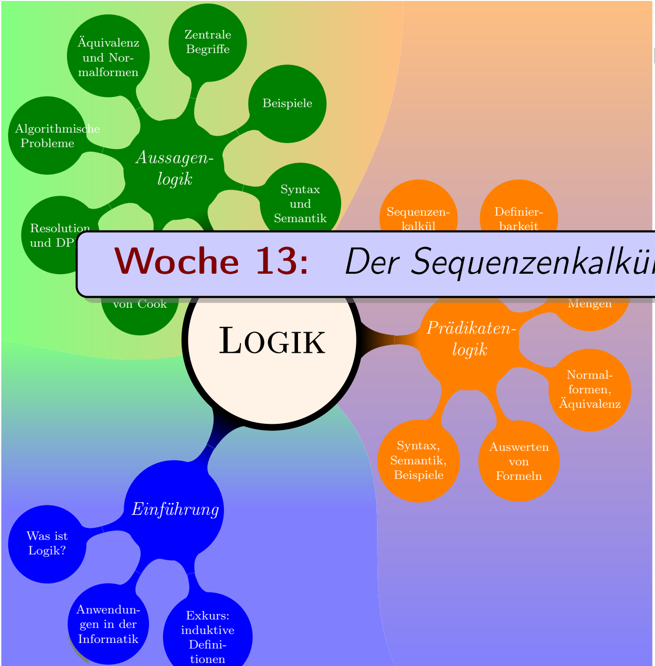
Logik im Wintersemester 2022/2023



Woche 13: *Der Sequenzenkalkül der Aussagenlogik*

Nov.	17	18	19	20	21	22	23	*Einführung*
	24	25	26	27	28	29	30	*Aussagenlogik*
	31	1	2	3	4	5	6	*Normalformen*
	7	8	9	10	11	12	13	*Resolution*
Dez.	14	15	16	17	18	19	20	*Kompaktheit*
	21	22	23	24	25	26	27	*DPLL, Satz von Cook*
								…rukturen und FO
	5	6	7	8	9	10	11	*Prädikatenlogik*
	12	13	14	15	16	17	18	*Komplexität von FO*
Jan.	19	20	21	22	23	24	25	*Weihnachten*
	26	27	28	29	30	31	1	*Neujahr*
	2	3	4	5	6	7	8	*Normalformen*
	9	10	11	12	13	14	15	*Definierbarkeit*
	16	17	18	19	20	21	22	*EF-Spiele*
Feb.	23	24	25	26	27	28	29	*EF-Spiele*
	30	31	1	2	3	4	5	*Sequenzenkalkül AL*
	6	7	8	9	10	11	12	*Sequenzenkalkül FO*
	13	14	15	16	17	18	19	*Ausblick*

13.1 Einleitung

Erinnerung: Aussagenlogische Schlüsse

Logische Folgerung

Voraussetzungen:

„Wenn G zshg. und kreisfrei, dann $|E(G)| = n - 1$.“
„G enthält $> n - 1$ Kanten.“
„G ist zusammenhängend.“

Folgerung: „G enthält einen Kreis“?

$$\{Z \wedge \neg K \rightarrow N, \neg N, Z\} \models K$$

Logische Äquivalenz.

$$(X \rightarrow Y) \iff (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

Erinnerung: Aussagenlogische Schlüsse

Logische Folgerung

Voraussetzungen:

„Wenn G zshg. und kreisfrei, dann $|E(G)| = n - 1$."
„G enthält $> n - 1$ Kanten."
„G ist zusammenhängend."

Folgerung: „G enthält einen Kreis"?

$$\{Z \wedge \neg K \rightarrow N, \neg N, Z\} \models K$$

Logische Äquivalenz.

$$(X \rightarrow Y) \iff (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

Beweis. Sei β eine Belegung.

$\beta \models X \rightarrow Y$
gdw. $\beta(Y) = 1$ oder $\beta(X) = 0$
gdw. $\beta \not\models \neg Y$ oder $\beta \models \neg X$
gdw. $\beta \models \neg Y \rightarrow \neg X$

Erinnerung: Aussagenlogische Schlüsse

Logische Folgerung

Voraussetzungen:

„Wenn G zshg. und kreisfrei, dann $|E(G)| = n - 1$."
„G enthält $> n - 1$ Kanten."
„G ist zusammenhängend."

Folgerung: „G enthält einen Kreis"?

$$\{Z \wedge \neg K \rightarrow N, \neg N, Z\} \models K$$

Logische Äquivalenz.

$$(X \rightarrow Y) \iff (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

Beweis. Sei β eine Belegung.

$\beta \models X \rightarrow Y$
gdw. $\beta(Y) = 1$ oder $\beta(X) = 0$
gdw. $\beta \not\models \neg Y$ oder $\beta \models \neg X$
gdw. $\beta \models \neg Y \rightarrow \neg X$

Beweisverfahren. Gibt es (syntaktische) Verfahren, um Folgerungen aus einer Menge von Voraussetzungen abzuleiten? Eine Methode,

- mit der nur korrekte Schlüsse gezogen werden können?
- die allgemein genug ist, alle gültigen Schlüsse ziehen zu können?

Eine solche Methode ist die Resolution.

Wir werden jetzt eine weitere Methode kennen lernen, den Sequenzenkalkül.

Sequenzenkalkülbeweise

Logische Folgerung.

$$(X \to Y) \models (\neg Y \to \neg X)$$

Sequenzenkalkülbeweis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{X, \neg Y \Rightarrow X}}{\neg Y \Rightarrow X, \neg X}\;(\Rightarrow \neg)}{\Rightarrow X, (\neg Y \to \neg X)}\;(\Rightarrow\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{Y \Rightarrow Y, \neg X}}{Y, \neg Y \Rightarrow \neg X}\;(\neg \Rightarrow)}{Y \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}\;(\Rightarrow\to)}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}\;(\to\Rightarrow)$$

Logische Folgerung.

$$\left\{\begin{matrix} (Z \wedge \neg K) \to N, \\ \neg N, \\ Z \end{matrix}\right\} \models K$$

Sequenzenkalkülbeweis.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\neg N, Z \Rightarrow K, Z, \neg K}}{\neg N, Z \Rightarrow K, Z \wedge \neg K}\;(\Rightarrow \wedge) \qquad \dfrac{\overline{N, Z \Rightarrow N, K}}{N, \neg N, Z \Rightarrow K}\;(\neg \Rightarrow)}{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z \Rightarrow K}\;(\to\Rightarrow)$$

Sequenzenkalkülbeweise

Voraussetzungen

Logische Folgerung.

