Gliederung

Reduzierbarkeit I

Erinnerung: spezielles Halteproblem $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } w\}$ unentscheidbar
Informell: keine TM kann feststellen, ob die eingegebene TM auf ihrem Codewort hält oder nicht

Reduzierbarkeit I

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$

Erinnerung: spezielles Halteproblem $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } w\}$ unentscheidbar

Informell: keine TM kann feststellen, ob die eingegebene TM auf ihrem Codewort hält oder nicht

Reduzierbarkeit I

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$

Erinnerung: spezielles Halteproblem $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } w\}$ unentscheidbar

Informell: keine TM kann feststellen, ob die eingegebene TM auf ihrem Codewort hält oder nicht

Klar: H ist Generalisierung von K

Informell: H ist sicher nicht leichter zu entscheiden als $K \rightsquigarrow H$ ist unentscheidbar!

Formell:

zentrales Konzept der ***Reduktion****!*

Reduzierbarkeit II

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.

Σ^*

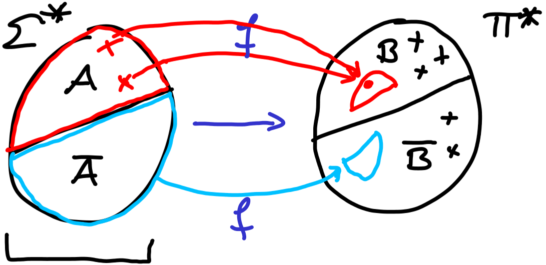
Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Zurückführung

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B (**Beachte**: f muss weder surjektiv noch injektiv sein).



$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$

$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin B$

Reduzierbarkeit II

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B (**Beachte**: f muss weder surjektiv noch injektiv sein).

$A \leq B$ formalisiert die Intuition "A ist leichter als B" d.h.

"wenn wir B entscheiden könnten, dann könnten wir auch A entscheiden"

Reduzierbarkeit II

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$\boxed{x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B (**Beachte**: f muss weder surjektiv noch injektiv sein).

$A \leq B$ formalisiert die Intuition "A ist leichter als B" d.h.

"wenn wir B entscheiden könnten, dann könnten wir auch A entscheiden"

Beispiel

$K \leq H$ wird vermittelt durch die Reduktion $f\colon \underbrace{\{0,1\}^*}_{\Sigma} \to \underbrace{\{0,1,\#\}^*}_{\Pi}$ mit $f(w) = w\#w$.

$w \in K \Leftrightarrow M_w$ hält bei Eingabe $w \Leftrightarrow \underbrace{w\#w}_{f(w)} \in H$

Reduzierbarkeit II

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B (**Beachte**: f muss weder surjektiv noch injektiv sein).

$A \leq B$ formalisiert die Intuition "A ist leichter als B" d.h.

"wenn wir B entscheiden könnten, dann könnten wir auch A entscheiden"

Beispiel

$K \leq H$ wird vermittelt durch die Reduktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*$ mit $f(w) = w\#w$.

Frage: Ist eine Sprache L entscheidbar, so ist χ_L eine Reduktion von L auf welche Sprache?

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} = \text{Co-}A$). $= \Sigma^* \setminus A$

Reduzierbarkeit III

$\neg p \Leftrightarrow \neg q$

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} = \text{Co-}A$).

$$\begin{aligned} A \leq B &\Leftrightarrow \exists \text{ Reduktion } f\colon \forall x \in \Sigma^*\colon x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ Reduktion } f\colon \forall x \in \Sigma^*\colon x \notin A \Leftrightarrow f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ Reduktion } f\colon \forall x \in \Sigma^*\colon x \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} \leq \overline{B} \end{aligned}$$

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} =$ Co-A).

„A leichter als B"

Lemma

Gilt $A \leq B$ und ist B (semi-)entscheidbar, so ist auch A (semi-)entscheidbar.

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} =$ Co-A).

Lemma

Gilt $A \leq B$ und ist B (semi-)entscheidbar, so ist auch A (semi-)entscheidbar.

Beweis

Sei f eine Reduktion von A auf B (d.h. f total, berechenbar mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).
Dann gilt $\chi_A = \chi_B \circ f$, denn

$$x \in A \Rightarrow (\chi_B \circ f)(x) = \chi_B(f(x)) = 1$$
$$x \notin A \Rightarrow (\chi_B \circ f)(x) = \chi_B(f(x)) = 0$$

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} =$ Co-A).

Lemma

Gilt $A \leq B$ und ist B (semi-)entscheidbar, so ist auch A (semi-)entscheidbar.

Beweis

Sei f eine Reduktion von A auf B (d.h. f total, berechenbar mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).
Dann gilt $\chi'_A = \chi'_B \circ f$, denn

$$x \in A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = 1$$
$$x \notin A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = \perp$$

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} =$ Co-A).

Lemma

Gilt $A \leq B$ und ist B (semi-)entscheidbar, so ist auch A (semi-)entscheidbar.

Beweis

Sei f eine Reduktion von A auf B (d.h. f total, berechenbar mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).
Dann gilt $\chi'_A = \chi'_B \circ f$, denn

$$x \in A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = 1$$
$$x \notin A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = \perp$$

Ist also χ_B (bzw. χ'_B) berechenbar, so auch χ_A (bzw. χ'_A).

