Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 4.2

Themen: Hermite-Interpolation, Spline-Interpolation

Ugo & Gabriel

10. Januar 2023

Aufgabe 1: Hermite-Interpolation

1. Konstruieren Sie die linearen Gleichungssysteme (LGS), welche sich ergeben, wenn man die Punkte $(0, 0)$, $(2, 4)$ und $(3, -1)$ mithilfe zweier kubischen Polynomen p_1 und p_2 interpolieren will und an den Stellen für die Ableitung $p_1'(0) = 1$, $p_1'(2) = p_2'(2) = 0$ und $p_2'(3) = 1$ gelten soll.

2. Welche Monombasis wurde für die letzte Aufgabe gewählt? Welche muss man wählen, wenn man zusätzlich noch die 2. und 3. Ableitung an den Stellen 0, 2 und 3 definieren will? Welche muss man wählen, wenn man alle 3 Punkte interpolieren will und die Ableitungen an den zwei Randpunkten definieren will?

3. Wie viele LGS muss man lösen, wenn man n Punkte mit gegebenen Ableitungen an den Punkten naiv interpolieren will. Wie kann man das ganze effizienter gestalten, wenn man anstatt p_i direkt zu berechnen, zunächst ein anderes Polynom f_i berechnet?

4. Wie ist das Polynom p_i in Abhängigkeit von f_i und den Stützstellen definiert?

5. Wie lässt sich das Polynom noch effizienter finden. Wie ist jetzt das Polynom p_i definiert? (Tipp: Das LGS lässt sich auf 3 Gleichungen reduzieren.)

6. Kann man die kubischen Polynome auch durch die Basis $(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x))$ ersetzen? Warum ist das keine gute Basis?

7. Wie sieht das Ergebnis der Hermite Interpolation aus für die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ und einer Steigung von 0 an den Übergängen und den Rändern?

8. Das Ergebnis der letzten Aufgabe sieht (abhängig vom Anwendungsfall) unpassend aus. Wie kann man die Plateaus entfernen?

Aufgabe 2: Spline-Interpolation

1. Konstruieren Sie das lineare Gleichungssystem, welches sich ergibt, wenn man die Punkte $(0,0)$, $(2,4)$ und $(3,-1)$ mithilfe zweier kubischen Polynome p_1 und p_2 interpolieren will und die ersten Ableitungen und zweiten Ableitungen von p_1 und p_2 an der Stelle $x_2 = 2$ übereinstimmen sollen.

2. Das Gleichungssystem aus der letzten Aufgabe ist unterbestimmt. Wie kann man trotzdem Polynome berechnen ohne Randbedingungen hinzuzufügen.

3. Fügen Sie zu dem Gleichungssystem nun folgende Randbedingungen hinzu. Hat das das Gleichungssystem vollen Rang?
   a) Natürliche Randbedingungen.
   b) Periodische Randbedingungen.
   c) Vorgabe der 1. Ableitung: $p_1'(0) = 0 = p_2'(3)$.
   d) Die drei Punkte werden von ein- und demselben Polynom interpoliert.

4. Wie sieht das LGS für die Spline-Interpolation aus, wenn man anstatt 2 Punkte jeweils 3 Punkte mit einem Polynom interpoliern würde? Welche Monombasis sollte man mindestens wählen, um eine kontinuierliche Ableitung zu erhalten?

5. Ist es möglich mit quadratischen Polynomen (anstatt kubischen Polynomen) als Basis für die Spline-Interpolation kontinuierliche Ableitungen zu erhalten?

6. Gegeben nur zwei Punkte und periodische Randbedinungen. Wie sieht die kubische Spline-Interpolation aus?

7. Welchen Rechenaufwand hat die Spline-Interpolation, im Vergleich zur Hermite-Interpolation, wenn sich der Wert einer Stützstelle ändert?