$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}}, \cdot^{\mathcal{R}}, \leq^{\mathcal{R}}, \dots)$

$\varphi := \exists x \ \forall z \ \neg \ z \cdot z = x$

$\varphi'(x) := \forall z \ \neg \ z \cdot z = \underline{x}$

$\varphi'(\mathcal{R}) = \{ a \in \mathbb{R} : (\mathcal{R}, [x/a]) \models \varphi' \}$

10.2 Logische Äquivalenz

Subst: $x \mapsto x \cdot x + y - z$

$$\varphi \dots \quad \underbrace{(\qquad\qquad)}_{\substack{\varphi \\ \equiv \\ \varphi'}}$$

Erinnerung: Äquivalenz zwischen Formeln

$(\mathcal{A}, \beta)$

Definition. Sei σ eine Signatur.

Zwei σ-Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ passend zu φ und ψ:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

φ erfüllbar, wenn es ein $\mathcal{I}$ gibt, s.d. $\mathcal{I} \models \varphi$

$\varphi(x)$ erfüllbar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

$\beta(x) \mapsto$

Erinnerung: Äquivalenz zwischen Formeln

Definition. Sei σ eine Signatur.

Zwei σ-Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ sind äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ passend zu φ und ψ:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi.$$

Bemerkung. Nach Definition gilt für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$

$$\varphi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \big((\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig} \big)$$

Erinnerung: Nützliche Äquivalenzen der Aussagenlogik

Theorem. Für alle $\psi, \varphi, \vartheta \in \mathrm{AL}$:

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (Elimination doppelter Negation)
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ (Elim. der Implikation)
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (Elim. der Biimplikation)
4. $\begin{array}{lcl} \neg(\psi \wedge \varphi) & \equiv & \neg\psi \vee \neg\varphi \\ \neg(\psi \vee \varphi) & \equiv & \neg\psi \wedge \neg\varphi \end{array}$ (de Morgansche Regeln)
5. $\begin{array}{lcl} \psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) & \equiv & (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta) \\ \psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) & \equiv & (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta) \end{array}$ (Distributivität)
6. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \quad \equiv \quad \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \quad \equiv \quad \psi$ (Absorbtionsgesetz)
7. $\begin{array}{lcl} \psi \wedge \varphi & \equiv & \varphi \wedge \psi \\ \psi \vee \varphi & \equiv & \varphi \vee \psi \end{array}$ (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)
8. $\begin{array}{lcl} \psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) & \equiv & (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta \\ \psi \vee (\varphi \vee \vartheta) & \equiv & (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta \end{array}$ (Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)

Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
2. $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
4. $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$
   $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$
5. $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$
   $\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$
6. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$
7. $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$
   $\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$
8. $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$
   $\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$

Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi, \qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

$\cancel{x} + z = z \vee \exists x\ x \cdot x = y$

$\cancel{\equiv \exists x(\cancel{x} + z = z \vee x \cdot x = y)}$

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
4. $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$
   $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$
5. $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$
   $\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$
6. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$
7. $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$
   $\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$
8. $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$
   $\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$

PNF

$\exists x \forall y \exists z \forall z' \ldots (R(x,y) \ldots)$

Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\quad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

3. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi[x/y], \qquad \forall x\varphi \equiv \forall y\varphi[x/y]$$

1. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
4. $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$
   $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$
5. $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$
   $\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$
6. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$
7. $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$
   $\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$
8. $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$
   $\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Für jedes $a \in A$ gilt also $\underbrace{\mathcal{I}[x/a]} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$.

   $\mathcal{I}$ in der x mit a belegt wird.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x\neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Für jedes $a \in A$ gilt also $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$.

   Also folgt $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Für jedes $a \in A$ gilt also $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$.

   Also folgt $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$.

2. Wenn $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$, dann gilt $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$, und somit $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, für alle $a \in A$.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Für jedes $a \in A$ gilt also $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$.

   Also folgt $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$.

2. Wenn $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$, dann gilt $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$, und somit $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, für alle $a \in A$.