$(X \to Y) \models (\neg Y \to \neg X)$

Regel

Sequenzenkalkülbeweis.

$$
(\to\Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow\to)\ \dfrac{(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\overline{X, \neg Y \Rightarrow X}}{\neg Y \Rightarrow X, \neg X}}{\Rightarrow X, (\neg Y \to \neg X)} \qquad (\Rightarrow\to)\ \dfrac{(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\overline{Y \Rightarrow Y, \neg X}}{Y, \neg Y \Rightarrow \neg X}}{Y \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}
$$

Folgerung

Logische Folgerung.

$$
\left\{ \begin{matrix} (Z \wedge \neg K) \to N, \\ \neg N, \\ Z \end{matrix} \right\} \models K
$$

Sequenzenkalkülbeweis.

$$
(\to\Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\overline{\neg N, Z \Rightarrow K, Z, \neg K}}{\neg N, Z \Rightarrow K, Z \wedge \neg K} \qquad (\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\overline{N, Z \Rightarrow N, K}}{N, \neg N, Z \Rightarrow K}}{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z \Rightarrow K}
$$

Logische Ableitungen

Der Sequenzenkalkül formalisiert die Art, in der wir aus Aussagen neue Folgerungen ableiten.

Wir führen dazu zunächst den Begriff der Sequenz ein.

Sequenz. Aussage der Form:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{„}G \text{ zshg. und kreisfrei} \Rightarrow |E(G)| = n-1.\text{“}\\ \text{„}G \text{ enthält} > n-1 \text{ Kanten.“}\\ \text{„}G \text{ ist zusammenhängend.“}\end{array}\right\}}_{\textit{Voraussetzung}} \models \underbrace{\text{„}G \text{ hat Kreis“}}_{\textit{Konklusion}}$$

Sequenzen.

$\{(X \rightarrow Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \rightarrow \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \rightarrow N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

$\Phi \Rightarrow \Delta$

Die Bedeutung einer Sequenz ist, dass aus den Voraussetzungen die Konklusion geschlossen werden kann.

Logische Ableitungen

Wir werden auch unendliche Mengen von Voraussetzungen zulassen.

In der Mitte eines Beweises ist es oft nützlich, verschiedene Möglichkeiten zu betrachten, also Hypothesen aufzustellen. Wir werden daher zwischenzeitlich mehr als eine Konklusion betrachten.

Beispiel. Zum Beispiel könnten wir als Zwischenschritt annehmen

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{„}G\text{ zshg. und kreisfrei } \Rightarrow |E(G)| = n-1.\text{“}\\ \text{„}G\text{ enthält } > n-1 \text{ Kanten.“}\\ \text{„}G\text{ ist zusammenhängend.“}\end{array}\right\}}_{\textit{Voraussetzung}} \models \underbrace{\begin{array}{c}\text{„}G\text{ hat Kreis“ oder}\\ \text{„}G\text{ hat } n-1 \text{ Kanten“}\end{array}}_{\textit{Konklusionen}}$$

Bedeutung: Wenn die Voraussetzungen gelten, gilt mindestens eine Konklusion.

Wir können dann aus der Voraussetzung „G enthält $> n-1$ Kanten“ die eigentliche Folgerung ableiten.

Ein Sequenzenkalkül

Wir stellen zunächst einen Sequenzenkalkül für die Aussagenlogik vor und erweitern ihn später auf die Prädikatenlogik.

- Es gibt viele verschiedene Sequenzenkalküle, abhängig von den in der Logik verwendeten Verknüpfungen.
- Wir werden hier einen Kalkül für Formeln ohne $\leftrightarrow$ vorstellen.
- Wie bereits gezeigt, ist dies keine Einschränkung der Allgemeinheit.

13.2 Der Sequenzenkalkül der Aussagenlogik

Sequenzen

Definition.

1. Eine Sequenz ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.

Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.

Sequenzen.

$\{(X \to Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \to \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Sequenzen

Definition.

1. Eine Sequenz ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

   für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.
   Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.

2. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.

Sequenzen.
$\{(X \rightarrow Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \rightarrow \neg X)\}$
$\{(Z \wedge \neg K) \rightarrow N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Gültige Sequenzen.
$\{(X \wedge Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$
$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$
$\{(X \vee Y), Z, F\} \Rightarrow \{Z, X, Y\}$

Sequenzen

$\{X, Y, Z, X \to W\} \Rightarrow \{X\}$

Definition.

1. Eine Sequenz ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

   für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.

   Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.

2. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.

3. Ist $\Phi \Rightarrow \Delta$ nicht gültig, so gibt es eine Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, aber keine in Δ.

   Wir sagen: β falsifiziert die Sequenz.

'$\bigwedge \overline{\Phi} \to \bigvee \Delta$'

Sequenzen.

$\{(X \to Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \to \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Gültige Sequenzen.

$\{(X \wedge Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y), Z, F\} \Rightarrow \{Z, X, Y\}$

Nicht gültige Sequenzen.

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X \wedge Y\}$

Ein Sequenzenkakül

Definition.

1. Ein Axiom des Sequenzenkalküls ist eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, so dass $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$.

   Beispiele.

   $$\{A, \neg(X \vee Y), F\} \;\Rightarrow\; \{A, B\}$$

   $$\{(X \wedge Y), F\} \;\Rightarrow\; \{(X \wedge Y)\}$$

   $$\left\{ \begin{array}{l} \text{„}G \text{ zshg. und kreisfrei} \Rightarrow |E(G)| = n-1.\text{“} \\ \text{„}G \text{ enthält} > n-1 \text{ Kanten.“} \\ \text{„}G \text{ ist zusammenhängend.“} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{„}G \text{ hat Kreis“} \\ \text{„}G \text{ ist zusammenhängend“} \end{array}$$

Definition.
Sequenz: $\Phi \Rightarrow \Delta$,
$\Phi, \Delta \subseteq AL$: Multimengen.
Φ: Voraussetzungen
Δ: Konklusionen.

$\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig:
jedes β mit $\beta \models \Phi$ erfüllt ein $\delta \in \Delta$.

β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Ein Sequenzenkakül

Definition.

1. Ein Axiom des Sequenzenkalküls ist eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, so dass $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$.

