FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 16. März 2023

2. Hausarbeit – Logik
Abgabe: 13.04.2023 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 13. April 2023, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 12 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 80 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Jeder Punkt in der Hausarbeit entspricht dabei $\frac{1}{4}$ Portfoliopunkten. Es sind also bis zu 20 Portfoliopunkte zu erreichen.

Sie dürfen Aussagen aus der Vorlesung, aus dem Skript, aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

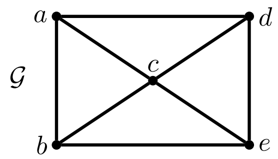
Alle Antworten sind zu begründen.

Hausaufgabe 1

3+4+3+4+6+6 = 26 Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur. Ein *Endomorphismus* ist ein Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{A}$, welcher eine τ-Struktur $\mathcal{A}$ in sich selbst abbildet. Ein Endomorphismus der ein Isomorphismus ist wird auch *Automorphismus* genannt.

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Die Struktur $\mathcal{G}$ ist durch die folgende Abbildung gegeben. Sei $\mathcal{B}$ eine σ-Struktur mit einem unendlichen Universum B.



(i) Geben Sie einen Endomorphismus $h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ an, sodass das Bild von h weniger als fünf Elemente enthält. Begründen Sie insbesondere warum h ein Endomorphismus ist.

(ii) Geben Sie eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit genau drei Elementen an, für welche genau ein Automorphismus existiert.

Wir nennen eine σ-Struktur $\mathcal{Z}$ mit dem Universum Z *endomorph reduzierbar*, wenn ein Endomorphismus $h : \mathcal{Z} \to_{hom} \mathcal{Z}$ existiert, dessen Bild eine echte Teilmenge von Z ist.

(iii) Geben Sie eine σ-Struktur an, deren Universum genau vier Elemente enthält und welche nicht endomorph reduzierbar ist.

Sei $\mathcal{U}$ eine beliebige endliche σ-Struktur mit Universum U. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei C_n der Kreis auf n Knoten und $\mathcal{C}_n$ die zu C_n gehörige σ-Struktur. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $k \geq 4$.

(iv) Zeigen Sie: Wenn $|U| \geq 2$ und es existiert ein $u \in U$, sodass $(u, u) \in E^{\mathcal{U}}$, dann ist $\mathcal{U}$ endomorph reduzierbar.

(v) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn k gerade ist, ist $\mathcal{C}_k$ endomorph reduzierbar.

(vi) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn k ungerade ist, ist $\mathcal{C}_k$ endomorph reduzierbar.

Hinweis: Aufgabe 2 aus Tutorium 07 kann Ihnen hier helfen.

Hausaufgabe 2 5+4+5+4+2+2+4+4 = 30 Punkte

Sei $\sigma = \{\oplus, e\}$ eine Signatur, welche ein zweistelliges Funktionssymbol $\oplus$ und ein Konstantensymbol e enthält. Wir definieren folgende FO[σ]-Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 :=& \forall x(x \oplus e = x \land e \oplus x = x)\\
\varphi_2 :=& \forall a \forall b \forall c\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\\
\varphi_3 :=& \forall a \exists a'(a \oplus a' = e \land a' \oplus a = e)\\
\varphi_4 :=& \exists a \exists b(a \neq b \land a \neq e \land b \neq e)\\
\varphi_5 :=& \forall a \forall b(a = e \lor b = e \lor a = b \lor a \oplus b = e).
\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie: Es existiert ein endliches Modell für $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4$ mit mindestens 5 Elementen.

(ii) Zeigen Sie: Es existiert kein unendliches Modell für $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4 \land \varphi_5$.

Wir definieren die Formelmenge $\Phi^v_{Grp} \coloneqq \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$.

(iii) Zeigen Sie: Die σ-Struktur $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(\Phi^v_{Grp})$ ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Hinweis: Versuchen Sie zu zeigen, dass das Universum von $\mathcal{G}$ genau drei Elemente besitzt.

(iv) Zeigen Sie: Für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt entweder $\Phi^v_{Grp} \models \varphi$ oder $\Phi^v_{Grp} \models \neg\varphi$.

Sei $\tau = \{\odot\}$ wobei $\odot$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathcal{A}_n = (S_n, \odot^{\mathcal{A}_n})$, wobei

$$S_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in [n] \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für alle } i, j \in [n]\}$$

die Menge der Permutationen auf n Elementen beschreibt und $\odot^{\mathcal{A}_n}$ die Verknüpfung von Permutationen beschreibt. Eine Permutation $(a_1, \dots, a_n) \in S_n$ ist ein Tupel welches die bijektive Abbildung der Form $f : [n] \to [n], i \mapsto a_i$ repräsentiert. Wir schreiben deshalb auch $f = (a_1, \dots, a_n)$ für die genannte Funktion. Seien $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in S_n$ und $f = (a_1, \dots, a_n)$ und $g = (b_1, \dots, b_n)$ die dadurch definierten bijektiven Funktionen. Dann ist die Verknüpfung der beiden Permutationen definiert als $(a_1, \dots, a_n) \odot^{\mathcal{A}_n} (b_1, \dots, b_n) = (c_1, \dots, c_n)$, wobei $c_i = f(g(i))$.

