Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 2.2

Themen: Ausgleichsrechnung, Definitheit

Ugo & Gabriel

22. November 2022

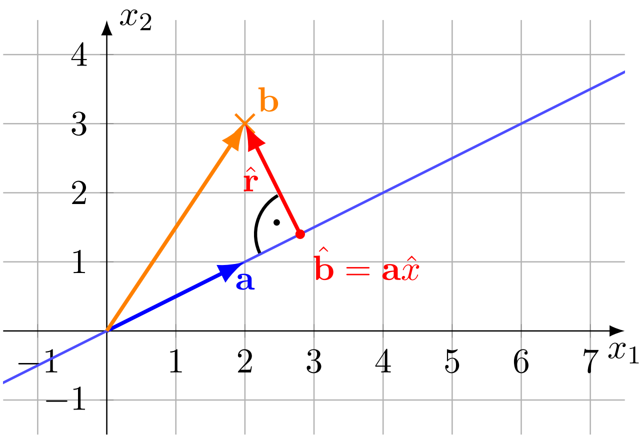
Aufgabe 1: Ausgleichsrechnung

Bei der linearen Ausgleichsrechnung versucht man ein unlösbares, überbestimmtes LGS approximativ zu lösen. Statt $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ löst man $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ und minimiert dabei die ℓ^2-Norm des Residuums $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$, sodass $\mathbf{Ax}$ möglichst nah an $\mathbf{b}$ sein muss.

1. Welche geometrische Interpretation hat die Normalengleichung?

2. Zunächst betrachten wir den einfachen Fall, dass die Systemmatrix ein einziger Vektor $\mathbf{a}$ ist. Dann haben wir ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{a}x = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Welcher Punkt $\hat{\mathbf{b}}$ im linearen Unterraum, der von $\mathbf{a}$ aufgespannt wird, ist am nächsten zu $\mathbf{b}$?

   Hinweis: Schauen Sie sich die Übungsaufgabe zu Skalarprodukten an.



3. Gegeben ein überbestimmtes LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Geben Sie eine Formel für den nächsten Punkt $\hat{\mathbf{b}}$ an, welcher sich im Spann der Matrix $\mathbf{A}$ befindet.

4. Die letzte Aufgabe lässt sich als lineares Gleichungssystem $\mathbf{Pb} = \hat{\mathbf{b}}$ schreiben. Zeigen Sie, dass diese Matrix $\mathbf{P}$ eine Projektion ist, d.h. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{PP} = \mathbf{P}$ (diese Eigenschaft nennt sich idempotent).

5. Gegeben sei die folgende Basis $\mathbf{A}$ eines linearen Unterraums des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Projektionsmatrix $\mathbf{P}$, welche jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ auf den nächstgelegenen Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathrm{Span}(\mathbf{A})$ projiziert. Ist das Ergebnis überraschend?

Aufgabe 2: Definitheit

Die Definitheit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist über die quadratische Form definiert: Wir sagen $\mathbf{A}$ ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{positiv definit,} & \text{falls } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \\ \text{positiv semidefinit,} & \text{falls } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \\ \text{negativ definit,} & \text{falls } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \\ \text{negativ semidefinit,} & \text{falls } \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0 \\ \text{indefinit,} & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

1. Was genau ist die quadratische Form $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$? Gib die quadratische Form folgender Matrizen an:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Warum spricht man bei Definitheit per Konvention über symmetrische bzw. hermitesche Matrizen? Schau dir dazu die quadratische Form der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in der vorherigen Teilaufgabe an!

3. Welche geometrische Bedeutung hat es, dass eine Matrix positiv semidefinit ist?

4. Welche Kriterien gibt es, um Definitheit zu untersuchen? Untersuche die folgenden Matrizen auf Definitheit!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

5. Beweisen Sie, dass die Summe zweier positiv definiter Matritzen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wieder eine positiv definite Matrix sein muss.

6. Die quadratische ℓ^2-Norm $\|\mathbf{x}\|^2$ eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich als eine quadratische Form $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ darstellen mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Geben Sie die zugehörige Matrix $\mathbf{A}$ an.