   Beispiele.

   $$\{A, \neg(X \vee Y), F\} \Rightarrow \{A, B\}$$

   $$\{(X \wedge Y), F\} \Rightarrow \{(X \wedge Y)\}$$

   $$\left.\begin{array}{l} \text{„}G \text{ zshg. und kreisfrei} \Rightarrow |E(G)| = n-1.\text{“} \\ \text{„}G \text{ enthält} > n-1 \text{ Kanten.“} \\ \text{„}G \text{ ist zusammenhängend.“} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{„}G \text{ hat Kreis“} \\ \text{„}G \text{ ist zusammenhängend“} \end{array}$$

2. Ein Theorem ist eine gültige Sequenz $\emptyset \Rightarrow \{\psi\}$, d.h. eine Sequenz ohne Voraussetzungen mit genau einer Konklusion.

   Beispiel. $\Rightarrow \{(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg X \vee Y)\}$

Definition.
Sequenz: $\Phi \Rightarrow \Delta$,
$\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$: Multimengen.
Φ: Voraussetzungen
Δ: Konklusionen.

$\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig:
jedes β mit $\beta \models \Phi$ erfüllt ein $\delta \in \Delta$.

β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Einfache Eigenschaften von Sequenzen

Beobachtung.

1. Jede Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ mit $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$ ist gültig.

Definition.

- Eine Sequenz ist eine Aussage der Form $\Phi \Rightarrow \Delta$, für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.
  Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.
- Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.
- Ist $\Phi \Rightarrow \Delta$ nicht gültig, so gibt es eine Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, aber keine in Δ.
  Wir sagen: β falsifiziert die Sequenz.

Sequenzen.

$\{(X \rightarrow Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \rightarrow \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \rightarrow N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Gültige Sequenzen.

$\{(X \wedge Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y), Z, F\} \Rightarrow \{Z, X, Y\}$

Nicht gültige Sequenzen.

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X \wedge Y\}$

Einfache Eigenschaften von Sequenzen

Beobachtung.

1. Jede Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ mit $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$ ist gültig.
2. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \emptyset$ ist gültig gdw. Φ unerfüllbar ist.

Definition.

- Eine Sequenz ist eine Aussage der Form $\Phi \Rightarrow \Delta$, für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.
  Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.
- Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.
- Ist $\Phi \Rightarrow \Delta$ nicht gültig, so gibt es eine Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, aber keine in Δ.
  Wir sagen: β falsifiziert die Sequenz.

Sequenzen.

$\{(X \to Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \to \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Gültige Sequenzen.

$\{(X \wedge Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y), Z, F\} \Rightarrow \{Z, X, Y\}$

Nicht gültige Sequenzen.

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X \wedge Y\}$

Einfache Eigenschaften von Sequenzen

Beobachtung.

1. Jede Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ mit $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$ ist gültig.
2. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \emptyset$ ist gültig gdw. Φ unerfüllbar ist.
3. Eine Sequenz $\emptyset \Rightarrow \Delta$ (mit Δ endl.) ist gültig gdw. $\bigvee \Delta$ gültig ist.

$\Phi \to \Delta$ gültig

$\Leftrightarrow \bigwedge \Phi \to \bigvee \Delta$ (Φ, Δ endl.)

Definition.

- Eine Sequenz ist eine Aussage der Form $\Phi \Rightarrow \Delta$, für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$. Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.
- Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.
- Ist $\Phi \Rightarrow \Delta$ nicht gültig, so gibt es eine Belegung β, die alle Formeln in Φ erfüllt, aber keine in Δ.

  Wir sagen: β falsifiziert die Sequenz.

Sequenzen.

$\{(X \to Y)\} \Rightarrow \{(\neg Y \to \neg X)\}$

$\{(Z \wedge \neg K) \to N, \neg N, Z\} \Rightarrow \{K\}$

Gültige Sequenzen.

$\{(X \wedge Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X, Y\}$

$\{(X \vee Y), Z, F\} \Rightarrow \{Z, X, Y\}$

Nicht gültige Sequenzen.

$\{(X \vee Y)\} \Rightarrow \{X \wedge Y\}$

Notation

Notation.

1. $\Phi, \Delta, \dots$ bezeichnen Multimengen von Formeln.

   (Die Reihenfolge der Formeln ist unwichtig, aber Formeln müssen mehrfach vorkommen dürfen.)

   Dabei wird Δ immer endlich sein, Φ kann endlich oder unendlich sein.

2. Wir schreiben Multimengen $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ als $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
3. Wenn $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ eine Multimenge ist und $\psi \in \mathsf{AL}$, dann schreiben wir Φ, ψ statt $\Phi \cup \{\psi\}$.

Beispiel.

$$\underbrace{(X \rightarrow (Y \vee Z)), \quad X, \quad \neg Z}_{\Phi} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{Y}_{\Delta}$$

 Der Sequenzenkalkül der Aussagenlogik

Regeln

Das Ziel des Sequenzenkalküls ist das Ableiten gültiger Sequenzen aus anderen gültigen Sequenzen durch Regeln der Form

$$a) \quad \frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi' \Rightarrow \Delta'} \qquad \text{oder} \qquad b) \quad \frac{\Phi_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \Phi_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Phi' \Rightarrow \Delta'}$$

Wir nennen $\Phi \Rightarrow \Delta$ die Prämisse der Regel und $\Phi' \Rightarrow \Delta'$ ihre Konsequenz.

Beispiel.

$$(\wedge \Rightarrow) \ \frac{p, q \Rightarrow q}{p \wedge q \Rightarrow q}$$

$$\frac{\Phi, \psi_1, \psi_2 \Rightarrow \Delta}{\Phi (\psi_1 \wedge \psi_2) \Rightarrow \Delta}$$

Idee. Wenn man für konkret gegebene Mengen $\Phi, \Delta, \Phi', \Delta'$ einmal gezeigt hat, dass $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, dann stellt die Regel a) sicher, dass auch $\Phi' \Rightarrow \Delta'$ gültig ist.

Die Regeln des aussagenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\ \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\ \rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

 Der Sequenzenkalkül der Aussagenlogik

Sequenzenkalkülbeweise

Wir werden Regeln zu komplizierteren Beweisen kombinieren.

Beispiel.

$$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\overline{p, q, r \Rightarrow q} \qquad \overline{p, q, r \Rightarrow r}}{p, q, r \Rightarrow q \wedge r}}{p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r}$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Sequenzenkalkülbeweise

Wir werden Regeln zu komplizierteren Beweisen kombinieren.

Beispiel.

$$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\overline{p, q, r \Rightarrow q} \qquad \overline{p, q, r \Rightarrow r}}{p, q, r \Rightarrow q \wedge r}}{p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r}$$

Aus diesem Beweis können wir folgende Aussage ablesen:

wenn die Sequenzen $p, q, r \Rightarrow q$ und $p, q, r \Rightarrow r$ gültig sind,
dann ist auch $p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r$ gültig. (wird später bewiesen)

Wir wissen bereits, dass $p, q, r \Rightarrow q$ und $p, q, r \Rightarrow r$ gültig sind, da sie Axiome sind.