Wortprobleme für Turing-Maschinen

$H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$ $\quad U \equiv H$

Lemma

Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Wortproblem für Turing-Maschinen

Lemma

Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Beweis

Konstruktion einer Reduktion f

Wortproblem für Turing-Maschinen

$w\#x \in H \iff M_w$ hält auf x
$\iff M'$ akzeptiert x
$\iff \underbrace{\langle M' \rangle \# x}_{= f(w\#x)} \in U$

Reduktioneigenschaft

Lemma

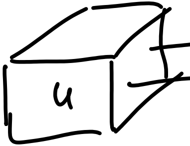
Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Beweis

Konstruktion einer Reduktion f

$H \leq U$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in einen Endzustand übergeht, sobald M_w hält (egal ob akzeptierend oder ablehnend).

$w\#x \rightarrow$

$w'\#x \longrightarrow$ 

$\rightarrow 1$ $x \in T(M_{w'}) \rightarrow M_w$ hält auf x

$\rightarrow 0$ $x \notin T(M_{w'}) \rightarrow M_w$ hält nicht auf x

Wortproblem für Turing-Maschinen

$w\#x \in U \Leftrightarrow x \in T(M_w)$

$\Leftrightarrow M_{w'}$ hält auf x

$\Leftrightarrow \underbrace{w'\#x}_{= f(w\#x)} \in H$

Reduktionseigenschaft

Lemma

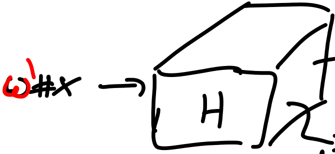
Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Beweis

Konstruktion einer Reduktion f

$H \leq U$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in einen Endzustand übergeht, sobald M_w hält (egal ob akzeptierend oder ablehnend).

$U \leq H$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in eine Endlosschleife geht, wenn M_w in einem Nicht-Endzustand hält.



1 falls $M_{w'}$ hält auf x $\Leftrightarrow x \in T(M_w)$

0 $M_{w'}$ hält nicht auf x $\Leftrightarrow x \notin T(M_w)$

Wortproblem für Turing-Maschinen

Lemma

Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Beweis

Konstruktion einer Reduktion f

$H \leq U$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in einen Endzustand übergeht, sobald M_w hält (egal ob akzeptierend oder ablehnend).

$U \leq H$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in eine Endlosschleife geht, wenn M_w in einem Nicht-Endzustand hält.

Fazit: H und U im Berechenbarkeitssinne „äquivalent“ (U unentscheidbar da $K \leq H \leq U$)

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{\underline{w} \mid \underline{w\# \in H}\}$.

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.

Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.

Halteproblem auf leerem Band

$w\#x \in H \Leftrightarrow M_w$ hält auf x
$\Leftrightarrow M_{w'}$ hält auf $\varepsilon \Leftrightarrow w'\# \in H_0$

Definition

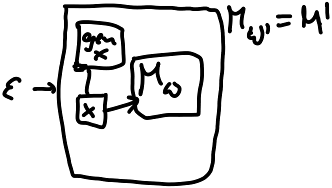
Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

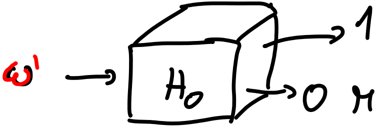
Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\rightsquigarrow M_w$ hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).





$\Leftrightarrow M_w$ hält auf x
$M_{w'}$ hält auf leerem Band

$M_{w'}$ hält nicht auf leerem Band
$\Leftrightarrow M_w$ hält nicht auf x

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\leadsto M_w$ hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).
(bei allen anderen Eingaben über $\{0, 1, \#\}$ gibt f eine ungültige Kodierung aus, z.B. $\underline{0}$)

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\rightsquigarrow M_w$ hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).
(bei allen anderen Eingaben über $\{0, 1, \#\}$ gibt f eine ungültige Kodierung aus, z.B. 0)

Es gilt für alle Wörter $q \in \{0, 1, \#\}^*$:
Falls $q = w\#x$ für $w, x \in \{0, 1\}^*$, dann

$$\begin{aligned} w\#x \in H &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf } x \\ &\Leftrightarrow M' \text{ hält auf } \epsilon \Leftrightarrow f(w\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\rightsquigarrow M_w$ hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).
(bei allen anderen Eingaben über $\{0, 1, \#\}$ gibt f eine ungültige Kodierung aus, z.B. 0)

Es gilt für alle Wörter $q \in \{0, 1, \#\}^*$:
Falls $q = w\#x$ für $w, x \in \{0, 1\}^*$, dann

$$w\#x \in H \Leftrightarrow M_w \text{ hält auf } x$$
$$\Leftrightarrow M' \text{ hält auf } \epsilon \Leftrightarrow f(w\#x) \in H_0$$

Sonst: $q \notin H$ und $f(q) \notin H_0$.

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ ("H leichter als H_0") durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\leadsto M_w$ hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).
(bei allen anderen Eingaben über $\{0, 1, \#\}$ gibt f eine ungültige Kodierung aus, z.B. 0)

Es gilt für alle Wörter $q \in \{0, 1, \#\}^*$:
Falls $q = w\#x$ für $w, x \in \{0, 1\}^*$, dann

$$\begin{aligned} w\#x \in H &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf } x \\ &\Leftrightarrow M' \text{ hält auf } \epsilon \Leftrightarrow f(w\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Sonst: $q \notin H$ und $f(q) \notin H_0$. Fazit: $H \leq H_0$.