8. Vorlesung: Poisson-Approximation und Erwartungswert

Nikolas Tapia

13. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

Erinnerung: Faltungsformel

Aussage 8.1

Seien X, Y zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen. Dann hat die Zufallsvariable $X + Y$ die Verteilung

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=k-x)$$

für alle $k \in (X+Y)(\Omega) = \{m+n : m \in X(\Omega), n \in Y(\Omega)\}$.

Summe von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen

Aussage 8.2

Seien X, Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda, \mu > 0$. Dann ist die Zufallsvariable $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$.

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(Y=k-m) \qquad (X(\Omega)=\mathbb{N}_0)$$

Faltungsformel

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \frac{\mu^{k-m} e^{-\mu}}{(k-m)!}$$

$\mathbb{P}(Y=k-m)=0$
$m>k$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \lambda^m \mu^{m-k} \frac{k!}{m!(k-m)!}}_{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{1}{k!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

Beweis

Beispiel

Seien $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,
$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$.
Welche bedingte Verteilung hat X, gegeben $X + Y = n$?

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overset{\sim\mu}{X}=k)\,\mathbb{P}(\overset{\sim\lambda}{Y}=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)_{\sim\mu+\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{e^{-(\lambda+\mu)}}{\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\cancel{e^{-\mu}}\frac{\mu^{(n-k)}}{(n-k)!}}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,\frac{\lambda^k\mu^{(n-k)}}{(\lambda+\mu)^{n=n-k+k}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \sim \text{Binom}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} = 1$$

Poisson-Approximation

Theorem 1 (Poisson-Grenzwertsatz)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahle aus $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in (0,\infty)$.
Sei $X_n \sim \mathrm{Binom}(n, p_n)$ eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen, und sei $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Poisson-Approximation

Aussage 8.3

Sei $\lambda > 0$. Sei X binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = \frac{\lambda}{n}$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \mathbb{P}(X = k) \approx \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{\sim \text{Poisson}(\lambda)}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \overset{n}{[0,1]}$$

d.h. X ist approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = np$. Die Approximation wird besser, je größer n bzw. kleiner p ist.

Beispiel (Poisson-Grenzwertsatz)

Ein Geschäft hergestellt eine große Anzahl von gleichartigen Produkten, aus denen n zufällig getestet werden. Mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ ist ein Produkt defekt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer Stichprobe von 10 Produkten höchstens 1 defekt ist?

$X = \#$ Fehler $\sim$ Binomial$(10, 0.1)$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1)$$
$$= \binom{10}{0}(.1)^0(.9)^{10} + \binom{10}{1}(.1)^1(.9)^9$$
$$= 0{,}7361.$$

$$\lambda = 10 \times 0.1 = 1$$
$$\approx e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!} = 0{,}7358.$$

Erwartungswert

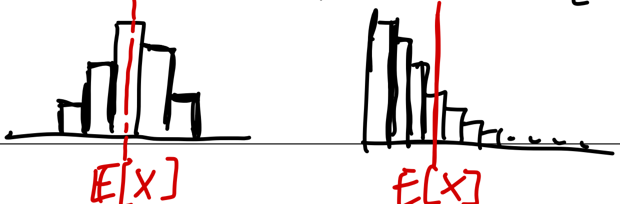
Definition 8.1

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Der **Erwartungswert** von X ist definiert als

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x),$$

sofern $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x) < \infty$ ist. Wenn Letzteres erfüllt ist, so sagen wir, dass der Erwartungswert von X existiert.

__Bem:__ Falls $|X(\Omega)| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X]$ existiert.



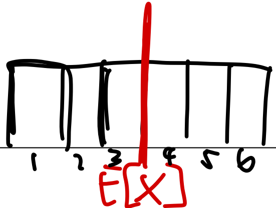
Beispiel (Würfeln)

Bei Würfeln. X = Augenzahl, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{6}$, $k\in\{1,\dots,6\}$

Wert   W'keit

$$\mathbb{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$



Beispiel

Sei X eine Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ und Verteilung gegeben durch folgende Tabelle:

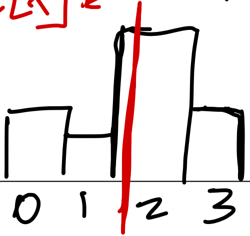
x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	0,2	0,1	0,5	0,2

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aus der Def:

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2$$

$$\mathbb{E}[X] = 1{,}7.$$



Eigenschaften des Erwartungswertes

$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty.$

Aussage 8.4

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit existierten Erwartungswert. Dann gilt:

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

   } linear?
3. Falls $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
4. Falls X konstant ist, d.h. $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega$, dann ist $\mathbb{E}[X] = c$.
5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

hängt von $P_{X,Y}$ ab! nicht von $P_{f(X,Y)}$

6. Falls X und Y unabhängig sind, so gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Beweis

1. $$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{z \in (X+Y)(\Omega)} z\, \mathbb{P}(X+Y=z), \quad (X+Y)(\Omega) = \{x+y : x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$$

$$= \sum_{z = x+y : x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} (x+y)\, \mathbb{P}(X=x, X+Y=z)$$

$$= \sum_{x,y} (x+y)\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} x\, \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{x,y} y\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$\sum_{y} \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)$$

$$= \sum_{x} x\, \mathbb{P}(X=x) + \sum_{y} y\, \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

$ax \Leftarrow X = x$

Beweis

2. $$\mathbb{E}[aX] = \sum_{x \in X(\Omega)} ax\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$= a \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$= a\,\mathbb{E}(X).$$

4. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$, $X(\Omega) = \{c\} \subseteq \mathbb{R}$.

$$= c\,\underbrace{\mathbb{P}(X=c)}_{=1}$$

$$= c$$

Beweis

$$5. \to f(x,y) = xy$$

$$6.\quad \mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

X,Y unabhängig

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

$= \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$

$$= \sum_{x,y} xy\, \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} \big(x\,\mathbb{P}(X=x)\big)\cdot\big(y\,\mathbb{P}(Y=y)\big)$$

$$= \Big(\sum_{x} x\,\mathbb{P}(X=x)\Big)\cdot\Big(\sum_{y} y\,\mathbb{P}(Y=y)\Big) = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Beweis

Aussage 8.5

Sei $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = p$.

Aussage 8.6

Sei $X \sim \text{Binom}(n, p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = np$.

Aussage 8.7

Sei $X \sim \text{Geom}(p)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Aussage 8.8

Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Beweis

1. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p.$$

2. $X \sim \text{Binomial}(n,p)$, $X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$n! \to n\cdot(n-1)!$

Beweis

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np\big(\underbrace{p+(1-p)}_{=1}\big)^{n-1} = np$$

Beweis

4. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\, \underline{e^{-\lambda} e^{\lambda}} = \lambda.$$