

6. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 27.11.2023–01.12.2023)

Aufgabe 1. Mengendiagramm der Entscheidbarkeit

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm, das die folgenden Sprachklassen enthält:

- (a) 2^{Σ^*} (für eine Menge A ist $2^A := \{A' \mid A' \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A)
- (b) entscheidbare Sprachen
- (c) co-entscheidbare Sprachen (eine Sprache $L \in \Sigma^*$ ist genau dann co-entscheidbar, wenn $\Sigma^* \setminus L$ entscheidbar ist)
- (d) semi-entscheidbare Sprachen
- (e) co-semi-entscheidbare Sprachen (eine Sprache $L \in \Sigma^*$ ist genau dann co-semi-entscheidbar, wenn $\Sigma^* \setminus L$ semi-entscheidbar ist)
- (f) unentscheidbare Sprachen
- (g) rekursiv aufzählbare Sprachen

Aufgabe 2. Komplement des speziellen Halteproblems

Im Folgenden sei $\overline{K} := \{0, 1\}^* \setminus K$ das Komplement des speziellen Halteproblems $K := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$. Sie können im Folgenden verwenden, dass K aufzählbar ist.

- (a) Ist \overline{K} entscheidbar?
- (b) Ist \overline{K} semi-entscheidbar?
- (c) Ist \overline{K} co-semi-entscheidbar?

Aufgabe 3. Abgeschlossenheit semi-entscheidbarer Sprachen

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind. Zeigen Sie, dass

- (a) $A \cup B$ semi-entscheidbar ist,
- (b) $A \cap B$ semi-entscheidbar ist,
- (c) $\overline{A} := \Sigma^* \setminus A$ nicht semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 4. Streng monoton rekursiv aufzählbare Sprachen

Sei Σ ein endliches geordnetes Alphabet und $<_{\text{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf Σ^* . Wir definieren die Ordnung \prec auf Σ^* so, dass für zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gilt:

$$a \prec b \iff |a| < |b| \vee (|a| = |b| \wedge a <_{\text{lex}} b).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ ist *streng monoton*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \prec f(y)$. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist *streng monoton rekursiv aufzählbar*, falls A von einer berechenbaren streng monotonen Funktion aufgezählt wird.

- (a) Sei $A \subseteq \Sigma^*$ streng monoton rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass A entscheidbar ist.
- (b) Sei $A \subseteq \Sigma^*$ unendlich groß und entscheidbar. Zeigen Sie, dass A streng monoton rekursiv aufzählbar ist.