Benotete Hausaufgaben zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche

WiSe 2022/2023
TU Berlin
12.12.2022

Hausaufgabenblatt

Hinweise:

- Die Hausaufgabe kann ab dem **12.01.2023, 00:00 Uhr** bis zum **13.01.2023, 23:59 Uhr** auf ISIS hochgeladen werden.
- Die Hausaufgabe muss in Dreiergruppen bearbeitet werden.[1] Bitte tragen Sie sich in ISIS bis zum **11.01.2023, 23:59 Uhr** in der Gruppenwahl ein. Die Hausaufgabe kann nur von eingetragenen Gruppen abgegeben werden.
- Bitte verwenden Sie die LaTeX-Vorlage auf ISIS für Ihre Abgabe.
- Plagiate werden nicht toleriert und werden scharf geahndet.
- Es können bis zu **25 Portfoliopunkte** erreicht werden.
- Alle Antworten sind zu begründen. Antworten ohne Begründung erhalten **0 Punkte**. Achten Sie insbesondere darauf, die Korrektheit Ihrer angegebenen Lösungen (Algorithmen, Reduktionen etc.) zu begründen.
- Um zu zeigen, dass eine Sprache (semi-)entscheidbar ist, reicht es aus, die prinzipielle Arbeitsweise eine(r/s) Turing-Maschine/Algorithms/WHILE-/GOTO-Programmes zu beschreiben, welche(r) die Sprache (semi-)entscheidet (die (halbe) charakteristische Funktion berechnet). Falls Sie in einer Reduktion eine Turing-Maschine konstruieren, so reicht es ebenfalls aus, ihr Verhalten algorithmisch zu beschreiben.
- Sätze, die in der Vorlesung oder Modulkonferenz *bewiesen* wurden (auch skizzenhaft) dürfen verwendet werden (unbewiesene Mitteilungen nicht).
- Erstellen Sie für jede Aufgabe ein separates Dokument und laden Sie es in der jeweiligen Dokumentabgabe in ISIS hoch.
- Wir empfehlen pro erreichbarem Punkt nicht mehr als 1/3 Seite zu schreiben. Wir behalten uns vor, nur die ersten 6 Seiten jedes Dokuments zu lesen.

Aufgabe 1. *(Semi-)Entscheidbarkeit von Sprachen* 10 P.

Betrachten Sie die folgenden Sprachen:

$$A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid T(M_w) \cap \{0,1\}^n \neq \emptyset \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\},$$

$$B \coloneqq \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} M_w \text{ berechnet die charakteristische Funktion} \\ \text{einer unentscheidbaren Sprache} \end{array} \right\}$$

$$C \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der Zustände von } M_w \text{ ist größer als } |T(M_w)|\}$$

(a) Ist A semi-entscheidbar?

(b) Ist A co-semi-entscheidbar?

(c) Ist B semi-entscheidbar?

(d) Ist B co-semi-entscheidbar?

(e) Ist C semi-entscheidbar?

(f) Ist C co-semi-entscheidbar?

[1] In begründeten Ausnahmen schreiben Sie bitte eine E-Mail an `bk@akt.tu-berlin.de`

Aufgabe 2. *Varianten des Postschen Korrespondenzproblems* 6 P.

Für eine Sequenz $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ sei $\#_x(i_1, \dots, i_n) := |\{j \in \{1, \dots, n\} \mid i_j = x\}|$ die Anzahl der Vorkommen von $x \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel $\#_2(1, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 4) = 3$, da die 2 genau 3 mal in der Sequenz vorkommt.

Wir betrachten die folgenden zwei Varianten des Postschen Korrespondenzproblems (mit Alphabet Σ).

$$P_{\leq 2} := \left\{ \begin{array}{r|l} & k \geq 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \langle (x_1,y_1), (x_2, y_2), & \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}, \\ \dots, (x_k, y_k) \rangle & \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n} \text{und} \\ & \#_i(i_1, \dots, i_n) \leq 2 \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \end{array} \right\}$$

$$P_{\text{even}} := \left\{ \begin{array}{r|l} & k \geq 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \langle (x_1,y_1), (x_2, y_2), & \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}, \\ \dots, (x_k, y_k) \rangle & \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n} \text{ und} \\ & \#_i(i_1, \dots, i_n) \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \text{ gerade ist} \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie für jede der beiden Sprachen $P_{\leq 2}$ und P_{even}, ob diese entscheidbar ist oder nicht.

Aufgabe 3. *Dichte von Sprachen* 9 P.

Die *Dichte* einer Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ sei definiert durch

$$\rho(L) := \lim_{n \to \infty} \frac{|L \cap \{0, 1\}^n|}{2^n},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Falls er nicht existiert, ist die Dichte von L undefiniert.

Für jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ existiert bekanntlich eine eindeutige Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in \{0, 1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k} = x$ und
- $x_k = 0$ für unendliche viele $k \in \mathbb{N}$.

Diese Folge ist die *Binärentwicklung* von x. Definiere die Funktion $f_x \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ durch $f_x(k) := x_k$. Die Funktion f_x gibt bei Eingabe k also die k-te Stelle der Binärentwicklung von x aus. Wir nennen die Zahl x *berechenbar*, falls f_x berechenbar ist.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine entscheidbare Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$, deren Dichte undefiniert ist.

(b) Es gibt eine entscheidbare Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ mit $\rho(L) = \frac{1}{2}$.

(c) Es gibt eine unberechenbare Zahl $x \in [0, 1]$.

(d) Falls $x \in [0, 1]$ berechenbar ist, dann existiert eine entscheidbare Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ mit $\rho(L) = x$. (*Tipp*: L enthält für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Anteil von $\sum_{k=0}^{n} x_k \cdot 2^{-k}$ aller Wörter der Länge n.)