Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 1.1

Themen: Skalarprodukt, Zahlen

Ugo & Gabriel

1. November 2022

Aufgabe 1: Skalarprodukt

1. Was ist ein Skalarprodukt?

Lösung

Ein Skalarprodukt ist ganz allgemein eine bivariate Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Symmetrie:
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$
- Bilinearität (d.h. Linearität in beiden Argumenten):
$$\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$
- Positiv definit:
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Jede Funktion, die diese Voraussetzungen erfüllt, darf sich Skalarprodukt nennen. Skalarprodukte kann man als **Ähnlichkeitsmaß** interpretieren.

Bemerkung: In diesem Kurs verwenden wir ausschließlich das Standardskalarprodukt.

Lösung Ende

2. Wie ist das Standardskalarprodukt definiert? Geben Sie die Definition auch in Matrixschreibweise an.

Lösung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$$

Lösung Ende

3. Welche geometrische Bedeutung besitzt das Standardskalarprodukt im euklidischen Raum?

Lösung

Es gilt zunächst:

$$\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \underbrace{\|\mathbf{v}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})}_{\text{Orthogonale Projektion von } \mathbf{v} \text{ auf } \mathbf{u}}$$

Es beschreibt die Länge der orthogonalen Projektion des einen Vektors auf anderen, multipliziert mit der Länge des anderen Vektors. Anschaulich:

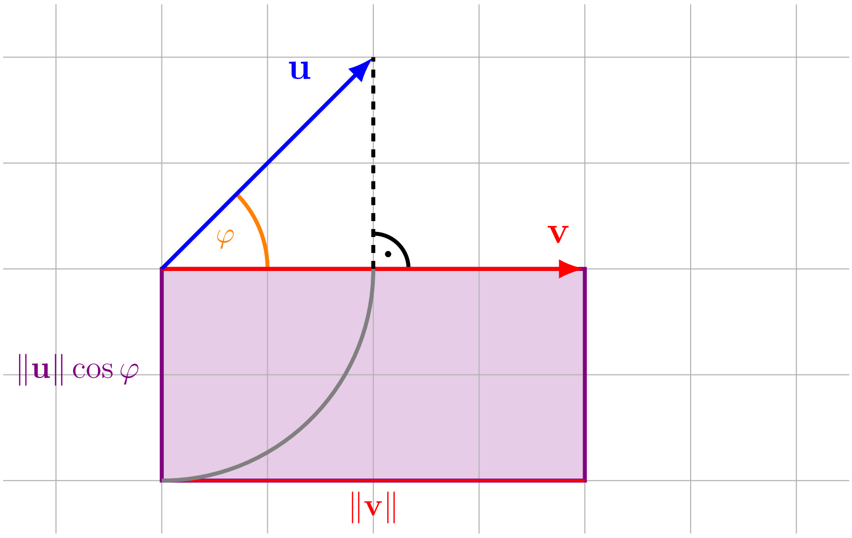
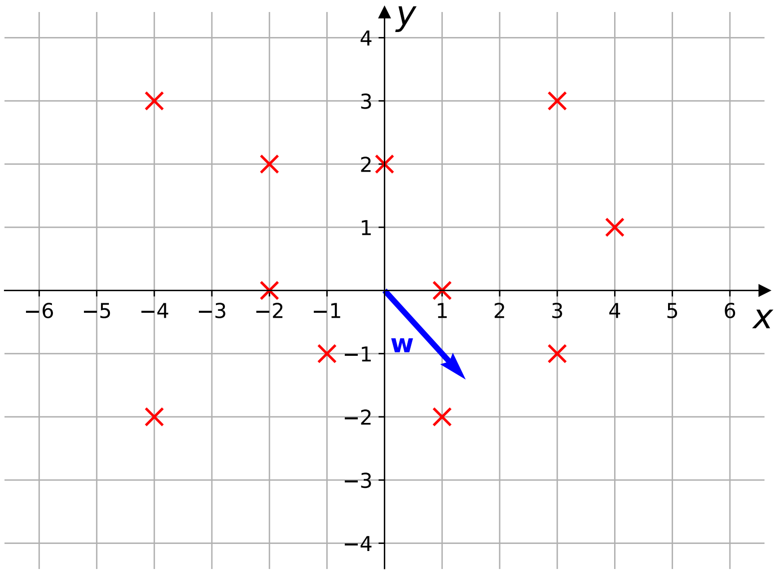


Abbildung 1: Das Skalarprodukt beschreibt die lila Fläche.

