

4. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 21.11.2022.

Aufgabe 1

Sei $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots$ eine unendliche Folge von aussagenlogischen Formelmengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ genau dann erfüllbar ist, wenn alle Φ_n erfüllbar sind.

Aufgabe 2

Tief unter dem SAT-Berg leben die Logikzwerge. Schon seit dem Anfang der Zeit graben sie nach Wahrheiten und durchdringen so tiefer und tiefer die Materie.

Vor vielen Generationen gab schließlich der große Logikzwergekönig Verum den Auftrag immer weiter nach unten zu graben. Dabei sollte nie im Kreis gegraben werden und auch nie unendlich oft von der gleichen Stelle aus.

Überzeugt von der Wahrheit und Weisheit dieser Aussagen, verfolgen die Logikzwerge nun schon seit Jahrtausenden diese Maxime. Doch vor Kurzem stellte ein Logikzwergeforscher etwas schreckliches fest: Die Logikzwerge haben zu tief gegraben! Und nun hat sich unter den Logikzwergen ein Weg in die Unendlichkeit eröffnet.

Zeigen Sie die folgende, als **Lemma von König** bekannte Aussage, mit Hilfe des Kompaktheitssatzes: Jeder unendliche Baum mit endlichem Knotengrad enthält einen unendlich langen Pfad.

Anmerkung: Es gibt unendliche Bäume mit unendlicher Höhe, welche keinen unendlichen Pfad enthalten.