Gliederung

1. Einführung
2. Berechenbarkeitsbegriff
3. LOOP-, WHILE-, und GOTO-Berechenbarkeit
4. Primitive und partielle Rekursion
5. Grenzen der LOOP-Berechenbarkeit
6. (Un-)Entscheidbarkeit, Halteproblem
7. Aufzählbarkeit & (Semi-)Entscheidbarkeit
8. Reduzierbarkeit
9. Das Postsche Korrespondenzproblem
10. Komplexität – Einführung
11. NP-Vollständigkeit
12. PSPACE

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$**:**

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n = z_e\}$ $\quad\Sigma = \{0, 1\}$ $\quad\Gamma = \{a_0 = \square, a_1, \ldots, a_k\}$

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \Box, a_1, \dots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\underline{\delta(z_i, a_j)} = \underline{(z_{i'}, a_{j'}, y)}$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \underline{\#\#}\underline{\text{BIN}(i)}\#\underline{\text{BIN}(j)}\#\underline{\text{BIN}(i')}\#\underline{\text{BIN}(j')}\#\text{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$**:**

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \square, a_1, \ldots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer “Übergangswörter” $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \Box, a_1, \ldots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \underline{\#\#}\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer "Übergangswörter" $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $\underline{0 \to 00,\ 1 \to 01,\ \# \to 11}$).

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \Box, a_1, \ldots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\leadsto$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer “Übergangswörter” $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $0 \to 00,\ 1 \to 01,\ \# \to 11$).

$\leadsto$ Kodierung von M ist $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \square, a_1, \dots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer "Übergangswörter" $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $0 \to 00,\ 1 \to 01,\ \# \to 11$).

$\rightsquigarrow$ Kodierung von M ist $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

$\rightsquigarrow$ Kodierung umkehrbar aber nicht alle Wörter über $\{0, 1\}^*$ kodieren eine Turing-Maschine.

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n = z_e\} \qquad \Sigma = \{0, 1\} \qquad \Gamma = \{a_0 = \square, a_1, \dots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\mathrm{BIN}(i)\#\mathrm{BIN}(j)\#\mathrm{BIN}(i')\#\mathrm{BIN}(j')\#\mathrm{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer "Übergangswörter" $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $0 \to 00$, $1 \to 01$, $\# \to 11$).

$\rightsquigarrow$ Kodierung von M ist $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

$\rightsquigarrow$ Kodierung umkehrbar aber nicht alle Wörter über $\{0, 1\}^*$ kodieren eine Turing-Maschine.

$$\underline{M_w} := \begin{cases} M & \text{falls } \underline{w = \langle M \rangle} \\ \underline{M_\Omega} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\underline{w \in \{0, 1\}^*}$ keine valide Kodierung
$\rightsquigarrow$ feste Maschine M_Ω, die die nigends definierte Funktion berechnet → M_Ω hält auf keiner Eingabe!

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

$w = 110110$

M_{110110} bei Eingabe 110110 ? hält $\rightsquigarrow \in K$

nicht hält $\rightsquigarrow \notin K$

falls kein Codewort: $M_w = M_\Omega \longrightarrow \notin K$

Spezielles Halteproblem

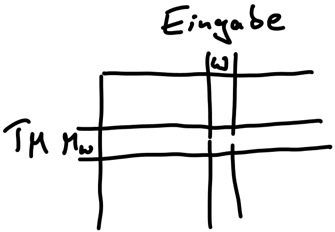
Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.



Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

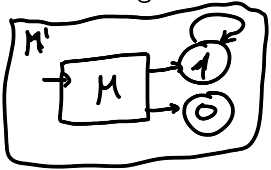
$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu $\underline{M'}$, sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.



$\rightsquigarrow$ codewort w'

$M' = M_{w'}$

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.
$\rightsquigarrow$ M' hält bei Eingabe w'

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\leadsto$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.
$\leadsto$ M' hält bei Eingabe w'
$\Leftrightarrow$ M gibt bei Eingabe w' eine 0 aus

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\leadsto$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

$\leadsto$ M' hält bei Eingabe w'
$\Leftrightarrow$ M gibt bei Eingabe w' eine 0 aus
$\Leftrightarrow$ $\chi_K(w') = 0$

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad & M' \text{ hält bei Eingabe } w' \\ \Leftrightarrow\ & M \text{ gibt bei Eingabe } w' \text{ eine } 0 \text{ aus} \\ \Leftrightarrow\ & \chi_K(w') = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w' \notin K \end{aligned}$$

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar $\rightsquigarrow$ charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M.
Erweitere M zu M', sodass M' genau dann hält, wenn M eine 0 ausgibt.
Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

$\rightsquigarrow$ M' hält bei Eingabe w'
$\Leftrightarrow$ M gibt bei Eingabe w' eine 0 aus
$\Leftrightarrow$ $\chi_K(w') = 0$
$\Leftrightarrow$ $w' \notin K$
$\Leftrightarrow$ M' hält nicht bei Eingabe $\langle M' \rangle = w'$. ↯

ABER: halbe characteristische Funktion χ'_K kann durchaus berechenbar sein

Frage: wo zerbricht der Beweis wenn wir χ'_K verwenden?