Stochastik für Informatiker:innen - Übungsblatt 10
Abgabe bis Freitag, 07.07.2023, 18:00 Uhr

Aufgabe 1

Von einer Stichprobe von zehn Fischen aus dem Lake Michigan wurde der PCB-Gehalt von Fischen in ppm (parts per million) bestimmt. Von dem Messverfahren ist bekannt, dass die Standardabweichung 0.8 ppm beträgt. Der Messwert werde als normalverteilt angenommen. Die Messwerte sind durch die folgende Tabelle gegeben.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	11.2	12.9	10.8	11.6	12.5	10.1	11.0	12.2	12.4	10.6

a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.01$ für den unbekannten Parameter μ.

b) In der Regel interessiert man sich dafür, dass der PCB-Gehalt einen bestimmten Wert nicht überschreitet, d.h. es genügt ein einseitiges Konfidenzintervall. Bestimmen Sie ein h derart, dass

$$P_\mu(\mu \in]-\infty, \bar{\mu}_{10} + h]) \geq 1 - \alpha$$

zum Niveau $\alpha = 0.01$.

6 Punkte

Aufgabe 2

Von einer großen Charge produzierter Schrauben wurde eine Stichprobe von 10 Schrauben genommen und deren Länge gemessen. Die Länge wird als normalverteilt angenommen, und es sei bekannt, dass die Varianz der Länge der Schrauben $\sigma^2 = 4$ beträgt. Die Messwerte sind durch die folgende Tabelle gegeben.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10	8	9	10	11	11	9	12	12	8

a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.04$ für den unbekannten Parameter μ.

b) Wie viele Schrauben müssen mindestens getestet werden, damit das Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.04$ höchstens die Länge 2 hat?

c) Wenn weiterhin 10 Schrauben getestet werden, für welches Niveau α kann erreicht werden, dass das Konfidenzintervall die Länge 2 bzw. die Länge 1 hat?

In der Praxis sollte das Sicherheitsniveau nicht an die Daten angepasst werden. Das muss vorher festgelegt werden.

6 Punkte

Aufgabe 3

Unmittelbar nach der Geburt wird die Körpergröße der Neugeborenen gemessen. In einer bestimmten Woche wurden dabei (in cm) gemessen:

$$49 \quad 50 \quad 45 \quad 51 \quad 47 \quad 49 \quad 48 \quad 54 \quad 53 \quad 55 \quad 45 \quad 50 \quad 48$$

Unter der Annahme, dass die Körpergröße normalverteilt ist, testen Sie bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$, ob die mittlere Körpergröße bei 50 cm liegt.
Hinweis: Zweiseitiger t-Test für eine Stichprobe. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Testproblem.

b) Bestimmen Sie $\bar{\mu}_n$, $\bar{\sigma}_n^2$ und den Freiheitsgrad f.

c) Bestimmen Sie mithilfe von Tabelle 1 den Vergleichswert $t_{1-\alpha/2,f}$, d.h. das $(1-\alpha/2)$-Quantil der t-Verteilung zum Parameter f.

d) Bestimmen Sie den Testwert

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{\mu}_n - \mu_0}{\bar{\sigma}_n}$$

e) Entscheiden Sie, ob die Nullhypothese verworfen wird, d.h. ob $|t| \geq t_{1-\alpha/2,f}$ gilt.

6 Punkte

f	P für zweiseitigen Vertrauensbereich							
	0.5	0.75	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.998
	P für einseitigen Vertrauensbereich							
	0.75	0.875	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	1.000	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	0.816	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.741	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

Tabelle 1: Einige Quantile der t-Verteilung mit f Freiheitsgraden

Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung:

Wertetabelle der Verteilungsfunktion $\Phi(z_\alpha) = 1 - \Phi(-z_\alpha)$ der Standardnormalverteilung. *Beispiel:* Den Wert für $z_\alpha = 2.26$ findet man in Zeile 2.20 und Spalte 0.06: $\Phi(2.26) = 0.9881$. Insbesondere ist $z_\alpha = 2.26$ das α-*Quantil* zum Niveau $\alpha = 0.9881$.

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Hinweise:

- Ihre Lösungen geben Sie bitte gut lesbar bis Freitag, 07.07.2023, 18:00 Uhr in Ihrem Tutorium ab. Zudem besteht die Möglichkeit, Ihre Lösungen als PDF per E-Mail an den Leiter oder die Leiterin Ihres Tutoriums zu schicken. Wir behalten uns vor, nicht lesbare Lösungen konsequent mit null Punkten zu bewerten.

- Ihre Lösungen werden in den Tutorien in KW 28 besprochen.