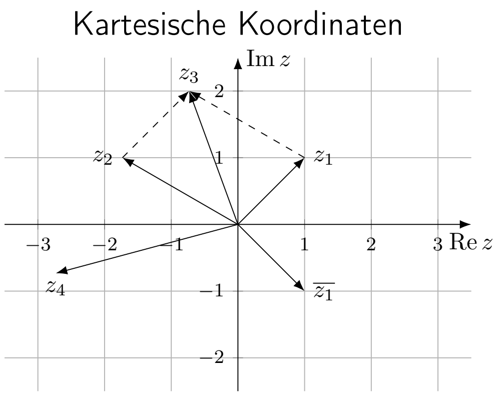
Wissenschaftliches Rechnen - Übung 5.1

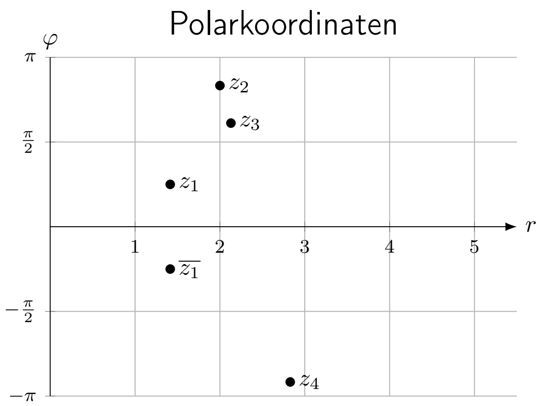
Diskrete Fourier-Transformation

15.01.2024 bis 19.01.2024

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

Die diskrete Fourier-Transformation benötigt Kenntnisse zu komplexen Zahlen. Darum sollen im Folgenden die Grundlagen von komplexen Zahlen wiederholt werden. Gegeben sind zunächst die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ in kartesischer Darstellung sowie $z_2 = 2\exp(\frac{5\pi i}{6})$ in Polarkoordinaten.





1. Wie funktioniert die Umrechnung von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten und andersherum? Wandeln Sie z_1 und z_2 in die jeweils andere Darstellung um und zeichnen Sie diese in den obigen Abbildungen hinein.

Lösung

Die Bedeutung der jeweiligen Koordinaten ist:

- Kartesische Darstellung (x, y): Realteil $x \in \mathbb{R}$, Imaginärteil $y \in \mathbb{R}$
- Polarkoordinaten (r, φ): Betrag $r \in [0, \infty[$, Winkel zur positiven reellen Achse $\varphi \in [-\pi, \pi[$

Die Umrechnung $x + yi = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)i = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r\exp(i\varphi)$ erfolgt mit:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi) \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{atan2}(y, x).$$

Dabei ist der zweistellige Arkustangens wie folgt definiert:

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{falls } x > 0 & \text{(1. und 4. Quadrant)} \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{falls } x < 0 \text{ und } y \geq 0 & \text{(2. Quadrant)} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 & \text{(3. Quadrant)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0 & \text{(positive imaginäre Achse)} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0 & \text{(negative imaginäre Achse)} \\ \text{undefiniert} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 & \text{(im Ursprung)} \end{cases}$$

Dieser ist die analytische Fortsetzung von $\arctan(\frac{y}{x})$. Für unsere Zahlen ergibt die Umrechnung

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \; \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad x_2 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}, \; y_2 = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1.$$

wobei der Winkel (auch genannt das Argument) aus der Darstellung abgelesen wurde. Also gilt:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right), \quad \text{sowie} \quad z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{5i\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

Lösung Ende

2. Berechnen Sie die Summe $z_3 = z_1 + z_2$ und das Produkt $z_4 = z_1 \cdot z_2$ und zeichnen Sie diese ebenfalls in die Abbildungen hinein. Welche Darstellung eignet sich für die jeweilige Operation am besten?

Lösung

Die Addition zweier komplexer Zahlen lässt sich in kartesischer Darstellung einfach durchführen und entspricht der Vektoraddition zweier 2-Vektoren, wobei Real- und Imaginärteil einzeln addiert werden.

$$z_3 = z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = \underbrace{a_1 + a_2}_{\text{Realteil}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\text{Imaginärteil}} i$$

Die Multiplikation in kartesischer Darstellung jedoch ist nicht sehr aufschlussreich.