Also können wir folgern, dass $p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r$ gültig ist.

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beweisebäume

Definition. Ein **Beweis** im Sequenzenkalkül ist ein Baum, dessen Knoten wie folgt mit Sequenzen beschriftet sind.

- Die Blätter sind mit Axiomen beschriftet.
- Jeder innere Knoten ist mit der Konsequenz einer Regel beschriftet. Die Kinder des Knotens sind mit den Prämissen der Regel beschriftet. Jeder innere Knoten hat also entweder ein oder zwei Kinder.

Beispiel.

$$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\overline{p, q, r \Rightarrow q} \qquad \overline{p, q, r \Rightarrow r}}{p, q, r \Rightarrow q \wedge r}}{p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{p, q, r \Rightarrow q} \arrow[dr] & & \overline{p, q, r \Rightarrow r} \arrow[dl] \\
& p, q, r \Rightarrow q \wedge r \arrow[d] & \\
& p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r &
\end{tikzcd}$$

Notation. Wir „überstreichen“ Axiome um das Ende des Astes zu markieren. Dies entspricht der Beobachtung, dass Axiome aus der leeren Premissenmenge hergeleitet werden können.

Beweisbare Sequenzen

Definition. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist im Sequenzenkalkül beweisbar, oder kann abgeleitet werden, wenn sie als Beschriftung eines Knotens in einem Beweis vorkommt.

$$(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\overline{p,q,r \Rightarrow q} \qquad \overline{p,q,r \Rightarrow r}}{p,q,r \Rightarrow q \wedge r}}{p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r}$$

Beispiel.

Die Sequenz $p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r$ ist im Sequenzenkalkül beweisbar.

Sequenzenkalkülbeweise. Wir werden später beweisen, dass alle ableitbaren Sequenzen gültig sind.

Dies wird dann zeigen, dass $p \wedge q, r \Rightarrow q \wedge r$ gültig ist und somit ist

$$(p \wedge q) \wedge r \rightarrow (q \wedge r)$$

eine Tautologie.

In dieser Art wird der Sequenzenkalkül zum Beweis logisch korrekter Schlüsse benutzt.

13.3 Beispiele für Sequenzenkalkülbeweise

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$\Phi = \emptyset \quad \psi = \varphi \quad \Delta = \{\varphi\}$

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\,(\Rightarrow\neg)}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\neg\Rightarrow)$$

$\neg\psi$

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,(\neg\Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\Rightarrow\neg)$$

SK-Regeln AL.

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\ (\neg\Rightarrow)}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\neg\Rightarrow) \qquad\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}$$

$\neg\psi$

$\psi = \neg\varphi$

SK-Regeln AL.

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$$(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi} \qquad\qquad (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$$\cfrac{(\neg \Rightarrow)\ \cfrac{(\Rightarrow \neg)\ \cfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi} \qquad\qquad (\Rightarrow \neg)\ \cfrac{}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}$$

SK-Regeln AL.

$(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\ (\Rightarrow \neg)}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\neg \Rightarrow)$$

$$\cfrac{\cfrac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\ (\neg \Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\ (\Rightarrow \neg)$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Doppelte Negation

Wir beweisen die Äquivalenz $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

$$
\cfrac{\cfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\;(\Rightarrow \neg)}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\;(\neg \Rightarrow)
\qquad\qquad
\cfrac{\cfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\;(\neg \Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\;(\Rightarrow \neg)
$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Tertium Non Datur

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel. Wir wollen beweisen, dass $\varphi \vee \neg\varphi$ allgemeingültig ist.

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{}{\Rightarrow \neg\varphi \vee \varphi}$$

Das Prinzip $\neg\varphi \vee \varphi$ ist eine der wichtigsten Grundprinzipien der Logik und wird tertium non datur genannt. („law of excluded middle“)

Beispiel: Tertium Non Datur

Beispiel. Wir wollen beweisen, dass $\varphi \lor \neg\varphi$ allgemeingültig ist.

$$\dfrac{(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi \lor \varphi}\ (\Rightarrow \lor)$$

Das Prinzip $\neg\varphi \lor \varphi$ ist eine der wichtigsten Grundprinzipien der Logik und wird tertium non datur genannt. („law of excluded middle“)

SK-Regeln AL.

$(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\land \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \land \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \land)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \land \varphi}$

$(\lor \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \lor \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \lor)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \lor \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Beispiel: Tertium Non Datur

Beispiel. Wir wollen beweisen, dass $\varphi \vee \neg\varphi$ allgemeingültig ist.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \varphi}\,(\Rightarrow \neg)}{\Rightarrow \neg\varphi \vee \varphi}\,(\Rightarrow \vee)$$

Das Prinzip $\neg\varphi \vee \varphi$ ist eine der wichtigsten Grundprinzipien der Logik und wird tertium non datur genannt. („law of excluded middle“)

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Kommutativität der Disjunktion

Beispiel. Kommutativität der Disjunktion

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Kommutativität der Disjunktion

Beispiel. Kommutativität der Disjunktion

$$(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi} \qquad (\Rightarrow\vee)\,\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \underbrace{\psi \vee \varphi}_{\Delta}}$$

$\Phi = \varphi$

SK-Regeln AL.

$$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Kommutativität der Disjunktion

Beispiel. Kommutativität der Disjunktion

$$\cfrac{(\Rightarrow\vee)\ \cfrac{\cfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \cfrac{}{\psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}\ (\vee\Rightarrow)$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel: Kommutativität der Disjunktion

Beispiel. Kommutativität der Disjunktion

$$
(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\overline{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\overline{\psi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi}
$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel

Das Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist eine Tautologie.

Wir beweisen, dass die Sequenz $\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ gültig ist.

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel

Das Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist eine Tautologie.

Wir beweisen, dass die Sequenz $\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ gültig ist.

Beweis.

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{}{\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)}$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel

Das Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

$$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y) \text{ ist eine Tautologie.}$$

Wir beweisen, dass die Sequenz $\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ gültig ist.

Beweis.

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{}{X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y}}{\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)}$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Beispiel

Das Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist eine Tautologie.

Wir beweisen, dass die Sequenz $\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ gültig ist.

Beweis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X, Y \Rightarrow X \vee Y}\,(\Rightarrow \vee)}{X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y}\,(\wedge \Rightarrow)}{\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)}\,(\Rightarrow \rightarrow)$$

SK-Regeln AL.

$(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Beispiel

Das Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist eine Tautologie.

