Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

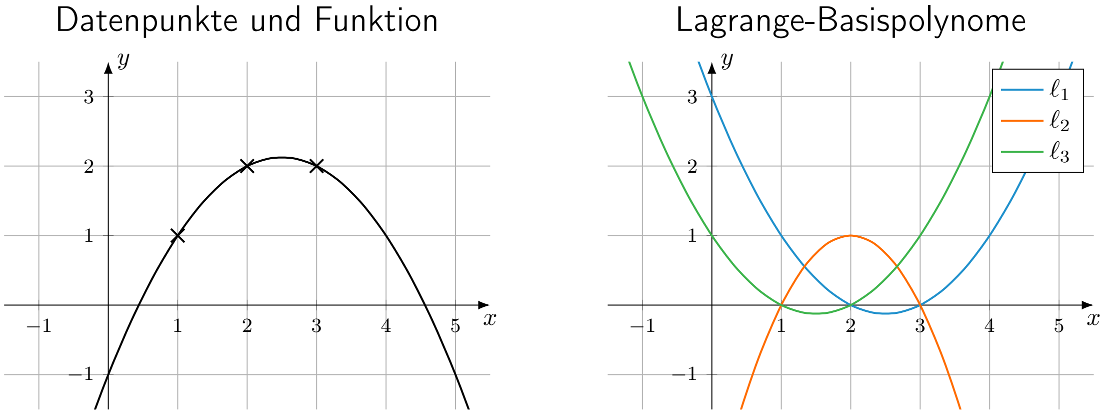
Wissenschaftliches Rechnen - Übung 4.1

Globale Interpolation

11.12.2023 bis 15.12.2023

Aufgabe 1: Globale Polynominterpolation

Gegeben sind die Stützpunkte $(1,1),(2,2)$ und $(3,2)$, welche in der folgenden Abbildung nochmal dargestellt sind.



Im Folgenden möchten wir die Punkte mithilfe eines Polynoms $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ interpolieren, welches einen möglichst geringen Grad hat.

1. Was ist der Unterschied zwischen einer Approximation und einer Interpolation dieser Datenpunkte?

   Lösung

   Eine interpolierende Funktion muss alle Stützpunkte exakt treffen, wohingegen eine Approximation die Punkte nur annähernd treffen muss (was durch eine Fehlerfunktion quantifiziert wird).

   Lösung Ende

2. Was ist der geringste Grad, den ein Polynom haben muss, um die drei Punkte zu interpolieren? Welchen Grad benötigt ein Polynom, um n beliebige Punkte zu interpolieren?

   Lösung

   Da die drei Punkte weder denselben Funktionswert haben noch klar auf einer Geraden liegen, benötigen wir ein quadratisches Polynom. Im Allgemeinen benötigt die globale Polynominterpolation von n Punkten im schlimmsten Fall ein Polynom $(n-1)$-ten Grades, wobei es Konstellationen gibt, in denen ein niedrigerer Grad genügt (zum Beispiel, falls alle Stützpunkte denselben Funktionswert haben, genügt eine konstante Funktion).

   Lösung Ende

3. Lösen Sie das Interpolationsproblem mithilfe eines linearen Gleichungssystems. Stellen Sie das gefundene Polynom f in Monombasis dar und zeichnen Sie es in die Abbildung.

   Lösung

   Das lineare Gleichungssystem sieht wie folgt aus, wobei $f(x) = ax^2 + bx + c$ gelten soll:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die Systemmatrix wird Vandermonde-Matrix genannt. Die Lösung dieses ist $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ und $c = -1$. Damit ist $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 1$.

Lösung Ende

4. Berechnen Sie die Lagrange-Basispolynome $\ell_1(x), \ell_2(x)$ und $\ell_3(x)$ und zeichnen Sie diese in die Abbildung auf der rechten Seite ein.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\ell_1(x) &= \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \\
\ell_2(x) &= \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} = -x^2 + 4x - 3 \\
\ell_3(x) &= \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1
\end{aligned}$$

Lösung Ende

5. Welche besonderen Eigenschaften erfüllen die Lagrange-Basispolynome? Woran erkennt man in der Abbildung, welches Basispolynom zu welcher Stützstelle gehört?

