Benotete Hausaufgaben zur Vorlesung **WiSe 2022/2023**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals **24.03.2023**

Hausaufgabenblatt

Hinweise:

- Die Hausaufgabe kann ab dem **07.04.2023, 00:00 Uhr** bis zum **12.04.2023, 23:59 Uhr** auf ISIS hochgeladen werden.
- Die Hausaufgabe muss in Dreiergruppen bearbeitet werden.[1] Bitte tragen Sie sich in ISIS bis zum **06.04.2023, 23:59 Uhr** in der Gruppenwahl ein. Die Hausaufgabe kann nur von eingetragenen Gruppen abgegeben werden.
- Bitte verwenden Sie die LaTeX-Vorlage auf ISIS für Ihre Abgabe.
- Plagiate werden nicht toleriert und werden scharf geahndet.
- Es können bis zu **25 Portfoliopunkte** erreicht werden.
- Alle Antworten sind zu begründen. Antworten ohne Begründung erhalten **0 Punkte**. Achten Sie insbesondere darauf, die Korrektheit Ihrer angegebenen Lösungen (Algorithmen, Reduktionen etc.) zu begründen.
- Um zu zeigen, dass eine Sprache (semi-)entscheidbar ist, reicht es aus, die prinzipielle Arbeitsweise eine(r/s) Turing-Maschine/Algorithmus/WHILE-/GOTO-Programmes zu beschreiben, welche(r) die Sprache (semi-)entscheidet (die (halbe) charakteristische Funktion berechnet). Falls Sie in einer Reduktion eine Turing-Maschine konstruieren, so reicht es ebenfalls aus, ihr Verhalten algorithmisch zu beschreiben.
- Sätze, die in der Vorlesung oder Modulkonferenz *bewiesen* wurden (auch skizzenhaft) dürfen verwendet werden (unbewiesene Mitteilungen nicht).
- Erstellen Sie für jede Aufgabe ein separates Dokument und laden Sie es in der jeweiligen Dokumentabgabe in ISIS hoch.
- Wir empfehlen pro erreichbarem Punkt nicht mehr als 1/3 Seite zu schreiben. Wir behalten uns vor, nur die ersten 6 Seiten jedes Dokuments zu lesen.

Aufgabe 1. *(Semi-)Entscheidbarkeit von Sprachen* 10 P.
Betrachten Sie die folgenden Sprachen:

$$A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid T(M_w) \text{ enthält nur endlich viele Wörter}\},$$
$$B \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid T(M_w) \text{ enthält kein Wort der Länge} \leq 10\},$$
$$C \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hat 2 Zustände, ein Bandalphabet der Größe 3 und akzeptiert alle Eingaben}\}.$$

(a) Ist A semi-entscheidbar?

(b) Ist A co-semi-entscheidbar?

(c) Ist B semi-entscheidbar?

(d) Ist B co-semi-entscheidbar?

(e) Ist C semi-entscheidbar?

(f) Ist C co-semi-entscheidbar?

---

[1] In begründeten Ausnahmen schreiben Sie bitte eine E-Mail an `bk@akt.tu-berlin.de`

Aufgabe 2. *Varianten des Postschen Korrespondenzproblems* 7 P.

Wir betrachten die folgenden zwei Varianten des Postschen Korrespondenzproblems (mit Alphabet $\{0,1\}$). Beide Varianten beschränken das Lösungswort $z := x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}$. In $P_{4,20}$ dürfen in z *höchstens* 4 Nullen und *höchstens* 20 Einsen vorkommen. In $P_{6,9}$ müssen in z *mindestens* 6 Nullen und *mindestens* 9 Einsen vorkommen.

$$P_{4,20} := \left\{ \langle (x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1, x_i, y_i \in \{0,1\}^* \text{ für alle } i \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n} =: z \text{ und} \\ z \textit{ höchstens } 4 \text{ Nullen und 20 Einsen enthält} \end{array} \right\}$$

$$P_{6,9} := \left\{ \langle (x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1, x_i, y_i \in \{0,1\}^* \text{ für alle } i \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n} =: z \text{ und} \\ z \textit{ mindestens } 6 \text{ Nullen und 9 Einsen enthält} \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie für jede der beiden Sprachen, ob diese entscheidbar ist oder nicht.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass das unäre PCP P_U (mit Alphabet Σ, wobei $|\Sigma| = 1$) entscheidbar ist. Wir erinnern:

$$P_U := \left\{ \langle (x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \text{ für alle } i \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,k\}, \\ \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 3. *Berechenbarkeit und Funktionen* 8 P.

Für jedes $q \in \mathbb{N}$, sei $\mathcal{U}_q$ die Menge aller „unären Turing-Maschinen“ M mit q Zuständen und unärem Band (das heißt mit Eingabealphabet $\{\mathtt{1}\}$ und Bandalphabet $\{\mathtt{1}, \Box\}$), die auf dem leeren Wort ϵ halten. Sei weiterhin $\mathcal{U}_q^R \subseteq \mathcal{U}_q$ die Menge aller „unären rechtsdrall Turing-Maschinen“ (das heißt, Turing-Maschinen, die in jedem Konfigurationsübergang den Kopf nach rechts bewegen) in $\mathcal{U}_q$.

Für jede Turing-Maschine $M \in \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_q$ sei $F(M)$ die Anzahl an Einsen in der haltenden Konfiguration, die M bei Eingabe ϵ erreicht.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $Q(n)$ definiert als die minimale Anzahl Zustände einer unären Turing-Maschine M, die bei leerer Eingabe mindestens n viele Einsen auf das Band schreibt und dann hält. Formal,

$$Q(n) := \min\{q \in \mathbb{N} \mid \exists_{M \in \mathcal{U}_q}\, F(M) \geq n\}$$

Zeigen Sie, dass $Q(n)$ nicht Turing-berechenbar ist.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $R(n)$ analog zu $Q(n)$ definiert als die minimale Anzahl Zustände einer unären **rechtsdrall** Turing-Maschine M, die bei leerer Eingabe mindestens n viele Einsen auf das Band schreibt und dann hält. Formal,

$$R(n) := \min\{q \in \mathbb{N} \mid \exists_{M \in \mathcal{U}_q^R}\, F(M) \geq n\}$$

Ist die Funktion R Turing-berechenbar?

Hinweise:

1. Sie dürfen verwenden, dass Q monoton steigend ist, d.h. $a \geq b \Rightarrow Q(a) \geq Q(b)$.
2. Sie dürfen verwenden, dass die Funktion E_1, bekannt aus dem Kapitel „Busy Beaver“ der Vorlesung, nicht Turing-berechenbar ist.
3. Es genügt, die Arbeitsweise von Turing-Maschinen zu beschreiben, ohne die Übergangsfunktion konkret anzugeben.