FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 3. November 2022

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 2. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz $X \to (Y \wedge Z) \equiv (X \to Y) \wedge (X \to Z)$ via Äquivalenzumformungen.

(ii) Zeigen Sie die Äquivalenz $(Y \to X) \to X \equiv Y \vee X$ ohne Äquivalenzumformungen oder Wahrheitstafeln zu nutzen.

Lösung zu Aufgabe 1

(i) $X \to (Y \wedge Z) \equiv \neg X \vee (Y \wedge Z) \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \equiv (X \to Y) \wedge (X \to Z)$

(ii) Sei β eine Belegung für die Variablen X und Y. Angenommen $\beta \models Y \vee X$. In diesem Fall gilt also $\max(\beta(X), \beta(Y)) = 1$. Falls $\beta(X) = 1$, wird die äußere Implikation in $(Y \to X) \to X$ zu 1 ausgewertet. Sollten $\beta(Y) = 1$ und $\beta(X) = 0$ gelten, folgt $[\![X \to Y]\!]^\beta = 0$ und somit wertet $(X \to Y) \to X$ wieder zu 1 aus.

Im anderen Fall nehmen wir an, dass $\beta \not\models Y \vee X$ gilt. Hieraus folgt direkt, dass $\beta(X) = \beta(Y) = 0$. Somit haben wir $[\![X \to Y]\!]^\beta = 1$ und als Folge dessen, $[\![(Y \to X) \to X]\!]^\beta = 0$. Demnach gilt die Äquivalenz $(Y \to X) \to X \equiv Y \vee X$.

Aufgabe 2

Wir definieren AL_0 als die Menge der Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}$, die keine Junktoren außer $\neg$ und $\to$ enthalten. Zeigen Sie mittels strukturellen Induktion: Für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ existiert eine Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$ mit $\varphi \equiv \varphi'$.

Anmerkung: $\top$ und $\bot$ sind Junktoren und kommen somit in keiner Formel in AL_0 vor.

Lösung zu Aufgabe 2

IA:

Es gilt $X \in \mathrm{AL}_0$ für alle $X \in \mathrm{AVar}$.

Für $\top$ definieren wir die Formel $\varphi_\top \in \mathrm{AL}_0$ durch $\varphi_\top := X \to X$. Da unter jeder passenden Belegung entweder die linke Seite der Implikation zu 0 auswertet, oder die rechte Seite zu 1 auswertet, gilt $\varphi_\top \equiv \top$.

Für $\bot$ definieren wir die Formel $\varphi_\bot \in \mathrm{AL}_0$ durch $\varphi_\bot := \neg(X \to X)$. Da $X \to X \equiv \top$ ist, gilt $\varphi_\bot \equiv \bot$.

IV: Seien ψ_1 und ψ_2 zwei Formeln in AL, für welche äquivalente Formeln ψ_1' und ψ_2' in AL_0 existieren, sodass $\psi_1 \equiv \psi_1'$ und $\psi_2 \equiv \psi_2'$.

IS:
Falls $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ ist φ laut IV äquivalent zu $\psi_1' \to \psi_2'$. Analog ist $\varphi \equiv \neg\psi_1'$ falls $\varphi = \neg\psi_1$.

Für $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2 \equiv \neg\neg\psi_1 \vee \psi_2 \equiv \neg\psi_1 \to \psi_2$ definieren wir $\varphi' := \neg\psi_1' \to \psi_2'$. Somit gilt laut IV $\varphi' \equiv \varphi$ und $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$.

Für $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \equiv \neg\neg\psi_1 \wedge \neg\neg\psi_2 \equiv \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$ nehmen wir ein $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$ mit $\varphi' \equiv \neg\psi_1' \vee \neg\psi_2'$. Laut IV gilt wieder $\neg\varphi' \equiv \varphi$ und somit $\neg\varphi' \in \mathrm{AL}_0$.

Für $\varphi = \psi_1 \leftrightarrow \psi_2 \equiv (\psi_1 \to \psi_2) \land (\psi_2 \to \psi_1)$ setzen wir $\psi_1'' = \psi_1' \to \psi_2'$ und $\psi_2'' = \psi_2' \to \psi_1'$ und nehmen ein $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$ mit $\varphi' \equiv \psi_1'' \land \psi_2''$. Es gilt laut IV also $\varphi' \equiv \varphi$ und $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$.

Also gibt es für jedes $\varphi \in \mathrm{AL}$ ein $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$ mit $\varphi \equiv \varphi'$, und somit ist AL_0 eine Normalform.

Aufgabe 3

Sei G ein ungerichteter Graph, sei $\mathcal{C}(G) = \{C \subseteq G \mid C \text{ ist ein Kreis.}\}$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ fest. Wir definieren $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ für alle positiven $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : V(G) \mapsto [k]$ wird eine *k-Kreisfärbung von G* genannt, wenn für alle $C \in \mathcal{C}(G)$ zwei Knoten $u, v \in V(C)$ mit $u \neq v$ existieren, sodass $f(u) \neq f(v)$ gilt.