Wir beweisen, dass die Sequenz $\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ gültig ist.

Beweis.

$$
\cfrac{}{X, Y \Rightarrow X, Y}
$$
$$
(\Rightarrow\vee)\ \cfrac{X, Y \Rightarrow X, Y}{X, Y \Rightarrow X \vee Y}
$$
$$
(\wedge\Rightarrow)\ \cfrac{X, Y \Rightarrow X \vee Y}{X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y}
$$
$$
(\Rightarrow\rightarrow)\ \cfrac{X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y}{\Rightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)}
$$

SK-Regeln AL.

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

13.4 Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Vollständigkeit und Korrektheit

Der Sequenzenkalkül ist vollständig und korrekt.

Korrektheit.

Nur gültige Sequenzen können im Sequenzenkalkül hergeleitet werden.

Vollständigkeit.

Alle gültigen Sequenzen können im Sequenzenkalkül hergeleitet werden.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Definition (Korrektheit).

1. Eine Regel

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi' \Rightarrow \Delta'}$$

ist korrekt, wenn für alle Multimengen $\Phi, \Phi' \subseteq \mathsf{AL}$ und endlichen Multimengen $\Delta, \Delta' \subseteq \mathsf{AL}$ gilt:
Wenn $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, dann ist auch $\Phi' \Rightarrow \Delta'$ gültig.

2. Eine Regel

$$\frac{\Phi_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad \Phi_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

ist korrekt, wenn für alle Multimengen $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subseteq \mathsf{AL}$ und endliche Multimengen $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \subseteq \mathsf{AL}$ aus der Gültigkeit von $\Phi_1 \Rightarrow \Delta_1$ und $\Phi_2 \Rightarrow \Delta_2$ die Gültigkeit von $\Phi \Rightarrow \Delta$ folgt.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Lemma. Die Regeln des Sequenzenkalküls sind korrekt. Vor.

$\beta \models \Phi$ $\qquad \beta \models \delta \in \Delta$

Allgemeine Beweisstrategie. $(\cdot)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi' \Rightarrow \Delta'}$ $\qquad \beta \models \delta' \in \Delta'$

$\beta \models \Phi'$

Voraussetzung. Nehme an, dass $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist.

Zu zeigen. Zeige, dass jede Belegung, die alle Formeln in Φ' erfüllt, auch mindestens eine Formel in Δ' erfüllt.

Beweisansatz.

- Sei β eine Belegung mit $\beta \models \Phi'$.
- Zeige, dass $\beta \models \Phi$.
- Daraus folgt nach Voraussetzung, dass es ein $\delta \in \Delta$ gibt mit $\beta \models \delta$. Hierbei wird die Gültigkeit von $\Phi \Rightarrow \Delta$ verwendet.
- Zeige mit Hilfe dieser Aussage, dass es ein $\delta' \in \Delta'$ gibt mit $\beta \models \delta'$.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Wir werden eine etwas stärkere Behauptung beweisen.

Definition.

Sei $\Phi \Rightarrow \Delta$ eine Sequenz und β eine zu $\Phi \cup \Delta$ passende Belegung.

1. β falsifiziert die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, falls sie alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt aber kein $\delta \in \Delta$.
2. β erfüllt die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, falls sie ein $\varphi \in \Phi$ nicht erfüllt oder aber mindestens ein $\delta \in \Delta$ erfüllt.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Wir werden eine etwas stärkere Behauptung beweisen.

Definition.

Sei $\Phi \Rightarrow \Delta$ eine Sequenz und β eine zu $\Phi \cup \Delta$ passende Belegung.

1. β falsifiziert die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, falls sie alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt aber kein $\delta \in \Delta$.
2. β erfüllt die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, falls sie ein $\varphi \in \Phi$ nicht erfüllt oder aber mindestens ein $\delta \in \Delta$ erfüllt.

Lemma. Für jede Regel des Sequenzenkalküls und jede Belegung β die zu allen Formeln der Regel passt gilt:

β erfüllt die Konsequenz einer Regel genau dann, wenn β alle Prämissen erfüllt.

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber
$\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

β erfüllt $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \not\models \varphi$ für ein $\varphi \in \Phi$ oder
$\beta \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Also gilt $\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta, \varphi, \psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber
$\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

β erfüllt $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \not\models \varphi$ für ein $\varphi \in \Phi$ oder
$\beta \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Also gilt $\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta, \varphi, \psi$.

Dann gilt aber $\beta \not\models \varphi \vee \psi$ und somit falsifiziert β die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber
$\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

β erfüllt $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \not\models \varphi$ für ein $\varphi \in \Phi$ oder
$\beta \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $\quad (\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Also gilt $\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta, \varphi, \psi$.

Dann gilt aber $\beta \not\models \varphi \vee \psi$ und somit falsifiziert β die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Leftarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber
$\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

β erfüllt $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \not\models \varphi$ für ein $\varphi \in \Phi$ oder
$\beta \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi}{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi$.

Also gilt $\beta\models\Phi$ aber $\beta\not\models\delta$ für alle $\delta\in\Delta,\varphi,\psi$.

Dann gilt aber $\beta\not\models\varphi\vee\psi$ und somit falsifiziert β die Sequenz $\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi$.

$\Leftarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi$.

Also gilt $\beta\models\Phi$ aber $\beta\not\models\delta$ für alle $\delta\in\Delta,\varphi\vee\psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi\Rightarrow\Delta$:
$\beta\models\Phi$ aber
$\beta\not\models\delta$ für alle $\delta\in\Delta$.

β erfüllt $\Phi\Rightarrow\Delta$:
$\beta\not\models\varphi$ für ein $\varphi\in\Phi$ oder
$\beta\models\delta$ für ein $\delta\in\Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 1: (Disjunktion) . $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$ gdw. β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Rightarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Also gilt $\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta, \varphi, \psi$.

Dann gilt aber $\beta \not\models \varphi \vee \psi$ und somit falsifiziert β die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

$\Leftarrow$. Angenommen, β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$.

Also gilt $\beta \models \Phi$ aber $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta, \varphi \vee \psi$.

Dann gilt aber $\beta \not\models \varphi$ und $\beta \not\models \psi$ und somit falsifiziert β die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

Definition.
β falsifiziert $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \models \Phi$ aber
$\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

β erfüllt $\Phi \Rightarrow \Delta$:
$\beta \not\models \varphi$ für ein $\varphi \in \Phi$ oder
$\beta \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$

Beweis des Lemmas

Fall 2. Disjunktion links. $(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige: β falsifiziert $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ gdw. β falsifiziert $\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta$ oder $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$.

