Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir den Funktionswert $f(n)$ wie folgt: Zunächst iterieren wir in der von $\prec$ induzierten Reihenfolge über Σ^* beginnend beim leeren Wort. Für jedes Wort überprüfen wir dabei, ob das Wort in der Sprache A enthalten ist oder nicht, indem wir M simulieren. Dabei zählen wir mit, wieviele der bereits überprüften Wörter in A enthalten sind. Sobald wir auf diese Weise $n+1$ Wörter aus A gefunden haben, stoppen wir und geben das zuletzt gefundene Wort aus.

Da A entscheidbar ist, hält M immer und da A unendlich groß ist, finden wir immer ein solches $(n+1)$-tes Wort. Desweiteren ist unsere Funktion durch das Iterieren nach der Ordnung $\prec$ streng monoton. Also ist f eine streng monotone berechenbare Funktion mit $f(\mathbb{N}) = A$.