Studierende sollten eine Formel $\varphi_{G,k}$ aufstellen, welche genau dann erfüllbar ist, wenn für G eine k-Kreisfärbung existiert, wobei $\mathcal{C}(G)$ explizit zur Konstruktion der Formel verwendet werden durfte.

(i) Sie sind vor Kurzem Tutor*in geworden und sollen nun folgende Abgaben von Studierenden überprüfen. Sagen Sie jeweils ob die abgegebene Formel richtig ist und geben Sie an wo die Fehler zu finden sind, falls die Formel nicht funktioniert.

a)

$$\varphi^1_{G,k} = \bigwedge_{\{u,v\} \in E(G)} (X_u \leftrightarrow \neg X_v),$$

wobei X_u mit 1 belegt wird, wenn der Knoten u die Farbe 1 erhält und mit 0, wenn der Knoten u mit der Farbe 0 gefärbt wird. Dies formalisiert die Aussage, da nur 2-färbbare Graphen eine k-Kreisfärbung haben können.

b)

$$\varphi^2_{G,k} = \bigwedge_{C \in \mathcal{C}(G)} \bigwedge_{\substack{u \in V(C) \\ f(u) = i}} (X_{u,i} \land \bigvee_{v \in V(C) \setminus \{u\}} \neg X_{v,i}),$$

wobei f die k-Kreisfärbung von G ist und die Formel so konstruiert ist, dass $X_{v,i}$ nur dann mit 1 belegt werden kann, wenn $f(v) = i$ gilt.

c)

$$\varphi^3_{G,k} = \bigwedge_{u \in V(G)} \bigvee_{i \in [k]} (X_{u,i} \land \bigwedge_{j \in [k] \setminus \{i\}} \neg X_{u,j}) \land \bigwedge_{\substack{C \in \mathcal{C}(G) \\ u \in V(C) \\ i \in [k]}} (X_{u,i} \to \bigvee_{v \in V(C) \setminus \{u\}} \neg X_{v,i}),$$

wobei die Konstruktion forcieren soll, dass $X_{u,i}$ nur dann mit 1 belegt wird, wenn der Knoten u mit der Farbe i gefärbt wird.

(ii) Falls Sie der Meinung sind, dass alle abgegebenen Formeln fehlerhaft sind, geben Sie selbst eine Lösung für die Aufgabe an.

Anmerkung: Jede der angegebenen Formelkonstruktionen gibt syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln aus. Insbesondere sind alle Verwendungsarten der Operatoren $\bigvee$ und $\bigwedge$ in den Formeln auch Ihnen in den Prüfungsleistungen erlaubt.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) a) $\varphi^1_{G,k}$ funktioniert nicht. Zum einen stimmt die Aussage die die Studierenden angeben einfach nicht, denn auch ein ungerader Kreis besitzt eine k-Färbung für beliebige $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$, auch wenn ungerade Kreise nicht 2-färbbar sind. Zweitens sei hierbei aber angemerkt, dass

selbst wenn die Aussage stimmen würde, eine solche Antwort nicht sinnvoll ist, wenn diese Aussage nicht bewiesen wird. (Ausgenommen natürlich diese Aussage wäre in der Vorlesung, der Großübung, oder in den Tutorien bewiesen worden.)

b) $\varphi^2_{G,k}$ ist auch falsch, geht aber in die richtige Richtung. Hier stellt sich allerdings die Frage wo die Funktion f die in der Formel verwendet wird überhaupt herkommt. Schließlich ist es Teil der Aufgabe überhaupt zu ermitteln ob es ein solches f gibt und nicht nur zu überprüfen, ob eine gegebene Färbung eine k-Kreisfärbung ist.

   Zusätzlich ist hier nicht formalisiert, dass ein Knoten nur eine Farbe erhalten darf. Es ist etwas schwierig dies hier zu bewerten, da diese Eigenschaft natürlich implizit durch f verkörpert wird. Aber da f nirgendwo quantifiziert wird und auch nicht in die Formel übergeben wird, kann man sich hier eigentlich nicht auf die Eigenschaften von f stützen.

c) $\varphi^3_{G,k}$ ist tatsächlich richtig. Zur Erläuterung: Der erste Teil der Formel verkörpert den Satz den die Studierenden unter die Formel zur Erklärung geschrieben haben. Für jeden Knoten u gibt es also eine Farbe i und u kann keine andere Farbe j außer i zugewiesen bekommen. Somit haben wir also eine Färbung der Knoten in G.

   Der zweite Teil der Formel ähnelt nun stark $\varphi^2_{G,k}$. Für jeden Kreis C und jeden Knoten $u \in V(C)$ gibt es einen Knoten v in C welcher nicht die selbe Farbe hat wie u.

   Eine erfüllende Belegung der Variablen von $\varphi^3_{G,k}$ gibt uns also eine Färbung von G.

(ii) Da $\varphi^3_{G,k}$ richtig ist, erübrigt sich diese Aufgabe.