$\Rightarrow$. Wenn β $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ falsifiziert, gilt $\beta \models \varphi'$ für alle $\varphi' \in \Phi \cup \{\varphi \vee \psi\}$ und $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Beweis des Lemmas

$\beta \models \Phi$ $\beta \models \varphi$

Fall 2. Disjunktion links. $(\vee \Rightarrow)$ $$\frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige: β falsifiziert $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ gdw. β falsifiziert $\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta$ oder $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$.

$\Rightarrow$. Wenn β $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ falsifiziert, gilt $\beta \models \varphi'$ für alle $\varphi' \in \Phi \cup \{\varphi \vee \psi\}$ und $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Es gilt also $\beta \models \varphi$ oder $\beta \models \psi$. Im ersten Fall wird aber die erste Prämisse falsifiziert, im zweiten Fall die zweite Prämisse.

$\Leftarrow$. Wenn β eine der Sequenzen $\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta$ oder $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$ falsifiziert, dann gilt $\beta \models \varphi'$ für alle $\varphi' \in \Phi$ sowie $\beta \models \varphi$ oder $\beta \models \psi$. Ausserdem gilt $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Beweis des Lemmas

Fall 2. Disjunktion links. $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

Beweis. Sei β eine zu allen Formeln der Regel passende Belegung.

Zeige: β falsifiziert $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ gdw. β falsifiziert $\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta$ oder $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$.

$\Rightarrow$. Wenn β $\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta$ falsifiziert, gilt $\beta \models \varphi'$ für alle $\varphi' \in \Phi \cup \{\varphi \vee \psi\}$ und $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Es gilt also $\beta \models \varphi$ oder $\beta \models \psi$. Im ersten Fall wird aber die erste Prämisse falsifiziert, im zweiten Fall die zweite Prämisse.

$\Leftarrow$. Wenn β eine der Sequenzen $\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta$ oder $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$ falsifiziert, dann gilt $\beta \models \varphi'$ für alle $\varphi' \in \Phi$ sowie $\beta \models \varphi$ oder $\beta \models \psi$. Ausserdem gilt $\beta \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.

Es gilt also auch $\beta \models \varphi \vee \psi$ und somit wird die Konklusion falsifiziert.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Lemma. Für jede Regel des Sequenzenkalküls und jede Belegung β die zu allen Formeln der Regel passt gilt:

β erfüllt die Konsequenz einer Regel genau dann, wenn β alle Prämissen erfüllt.

Folgerung. Die Regeln des Sequenzenkalküls sind korrekt.

Theorem. Jede im Sequenzenkalkül beweisbare Sequenz ist gültig.

Sequenzenkalkül

Ein Vorteil des Sequenzenkalküls ist, dass er eine systematische Beweissuche erlaubt.

Wir werden einen Algorithmus angeben, der zu jeder Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ entweder,

- einen Beweis im Sequenzenkalkül konstruiert oder
- eine Belegung, die alle Konsequenzen falsifiziert aber alle Voraussetzungen erfüllt.

Im zweiten Fall ist die Belegung ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Sequenz.

Beispiel

Erinnern wir uns an den Sequenzenkalkülbeweis der folgenden Aussage.

$$\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X).$$

Beweis.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X, \neg Y \Rightarrow X}}{\neg Y \Rightarrow X, \neg X}\,(\Rightarrow \neg)}{\Rightarrow X, (\neg Y \to \neg X)}\,(\Rightarrow\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y \Rightarrow Y, \neg X}}{Y, \neg Y \Rightarrow \neg X}\,(\neg \Rightarrow)}{Y \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}\,(\Rightarrow\to)}{\dfrac{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}\,(\Rightarrow\to)}\,(\to\Rightarrow)
$$

Beispiel

Erinnern wir uns an den Sequenzenkalkülbeweis der folgenden Aussage.

$$\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X).$$

Beweis.

$$(\Rightarrow\to)\dfrac{(\to\Rightarrow)\dfrac{(\Rightarrow\to)\dfrac{(\Rightarrow\neg)\dfrac{\overline{X, \neg Y \Rightarrow X}}{\neg Y \Rightarrow X, \neg X}}{\Rightarrow X, (\neg Y \to \neg X)} \qquad (\Rightarrow\to)\dfrac{(\neg\Rightarrow)\dfrac{\overline{Y \Rightarrow Y, \neg X}}{Y, \neg Y \Rightarrow \neg X}}{Y \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}$$

Beweis.

$$(\Rightarrow\to)\dfrac{(\Rightarrow\to)\dfrac{(\neg\Rightarrow)\dfrac{(\Rightarrow\neg)\dfrac{(\to\Rightarrow)\dfrac{\overline{X \Rightarrow X, Y} \qquad \overline{X, Y \Rightarrow Y}}{(X \to Y), X \Rightarrow Y}}{(X \to Y) \Rightarrow \neg X, Y}}{(X \to Y), \neg Y \Rightarrow \neg X}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}$$

Beispiel

Erinnern wir uns an den Sequenzenkalkülbeweis der folgenden Aussage.

$$\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X).$$

Beweis.

$$(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\neg)\,\dfrac{\overline{X, \neg Y \Rightarrow X}}{\neg Y \Rightarrow X, \neg X}}{\Rightarrow X, (\neg Y \to \neg X)} \qquad (\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{\overline{Y \Rightarrow Y, \neg X}}{Y, \neg Y \Rightarrow \neg X}}{Y \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}$$

Beweis.

$$(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\neg)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{\overline{X \Rightarrow X, Y} \qquad \overline{X, Y \Rightarrow Y}}{(X \to Y), X \Rightarrow Y}}{(X \to Y) \Rightarrow \neg X, Y}}{(X \to Y), \neg Y \Rightarrow \neg X}}{(X \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to \neg X)}}{\Rightarrow (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)}$$

Beobachtung.

- Es kann mehrere Beweise der gleichen Sequenz geben.
- Aber für jede nicht-atomare Formel in einer Sequenz gibt es genau eine anwendbare Regel.

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Beweisversuch.

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\qquad}{X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y}$$

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Beweisversuch.

$$
(\Rightarrow \wedge)\,\dfrac{(\vee \Rightarrow)\,\dfrac{}{X \vee Y \Rightarrow X} \qquad (\vee \Rightarrow)\,\dfrac{}{X \vee Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y}
$$

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Beweisversuch.

$$(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{}{X \Rightarrow X} \qquad Y \Rightarrow X}{X \vee Y \Rightarrow X} \qquad (\vee \Rightarrow)\ \dfrac{}{X \vee Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y}$$

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Beweisversuch.

$$
(\Rightarrow \wedge)\,\dfrac{(\vee \Rightarrow)\,\dfrac{\dfrac{}{X \Rightarrow X} \qquad Y \Rightarrow X}{X \vee Y \Rightarrow X} \qquad (\vee \Rightarrow)\,\dfrac{X \Rightarrow Y \qquad \dfrac{}{Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y}
$$

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \lor Y \Rightarrow X \land Y$.