$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 = \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{\text{Realteil}} + \underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{\text{Imaginärteil}} i$$

Dafür eignet sich die Polardarstellung besser: In dieser werden die Längen multipliziert und die Winkel addiert.

$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(i\varphi_1) r_2 \exp(i\varphi_2) = r_1 r_2 \exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi 2) = \underbrace{r_1 r_2}_{\text{Betrag}} \exp(i \underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{Argument}})$$

Man beachte, dass $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$. Somit gilt für unsere konkreten Zahlen:

$$z_3 = z_1 + z_2 = (1 - \sqrt{3}) + 2i \quad \text{sowie} \quad z_4 = z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{13\pi i}{12}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{-11\pi i}{12}\right).$$

Lösung Ende

3. Berechnen Sie die komplex Konjugierte $\overline{z_1}$ von z_1 in beiden Darstellungen und zeichnen Sie diese ebenfalls in die Abbildungen hinein. Welche geometrische Bedeutung hat die komplexe Konjugation?

Lösung

Die komplex Konjugierte lässt sich in beiden Darstellungen einfach berechnen:

- In kartesischer Darstellung wird das Vorzeichen des Imaginärteils umgedreht:

$$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi.$$

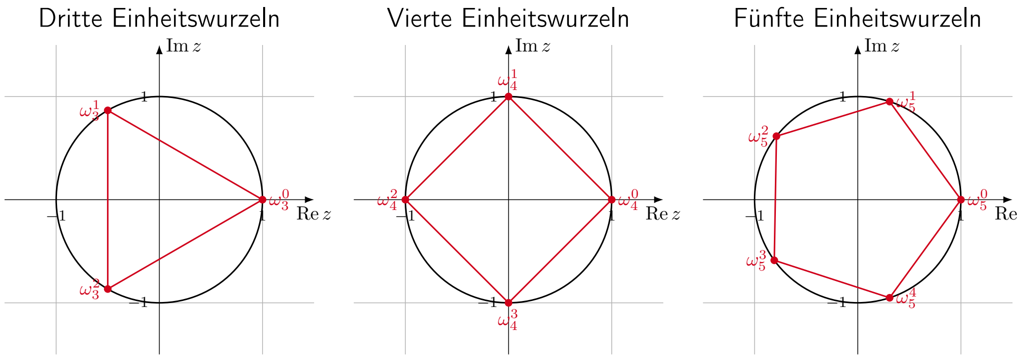
- In Polardarstellung wird das Vorzeichen des Arguments umgedreht:

$$\overline{z} = \overline{r\exp(\varphi i)} = r\exp(-\varphi i).$$

Die komplex Konjugierte von z_1 ist $\overline{z_1} = 1 - i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)$. Die komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der reellen Achse. Falls eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ auf dem Einheitskreis liegt, d.h. $|z| = 1$, dann ist die komplex Konjugierte die Inverse: $z^{-1} = \overline{z}$. Wichtige Rechenregeln sind $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ sowie $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Lösung Ende

4. Gegeben ist die Gleichung $z^n = 1$. Ermitteln Sie alle Lösungen dieser, die sogenannten Einheitswurzeln, in Abhängigkeit von n. Zeichnen Sie die Lösungen für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$ in die folgenden Abbildungen hinein. Welche Eigenschaften und geometrische Bedeutung haben sie?



Lösung

Wir wollen die Lösungen der Gleichung $z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ mal}} = 1$ bestimmen. Da es sich hierbei um ein Produkt von n komplexen Zahlen handelt, nutzen wir Polarkoordinaten: $z = r\exp(i\varphi)$.

$$z^n = (r\exp(i\varphi))^n = r^n \exp(i\varphi n) = 1\exp(0) = 1$$

Daraus erhalten wir zwei verschiedene Gleichungen: $r^n = 1$ und $\exp(i\varphi n) = \exp(0)$. Wir wissen durch die erste Gleichung, dass $r = 1$, unsere Lösungen also auf dem Einheitskreis liegen. Aus der zweiten Gleichung und dem Fakt, dass $\exp(i\psi) = \exp(i(\psi + 2k\pi))$ mit $k \in \mathbb{Z}$, folgt $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit erhalten wir folgende n unterschiedliche Lösungen:

$$\omega_n^k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

- Dritte Einheitswurzeln: $\omega_3^0, \omega_3^1, \omega_3^2$ mit $\omega_3 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$
- Vierte Einheitswurzeln: $\omega_4^0, \omega_4^1, \omega_4^2, \omega_4^3$ mit $\omega_4 = \exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)$
- Fünfte Einheitswurzeln: $\omega_5^0, \omega_5^1, \omega_5^2, \omega_5^3, \omega_5^4$ mit $\omega_5 = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$