   Also kann es kein $a \in A$ geben mit $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

Semantischer Beweis von Teil 1

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$

Beweis. Wir zeigen hier $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$. Die andere Aussage folgt analog.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine passende Interpretation.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x \neg\varphi$

1. Wenn $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$, dann gibt es kein $a \in A$ so dass $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Für jedes $a \in A$ gilt also $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$.

   Also folgt $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$.

2. Wenn $\mathcal{I} \models \forall x\ \neg\varphi$, dann gilt $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi$, und somit $\mathcal{I}[x/a] \not\models \varphi$, für alle $a \in A$.

   Also kann es kein $a \in A$ geben mit $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi$.

   Es folgt $\mathcal{I} \models \neg\exists x\ \varphi$.

Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\quad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

3. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi[x/y], \qquad \forall x\varphi \equiv \forall y\varphi[x/y]$$

Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{array}{rclrcl} \varphi \vee \exists x\ \psi & \equiv & \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi & \equiv & \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi & \equiv & \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi & \equiv & \forall x(\varphi \vee \psi) \end{array}$$

3. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi[x/y], \qquad \forall x\varphi \equiv \forall y\varphi[x/y]$$

Sequenzenkalkül. Die anderen Äquivalenzen werden wir später mit Hilfe des Sequenzenkalküls beweisen.

10.3 Normalformen

Normalformen

Ähnlich wie bei der Aussagenlogik werden wir als nächstes einige syntaktische Normalformen für die Prädikatenlogik einführen, die uns das Arbeiten mit Formeln in bestimmten Situationen erleichtern.

Konkret werden wir folgende Normalformen vorstellen:

- Reduzierte Formeln
- Negationsnormalform
- Pränexnormalform

Reduzierte Formeln

Wir haben bereits gesehen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

1. $(\psi \wedge \varphi) \quad \equiv \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
2. $(\psi \leftrightarrow \varphi) \quad \equiv \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
3. $(\psi \rightarrow \varphi) \quad \equiv \quad (\neg\psi \vee \varphi)$
4. $\forall x\psi \quad \equiv \neg\exists x\neg\psi$

Mit Hilfe dieser Äquivalenzen können wir also jede Formel der Prädikatenlogik in eine äquivalente Formel umwandeln, in denen die Symbole $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$ sowie der $\forall$-Quantor nicht vorkommen.

Wir nennen solche Formeln reduzierte Formeln.

Die Negationsnormalform

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform* (NNF), wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Die Negationsnormalform

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform* (NNF), wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Beispiele.

- $\exists x \big(\neg P(x, y) \vee Q(y) \big)$ ist in NNF.
- $\exists x \big(P(x, y) \rightarrow Q(y) \big)$ ist nicht in NNF.
- $\exists x \big(\neg R(x, y) \wedge (\forall z P(x) \wedge \neg \forall z Q(x)) \big)$ ist nicht in NNF.

Die Negationsnormalform

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform* (NNF), wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Beispiele.

- $\exists x \big(\neg P(x, y) \vee Q(y)\big)$ ist in NNF.
- $\exists x \big(P(x, y) \rightarrow Q(y)\big)$ ist nicht in NNF.
- $\exists x \big(\neg R(x, y) \wedge (\forall z P(x) \wedge \neg \forall z Q(x))\big)$ ist nicht in NNF.

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis.

Beweis

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis.

- Wissen bereits: Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ können eliminiert werden.

Beweis

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie die Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor atomaren Formeln vorkommt.

$\neg\neg P(t)$

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis.

- Wissen bereits: Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ können eliminiert werden.
- Durch wiederholte Anwendung der De Morganschen Regeln

Siehe Aussagenlogik.

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \text{ und } \neg(\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$$

sowie der Äquivalenzen

$$\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi \text{ und } \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi \text{ und } \neg\neg\psi \equiv \psi$$

kann jede Formel in eine äquivalente Formel in NNF umgewandelt werden.

Beweis

Definition. Eine prädikatenlogische Formel ist in *Negationsnormalfo* Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält und Negation nur direkt vor Formeln vorkommt.

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik ist logisch äqu einer Formel in Negationsnormalform.

Beweis.

- Wissen bereits: Verknüpfungen $\rightarrow, \leftrightarrow$ können eliminier
- Durch wiederholte Anwendung der De Morganschen Regeln

$$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \text{ und } \neg(\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$$

sowie der Äquivalenzen

$$\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi \text{ und } \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi \text{ und } \neg\neg\psi \equiv \psi$$

kann jede Formel in eine äquivalente Formel in NNF umgewandelt werden.

