FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 3. November 2022

2. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 07.11.2022.

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz $X \to (Y \wedge Z) \equiv (X \to Y) \wedge (X \to Z)$ via Äquivalenzumformungen.

(ii) Zeigen Sie die Äquivalenz $(Y \to X) \to X \equiv Y \vee X$ ohne Äquivalenzumformungen oder Wahrheitstafeln zu nutzen.

Aufgabe 2

Wir definieren AL_0 als die Menge der Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}$, die keine Junktoren außer $\neg$ und $\to$ enthalten. Zeigen Sie mittels strukturellen Induktion: Für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ existiert eine Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_0$ mit $\varphi \equiv \varphi'$.

Anmerkung: $\top$ und $\bot$ sind Junktoren und kommen somit in keiner Formel in AL_0 vor.

Aufgabe 3

Sei G ein ungerichteter Graph, sei $\mathcal{C}(G) = \{C \subseteq G \mid C \text{ ist ein Kreis.}\}$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ fest. Wir definieren $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ für alle positiven $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : V(G) \mapsto [k]$ wird eine *k-Kreisfärbung von G* genannt, wenn für alle $C \in \mathcal{C}(G)$ zwei Knoten $u, v \in V(C)$ mit $u \neq v$ existieren, sodass $f(u) \neq f(v)$ gilt.

Studierende sollten eine Formel $\varphi_{G,k}$ aufstellen, welche genau dann erfüllbar ist, wenn für G eine k-Kreisfärbung existiert, wobei $\mathcal{C}(G)$ explizit zur Konstruktion der Formel verwendet werden durfte.

(i) Sie sind vor Kurzem Tutor*in geworden und sollen nun folgende Abgaben von Studierenden überprüfen. Sagen Sie jeweils ob die abgegebene Formel richtig ist und geben Sie an wo die Fehler zu finden sind, falls die Formel nicht funktioniert.

a)

$$\varphi^1_{G,k} = \bigwedge_{\{u,v\} \in E(G)} (X_u \leftrightarrow \neg X_v),$$

wobei X_u mit 1 belegt wird, wenn der Knoten u die Farbe 1 erhält und mit 0, wenn der Knoten u mit der Farbe 0 gefärbt wird. Dies formalisiert die Aussage, da nur 2-färbbare Graphen eine k-Kreisfärbung haben können.

b)

$$\varphi^2_{G,k} = \bigwedge_{C \in \mathcal{C}(G)} \bigwedge_{\substack{u \in V(C) \\ f(u)=i}} (X_{u,i} \wedge \bigvee_{v \in V(C) \setminus \{u\}} \neg X_{v,i}),$$

wobei f die k-Kreisfärbung von G ist und die Formel so konstruiert ist, dass $X_{v,i}$ nur dann mit 1 belegt werden kann, wenn $f(v) = i$ gilt.

c)

$$\varphi^3_{G,k} = \bigwedge_{u \in V(G)} \bigvee_{i \in [k]} (X_{u,i} \wedge \bigwedge_{j \in [k] \setminus \{i\}} \neg X_{u,j}) \wedge \bigwedge_{\substack{C \in \mathcal{C}(G) \\ u \in V(C) \\ i \in [k]}} (X_{u,i} \to \bigvee_{v \in V(C) \setminus \{u\}} \neg X_{v,i}),$$

wobei die Konstruktion forcieren soll, dass $X_{u,i}$ nur dann mit 1 belegt wird, wenn der Knoten u mit der Farbe i gefärbt wird.

(ii) Falls Sie der Meinung sind, dass alle abgegebenen Formeln fehlerhaft sind, geben Sie selbst eine Lösung für die Aufgabe an.

Anmerkung: Jede der angegebenen Formelkonstruktionen gibt syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln aus. Insbesondere sind alle Verwendungsarten der Operatoren $\bigvee$ und $\bigwedge$ in den Formeln auch Ihnen in den Prüfungsleistungen erlaubt.