Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 3.1

Themen: Eigenzerlegung, Potenzmethode

Ugo & Gabriel

29. November 2022

Aufgabe 1: Eigenzerlegung

1. Wie lässt sich anhand der Eigenwerte der Rang einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dazu haben?

2. Welche nützlichen Eigenschaften in Bezug auf Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen symmetrische Matrizen?

3. Eine Eigenzerlegung ist im Allgemeinen eine Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$. Wir betrachten jedoch den Fall, dass sich $\mathbf{A}$ in $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ zerlegen lässt.
   a) Was für eine Art von Transformation beschreiben $\mathbf{U}$ und $\mathbf{\Lambda}$?
   b) Was steht in den Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{\Lambda}$?
   c) Welche nützliche Eigenschaft hat $\mathbf{U}$?

4. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, sodass eine Matrix $\mathbf{A}$ eine reelle Eigenzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ besitzt?

5. Gegeben ist folgendes Optimierungsproblem, bei dem wir die quadratische Form einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unter einer Nebenbedingung maximieren wollen:
$$\max_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$
   a) Warum ist die Nebenbedingung notwendig, damit das Problem wohlgestellt ist?
   b) Welcher Vektor maximiert die Zielfunktion unter der Nebenbedingung?

6. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Die Spur ist definiert als $\operatorname{Spur}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   a) Für $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\operatorname{Spur}(\mathbf{BC}) = \operatorname{Spur}(\mathbf{CB})$.
   b) Die Spur ist die Summe der Eigenwerte: $\operatorname{Spur}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
   c) Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte: $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

7. Die Fibonacci-Folge ist eine rekursiv definierte Folge mit $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Ihre Glieder lassen sich mithilfe von Exponentiation einer Matrix berechnen. Die Grundmatrix dabei ist
$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

und wird potenziert, sodass

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_1^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mithilfe dieser Methode alle Folgenglieder bis einschließlich F_6.

b) Erläutern Sie, wie man mithilfe einer Eigenzerlegung beliebige Folgenglieder effizient bestimmen kann.

8. Aufgrund von numerischen Fehlern ist die Systemmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ häufig nicht positiv definit, obwohl sie das theoretisch sein sollte. Als Lösung nutzt man gerne Regularisierung, d.h. statt $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ löst man ein LGS $(\mathbf{C} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\alpha > 0$, das man im Vorhinein wählt[1].

   a) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Eigenvektoren von $\mathbf{C}$. Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat $\mathbf{C} + \alpha\mathbf{I}$?

   b) Begründe mit der vorigen Teilaufgabe, dass die Kondition der Matrix $\mathbf{C} + \alpha\mathbf{I}$ besser ist als von $\mathbf{C}$.

   Hinweis: Die Kondition einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann man berechnen als

   $$\kappa(\mathbf{A}) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|,$$

   wobei λ_1 der betragsmäßig größte und λ_n der betragsmäßig kleinste Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist.

   c) Was passiert, wenn man zu viel regularisiert, d.h. α sehr groß wählt? Schau dir explizit an was für $\alpha \to \infty$ passiert.

9. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   a) Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle ihre Eigenwerte größer oder gleich Null sind.

   b) Jede symmetrische, positiv semidefinite Matrix $\mathbf{A}$ kann man als Produkt einer Matrix $\mathbf{B}$ mit sich selbst schreiben: $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.

   Weitere Fragen hierzu:

   i. Ist $\mathbf{B}$ eindeutig bestimmt?

   ii. Welche Eigenschaften hat $\mathbf{B}$?

[1] Diese Art der Regularisierung nennt man ℓ^2-Regularisierung, bei der man statt $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ die Fehlerfunktion $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}\|^2$ minimiert. Dadurch liegt $\mathbf{Ax}$ nicht mehr möglichst nah an $\mathbf{b}$, denn die ℓ^2-Norm des Lösungsvektors wird gleichzeitig minimiert.

Aufgabe 2: Potenzmethode

Die Potenzmethode ist ein numerisches Verfahren zur bestimmung des Eigenvektors zum betragsmäßig größten Eigenwertes einer (diagonalisierbaren) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei gilt folgende Iterationsvorschrift:

$$\mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_t\|}$$

Dabei nehmen wir an, dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

1. Warum wird der Vektor in jedem Schritt normiert?

2. Für welche Startvektoren sollte das Verfahren in der Theorie nicht gegen den Eigenvektor zum größten Eigenwert konvergieren?

3. Wie kann man das Verfahren modifizieren, um den Eigenvektor zum betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert zu erhalten, falls $\mathbf{A}$ symmetrisch ist?

4. Gegeben sind die folgenden zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

   a) Welches ist der Eigenvektor zum (betragsmäßig) größten Eigenwert der beiden Matrizen?

   b) Führen Sie für beide Matrizen die Potenzmethode für einige Iterationen mit dem Startvektor $\mathbf{v}_0 = (1, 1)^\mathsf{T}$ durch (Sie können sich hier den Normierungsschritt sparen). Wie schnell konvergiert das Verfahren für die jeweilige Matrix?

   c) Wodurch kommt der Unterschied in der Konvergenzgeschwindigkeit zustande?

5. Zeigen Sie, dass das Verfahren exponentiell mit dem Faktor $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ konvergiert.

6. Wie kann man mithilfe der Potenzmethode den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dazu haben?