S_n zusammen mit $\odot^{\mathcal{A}_n}$ bildet eine Gruppe, die *Gruppe der Permutationen*.

(v) Zeigen Sie: Für $n = 5$, $f = (5, 4, 3, 2, 1) \in S_5$ und $g = (1, 4, 2, 5, 3) \in S_5$ gilt $g \odot^{\mathcal{A}_n} f = (3, 5, 2, 4, 1)$.

(vi) Zeigen Sie: Für $n = 5$ und $g = (2, 4, 1, 5, 3) \in S_5$ gilt $g^{-1} = (3, 1, 5, 2, 4)$.[1]

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

(vii) Zeigen Sie: Sei $g = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$ eine Permutation, dann ist $\psi : S_n \to S_n,\ f \mapsto g^{-1} \odot^{\mathcal{A}_n} f \odot^{\mathcal{A}_n} g$ ein Isomorphismus.

(viii) Zeigen Sie mit Hilfe des Isomorphielemmas: Es existiert keine Formel $\psi(x) \in FO[\tau]$ mit $\psi(\mathcal{A}_n) = \{(n, n-1, n-2, \dots, 1)\}$.

[1] g^{-1} ist die *Umkehrfunktion* von der Funktion g.

Hausaufgabe 3 6+4+2+2+10 = 24 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist.

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir definieren das *erinnerungslose Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel* auf m Runden, geschrieben $\mathfrak{G}^?_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie folgt. Der Herausforderer und die Duplikatorin spielen nach den selben Regeln wie im Standard Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel. Seien $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$ die Elemente die in der Struktur $\mathcal{A}$ gespielt wurden und seien $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq B$ die Elemente die in der Struktur $\mathcal{B}$ gespielt wurden.

Die Duplikatorin gewinnt das erinnerungslose Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel auf m Runden, falls ein partieller Isomorphismus $h^? : \{a_1, \dots, a_m\} \to \{b_1, \dots, b_m\}$ existiert, also falls die von den gespielten Elementen induzierte Substrukturen isomorph sind.

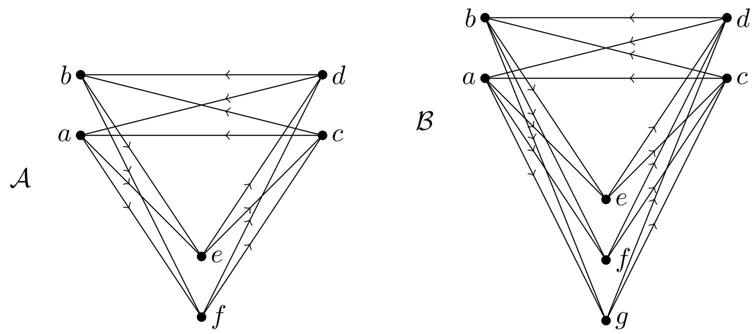
Vergleichen Sie diese Definition mit der Definition des herkömmlichen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels.

(i) Zeige oder widerlege: Falls die Duplikatorin $\mathfrak{G}^?_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gilt $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

(ii) Zeigen oder widerlege: Falls $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ dann gewinnt die Duplikatorin $\mathfrak{G}^?_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ein *eulerscher* Digraph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E ist ein **gerichteter** Graph für welchen jeder Knoten die selbe Anzahl an eingehender Kanten wie ausgehender Kanten hat. Das heißt für jedes $u \in V$ gilt $|\{(u, v) \in E \mid v \in V\}| = |\{(v, u) \in E \mid v \in V\}|$.

Wir definieren die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über die folgenden Abbildungen.



(iii) Zeigen Sie: Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(iv) Zeigen Sie: Der Herausforderer gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(v) Zeigen Sie: Die Klasse der eulerschen Digraphen ist in der Klasse der endlichen, schwach zusammenhängenden[2], **gerichteten** Graphen nicht FO[σ]-definierbar.

[2]Siehe auch die Referenz für Graphen. Ein gerichteter Graph D heißt *schwach zusammenhängend*, falls der ungerichtete Graph $(V(D), \{\{u, v\} \mid (u, v) \in E(D)\})$ zusammenhängend ist.