Lösung

Die Lagrange-Basispolynome hängen zunächst nur von den Stützstellen und nicht von den Funktionswerten ab. Sie erfüllen dabei folgende Eigenschaft:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anhand dieser Eigenschaft kann man die Basisfunktionen der zugehörigen Stützstelle zuordnen: Es ist das einzige, das sich nicht bei $y = 0$ mit den anderen schneidet und hat den Funktionswert Eins stattdessen.

Lösung Ende

6. Geben Sie den Koeffizientenvektor von f bezüglich der von Ihnen berechneten Lagrange-Basis an. Was stellen Sie fest?

Lösung

Aus der $0/1$-Eigenschaft ist das Interpolationsproblem einfach gelöst. Die Koeffizienten des Polynoms bezüglich der Lagrange-Basis sind die zugehörigen Funktionswerte:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) + 2 \cdot \left(-x^2 + 4x - 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1
\end{aligned}$$

Damit ist der Koeffizientenvektor von f bezüglich der Lagrange-Basis $(1, 2, 2)$. Außerdem stellen wir fest, dass das gefundene Polynom mit dem durch das LGS berechneten Polynom übereinstimmt.

Das ist kein Zufall, denn es gilt: Für n paarweise unterschiedliche Stützstellen $x_1, \ldots, x_n$ und zugehörige Funktionswerte $y_1, \ldots, y_n$ (die nicht unterschiedlich sein müssen), gibt es genau ein Polynom p vom Grad $n - 1$ oder geringer, sodass $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Somit ist es egal, welche Basis von Polynomen von Grad bis zu $n - 1$ man wählt, man erhält immer dasselbe Lösungspolynom.

Lösung Ende

7. Geben Sie die Matrizen an, welche den Basiswechsel aus der Lagrange- in die Monombasis und andersherum durchführt.

Lösung

Die Matrix, die den Basiswechsel von Monombasis zu Lagrange-Basis durchführt, ist die Vandermonde-Matrix:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Ihre Inverse entspricht dem Basiswechsel aus Lagrange-Basis zu Monombasis:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ihre Spalten enthalten die Koeffizienten der Lagrange-Basispolynome bezüglich der Monombasis $(1, x, x^2)$.

Lösung Ende

Aufgabe 2: Approximation durch Polynome

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wird Runges Funktion genannt. Im Folgenden möchten wir diese in einem Intervall $[a, b]$ mithilfe eines Interpolationspolynoms approximieren. Dabei definieren wir den folgenden Approximationsfehler:

$$\mathcal{E}(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Für die globale Polynominterpolation benötigen wir Stützstellen, an denen wir die Funktion abtasten. Eine intuitive Art, sich die Stützstellen auszusuchen, ist die gleichmäßigen Abtastung der Funktion im Intervall $[a, b]$.

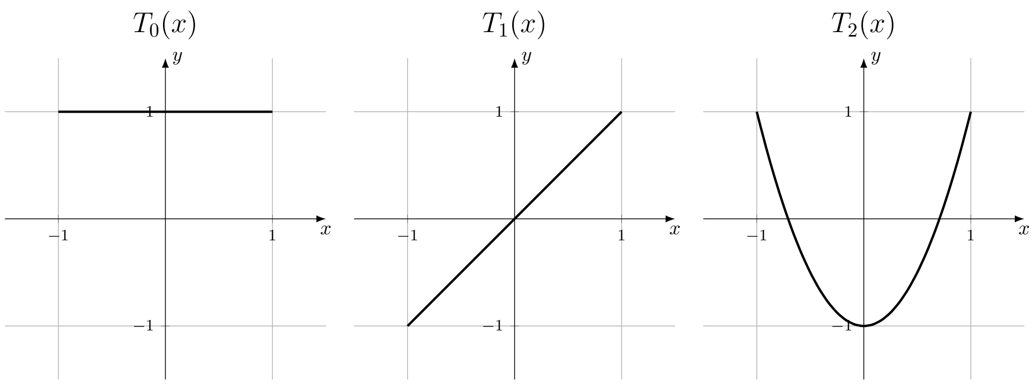
1. Was ist Runges Phänomen? Warum ist die gleichmäßige Abtastung im Allgemeinen keine gute Idee?