Nun zu den Eigenschaften: Die Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms $p_n(z) = z^n - 1$, das nur reelle Koeffizienten hat. Somit hat es folgende Eigenschaften, von denen man einige aus der Analysis kennt:

- Die Gleichung hat n verschiedene Lösungen.
- Die Zahl $\omega_n^0 = 1$ immer eine Einheitswurzel, unabhängig von n.
- Alle Lösungen haben den Betrag 1, liegen auf dem komplexen Einheitskreis und bilden ein regelmäßiges n-Eck. Der Winkel zu den nächsten Nachbarn beträgt immer $\frac{2\pi}{n}$.
- Nicht-reelle Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten treten in komplex-konjugierten Paaren auf: Falls $z = \omega_n^i$ eine Lösung ist, ist ihre komplex Konjugierte $\overline{z} = \omega_n^{n-i}$ (welche ebenso ihre Inverse ist) eine Lösung.

Die Einheitswurzeln sind eine Diskretisierung der Funktion $f(t) = \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$ bei äquidistanter Abtastung im Intervall $[0, 1]$. Die Funktion f dreht sich im Intervall $[0, 1]$ einmalig um den komplexen Einheitskreis; ihr Realteil ist eine Kosinusschwingung und ihr Imaginärteil eine Sinusschwingung, welche in diesem Intervall genau eine Periode durchlaufen. Die Diskretisierung ihrer Potenzen $f^k(t) = \exp(2\pi i k t)$, welche k mal im Intervall $[0, 1]$ um den komplexen Einheitskreis schwingen (also eine Frequenz von k haben), bilden die Basisvektoren für die diskrete Fourier-Transformation (entspricht den Potenzen der Einheitswurzeln).

Lösung Ende

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation bildet ein zeitdiskretes, endliches Signal, von dem man ausgeht, dass es periodisch fortsetzt wird, auf ein diskretes, periodisches Frequenzspektrum ab. Sie gehört zu den wichtigsten Werkzeugen der Signalverarbeitung.

1. Wie ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ definiert? Welche unterschiedlichen Eigenschaften hat dieses im Vergleich zu reellen Skalarprodukten? Welche analogen Matrixeigenschaften ergeben sich dadurch für komplexe Matrizen?

Lösung

Das komplexe Standardskalarprodukt definieren wir wie folgt: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_n} v_n = \overline{\mathbf{u}}^\mathsf{T} \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}.$$

Dabei ist $\mathbf{u}^* = \overline{\mathbf{u}}^\mathsf{T}$ die Adjungierte des Vektors $\mathbf{u}$, das komplexe Analogon zur Transponierten. Häufig findet man die Adjungierte auch in der Notation $\mathbf{u}^\mathsf{H}$.

Hinweis: Häufig wird das Standardskalarprodukt auch so definiert, dass das zweite Argument komplex konjugiert wird. In unserem Fall hat es (und alle anderen komplexen Skalarprodukte) folgende Eigenschaften (Axiome):

- Sesquilinearität, d.h. Semilinearität im ersten Argument

$$\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\lambda \mathbf{u})^* \mathbf{v} = \overline{\lambda} \mathbf{u}^* \mathbf{v} = \overline{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^* \mathbf{w} = \mathbf{u}^* \mathbf{w} + \mathbf{v}^* \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

  und Linearität im zweiten Argument:

$$\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u}^* \mathbf{v} = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \mathbf{u}^* (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}^* \mathbf{v} + \mathbf{u}^* \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

  Reelle Skalarprodukte müssen bilinear sein, d.h. linear in beiden Argumenten (sie sind damit auch sesquilinear).

- Hermitesch:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{v} = (\mathbf{v}^* \mathbf{u})^* = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$$

  Reelle Standardskalarprodukte müssen symmetrisch sein (und sind gleichzeitig auch hermitesch).

- Positiv definit:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

  Insbesondere ist erwähnenswert, dass das Skalarprodukt eines komplexen Vektors mit sich selbst immer reell ist. Reelle Skalarprodukte sind ebenfalls positiv definit.
  Die euklidische Norm eines komplexen Vektors ist analog definiert als $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}^* \mathbf{u}}$.