Beispiel.

$$\neg\forall x(\exists y P(x,y) \wedge \exists z(Q(z) \wedge Q(x)))$$
$$\equiv \exists x\neg(\exists y P(x,y) \wedge \exists z(Q(z) \wedge Q(x)))$$
$$\equiv \exists x(\neg\exists y P(x,y) \vee \neg\exists z(Q(z) \wedge Q(x)))$$
$$\equiv \exists x(\forall y\neg P(x,y) \vee \forall z\neg(Q(z) \wedge Q(x)))$$
$$\equiv \exists x(\forall y\neg P(x,y) \vee \forall z(\neg Q(z) \vee \neg Q(x)))$$

Siehe Aussagenlogik.

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

$$\exists x \underbrace{P(x)} \wedge \exists y\, Q(y)$$

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$$

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition. Eine Formel φ ist in *Pränexnormalform (PNF)*, wenn sie

1. bereinigt ist und
2. die Form

$$\overbrace{Q_1 x_1 \dots Q_l x_l}\psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \dots, Q_l$ heißt der (Quantoren-) Präfix von ψ.

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition. Eine Formel φ ist in *Pränexnormalform (PNF)*, wenn sie

1. bereinigt ist und
2. die Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \ldots, Q_l$ heißt der (Quantoren-) Präfix von ψ.

Beispiel. $\exists u \forall x \exists y \exists z \big(R(u,u) \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,y) \wedge R(y,z) \big)$

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition. Eine Formel φ ist in *Pränexnormalform (PNF)*, wenn sie

1. bereinigt ist und
2. die Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \dots, Q_l$ heißt der (Quantoren-) Präfix von ψ.

Beispiel. $\exists u \forall x \exists y \exists z \big(R(u,u) \land R(x,y) \land \neg R(y,y) \land R(y,z)\big)$

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik kann effektiv in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform übersetzt werden.

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition. Eine Formel φ ist in *Pränexnormalform (PNF)*, wenn sie

1. bereinigt ist und
2. die Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \dots, Q_l$ heißt der (Quantoren-) Präfix von ψ.

Beispiel. $\exists u \forall x \exists y \exists z \big(R(u, u) \land R(x, y) \land \neg R(y, y) \land R(y, z)\big)$

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik kann effektiv in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform übersetzt werden.

Lemma. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt:

$$\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi[x/y]$$
$$\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi[x/y]$$

Die Pränexnormalform

Definition. Eine Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommt und
- keine Variable zweimal quantifiziert wird.

Definition. Eine Formel φ ist in *Pränexnormalform (PNF)*, wenn sie

1. bereinigt ist und
2. die Form

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \psi(x_1, \dots, x_l)$$

hat, wobei ψ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ist.

$Q_1, \dots, Q_l$ heißt der (Quantoren-) Präfix von ψ.

Beispiel. $\exists u \forall x \exists y \exists z \big(R(u,u) \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,y) \wedge R(y,z)\big)$

Theorem. Jede Formel der Prädikatenlogik kann effektiv in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform übersetzt werden.

Lemma. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt:

$$\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi[x/y]$$
$$\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi[x/y]$$

Lemma.
Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$, dann

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \exists x\, \psi) &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi)\\
(\varphi \vee \forall x\, \psi) &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi)\\
(\varphi \wedge \exists x\, \psi) &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)\\
(\varphi \wedge \forall x\, \psi) &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)
\end{aligned}$$