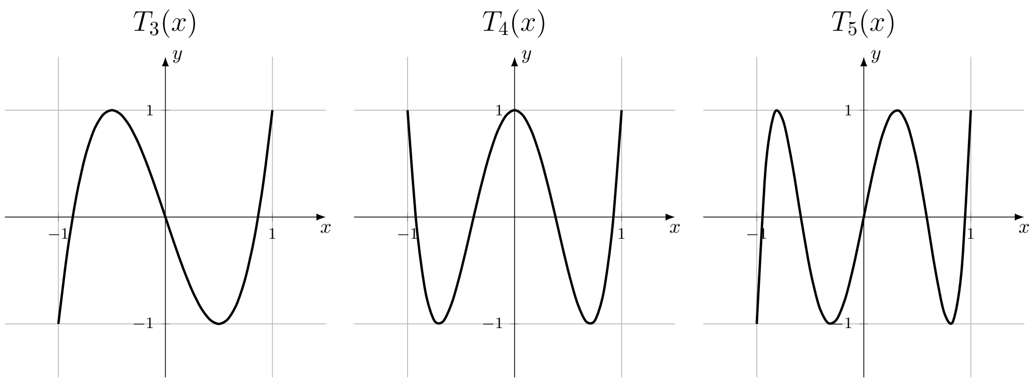
Lösung

Runges Phänomen beschreibt eine Eigenschaft der (globalen) Polynominterpolation, nach der eine Erhöhung des Grades des Interpolationspolynoms zu einer Verschlechterung der Interpolationsgüte führen kann. Dies tritt, je nachdem welche Funktion interpoliert werden soll, zum Beispiel bei der gleichmäßigen Abtastung der Funktion ein. Eine Möglichkeit Runges Phänomen zu vermeiden ist die Nutzung von Polynomen geringen Grades (lokale Interpolation, mit Splines) und wird in der nächsten Woche diskutiert. Eine weitere Möglichkeit ist die geschickte Auswahl von Stützstellen.

Lösung Ende

2. Die Tschebyscheff-Polynome (erster Art) $T_n(x)$ sind rekursiv durch $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ definiert. Berechnen Sie alle weiteren Tschebyscheff-Polynome bis einschließlich Grad fünf und skizzieren Sie diese. Welche geschlossene Darstellung besitzen sie im Intervall $[-1, 1]$?





Lösung

Im Intervall $[-1, 1]$ besitzen sie folgende Darstellung: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1 = \cos(2 \arccos(x)) \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x = \cos(3 \arccos(x)) \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos(4 \arccos(x)) \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x = \cos(5 \arccos(x))
\end{aligned}$$

Lösung Ende

3. Berechnen Sie die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_5 im Intervall $[-1, 1]$.

Lösung

Der Kosinus ist genau dann Null, wenn dessen Argument $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Somit gilt:

$$n \arccos(x) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \Longleftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi(k + 1/2)}{n}$$

Die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_n(x)$ sind

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k + 1/2)}{n}\right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Damit sind die Nullstellen des fünften Tschebyscheff-Polynoms:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 0{,}95105651629 \\
x_2 &= \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}58778525229 \\
x_3 &= \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0 \\
x_4 &= \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \approx -0{,}58778525229 \\
x_5 &= \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \approx -0{,}95105651629
\end{aligned}$$

Lösung Ende

4. Was ist der betragsmäßig größte Funktionswert, den die Tschebyscheff-Polynome T_n im Intervall $[-1, 1]$ annehmen? Was macht sie in dieser Hinsicht besonders?

Lösung

Der betragsmäßig größte Funktionswert ist 1 bzw. (für $n \geq 1$) -1. Damit ist das Tschebyscheff-Polynom T_n das Polynom n-ten Grades mit führendem Koeffizient 2^{n-1}, das die kleinsten betragsmäßig maximalen Funktionswerte in diesem Intervall annimmt. Dies macht dessen Nullstellen zur optimalen Wahl von Stützstellen, um jede beliebige Funktion (mit beschränkter Ableitung) im Intervall $[-1,1]$ mittels globaler Polynominterpolation zu approximieren. Dies lässt sich, wie in der nächsten Aufgabe demonstriert wird, auf beliebige Intervalle $[a,b]$ verallgemeinern.