Beweisversuch.

$$(\Rightarrow \land)\,\dfrac{(\lor \Rightarrow)\,\dfrac{\overline{X \Rightarrow X} \qquad Y \Rightarrow X}{X \lor Y \Rightarrow X} \qquad (\lor \Rightarrow)\,\dfrac{X \Rightarrow Y \qquad \overline{Y \Rightarrow Y}}{X \lor Y \Rightarrow Y}}{X \lor Y \Rightarrow X \land Y}$$

- Der Beweisversuch liefert einen Baum dessen Blätter alle mit Sequenzen beschriftet sind, die nur noch atomare Formeln enthalten. Es sind also keine weiteren Regeln mehr anwendbar.

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Beweisversuch.

$$
(\Rightarrow \wedge)\,\dfrac{(\vee \Rightarrow)\,\dfrac{\overline{X \Rightarrow X} \qquad Y \Rightarrow X}{X \vee Y \Rightarrow X} \qquad (\vee \Rightarrow)\,\dfrac{X \Rightarrow Y \qquad \overline{Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow Y}}{X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y}
$$

- Der Beweisversuch liefert einen Baum dessen Blätter alle mit Sequenzen beschriftet sind, die nur noch atomare Formeln enthalten. Es sind also keine weiteren Regeln mehr anwendbar.
- Aber nur zwei Blätter sind Axiome. Die anderen können falsifiziert werden.
- Wir wählen z.B. β durch $\beta(X) := 1$ und $\beta(Y) := 0$.
- Dies falsifiziert ein Blatt aber auch die Originalsequenz.

Beweissuche im Sequenzenkalkül

Wir wollen die folgende Sequenz beweisen $X \lor Y \Rightarrow X \land Y$.

Lemma. Für jede Regel und jede passende Belegung β gilt:

β erfüllt die Konsequenz der Regel gdw. β alle Prämissen erfüllt.

Beweisversuch.

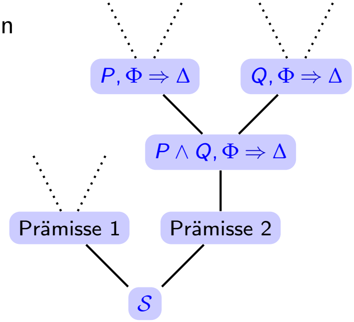
$$\dfrac{\dfrac{\overline{X \Rightarrow X} \quad Y \Rightarrow X}{X \lor Y \Rightarrow X}(\lor\Rightarrow) \qquad \dfrac{X \Rightarrow Y \quad \overline{Y \Rightarrow Y}}{X \lor Y \Rightarrow Y}(\lor\Rightarrow)}{X \lor Y \Rightarrow X \land Y}(\Rightarrow\land)$$

- Der Beweisversuch liefert einen Baum dessen Blätter alle mit Sequenzen beschriftet sind, die nur noch atomare Formeln enthalten. Es sind also keine weiteren Regeln mehr anwendbar.
- Aber nur zwei Blätter sind Axiome. Die anderen können falsifiziert werden.
- Wir wählen z.B. β durch $\beta(X) := 1$ und $\beta(Y) := 0$.
- Dies falsifiziert ein Blatt aber auch die Originalsequenz.
- D.h., der Versuch die Sequenz $X \lor Y \Rightarrow X \land Y$ zu beweisen führt zu einer falsifizierenden Belegung eines Blattes.
- Nach eben bewiesenem Lemma, falsifiziert dies auch die Originalsequenz.

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Definition. Ein Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ einer Sequenz $\mathcal{S}$ ist ein Baum, in dem

- die Wurzel mit $\mathcal{S}$ beschriftet ist und
- jeder innere Knoten mit der Konsequenz einer Regel und dessen Kinder mit den Prämissen dieser Regel beschriftet sind.



Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

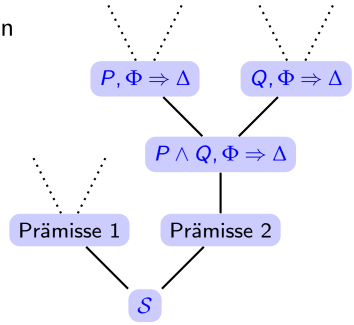
Definition. Ein Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ einer Sequenz $\mathcal{S}$ ist ein Baum, in dem

- die Wurzel mit $\mathcal{S}$ beschriftet ist und
- jeder innere Knoten mit der Konsequenz einer Regel und dessen Kinder mit den Prämissen dieser Regel beschriftet sind.

Ein Blatt von $\mathcal{T}$ ist

- *positiv*, wenn es mit einem Axiom beschriftet ist und
- *negativ*, wenn es mit einer Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ beschriftet ist, so dass Φ und Δ disjunkte Mengen von Variablen sind.

$\mathcal{T}$ ist *vollständig*, wenn alle Blätter positiv oder negativ sind.



Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Definition. Ein Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ einer Sequenz $\mathcal{S}$ ist ein Baum, in dem

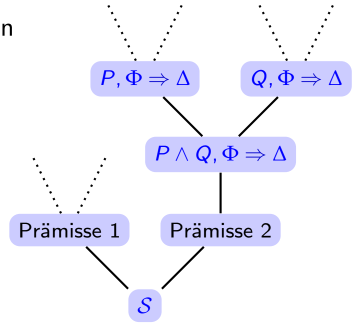
- die Wurzel mit $\mathcal{S}$ beschriftet ist und
- jeder innere Knoten mit der Konsequenz einer Regel und dessen Kinder mit den Prämissen dieser Regel beschriftet sind.

Ein Blatt von $\mathcal{T}$ ist

- *positiv*, wenn es mit einem Axiom beschriftet ist und
- *negativ*, wenn es mit einer Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ beschriftet ist, so dass Φ und Δ disjunkte Mengen von Variablen sind.

$\mathcal{T}$ ist *vollständig*, wenn alle Blätter positiv oder negativ sind.

Ein vollständiger Ableitungsbaum für $\mathcal{S}$ ist eine Widerlegung, wenn er ein negatives Blatt enthält.



Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Definition. Ein Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ einer Sequenz $\mathcal{S}$ ist ein Baum, in dem

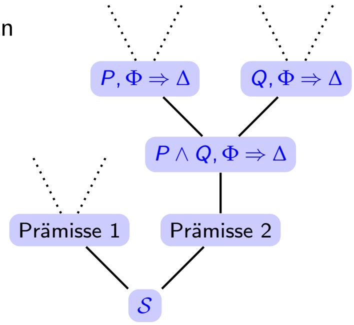
- die Wurzel mit $\mathcal{S}$ beschriftet ist und
- jeder innere Knoten mit der Konsequenz einer Regel und dessen Kinder mit den Prämissen dieser Regel beschriftet sind.

Ein Blatt von $\mathcal{T}$ ist

- *positiv*, wenn es mit einem Axiom beschriftet ist und
- *negativ*, wenn es mit einer Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ beschriftet ist, so dass Φ und Δ disjunkte Mengen von Variablen sind.

$\mathcal{T}$ ist *vollständig*, wenn alle Blätter positiv oder negativ sind.

Ein vollständiger Ableitungsbaum für $\mathcal{S}$ ist eine Widerlegung, wenn er ein negatives Blatt enthält.



Bemerkung. Ein Beweis für $\mathcal{S}$ ist ein vollständiger Ableitungsbaum dessen Blätter alle positiv sind.

Algorithmus zur Konstruktion von Beweisen

Eingabe. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$
Ausgabe. Beweis oder falsifizierende Belegung für $\Phi \Rightarrow \Delta$.

Algorithmus. Konstruiere Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ für $\mathcal{S}$ induktiv.

Initialisiere $\mathcal{T}$ als Baum mit einem mit $\Phi \Rightarrow \Delta$ beschrifteten Knoten.

Algorithmus zur Konstruktion von Beweisen

Eingabe. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$

Ausgabe. Beweis oder falsifizierende Belegung für $\Phi \Rightarrow \Delta$.

Algorithmus. Konstruiere Ableitungsbaum $\mathcal{T}$ für $\mathcal{S}$ induktiv.

Initialisiere $\mathcal{T}$ als Baum mit einem mit $\Phi \Rightarrow \Delta$ beschrifteten Knoten.

while es gibt unmarkiertes Blatt t **do** *($\Phi' \Rightarrow \Delta'$ Beschriftung von t)*

  if t negativ **then return** β mit $\beta(X) = 1$ für $X \in \Phi'$ und $\beta(X) = 0$ sonst

  else if t positiv **then** markiere t mit $(+)$.

  else

    wähle nicht-atomare Formel $\varphi \in \Phi' \cup \Delta'$ und wende Regel auf φ an.

    füge für jede Prämisse P ein mit P beschriftetes Kind von t hinzu.

od

Sind alle Blätter markiert, gib $\mathcal{T}$ als Beweis für $\Phi \Rightarrow \Delta$ zurück.

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Theorem. Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Sequenz $\mathcal{S} := \Phi \Rightarrow \Delta$ (d.h. $\Phi \cup \Delta$ endlich).

Wenn $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, liefert der Algorithmus einen Beweis, anderenfalls gibt er eine Widerlegung zurück.

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Theorem. Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Sequenz $\mathcal{S} := \Phi \Rightarrow \Delta$ (d.h.$\Phi \cup \Delta$ endlich).

Wenn $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, liefert der Algorithmus einen Beweis, anderenfalls gibt er eine Widerlegung zurück.

Beweis. Wir zeigen zunächst Terminierung.

Für $\varphi \in \mathrm{AL}$ sei $h(\varphi)$ die Zahl der Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ in φ.

Die Komplexität einer Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist definiert als

$$\sum\{h(\varphi) : \varphi \in \Phi \cup \Delta\}.$$

Beobachtung. Ist K die Kosequenz und sind P bzw. P_1, P_2 die Prämissen einer Regel, dann gilt:

$$h(K) > h(P) \text{ bzw. } h(K) > \max\{h(P_1), h(P_2)\}.$$

Die Komplexität der Kinder jedes Knotens nimmt also ab. Daher muss der Algorithmus terminieren.

SK-Regeln AL.

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Theorem. Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Sequenz $\mathcal{S} := \Phi \Rightarrow \Delta$ (d.h. $\Phi \cup \Delta$ endlich).

Wenn $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist, liefert der Algorithmus einen Beweis, anderenfalls gibt er eine Widerlegung zurück.

Beweis (Teil 2). Der Algorithmus terminiert,

- bei einem negativen Blatt und konstruiert daraus eine falsifizierende Belegung für $\mathcal{S}$.
- wenn alle Blätter positiv sind. Dann ist der Ableitungsbaum ein Beweis von $\mathcal{S}$ und die Sequenz damit gültig. $\square$

SK-Regeln AL.

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ eine Menge von Formeln.

Eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ kann aus Φ hergeleitet werden, geschrieben $\Phi \vdash_S \psi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ gibt, so dass $\Phi' \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Insbesondere kann ψ aus der leeren Menge hergeleitet werden, d.h. $\vdash_S \psi$, wenn $\emptyset \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Menge von Formeln.

Eine Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ kann aus Φ hergeleitet werden, geschrieben $\Phi \vdash_S \psi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ gibt, so dass $\Phi' \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Insbesondere kann ψ aus der leeren Menge hergeleitet werden, d.h. $\vdash_S \psi$, wenn $\emptyset \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine endliche oder unendliche Formelmenge.
Φ ist inkonsistent, wenn es eine Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ gibt, so dass $\Phi \vdash_S \psi$ und $\Phi \vdash_S \neg\psi$.

Anderenfalls ist Φ konsistent.

Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Das vorherige Theorem und der Algorithmus zeigen die Vollständigkeit des Sequenzenkalküls für endliche Formelmengen.

Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes folgt die Vollständigkeit für beliebige Formelmengen.

Theorem. (Vollständigkeit und Korrektheit)

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ eine Menge von Formeln und sei $\psi \in \mathsf{AL}$.

1. Φ ist konsistent genau dann, wenn Φ erfüllbar ist.
2. $\Phi \vdash_S \psi$ genau dann, wenn $\Phi \models \psi$.

Ableitbarkeit vs. Semantische Folgerung

Sequenzenkalkül	Semantische Konzepte
Sequenz $\Phi \Rightarrow \psi$ ist gültig	Aus Φ folgt logisch ψ
$\vdash_S$	$\models$
Φ ist konsistent	Φ ist erfüllbar
$\emptyset \Rightarrow \psi$ gültig	ψ allgmeingültig
$\psi \Rightarrow \emptyset$ gültig	ψ unerfüllbar