FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 15. Dezember 2022

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 8. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Sei $\sigma := \{R, f\}$ eine Signatur, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist und R ein zweistelliges Relationssymbol. Entscheiden Sie für die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ jeweils ob diese unerfüllbar, erfüllbar mit einem endlichen Modell, oder erfüllbar mit einem unendlichen Modell sind.

(i) $\varphi_1 = \exists x \forall y\ f(y) \neq x \wedge \forall y \forall z (f(y) = f(z) \to y = z)$.

(ii) $\varphi_2 = \forall x \forall y (R(x, y) \to y = f(x)) \wedge \exists x \forall y R(y, x) \wedge \exists x \exists y \neg R(x, y)$.

(iii) $\varphi_3 = \forall x R(x, f(x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \to z = x \vee z = y \vee z = f(x) \vee z = f(y))$

Lösung zu Aufgabe 1

(i) φ_1 fordert, dass die Interpretation von f eine injektive (aber nicht surjektive) Abbildung ist.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit Universum $A := \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Die Abbildung f ist injektiv, und es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{N}$, mit $f^{\mathcal{A}}(x) = 0$. Somit gilt $\mathcal{A} \models \varphi_1$.

Sei B nun eine endliche Menge. Da jede injektive Abbildung $g : B \to B$ auch surjektiv ist, kann es keine endliche σ-Struktur $\mathcal{B}$ geben, die φ_1 erfüllt.

(ii) Wir interpretieren R als eine Kantenrelation. φ_2 fordert, dass jedes Element x genau eine ausgehende Kante hat, nämlich zu $f(x)$. Des Weiteren gibt es ein Element, zu der alle Kanten zeigen und es gibt zwei Elemente x, y, sodass die Kante (x, y) nicht existiert.

Sei $\mathcal{A}$ die σ-Struktur mit Universum $A := \{0, 1\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(1, 0), (0, 0)\}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = 0$ für alle $x \in A$. Die endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ erfüllt φ_2.

Sei $\mathcal{B}$ die σ-Struktur mit Universum $B := \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{B}} = \{(x, 0) \mid x \in B\}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = 0$ für alle $x \in B$. Die unendliche σ-Struktur $\mathcal{B}$ erfüllt φ_2.

(iii) Wir interpretieren R als eine gerichtete Kantenrelation. Die Formel φ_3 fordert, dass für jeden Knoten x eine ausgehende Kante nach $f(x)$ existiert. Gibt es aber eine Kante (x, y), dann muss jeder Knoten z gleich $x, y, f(x)$ oder $f(y)$ sein.

Sei $\mathcal{A}$ die σ-Struktur mit Universum $A := \{1\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(1, 1)\}$ und $f^{\mathcal{A}}(1) = 1$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi_3$.

Die Formel φ_3 wird von keiner σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit mehr als 4 Elementen erfüllt. Da $\mathcal{B}$ mindestens ein Element x enthält, muss es ein $f(x)$ geben und somit mindestens eine Kante $(u, v) \in R^{\mathcal{B}}$. Es kann also höchstens zwei weitere Elemente außer u und v geben, da durch die Existenz von (u, v) das Universum vollständig durch $\{u, v, f(u), f(v)\}$ beschrieben werden kann.

Aufgabe 2

Einer der Schürfer im unendlichen Tunnel ist höchst beleidigt von der Aussage, dass all die Steine die er seit Wochen aus den Wänden bricht gleich seien. Völlig außer sich vor Wut, wendet er sich mit seinem Frust an den derzeitigen Logikzwergenkönig Ekwenz Freseh. Doch erstaunlicherweise stimmt der König dem Zwerg Karl Kühl sogar zu.

«Egal wie viele Farben er reflektiert, das Wesen des Steines bleibt ein Stein zu sein.», sinniert der graubärtige König auf seinem Thron. «Der Stein an sich ist und bleibt unantastbar!», erwidert der

Schürfer. «Nur die Wahrnehmung des Steins macht ihn für uns real und somit ist das Aussehen des Steins sein wichtigstes Merkmal.»

«Aber schau, ob ich nun ein Haus mit diesem oder jenem Stein baue, so sind sie für mich gleich.» Der König streicht sich wiederholt weise über den Bart. «Da ist was wahres dran...», grummelt der Schürfer.