Daraus ergeben sich analoge Eigenschaften für Matrizen:

- Unitäre Matrix (komplexes Pendant zu einer orthogonalen Matrix): $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{I}$ (ihre Inverse ist also ihre Adjungierte)
- Hermitesche Matrix: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ (werden wir in diesem Kurs nicht brauchen)

Lösung Ende

2. Wie ist die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $\hat{\mathbf{z}}$ eines diskreten Signals $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ definiert? Wie lässt sie sich diese als Produkt von $\mathbf{z}$ mit einer Matrix schreiben?

Lösung

Die DFT eines diskreten Signals $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ ist ein Signal $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_0, \ldots, \hat{z}_{n-1}) \in \mathbb{C}$ gleicher Länge, wobei die Einträge wie folgt definiert sind:

$$\hat{z}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2\pi i k j}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \omega_n^{kj}$$

Das lässt sich auch als Produkt mit einer Matrix $\mathbf{\Omega}_n$ schreiben:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{\Omega}_n \mathbf{z} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \ldots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \ldots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \ldots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \ldots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}}_{\text{DFT-Matrix}} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$

An der Position (j, k) der DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_n$ steht $\frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{j \cdot k}$.

Lösung Ende

3. Welche Eigenschaften hat die besagte Matrix? Welche Eigenschaften ergeben sich dadurch für die diskrete Fourier-Transformation?

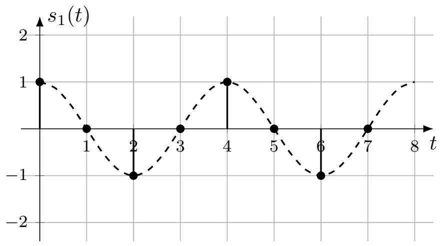
Lösung

- Sie ist unitär, d.h. ihre Spalten (bzw. Zeilen) haben Einheitslänge und stehen orthogonal aufeinander: $\mathbf{\Omega}_n^* \mathbf{\Omega}_n = \mathbf{\Omega}_n \mathbf{\Omega}_n^* = \mathbf{I}_n$. Somit erhält sie Längen und Skalarprodukte. Insbesondere ist sie regulär, sodass die DFT und ihre Inverse eine bijektive (1 zu 1) Abbildung ist.
- Sie ist symmetrisch, d.h. $\mathbf{\Omega}_n^\mathsf{T} = \mathbf{\Omega}_n$.
- Offensichtlich, aber erwähnenswert ist nochmal hervorzuheben, dass die DFT eine lineare Transformation ist.

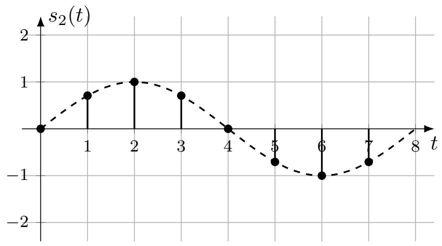
Lösung Ende

4. Gegeben sind vier kontinuierliche reelle Signale $s_1, \ldots, s_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche äquidistant an den Stützstellen $\{0, \ldots, 7\}$ abgetastet wurden.

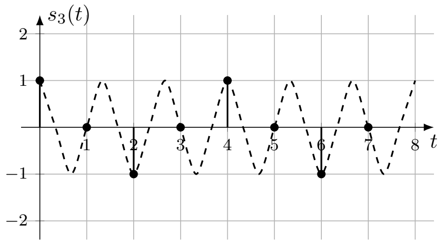
$s_1(t) = \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$



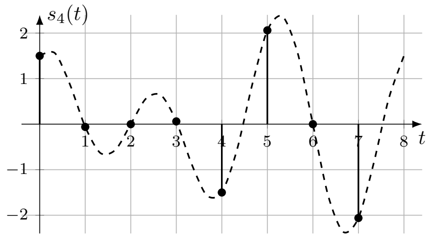
$s_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{8}\right)$



$s_3(t) = \cos\left(6 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$



$s_4(t) = \frac{3}{2}\cos\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$



Wie sieht die Fourier-Transformierte $\hat{\mathbf{s}}_i$ der Vektoren $\mathbf{s}_i = (s_i(0), \dots, s_i(7))^\mathsf{T}$ aus? Was bedeutet jeder Eintrag im Frequenzspektrum des Fourier-transformierten Signals? Welche Symmetrien kommen bei der DFT eines reellen Signals zustande?

