FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 24. November 2022

5. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 28.11.2022.

Aufgabe 1

Sei AL^* die Menge aller aussagenlogischen Formeln welche nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ benutzen und in welchen es gerade viele Vorkommen von $\wedge$ und ungerade viele Vorkommen von $\vee$ gibt.

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass AL^* eine Normalform ist.

Anmerkung: Diese Aufgabe kann man auch wesentlich einfacher ohne strukturelle Induktion lösen. Sie ist aber dennoch eine gute Übungsaufgabe für einen solchen Beweis.

Aufgabe 2

Der Zwerg namens Dipell ist eines Tages in den unendlichen langen Schacht unter dem SAT-Berg gefallen und lebt nun ganz alleine am Boden der Unendlichkeit. In seiner finstersten Stunde begegnet ihm ein schreckliches Gespenst. «Ich bin Falsum! Der Untergang des SAT-Bergs und der ewige Feind der Logikzwerge!»

«Ha!», erwidert Dipell. «Das kann ja jeder behaupten!» Das Gespenst grinst und entblößt somit seine gelb-grauen Zähne. «Oh doch! Genau der bin ich! Und ich habe die Formel um dir dies zu beweisen.» Verängstigt überprüft Dipell die Erfüllbarkeit der furchteinflößenden Formel des Grauens.

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Formel an.

$$\varphi := (Z \vee Y) \wedge (\neg W \vee \neg Y) \wedge (W \vee \neg Y) \wedge (\neg W \vee Y \vee \neg Z \vee X) \wedge (Y \vee \neg Z)$$

Aufgabe 3

(i) Sei M eine endliche Menge und sei $R \subseteq M^2$ eine Menge von Tupeln über M.

Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{M,R}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn eine Menge R' von Tupeln über M existiert, so dass R' eine lineare Ordnung über M ist und $R \subseteq R'$ gilt. Geben Sie insbesondere an wie man aus einer erfüllenden Belegung eine lineare Ordnung über M konstruieren kann welche R erweitert und umgekehrt, wie man aus einer linearen Ordnung über M welche R erweitert eine erfüllende Belegung für $\varphi_{M,R}$ erstellt.

Zur Erinnerung: Lineare Ordnungen sind irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv und je zwei Elemente in ihrer Grundmenge müssen vergleichbar sein (total).

(ii) Sei G ein Graph und sei $U \subseteq V(G)$ eine Menge von Knoten. Wir nennen U *unabhängig*, falls für alle $u, v \in U$ gilt, dass $\{u, v\} \notin E(G)$.

Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{G,k}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn G eine unabhängige Menge der Größe k enthält. Geben Sie insbesondere an wie man aus einer erfüllenden Belegung eine unabhängige Menge der Größe k in G konstruieren kann und umgekehrt, wie man aus einer unabhängigen Menge der Größe k in G eine erfüllende Belegung für $\varphi_{G,k}$ erstellt.