Warum macht sie diese Eigenschaft zur optimalen Wahl? Wir fragen uns, welche Stützstellen $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$ man wählen muss, um f bestmöglich mittels Lagrange-Interpolation mit einem Polynom n-ten Grades p_n zu approximieren:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)}_{\text{Lagrange-Interpolation}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\text{Restglied}}, \quad \xi \in [a,b]$$

Beim Restglied handelt es sich nicht um das Restglied der Taylor-Approximation, auch wenn es denselben Faktor am Anfang hat. Ziel ist es, dass das Restglied möglichst kleine Funktionswerte annimmt. Sei $G_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ das Produktpolynom im Restglied, dessen Nullstellen offensichtlich $x_0,\ldots,x_n$ sind und dessen führender Koeffizient 1 ist. Für den maximalen Fehler zwischen f und p_n gibt es folgende obere Schranke:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-p_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left(\max_{\xi\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|\right)}_{\text{unabhängig von } x_0,\ldots,x_n}\underbrace{\left(\max_{x\in[a,b]} |G_n(x)|\right)}_{\text{zu minimieren}}$$

Um das Restglied möglichst kleinzuhalten, müssen also $x_0,\ldots,x_n$ so gewählt werden, dass G_n betragsmäßig möglichst klein im Intervall $[a,b]$ bleiben. Für das Intervall $[-1,1]$ ist $\frac{1}{2^n}T_{n+1}$ das Polynom $(n+1)$-ten Grades mit führendem Koeffizient 1, welches, im Betrag, die kleinsten Funktionswerte annimmt. Also sollten $x_0,\ldots,x_n$ dessen Nullstellen sein.

Lösung Ende

5. Geben Sie die Stützstellen $x_1,\ldots,x_5 \in \mathbb{R}$ an, deren globale Polynominterpolation die Runge-Funktion im Intervall $[-3,3]$ bestmöglich approximiert. Was sind die besten Stützstellen für das Intervall $[1,5]$?

Lösung

Die bestmöglichen Stützstellen entsprechen den Nullstellen des fünften Tschebyscheff-Polynoms, nachdem man diese vom Intervall $[-1,1]$ aus das Intervall $[-3,3]$ skaliert. Diese wären also: $3\cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n}\right)$ mit $k \in \{0,\ldots,4\}$. Für das Intervall $[1,5]$ müssen wir eine Funktion finden, die das Intervall $[-1,1]$ linear auf $[1,5]$ abbildet und die Nullstellen analog dazu verschieben. Das Intervall $[-1,1]$ linear auf $[a,b]$ abzubilden tut die Funktion $\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}$ (bei uns wäre das $2x+3$). Unsere Stützstellen für das Intervall $[1,5]$ sind damit $3+2\cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n}\right)$ mit $k \in \{0,\ldots,4\}$.

Lösung Ende

6. Stellen Sie das Monom $p(x) = x^3$ bezüglich der Basis $(T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x))$ dar. Geben Sie die Matrix an, welche den Basiswechsel aus der Monombasis $(1, x, x^2, x^3)$ in die Tschebyscheff-Basis repräsentiert.

Lösung

Wir möchten $p(x) = x^3$ wie folgt darstellen: $p(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i T_i(x)$. Die Koeffizienten c_i bezüglich der Tschebyscheff-Basis finden wir mithilfe eines linearen Gleichungssystems, wobei jede Spalte der Systemmatrix einem Tschebyscheff-Polynom bezüglich der Monombasis entspricht:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Inverse der Systemmatrix, die den Basiswechsel aus Monom- zu Tschebyscheff-Basis repräsentiert, ist:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Die Darstellung von x^3 bezüglich der Tschebyscheff-Basis ist nun $(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$.

Lösung Ende

* Geben Sie das Polynom ersten Grades an, das das Monom x^3 im Intervall $[-1, 1]$ bestmöglich approximiert.

Lösung

Man erhält das Polynom, indem man alle Koeffizienten bezüglich der Tschebyscheff-Basis auf null setzt, die zu einem Polynom vom Grad zwei oder höher gehören. Das ergibt bezüglich Tschebyscheff-Basis $(0, \frac{3}{4}, 0, 0)$ und damit $p(x) = \frac{3}{4}T_1(x) = \frac{3}{4}x$. Das Ergebnis entspricht der orthogonalen Projektion des Monoms auf den Unterraum $\mathrm{Span}\{T_0(x), T_1(x)\}$.

Lösung Ende