Benotete Hausaufgaben zur Vorlesung **WiSe 2023/2024**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Kunz/Peters **15.12.2023**

Hausaufgabenblatt

Hinweise:

- Die Hausaufgabe kann ab dem **17.01.2024, 12:00 Uhr** bis zum **19.01.2024, 23:59 Uhr** auf ISIS hochgeladen werden.
- Die Hausaufgabe sollte möglichst in Dreiergruppen bearbeitet werden. Bitte tragen Sie sich in ISIS bis zum **17.01.2024, 11:00 Uhr** in der Gruppenwahl ein. Die Hausaufgabe kann nur von eingetragenen Gruppen abgegeben werden.
- Bitte verwenden Sie die LaTeX-Vorlage auf ISIS für Ihre Abgabe.
- Plagiate werden nicht toleriert und werden scharf geahndet.
- Es können bis zu **25 Portfoliopunkte** erreicht werden.
- Alle Antworten sind zu begründen. Antworten ohne Begründung erhalten **0 Punkte**. Einzige Einschränkungen:
  - Um zu zeigen, dass eine Funktion (Sprache) von einer Turing-Maschine berechnet (akzeptiert) werden kann, reicht es aus, das Verhalten der Maschine algorithmisch zu beschreiben. Das Gleiche gilt für WHILE- und GOTO-Programme.
  - Sätze, die in der Vorlesung oder Modulkonferenz *bewiesen* wurden (auch skizzenhaft) dürfen verwendet werden, aber unbewiesene Mitteilungen und Lösungen zu Tutoriumsaufgaben dürfen nicht verwendet werden (bzw. Beweis muss erbracht werden).
  - Sie können die Existenz einer universellen Turing-Maschine (eine Maschine, die bei Eingabe $w\#x$ die Maschine M_w auf Eingabe x simuliert) annehmen.
  - Sie können verwenden, dass das allgemeine Halteproblem H (Definition siehe unten) semi-entscheidbar ist.
- Wir behalten uns vor, pro Aufgabe mit x erreichbaren Punkten nicht mehr als $x/2$ Seiten zu lesen.

Erinnerungen:

- Alle in den Aufgaben vorkommenden Turing-Maschinen sind deterministisch.
- Σ ist ein beliebiges, endliches Alphabet. Das Symbol $\#$ ist ein Trennzeichen.
- Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement.
- Das allgemeine Halteproblem ist $H := \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ hält bei Eingabe } x\}$.
- Das spezielle Halteproblem ist $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid w\#w \in H\}$.
- Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid w\# \in H\}$.
- Eine Turing-Maschine heißt „Rechtsdrall-Turing-Maschine“ falls alle definierten Übergänge den Kopf nach rechts bewegen, also in der Form $\delta(z_i, x) = (z_j, y, \mathtt{R})$ sind.

Aufgabe 1. *(Semi-)Entscheidbarkeit von Sprachen* 10 P.

Zeigen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Sprachen jeweils Semi-Entscheidbarkeit und Entscheidbarkeit.

- $A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt eine Eingabe } x \text{ auf der } M_w \text{ die Ausgabe 0 produziert}\}$
- $B \coloneqq K \cap \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ ist eine Rechtsdrall-Turing-Maschine}\}$
- $C \coloneqq \{w\#q \mid w, q \in \{0,1\}^* \text{ und } T(M_w) \subseteq T(M_q)\}$

Aufgabe 2. *Reduktionen* 8 P.

Sei $c_0\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die konstante 0-Funktion (d.h. $c_0(x) = 0$ für alle $x \in \{0,1\}^*$) und sei

$$L \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet die Funktion } c_0\}.$$

1. Reduzieren Sie H auf L.
2. Reduzieren Sie $\overline{H}$ auf L.
3. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $L \leq H_0$ gilt.

Aufgabe 3. *Postsches Korrespondenzproblem* 7 P.

1. Welche der drei folgenden Wörter sind in der Sprache PCP mit Alphabet $\{a, b\}$ enthalten?

$$I_1 = \langle((aa, ab), (aaa, ab))\rangle \qquad I_2 = \langle((aaab, aa), (b, abb))\rangle \qquad I_3 = \langle((aa, a), (a, aaa))\rangle$$

2. Zeigen oder widerlegen Sie die Entscheidbarkeit folgender Sprache:

$$\begin{aligned} P^* \coloneqq \{\langle((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))\rangle \mid\ & k \geq 1, x_i, y_i \in \{0,1\}^* \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{wobei } x_i \text{ und } y_i \text{ keine zwei 1'en hintereinander enthalten,} \\ & \text{und es existieren } n \geq 1 \text{ und } i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\} \end{aligned}$$