Lösung

Die DFT zerlegt das diskrete, periodische Signal in sein Frequenzspektrum mit den jeweiligen Anteilen an Kosinusschwingungen (Realteil) und Sinusschwingungen (Imaginärteil). Der erste (bzw. nullte) Eintrag steht für die Frequenz 0, der nächste Eintrag für die Frequenz 1, und das ganze setzt sich so fort, dass der letzte Eintrag für die Frequenz $n-1$ steht.

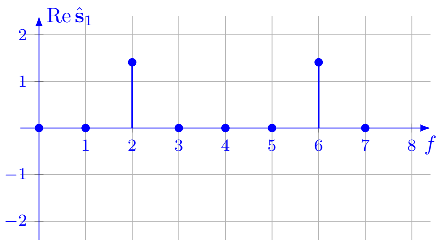
Bei diskreten reellen Signalen entstehen folgende Symmetrien im Frequenzspektrum:

- Der Realteil ist symmetrisch: $\operatorname{Re}\hat{z}_k = \operatorname{Re}\hat{z}_{n-k}$.
- Der Imaginärteil ist antisymmetrisch: $\operatorname{Im}\hat{z}_k = -\operatorname{Im}\hat{z}_{n-k}$.
- Zusätzlich ist der erste (bzw. nullte) Eintrag im Imaginärteil Null. Der nullte Eintrag ist, bis auf den Normierungsfaktor, die Summe aller Einträge des Signals im Ortsraum.

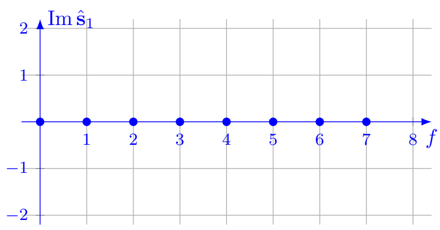
Aus den Symmetrien von Real- und Imaginärteil folgt, dass der Betrag symmetrisch ($\hat{r}_k = \hat{r}_{n-k}$) und das Argument antisymmetrisch ist ($\hat{\varphi}_k = -\hat{\varphi}_{n-k}$), wobei $\hat{z}_k = \hat{r}_k \exp(i\hat{\varphi}_k)$ und $\hat{z}_{n-k} = \hat{r}_{n-k}\exp(i\hat{\varphi}_{n-k})$. Insgesamt gilt also $\hat{z}_k = \overline{\hat{z}_{n-k}}$. Diese Symmetrien haben zur Folge, dass man bei Betrachtung des Frequenzspektrums zwischen der Frequenz k und $n-k$ nicht unterscheiden kann. Dies steht auch im Einklang mit dem Abtasttheorem, welches besagt, dass zum Rekonstruieren eines Signals mit maximaler Frequenz f_{max} durch gleichmäßige Abtastung die Abtastfrequenz mindestens $2 \cdot f_{\mathsf{max}}$ betragen muss.

- Da s_1 eine Kosinusschwingung ist, die im Intervall $[0, 8]$ zweimal schwingt, haben wir im Realteil des Frequenzspektrums einen Spike bei der Frequenz 2. Aufgrund der Symmetrien haben wir denselben Spike bei der Frequenz 6.

Realteil

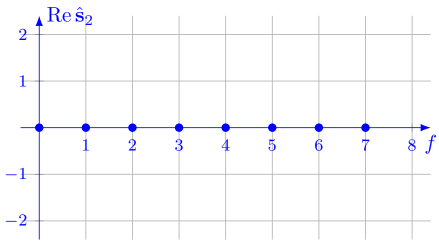


Imaginärteil

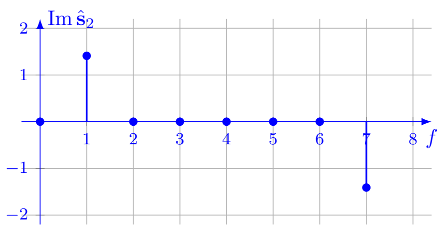


- Da s_2 eine Sinusschwingung ist, die im Intervall $[0, 8]$ einmal schwingt, haben wir im Imaginärteil des Frequenzspektrums einen Spike bei der Frequenz 1. Aufgrund der Symmetrien haben wir denselben Spike mit unterschiedlichem Vorzeichen bei der Frequenz 7.