Logik im Wintersemester 2022/2023

Woche 11: *Definierbarkeit in der Prädikatenlogik: I*

Nov.	17	18	19	20	21	22	23	*Einführung*
	24	25	26	27	28	29	30	*Aussagenlogik*
	31	1	2	3	4	5	6	*Normalformen*
	7	8	9	10	11	12	13	*Resolution*
Dez.	14	15	16	17	18	19	20	*Kompaktheit*
	21	22	23	24	25	26	27	*DPLL, Satz von Cook*
								rukturen und FO
	5	6	7	8	9	10	11	*Prädikatenlogik*
	12	13	14	15	16	17	18	*Komplexität von FO*
Jan.	19	20	21	22	23	24	25	*Weihnachten*
	26	27	28	29	30	31	1	*Neujahr*
	2	3	4	5	6	7	8	*Normalformen*
	9	10	11	12	13	14	15	*Definierbarkeit*
	16	17	18	19	20	21	22	*EF-Spiele*
Feb.	23	24	25	26	27	28	29	*EF-Spiele*
	30	31	1	2	3	4	5	*Sequenzenkalkül AL*
	6	7	8	9	10	11	12	*Sequenzenkalkül FO*
	13	14	15	16	17	18	19	*Ausblick*

11.1 Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Beispiel. Betrachten wir eine Datenbank $\mathcal{D}$ mit Fluginformationen.

Tabelle:

`Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)`

Frage. Ist es möglich (evtl. mit Zwischenstopps) von s nach t zu fliegen?

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Beispiel. Betrachten wir eine Datenbank $\mathcal{D}$ mit Fluginformationen.

Tabelle:

`Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)`

Frage. Ist es möglich (evtl. mit Zwischenstopps) von s nach t zu fliegen?

$E(x,y)$ Flug von a nach b.

$(a,b) \in E$

Definierbarkeit. Ist diese Anfrage in FO definierbar?

D.h. gibt es $\varphi(x,y) \in \text{FO}$, so dass für $s,t \in D$ gilt:

$\varphi_0(x,y) = E(x,y)$

Es ist möglich, von s nach t zu fliegen

gdw.

$\mathcal{D} \models \varphi[s,t]$?

$\varphi_1(x,y) = E(x,y) \lor \exists z(E(x,z) \land E(z,y))$

φ_i i Zwischenstops

$\bigvee_{i \geq 0} \varphi_i$

Wiederholung: Modellklassen und die Relation $\varphi(\mathcal{A})$

Formeln $\varphi(x)$. Eine Formel $\varphi(x)$ sagt etwas über ein Element innerhalb einer Struktur aus.

Sätze ψ. Ein Satz ψ sagt etwas über die Struktur insgesamt aus.

Oft interessieren wir uns für die „Menge" aller Objekte, die eine Formel bzw. einen Satz erfüllen.

Formeln. Bei Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ ist diese „Menge" die *durch φ in einer Struktur $\mathcal{A}$ definierte Relation*

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : (\mathcal{A}, [x_1/a_1, \ldots, x_k/a_k]) \models \varphi\}.$$

Umgekehrt: $R \subseteq A^k$ ist FO-*definierbar in $\mathcal{A}$*, wenn es eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in$ FO gibt, so dass $\varphi(\mathcal{A}) = R$.

Sätze. Bei einem Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist diese „Menge" die *Modellklasse*

$$\text{Mod}(\varphi) := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

$\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \cancel{\beta})$

Modellklassen und Axiomensysteme

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.

Modellklassen und Axiomensysteme

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

Modellklassen und Axiomensysteme

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, oder *endlich axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\varphi)$ für einen einen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

   $= \text{Mod}(\{\varphi\})$

   Äquivalent. $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine endlich Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

$\varphi = \bigwedge_{\varphi' \in \Phi} \varphi'$

$\mathfrak{I} \models \Phi$ gdw. $\mathfrak{I} \models \varphi$

Modellklassen und Axiomensysteme

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, oder *endlich axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\varphi)$ für einen einen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

   Äquivalent. $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine endlich Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

Bemerkung.

Eine Klasse von Strukturen ist *endlich* FO-*axiomatisierbar* gdw. sie durch *einen einzigen* FO-*Satz* definiert wird.

Notation. Wir sagen meistens kurz *definierbar* statt FO-definierbar.

Beispiel: Strikte Lineare Ordnungen

Lineare Ordnungen. Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur der Ordnungen und sei

$$\varphi_{ord} := \begin{array}{l} \forall x \neg x < x \ \wedge \\ \forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z \big) \ \wedge \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{array}$$

Dann ist $\text{Mod}(\varphi_{ord})$ die Klasse aller strikten linearen Ordnungen.

