Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 3.2

Singulärwertzerlegung

04.12.2023 bis 08.12.2023

Aufgabe 1: Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung (SVD) ist, in der vollen Form, die Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ in

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & \mathbf{v}_1^\mathsf{T} & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_m^\mathsf{T} & — \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $k = \min\{n, m\}$.

1. Welche Eigenschaften haben die Matrizen $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ in der vollen Form der SVD? Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus. Welche Eigenschaften und Konventionen sind bei den Singulärwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ zu beachten? Unter welchen Bedingungen besitzt eine Matrix eine SVD?

Matrix	Inhalt	Eigenschaft	Geometrische Interpretation
$\mathbf{U}$	linke Singulärvektoren (in den Spalten)		
$\boldsymbol{\Sigma}$	Singulärwerte (auf der Diagonalen)		
$\mathbf{V}^\mathsf{T}$	rechte Singulärvektoren (in den Zeilen)		

2. Für die folgende Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ werden vier Zerlegungen $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$ vorgestellt. Entscheiden Sie, ob es sich bei diesen um eine korrekte, den Konventionen konforme SVD handelt oder nicht.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $n \neq m$. Was ist der Unterschied zwischen der vollen und der reduzierten Form der SVD für die Fälle $n > m$ und $m > n$?

4. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der SVD einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und der Eigenzerlegung ihrer Gram-Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sowie $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ her.

5. Wie kann mit der SVD der Rang und der Kern einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestimmt werden?

Die (Moore-Penrose) Pseudoinverse ist eine Verallgemeinerung der Inversen auf singuläre und nicht-quadratische Matrizen beliebigen Ranges. Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die eindeutig bestimmte Matrix $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ihre Pseudoinverse, falls $\mathbf{A}^+$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, 2) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$, 3) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ ist symmetrisch, 4) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ ist symmetrisch.

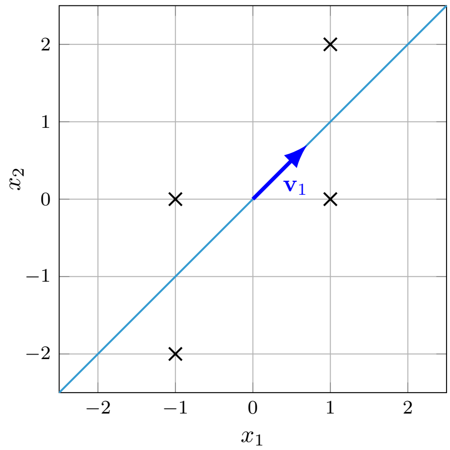
5. Wie kann man die Pseudoinverse einer Matrix mithilfe der SVD berechnen?

6. Wie kann man die Psudoinverse nutzen, um lineare Gleichungssysteme $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zu lösen? Welche Lösung(en) erhält man, falls das LGS keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat?

Aufgabe 2: Hauptkomponentenanalyse

Die Hauptkomponentenanalyse (PCA) ist ein statistisches Verfahren, bei dem ein zentrierter Datensatz $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ mithilfe eines k-dimensionalen linearen Unterraumes des $\mathbb{R}^d$ bestmöglich approximiert werden soll, wobei üblicherweise gilt, dass $k \ll d$. Gesucht ist eine Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ (bei der wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass sie orthonormal ist), dessen Spann möglichst nah an allen Punkten ist, also folgende Fehlerfunktion minimiert: $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{V}\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i\|^2$ mit $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$. Dabei ist $\mathbf{V}\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i$ die orthogonale Projektion des Punktes $\mathbf{x}_i$ in den Spaltenraum von $\mathbf{V}$.

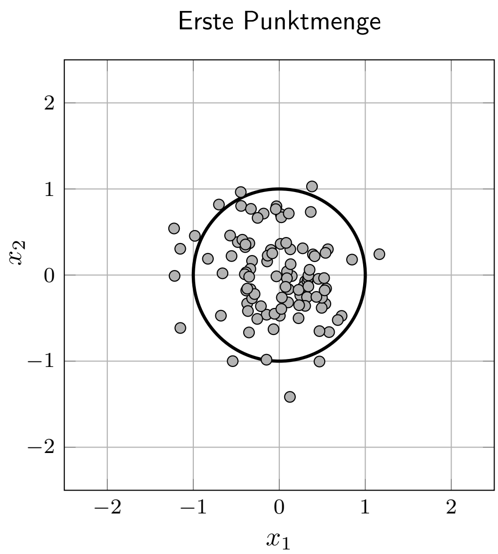
1. Gegeben ist ein Basisvektor $\mathbf{v}_1$ mit dem von ihm aufgespannten linearen Unterraum $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$ und eine Menge von Punkten. Zeichnen Sie die Fehler ein, die von PCA minimiert wird.

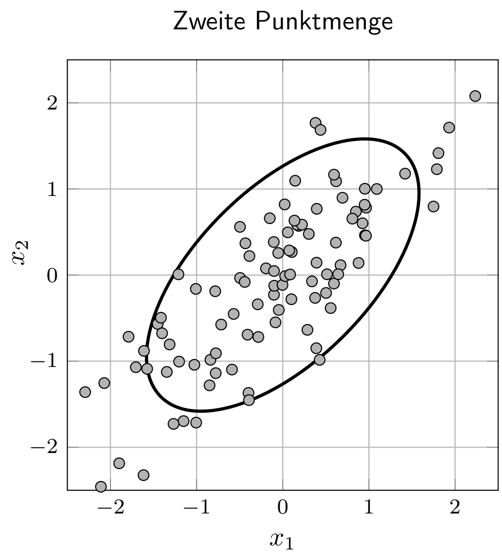


2. Wozu wird PCA im Kontext der Gesichtserkennung angewandt?

3. Erklären Sie jeden Schritt des Eigenface-Algorithmus zur Gesichtserkennung.

4. Im Folgenden sind zwei zentrierte Punktemengen im $\mathbb{R}^2$ abgebildet. Zeichnen Sie die erste und zweite Hauptkomponente, falls möglich, ein. Was können Sie über das Verhältnis der Singulärwerte der zugehörigen Datenmatrix sagen?





5. Da beim PCA Algorithmus angenommen wird, dass die Datenpunkte zentriert sind, werden die Beobachtungen vom Mittelwert befreit. Was kann passieren, falls dieser Schritt ausgelassen wird?