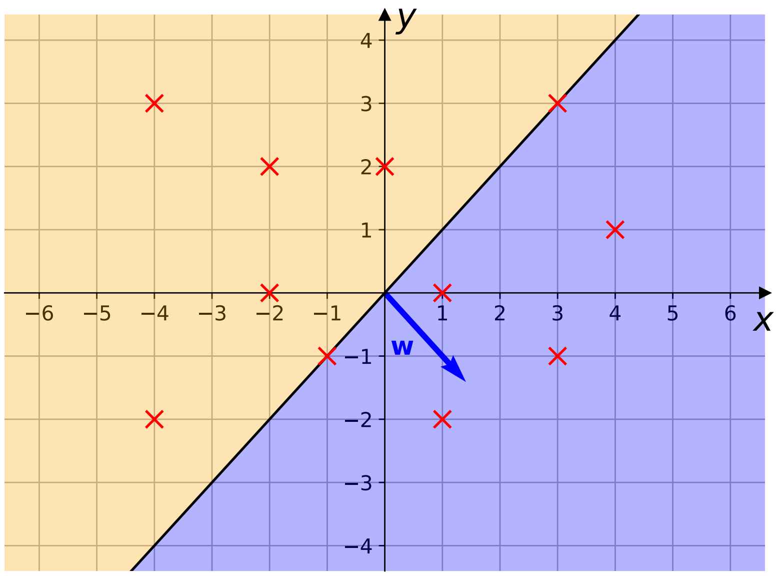
Bemerkenswerterweise ist diese Operation symmetrisch.

Lösung Ende

4. Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ sowie eine Menge von Punkten. Mit welchen Punkten hat $\mathbf{w}$ ein positives Skalarprodukt, ein negatives Skalarprodukt bzw. ein Skalarprodukt gleich Null?



Lösung



- Blau markierter Bereich: positives Skalarprodukt
- Orange markierter Bereich: negatives Skalarprodukt
- Schwarze Gerade: Skalarprodukt Null

Lösung Ende

5. Berechne die folgenden Skalarprodukte $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{v}_i$:

   a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Lösung

a) -1

b) 9

c) 0

Lösung Ende

6. Welche Aussagen lassen sich mithilfe der Skalarprodukte aus der letzten Aufgabe über die Vektoren und deren Verhältnis zueinander treffen?

Lösung

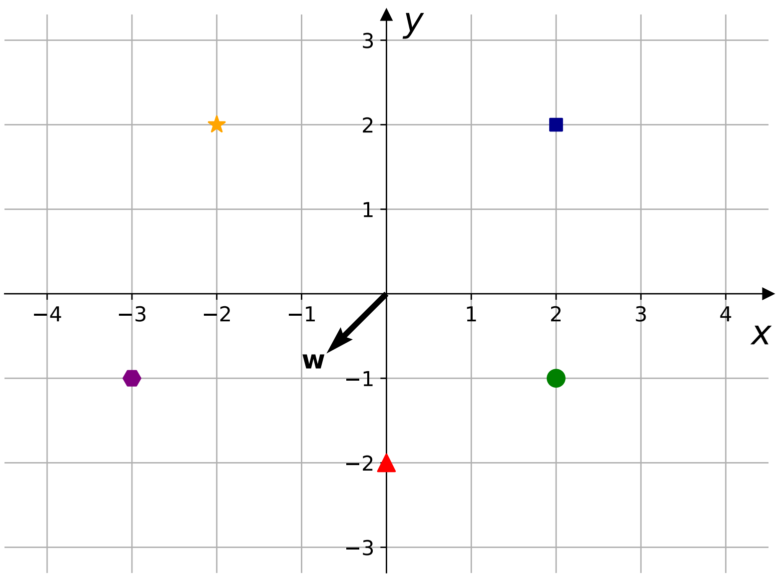
a) Negativität: Sie befinden sich in unterschiedlichen Halbräumen.

b) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$: Die Länge bzgl. der euklidischen/ℓ^2-Norm des Vektors entspricht der Wurzel des Skalarproduktes mit sich selbst, also 3.