Realteil

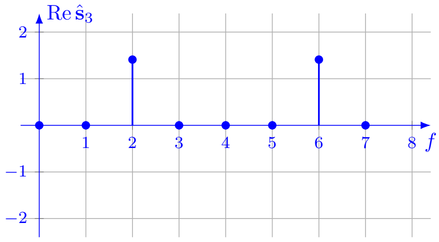


Imaginärteil

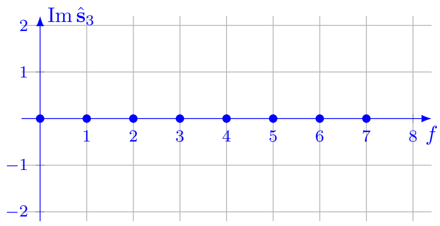


- Da s_3 eine Kosinusschwingung ist, die im Intervall $[0, 8]$ sechsmal schwingt, haben wir im Realteil des Frequenzspektrums einen Spike bei der Frequenz 6. Aufgrund der Symmetrien haben wir denselben Spike bei der Frequenz 2. Wie bereits bei den Symmetrien erklärt, erhalten wir das gleiche Ergebnis wie bei s_1. Das ist nicht verwunderlich, denn die äquidistante Abtastung ergibt dasselbe diskrete Signal.

Realteil

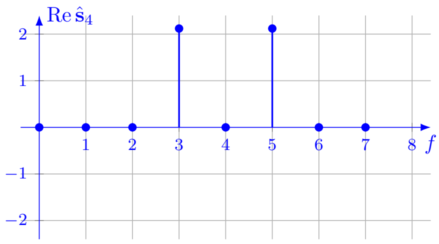


Imaginärteil

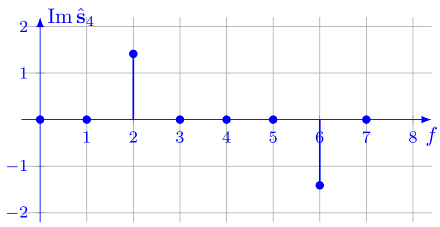


- Da s_4 eine Superposition mehrerer Schwingungen ist, erhalten wir einen Spike für jede der Basisschwingungen. Für die Kosinusschwingung, die im Intervall $[0, 8]$ dreimal schwingt, erhalten wir die Spikes bei 3 und 5. Für die Sinusschwingung, die im gleichen Intervall zweimal schwingt, erhalten wir die Spikes bei 2 und 6. Da die Kosinusschwingung den Faktor $\frac{3}{2}$ hat, ist dieser auch in den Spikes wiederzufinden.

Realteil



Imaginärteil



Lösung Ende

5. Wie lässt sich die inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT) berechnen? Welche Konventionen sind bezüglich der DFT und IDFT zu beachten?

Lösung

Die inverse Fourier-Transformation lässt sich über die Inverse der Matrix $\mathbf{\Omega}_n$ berechnen. Da die DFT-Matrix unitär und symmetrisch ist, ist ihre Konjugierte ihre Inverse und die IDFT $\mathbf{z}$ eines Signals im Frequenzraum $\hat{\mathbf{z}}$ lässt sich durch $\mathbf{z} = \overline{\mathbf{\Omega}}\hat{\mathbf{z}}$ berechnen.

Im Folgenden werden noch ein paar Konventionen aus diesem Kurs erläutert.

- Die Einheitswurzeln sind bei uns über $\omega_n^k = \exp(\frac{2\pi k}{n})$ (gegen den Uhrzeigersinn) definiert. Meistens sieht man aber folgende Konvention: $\omega_n^k = \exp(-\frac{2\pi k}{n})$ (die Einheitswurzeln sind also andersherum/im Uhrzeigersinn definiert). Dies wirkt sich auf den Aufbau der DFT-Matrix aus.
- Die DFT und IDFT haben bei uns den Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$, wobei anderswo die DFT keinen Normierungsfaktor hat und die Inverse den Normierungsfaktor $\frac{1}{n}$. Bei uns ist die DFT-Matrix und die Inverse unitär, woanders nicht bzw. nur fast.

Somit ist unsere DFT-Matrix, bis auf den Normierungsfaktor, die IDFT-Matrix, die man meist im Internet findet.

Lösung Ende