Gliederung

„Rice'sche Katastrophe"

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

$\{ w \mid M_w$ berechnet $\Omega \}$ $\longrightarrow$ unentscheidbar

$\{ w \mid M_w$ berechnet konst. Fkt$\}$ $\longrightarrow$ –"–

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

$S = \{\Omega\} \rightarrow C(S)$ unentscheidbar

$S = \{$konst.-Funk. 0, konst.-Funkt. 1, ...$\}$

$C(\emptyset) = \{w \mid$ ~~die~~ M_w berechnet keine Fkt.$\} = \emptyset$

Frage: warum ist $C(R)$ entscheidbar?

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$.

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $\underline{H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})}$.

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.
Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turingmachine Q, deren berechnete Funktion q in $\mathcal{S}$ liegt.

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

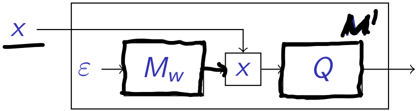
Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid$ die von M_w berechnete Funktion liegt in $\mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.
Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turingmaschine Q, deren berechnete Funktion q in $\mathcal{S}$ liegt.
Wir konstruieren Reduktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die bei Eingabe eines Codewortes w das Codewort w' der Maschine M' ausgibt die bei Eingabe x

1. erst M_w auf leerem Band simuliert, und
2. nachdem M_w hält, Q auf Eingabe x simuliert.



Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

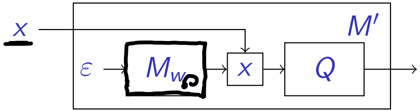
Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.
Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turingmaschine Q, deren berechnete Funktion q in $\mathcal{S}$ liegt.
Wir konstruieren Reduktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die bei Eingabe eines Codewortes w das Codewort w' der Maschine M' ausgibt die bei Eingabe x

*1. erst M_w auf leerem Band simuliert, und
*2. nachdem M_w hält, Q auf Eingabe x simuliert.



$\rightsquigarrow$ M' berechnet $\begin{cases} q \;\in S & \text{falls } w \in H_0 \\ \Omega \;\notin S & \text{sonst} \end{cases}$

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid$ die von M_w berechnete Funktion liegt in $\mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.
Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turingmachine Q, deren berechnete Funktion q in $\mathcal{S}$ liegt.
Wir konstruieren Reduktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die bei Eingabe eines Codewortes w das Codewort w' der Maschine M' ausgibt die bei Eingabe x

1. erst M_w auf leerem Band simuliert, und
2. nachdem M_w hält, Q auf Eingabe x simuliert.

$\rightsquigarrow M'$ berechnet $\begin{cases} q & \text{falls } w \in H_0 \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$

$w \in H_0 \Leftrightarrow M_w$ hält auf leerem Band
$\Leftrightarrow M'$ berechnet $q \in \mathcal{S}$
$\Leftrightarrow \langle M' \rangle \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$!

Red. Eig.

Satz von Rice I

Informell: Fragen bzgl. Leistungsfähigkeit/Verhalten einer TM generell unentscheidbar

Theorem (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine **nicht-triviale** Teilmenge von $\mathcal{R}$ (d.h. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).
Dann ist $\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \{w \mid$ die von M_w berechnete Funktion liegt in $\mathcal{S}\}$ unentscheidbar.

Beweis

Fall 1: Die überall undefinierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.
Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turingmaschine Q, deren berechnete Funktion q in $\mathcal{S}$ liegt.
Wir konstruieren Reduktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die bei Eingabe eines Codewortes w das Codewort w' der Maschine M' ausgibt die bei Eingabe x

1. erst M_w auf leerem Band simuliert, und
2. nachdem M_w hält, Q auf Eingabe x simuliert.

$$\rightsquigarrow M' \text{ berechnet } \begin{cases} q & \text{falls } w \in H_0 \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ &\Leftrightarrow M' \text{ berechnet } q \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow \langle M' \rangle \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Frage: Überlegen Sie sich den analogen Fall 2 des Beweises (Reduktion von $\overline{H_0}$ auf $\mathcal{C}(\mathcal{S})$)

Satz von Rice II

Korollar

Folgende Fragestellungen bzgl. der Leistung von Turing-Maschinen sind unentscheidbar:

(a) Die berechnete Funktion ist
- konstant,
- * total,
- * primitiv-rekursiv.

$\{2, 2, 2, 0\}$

$x_0 := 1$

Satz von Rice II

Korollar

Folgende Fragestellungen bzgl. der Leistung von Turing-Maschinen sind unentscheidbar:

(a) Die berechnete Funktion ist
- konstant,
- total,
- primitiv-rekursiv.

(b) Die akzeptierte Sprache ist
- * leer,
- * endlich,
- * Σ^*,
- regulär,
- kontextfrei,
- kontextsensitiv.

Satz von Rice II

Korollar

Folgende Fragestellungen bzgl. der Leistung von Turing-Maschinen sind unentscheidbar:

(a) Die berechnete Funktion ist
- konstant,
- total,
- primitiv-rekursiv.

(b) Die akzeptierte Sprache ist
- leer,
- endlich,
- Σ^*,
- regulär,
- kontextfrei,
- kontextsensitiv.

Abschließende Bemerkungen / Mitteilungen:

1. "ist die akzeptierte Sprache vom Typ-0?" ist trivial (immer "ja")

Satz von Rice II

Korollar

Folgende Fragestellungen bzgl. der Leistung von Turing-Maschinen sind unentscheidbar:

(a) Die berechnete Funktion ist
- konstant,
- total,
- primitiv-rekursiv.

(b) Die akzeptierte Sprache ist
- leer,
- endlich,
- Σ^*,
- regulär,
- kontextfrei,
- kontextsensitiv.

Abschließende Bemerkungen / Mitteilungen:

1. "ist die akzeptierte Sprache vom Typ-0?" ist trivial (immer "ja")
2. "zweiter Satz von Rice" charakterisiert semi-entscheidbare Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$:
   zB. $\mathcal{C}(\{q \mid q \neq \Omega\})$ semi-entscheidbar, aber $\mathcal{C}(\{\Omega\})$ nicht

!!! ACHTUNG !!!

Satz von Rice II

Korollar

Folgende Fragestellungen bzgl. der Leistung von Turing-Maschinen sind unentscheidbar:

(a) Die berechnete Funktion ist
- konstant,
- total,
- primitiv-rekursiv.

(b) Die akzeptierte Sprache ist
- leer,
- endlich,
- Σ^*,
- regulär,
- kontextfrei,
- kontextsensitiv.

Abschließende Bemerkungen / Mitteilungen:

1. "ist die akzeptierte Sprache vom Typ-0?" ist trivial (immer "ja")
2. "zweiter Satz von Rice" charakterisiert semi-entscheidbare Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$:
   zB. $\mathcal{C}(\{q \mid q \neq \Omega\})$ semi-entscheidbar, aber $\mathcal{C}(\{\Omega\})$ nicht
3. Es gibt nachweislich schwierigere Probleme als das allgemeine Halteproblem:
   zB. das "Äquivalenzproblem für Turing-Maschinen" $Eq := \{w\#w' \mid T(M_w) = T(M_{w'})\}$
   $H \leq Eq$ aber **nicht** $Eq \leq H$