9. freiwillige Hausaufgabe – Logik
Abgabe: bis 10:30 am 20.01.2023 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Hausaufgabe 1

Sei $\sigma \coloneqq \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Entscheiden Sie für die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ jeweils ob diese unerfüllbar, erfüllbar mit einem endlichen Modell, oder erfüllbar mit einem unendlichen Modell sind.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\coloneqq \forall x \exists y \forall z\, (E(x,y) \wedge (z \neq y \to \neg E(x,z))) \\
&\quad \wedge \exists x\, (\forall y\, (\neg E(y,x)) \wedge \forall y \forall z\, (x \neq z \to \exists w\, (E(w,z) \wedge (y \neq w \to \neg E(y,z))))) \\
\varphi_2 &\coloneqq \exists x \exists z \forall w \forall y\, (x \neq z \wedge \neg E(x,z) \wedge \neg E(z,x) \wedge (E(y,w) \vee E(w,y))) \\
\varphi_3 &\coloneqq \forall x\, (\neg E(x,x)) \wedge \forall x \forall y\, (E(x,y) \to E(y,x)) \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y \left(\bigwedge_{1 \le i \le 3} (y = x_i \vee E(y, x_i)) \right)
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2

Sei σ eine beliebige Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}(\sigma)$.

Für eine Relation $R \subseteq A^k$ und eine Abbildung $f : A \to B$ schreiben wir

$$f(R) \coloneqq \{(f(r_1), \ldots, f(r_k)) : (r_1, \ldots, r_k) \in R\}.$$

Sei $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass $\pi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{B})$.

Anmerkung: Dieser Beweis ist am sinnvollsten mittels zwei strukturellen Induktionen durchzuführen.