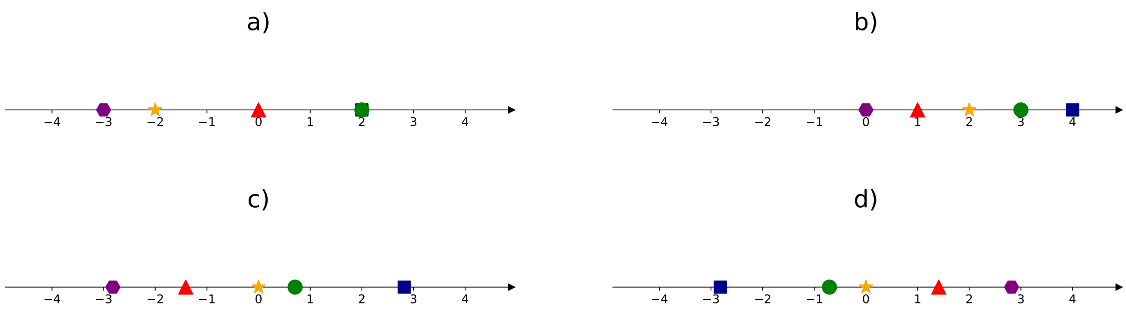
c) Skalarprodukt von 0: Sie stehen orthogonal.

Lösung Ende

7. Gegeben ist ein Vetkor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ sowie fünf Punkte.



Welche der folgenden vier Optionen zeigt die orthogonale Projektion der Punkte in den Raum, der von dem Vektor $\mathbf{w}$ aufgespannt wird?



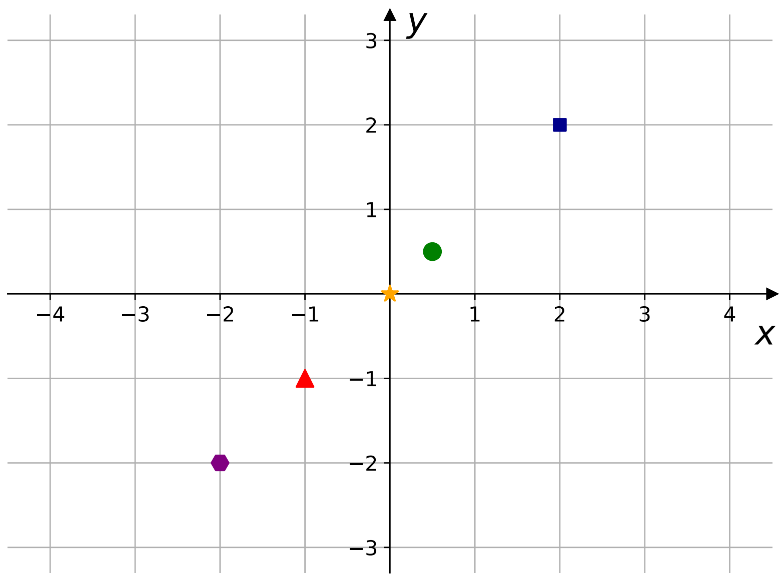
Lösung

d)

Lösung Ende

8. Wie sieht der Datensatz aus den obigen fünf Punkten aus, falls man sie auf $\mathbf{w}$ und dann mit $\mathbf{w}$ zurück in den $\mathbb{R}^2$ projiziert (mathematisch entspricht dies dem Ausdruck $\mathbf{w}\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i$)? Zeichnen Sie die mithilfe von $\mathbf{w}$ rekonstruierten Punkte in das Koordinatensystem ein!

Lösung



Lösung Ende

Aufgabe 2: Zahlen

1. Wie viele Stellen benötigt man maximal, um die Summe zweier ganzen Zahlen mit n Stellen korrekt dazustellen?

   Lösung

   $n+1$

   Lösung Ende

2. Wie viele Stellen benötigt man maximal, um das Produkt zweier ganzen Zahlen mit n Stellen verlustfrei dazustellen?

   Lösung

   $2n$

   Lösung Ende

3. Gegeben der Definition einer ganzen Zahl $[a, b] \in \mathbb{Z}$ als Paar von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, wie in der Vorlesung eingeführt. Geben Sie zwei weitere Elemente der ganzen Zahlen als Paar von natürlichen Zahlen an, die in der selben Äquivalenzklasse liegen wie $[8, 9]$.

