FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 5. Februar 2023

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 13. Tutorium – Logik

Geht Wählen!

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Sequenzen, ob sie gültig sind oder nicht.

(i) $\emptyset \Rightarrow X$

(ii) $X \Rightarrow \emptyset$

(iii) $X, \neg X \Rightarrow \emptyset$

(iv) $X \Rightarrow X, \neg Y$

(v) $Y \Rightarrow X, \neg X$

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Nicht gültig, da die Belegung β mit $\beta(X) = 0$ die Voraussetzung aber keine Formel in der Konklusion der Sequenz erfüllt.

(ii) Nicht gültig, da die Belegung β mit $\beta(X) = 1$ die Voraussetzung aber keine Formel in der Konklusion der Sequenz erfüllt.

(iii) Gültig, da keine Belegung erfüllt die Voraussetzungen der Sequenz.

(iv) Gültig, da ein Axiom.

(v) Gültig, da für jede Belegung β mit $X \in \mathrm{def}(\beta)$ gilt $\beta \models X$ oder $\beta \models \neg X$.

Aufgabe 2

Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$. Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\neg(\varphi \vee \psi) \;\Rightarrow\; \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

Anmerkung: Im Anhang befinden sich die Regeln des Sequenzenkalküls.

Lösung zu Aufgabe 2

$$\textit{(i)}\quad (\neg\Rightarrow)\;\dfrac{(\Rightarrow\vee)\;\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\;\dfrac{(\Rightarrow\neg)\;\dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}}{\emptyset \Rightarrow \varphi, \psi, \neg\varphi} \qquad (\Rightarrow\neg)\;\dfrac{\overline{\psi \Rightarrow \varphi, \psi}}{\emptyset \Rightarrow \varphi, \psi, \neg\psi}}{\emptyset \Rightarrow \varphi, \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi}}{\emptyset \Rightarrow \varphi \vee \psi, \neg\varphi \wedge \neg\psi}}{\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi}$$

Aufgabe 3

Der Logikzwergenkönig zeigt sich standhaft. «Auch wenn nicht alles was du für offensichtlich hälst sich definieren lässt, so lässt uns unsere Logik doch wenigstens Gewissheit!» Unbeeindruckt nähert sich Falsum dem Thron. «Ach ja? Und was gibt dir diese Gewissheit alter Mann? Was sagt dir, dass nicht alles falsch ist?»

«Ich weiß was wahr ist, weil ich nur mit korrekten Regeln folgere!» Falsum lässt nicht nach und steht jetzt direkt vor dem Logikzwergenkönig. «Ach, so ist das! Na dann wirst du mir ja auch beantworten können welche Regeln überhaupt korrekt sind.»

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Regeln korrekt sind. Sie dürfen dafür keine der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

(i) $$\frac{\Phi, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

(ii) $$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

(iii) $$\frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Diese Regel ist korrekt. Angenommen $\Phi, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta$ ist gültig. Sei β eine Belegung, die $\Phi \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ erfüllt. Dann erfüllt β die Menge $\Phi \cup \{\varphi, \psi\}$. Da $\Phi, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, gibt es ein $\delta \in \Delta$ mit $\beta \models \delta$. Also ist die Konsequenz gültig und die Regel ist korrekt.

(ii) Diese Regel ist korrekt.

Angenommen $\Phi \Rightarrow \Delta, \psi$ und $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi$ sind gültig. Sei β eine Belegung, die Φ erfüllt. Falls β ein Element aus Δ erfüllt, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass β kein Element aus Δ erfüllt.

Nach Annahme folgt, dass β mindestens ein Element von $\Delta \cup \{\psi\}$ und mindestens ein Element von $\Delta \cup \{\varphi\}$ erfüllt, aber keines aus Δ. Also muss β sowohl ψ als auch φ erfüllen und damit $\psi \wedge \varphi$.

Damit ist ein Element der rechten Seite von $\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi$ erfüllt, also ist die Regel korrekt.

(iii) Seien $\varphi := X \vee \neg X$, $\Phi := \{\varphi\}$, $\psi := X \wedge \neg X$ und $\Delta := \emptyset$ zu einer beliebigen Signatur σ. Da ψ unerfüllbar ist, ist die obere linke Sequenz gültig und da $\varphi \in \Phi$ ist die obere rechte Sequenz ebenfalls gültig.

Aus der Unerfüllbarkeit von ψ folgt die Unerfüllbarkeit von $\psi \wedge \varphi$. Da Φ allerdings erfüllbar ist, folgern wir, dass die unter Sequenz nicht gültig ist. Also ist die angegebene Regel nicht korrekt.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}\ (*)$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*)$ $\qquad (\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$

$(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t\doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t\doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$ $\qquad (=)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.