Stochastik für Informatik TU Berlin SoSe 23

–Klausurvorbereitung 18.7.23 –

Wissens-Aufgabe Stellen Sie das Log-Likelihood Funktional und die Maximum-Likelihood-Gleichungen für die Exponentialverteilung

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ für } x > 0$$

und (unabhängig) gemessene Werte $x_1, \ldots, x_n$ auf und leiten Sie eine Formel für den Maximum-Likelihood-Schätzer ab.

$$\log \mathcal{L}(x_i|\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\lambda e^{-\lambda x_i}\right) = n(\log(\lambda) - \lambda \bar{x})$$

Die ML-Gleichungen sind daher

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\lambda} \log \mathcal{L}(x_i|\lambda) = n(\frac{1}{\lambda} - \bar{x}) \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Textaufgabe Auf 6 hochgelegenen Trockenrasenwiesen in Süddeutschland wird von einem Naturschutzinstitut die Anzahl seltener Orchideen pro Hektar (ha) bestimmt, indem jeweils ein Hektar ganz genau abgesucht wird. Die Ergebnisse der Erhebung sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Fläche Nr.	1	2	3	4	5	6
Anzahl Orchideen/ha	18	15	11	14	14	12

Eine zehn Jahre zurückliegende, sehr viel ausführlichere Untersuchung hat für geeignete Flächen eine durchschnittliche Orchideendichte von $\mu_0 = 17$ Orchideen/ha ergeben. Mit der oben aufgeführten Stichprobe soll nun festgestellt werden, ob dieser Wert sich in den letzten Jahren verändert hat. Dazu wird angenommen, dass die Zufallsvariable X =Orchideendichte/ha normalverteilt ist.

a) Benennen Sie das geeignete Testverfahren. Begründen Sie kurz die Auswahl (2-3 Stichpunkte)!

b) Bestimmen Sie den Durchschnittswert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s aus der Tabelle.

c) Die Nullhypothese sei $H_0 : \mu_X = \mu_0 = 17$ gegen $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$. Stellen Sie das Testkriterium zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ auf (Formel), und berechnen Sie, ob das Kriterium zutrifft, indem Sie die richtigen Werte einsetzen (auch Quantil ablesen!).

d) Entscheiden Sie, ob die Nullhypothese H_0 oder die Gegenhypothese H_1 angenommen wird.

e) Kann man zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ die wissenschaftliche Hypothese H_1 belegen, dass die neue Orchideendichte μ_X unter 16 Orchideen/ha abgesunken ist ($H_0 : \mu_X \geq 16$ gegen $H_1 : \mu_X < 16$)?

a) t-Test, denn es wird der Erwartungswert bei unbekannter Standardabweichung getestet.

b) $\bar{x} = 14$, $s^2 = \frac{6}{5}(201 - 14^2) = 6 \Rightarrow s = \sqrt{6} \approx 2.45$.

c+d) $17 = \mu_X = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = 14 \pm t_{0.95}(5)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 14 \pm 2.015$ dies ist falsch, daher ist H_0 zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ abzulehnen.

e) Entscheidungskriterium $16 \leq \bar{x} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = 14 + t_{0.9}(5) \cdot 1 = 14 + 1.476$ ist falsch, also ist wiederum H_0 abzulehnen und die wissenschaftliche Hypothese H_1, dass der Durchschnittswert unter 16 Orchideen/ha liegt wird zum Signifikanzniveau angenommen, d.h. man kann sich zu 90% sichersein, dass sie stimmt.