   Lösung

   $[0, 1]$, $[6, 7]$

   Lösung Ende

4. Gegeben der Definition einer rationalen Zahl $[a, b] \in \mathbb{Q}$ als Paar von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, wie in der Vorlesung eingeführt. Geben Sie zwei weitere Elemente der rationalen Zahlen als Paar von natürlichen Zahlen an, die in der selben Äquivalenzklasse liegen wie $[6, 9]$.

   Lösung

   $[2, 3]$, $[12, 18]$

   Lösung Ende

5. Eine abelsche Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G sowie einer (abgeschlossenen) Verknüpfung $*\colon\ G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$, die folgende Gesetze erfüllt:

   (1) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

   (2) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in G$ gilt: $a * b = b * a$.

   (3) Neutrales Element: Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a * e = a$.

   (4) Inverses Element: Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = e$.

   Welche der folgenden Tupel sind eine abelsche Gruppe? Falls nein, welches Gesetz wird gebrochen? Falls ja, welches ist das neutrale Element?

   a) $(\mathbb{R}^{3\times 3}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Matrixmultiplikation ist Nein: (2),(4)

   b) $(\mathbb{N}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf $\mathbb{N}$ ist Nein: (4)

   c) $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition auf $\mathbb{Z}$ ist Ja, 0 ist das neutrale Element

   d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ ist Nein: (4)

   e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ ist Nein: (4) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ wäre aber eine mit neutralem Element 1

f) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist Ja, (1)

6. Ein Tupel $(K, +, n, \cdot, e)$ mit einer Grundmenge K ist ein Körper, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n.

   (2) $(K \setminus \{n\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e.

   (3) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$.

   Ein Beispiel für einen Körper ist $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$.

   Wir wollen nun einen Körper, der es erlaubt durch 0 zu teilen. Mit anderen Worten ein Tupel $(K, +, n, \cdot, e)$ mit einer Grundmenge K, sodass $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n und $(K, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e ist. Zusätzlich soll weiterhin das Distributivgesetz gelten. Überprüfen Sie ob eins der folgenden Tupel diese Bedinnung erfüllt. Wenn nein, welche Gesetze werden gebrochen?

   a) $(\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

      i. $\infty + a = a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,

      ii. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{\infty\}$,

      iii. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$.

   b) $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty, -\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

      i. $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$,

      ii. $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$,

      iii. $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0$,

      iv. $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$,

      v. $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{<0} \cup \{-\infty\}$,

      vi. $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$,

      vii. $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = +\infty$ für alle $a \in \mathbb{Q}_{<0} \cup \{-\infty\}$,

      viii. $(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 1$,

      ix. $(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 1$.

   c) $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, +, 0, \cdot, 1)$ wobei $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikaton darstellt, mit folgenden Erweiterungen:

      i. $\infty + a = a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

      ii. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$,

      iii. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$.

   Lösung

   Die neun Gesetze als Referenz

   (1) $(a + b) + c = a + (b + c)$

   (2) $a + 0 = a$

   (3) $a + (-a) = 0$

   (4) $a + b = b + a$

(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(6) $a \cdot 1 = a$

(7) $a \cdot a^{-1} = 1$

(8) $a \cdot b = b \cdot a$

(9) $(a + b) \cdot x = a \cdot c + b \cdot c$

a) Nein,
   i. (3) keine Inversen für $\mathbb{Q}_{>0}$,
   ii. (5) $(\infty \cdot \infty) \cdot 0 \neq \infty \cdot (\infty \cdot 0)$,
   iii. (9) $(0 + 0) \cdot \infty \neq 0 \cdot \infty + 0 \cdot \infty$

b) Nein,
   i. (1) $((+\infty) + (-\infty)) + 1 \neq (+\infty) + ((-\infty) + 1)$,
   ii. (5) $((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot 0 \neq (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot 0)$,
   iii. (9) $(0 + 0) \cdot (+\infty) \neq 0 \cdot (+\infty) + 0 \cdot (+\infty)$

c) Nein,
   i. (3) ∞ besitzt kein inverses Element bzgl. $+$,
   ii. (5) $(\infty \cdot \infty) \cdot 0 \neq \infty \cdot (\infty \cdot 0)$,
   iii. (9) $(0 + 0) \cdot \infty \neq 0 \cdot \infty + 0 \cdot \infty$

Es gibt keinen solchen Körper.

Lösung Ende