FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 23. Dezember 2022

9. Tutorium – Logik
Besprochen in der Woche vom 09.01.2023.

Aufgabe 1

Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, wobei $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$.

Beweisen Sie die folgende Äquivalenz: $\varphi \wedge \exists x\, \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Bemerkung: Folgende Äquivalenzen lassen sich analog beweisen:

$$\varphi \vee \forall x\, \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi), \quad \varphi \vee \exists x\, \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi) \quad \text{und} \quad \varphi \wedge \forall x\, \psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi).$$

Aufgabe 2

Sei E ein einstelliges Relationssymbol und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie die folgende Formel in Negations- und Pränexnormalform um:

(i) $\varphi_1 := \exists y(E(y) \vee y = y) \rightarrow \forall x f(x, y) = x$

(ii) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion: Die Pränexnormalform ist eine Normalform.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Negationsnormalform eine Normalform ist.

Aufgabe 3

Karl Kühl glaubt endlich einen Weg gefunden zu haben alle Logikzwerge davon zu überzeugen, dass die Steine nur simpler Schnickschnack sind. Er glaubt eine Methode gefunden zu habe alle funkelnden Steine mit einer einzigen Formel einfangen zu können. Das sollte die Zwerge hoffentlich überzeugen, dass ihre Obsession unberechtigt war.

Doch war er schnell genug um die Zwerge wieder auf die wahren Geschehnisse im unendlichen Tunnel aufmerksam zu machen?

Definition 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *Funkelstein* ist ein Graph G mit $V(G) = \{k, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und $E(G) = \{\{v_i, k\} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein zweistelliges Relationsymbol ist.

(i) Geben Sie eine $\mathrm{FO}[\sigma]$ Formel φ_G an, sodass $\mathrm{Mod}(\varphi_G)$ die Menge aller ungerichteten, schleifenfreien Graphen ist.

(ii) Geben Sie eine $\mathrm{FO}[\sigma]$ Formel φ_S an, sodass $\mathrm{Mod}(\varphi_S)$ die Menge aller Funkelsteine ist.