Sei $\sigma = \{\cdot\}$ eine Signatur, wobei $\cdot$ ein 2-stelliges Funktionssymbol ist. Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{N}})$, wobei $\cdot^{\mathcal{N}}$ die übliche Multiplikationsfunktion auf $\mathbb{N}$ ist.

(i) Geben Sie Formeln φ_0 und φ_1 an, für die gelten $\varphi_0(\mathcal{N}) = \{0\}$ und $\varphi_1(\mathcal{N}) = \{1\}$.

(ii) Zeigen Sie: Für alle Isomorphismen h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$.

(iii) Geben Sie einen Isomorphismus h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ an, mit $h(2) = 3$.

Hinweis: Verwenden Sie folgenden Satz.

Satz 1 (Fundamentalsatz der Arithmetik) *Seien $p_0, p_1, \ldots$ die Primzahlen, so nummeriert dass $p_0 < p_1 < \ldots$ gilt. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gibt es natürliche Zahlen $e_0, e_1, \ldots \in \mathbb{N}$ so, dass $n = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{e_i}$. Des Weiteren ist diese Zerlegung eindeutig.*

(iv) Zeigen Sie: Es gibt keine Formel $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_2(\mathcal{N}) = \{2\}$.

Hinweis: Verwenden Sie folgendes Lemma.

Notation: Für eine Relation $R \subseteq A^k$ und eine Abbildung $f : A \to B$ schreiben wir

$$f(R) := \{(f(r_1), \ldots, f(r_k)) \mid (r_1, \ldots, r_k) \in R\}.$$

Lemma 1 (Isomorphielemma) *Sei τ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen und $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in$ FO$[\tau]$. Sei $\pi : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Dann gilt $\pi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{B})$.*

Lösung zu Aufgabe 2

(i)
- $\varphi_0(x) = \forall y\, y \cdot x = x$. Die 0 ist das einzige absorbierende Element der Multiplikation.
- $\varphi_1(x) = \forall y\, y \cdot x = y$. Die 1 ist das neutrale Element der Multiplikation.

(ii) Sei h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ ein Isomorphismus. Dann gilt $h(0\cdot 2) = h(0\cdot 3)$ und somit $h(0)\cdot h(2) = h(0)\cdot h(3)$. Falls $h(0) \neq 0$ gilt $h(2) = h(3)$, ein Widerspruch zu der Injektivität von h. Somit ist $h(0) = 0$.

Es gilt $h(2) = h(2 \cdot 1) = h(2) \cdot h(1)$. Weil $h(0) = 0$ ist $h(2) \neq 0$, und somit ist $h(1) = 1$.

(iii) Wir definieren einen Isomorphismus h von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$ wie folgt. Wir setzen $h(0) := 0$ und $h(1) := 1$. Für $x > 1$ nehmen wir natürliche Zahlen $e_0, e_1, \ldots \in \mathbb{N}$ so, dass $x = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{e_i}$ wie im Satz 1. Wir setzen

$$h(x) := 2^{e_1} \cdot 3^{e_0} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} p_i^{e_i}$$

Wir zeigen nun, dass h ein Isomorphismus ist. Da die Primzahlfaktorzerlegung einer Zahl eindeutig ist, ist h injektiv. Des Weiteren ist $h(h(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$, also ist h surjektiv.

Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit Primzahlfaktorzerlegungen $x = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{e_i}$ und $y = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{d_i}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
h(x \cdot y) &= h(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{e_i} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{d_i}) \\
&= h(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{e_i + d_i}) \\
&= 2^{e_1 + d_1} \cdot 3^{e_0 + d_0} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} p_i^{e_i + d_i} \\
&= 2^{e_1} \cdot 3^{e_0} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} p_i^{e_i} \cdot 2^{d_1} \cdot 3^{d_0} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} p_i^{d_i} \\
&= h(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{e_i}) \cdot h(\prod_{i=0}^{\infty} p_i^{d_i}) \\
&= h(x) \cdot h(y)
\end{aligned}$$

Somit ist h ein Isomorphismus, und es gilt $h(2) = 3$.

(iv) Angenommen, es gebe eine Formel $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_2(\mathcal{N}) = \{2\}$. Wir nehmen den Isomorphismus $h : \mathcal{N} \to_{hom} \mathcal{N}$ von Teilaufgabe *(iii)*. Es gilt $\{2\} = \varphi_2(\mathcal{N}) = h(\varphi_2(\mathcal{N})) = \{3\}$, ein Widerspruch.