9. Vorlesung: Bedingte Erwartungswerte und Varianz

Nikolas Tapia

16. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

Bedingter Erwartungswert

Definition 9.1

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen. Der **bedingte Erwartungswert** von X gegeben $Y = y$ ist definiert als

$\{Y=y\}$

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x|Y = y),$$

sofern $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

Anmerkung 1

Alle Eigenschaften des Erwartungswertes gelten auch für den bedingten Erwartungswert.

<u>z.B</u> $\mathbb{E}[X + aZ \mid Y=y] = \mathbb{E}[X \mid Y=y] + a\,\mathbb{E}[Z \mid Y=y]$

Aussage 9.1

Seien X, Y diskrete, unabängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \mathbb{E}[X].$$

<u>Bew:</u>

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

unabhängig $\longrightarrow$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$$

$$= \mathbb{E}[X \mid Y = y]$$

Formel vom totalen Erwartungswert

Formel Gesamtw'keit

Aussage 9.2

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{E}[X | Y = y]\mathbb{P}(Y = y).$$

Anmerkung 1

Funktion von Y, also eine ZV

Üblicherweise bezeichnet man als $\mathbb{E}[X \mid Y]$ die Funktion $y \mapsto \mathbb{E}[X \mid Y = y]$. Dann lautet die Formel vom totalen Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$.

$$\boxed{\mathbb{E}[X] \overset{!}{=} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{E}[X \mid Y=y]\,\mathbb{P}(Y=y)}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) \qquad \Big(\Omega = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{Y=y\}\Big)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y) \xleftarrow{\text{def}} \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \Big(\underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)}_{\overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[X \mid Y=y]}\Big)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

Beweis

Beispiel

An einem bestimmten Tag betreten ein Geschäft im Durchschnitt 50 Kunden. Jeder Kunde gibt ungefähr 8€ aus, unabhängig von den anderen Kunden und von der Anzahl der Kunden, die das Geschäft betreten.
Wie hoch ist der erwartete Geldbetrag, der an einem bestimmten Tag im Geschäft ausgegeben wird?

$N = \#$ Kunden $\Rightarrow \mathbb{E}[N] = 50$

$X_i = €$ der i-ten Kunde ausgibt.

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = 8, \forall i$

$S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ gesamter Geldbetrag (N zufällig.)

$\mathbb{E}[S] = ?$

$$\mathbb{E}[S \mid N=n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, N=n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i \mid N=n]$$

$$= 8n.$$

Beispiel

An einem bestimmten Tag betreten ein Geschäft im Durchschnitt 50 Kunden. Jeder Kunde gibt ungefähr 8€ aus, unabhängig von den anderen Kunden und von der Anzahl der Kunden, die das Geschäft betreten.
Wie hoch ist der erwartete Geldbetrag, der an einem bestimmten Tag im Geschäft ausgegeben wird? € 400.

$\Rightarrow \mathbb{E}[S|N] = 8N. \leftarrow$ ZV

Formel der totalen Erwartungswerte

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S|N]\big] = \mathbb{E}[8N] = 8\,\mathbb{E}[N] = 400.$$

Varianz

Definition 9.2

Sei X eine Zufallsvariable. Die **Varianz** von X ist definiert als

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(X = x).$$

für allg. ZV

nur für diskrete ZV.

Anmerkung 1

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Zufallsvariable um ihren Erwartungswert.

Anmerkung 1

Üblicherweise bezeichnet man die Varianz auch als $\mathrm{Var}(X)$.

Aussage 9.3

Sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Anmerkung 1

Die Varianz existiert genau dann, wenn der $\mathbb{E}[X^2]$ existiert.

Definition 9.3

Die **Standardabweichung** von X ist definiert als $\sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

$X \sim m \Rightarrow E[X] \sim m$

$\Rightarrow V(X) \sim m^2 \Rightarrow \sigma(X) \sim \sqrt{m^2} = m.$

$X = 8 \pm 3 = E[X] \pm \sigma(X).$

Aussage 9.3

Sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Anmerkung 1

Die Varianz existiert genau dann, wenn der $\mathbb{E}[X^2]$ existiert.

Definition 9.3

Die **Standardabweichung** von X ist definiert als $\sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Bew

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2]$$

linear $\rightarrow$ $= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$

$\mathbb{E}[c] = c$ $\quad = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Leibniz Gemeinschaft

Aussage 9.4

Seien X, Y Zufallsvariablen, deren Varianzen existieren. Dann gilt

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$\mathbb{V}(\underset{m}{aX} + b) = \underset{m^2}{a^2\mathbb{V}(X)}.$$
unabhängig von b.
2. Falls X, Y unabhängig sind, dann gilt
$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$
(im Allgemein falsch)!
3. Falls X konstant ist, gilt $\mathbb{V}(X) = 0$.

1. $\mathbb{V}(aX+b) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\left(aX+b-\mathbb{E}[aX+b]\right)^2\right]$

$\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X]+b$

$$= \mathbb{E}\left[\left(aX\cancel{+b}-(a\mathbb{E}[X]\cancel{+b})\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(a(X-\mathbb{E}[X])\right)^2\right]$$

$$= a^2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$$

$$= a^2\,\mathbb{V}(X).$$

Beweis

2. X, Y unabhängig $\Rightarrow \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

$$\mathbb{V}(X+Y) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\left(X+Y - \mathbb{E}[X+Y]\right)^2\right]$$

$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X+Y-(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X] + Y - \mathbb{E}[Y]\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y]) + (Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]$$

$$= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]$$

$$\overset{\text{unabhängigkeit}}{=} \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\underbrace{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])\right]}_{=0}\,\underbrace{\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])\right]}_{=0}$$

$$= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Beweis

Aussage 9.5

hat die Verteilung

Sei $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

Aussage 9.6

Sei $X \sim \text{Binomial}(n, p)$. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Aussage 9.7

Sei $X \sim \text{Geometric}(p)$. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Aussage 9.8

Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = \lambda = \mathbb{E}[X]$.

Tabelle der Verteilungen

Verteilung	Erwartungswert	Varianz
Uniform(n)	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli(p)	p	$p(1-p)$
Binomial(n, p)	np	$np(1-p)$
Geometric(p)	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson(λ)	λ	λ
Zipf(a)	$\frac{\zeta(a-1)}{\zeta(a)}, \quad a > 2$	$\frac{\zeta(2-a)\zeta(a)-\zeta(1-a)^2}{\zeta(a)^2}, \quad a > 3$