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und
$\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Beispiel: Strikte Lineare Ordnungen

Lineare Ordnungen. Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur der Ordnungen und sei

$$\varphi_{ord} := \begin{array}{l} \forall x \neg x < x \wedge \\ \forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big) \wedge \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{array}$$

Dann ist $\mathrm{Mod}(\varphi_{ord})$ die Klasse aller strikten linearen Ordnungen.

Beobachtung.

1. Es gilt $\varphi_{ord} \models \forall x \forall y \, ((x < y \wedge y < x) \rightarrow x = y)$

   (Jede strikte lineare Ordnung ist antisymmetrisch.)

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und
$\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiel: Strikte Lineare Ordnungen

Lineare Ordnungen. Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur der Ordnungen und sei

$$\varphi_{ord} := \begin{array}{l} \forall x \neg x < x \ \wedge \\ \forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z \big) \ \wedge \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{array}$$

Dann ist $\mathrm{Mod}(\varphi_{ord})$ die Klasse aller strikten linearen Ordnungen.

Beobachtung.

1. Es gilt $\varphi_{ord} \models \forall x \forall y \, ((x < y \wedge y < x) \rightarrow x = y)$

   (Jede strikte lineare Ordnung ist antisymmetrisch.)

2. Aber $\varphi_{ord} \not\models \exists x \, \forall y \, (x = y \vee x < y)$

   (Nicht jede lineare Ordnung hat ein kleinstes Element.)

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und
$\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiel: Strikte Lineare Ordnungen

Lineare Ordnungen. Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur der Ordnungen und sei

$$\varphi_{ord} := \begin{array}{l} \forall x \neg x < x \ \wedge \\ \forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big) \ \wedge \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{array}$$

Dann ist $\mathrm{Mod}(\varphi_{ord})$ die Klasse aller strikten linearen Ordnungen.

Beobachtung.

1. Es gilt $\varphi_{ord} \models \forall x \forall y \, ((x < y \wedge y < x) \to x = y)$

   (Jede strikte lineare Ordnung ist antisymmetrisch.)

2. Aber $\varphi_{ord} \not\models \exists x \, \forall y \, (x = y \vee x < y)$

   (Nicht jede lineare Ordnung hat ein kleinstes Element.)

Bemerkung. Gäbe es ein (automatisches) Beweisverfahren für $\models$, könnten Aussagen der Ordnungstheorie automatisch bewiesen werden

$\rightsquigarrow$ *Sequenzenkalkül* und *Theorembeweiser*

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und
$\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiel: lineare Ordnungen

Beobachtung.

1. Die Klasse der linearen Ordnungen ist durch φ_{ord} definierbar.

$$\text{Mod}(\varphi_{ord}) = \{ \text{ Klasse der linearen Ordnungen}\}.$$

Beispiel: lineare Ordnungen

Beobachtung.

1. Die Klasse der linearen Ordnungen ist durch φ_{ord} definierbar.

   $$\text{Mod}(\varphi_{ord}) = \{\text{ Klasse der linearen Ordnungen}\}.$$

2. Die Klasse der *unendlichen linearen Ordnungen* ist nicht FO-definierbar (wird später bewiesen).

   Sie ist aber FO-axiomatisierbar, z.B. durch

   $$\Phi_{\infty-ord} := \{\varphi_{ord}\} \cup \{\varphi_i : i \geq 1\} \qquad \text{mit} \qquad \varphi_i := \exists x_1 \dots \exists x_i \bigwedge_{1 \leq j < j' \leq i} x_j < x_{j'}.$$

Beispiel: lineare Ordnungen

Beobachtung.

1. Die Klasse der linearen Ordnungen ist durch φ_{ord} definierbar.

$$\mathrm{Mod}(\varphi_{ord}) = \{\text{ Klasse der linearen Ordnungen}\}.$$

2. Die Klasse der *unendlichen linearen Ordnungen* ist nicht FO-definierbar (wird später bewiesen).

   Sie ist aber FO-axiomatisierbar, z.B. durch

$$\Phi_{\infty-ord} := \{\varphi_{ord}\} \cup \{\varphi_i : i \geq 1\} \qquad \text{mit} \qquad \varphi_i := \exists x_1 \dots \exists x_i \bigwedge_{1 \leq j < j' \leq i} x_j < x_{j'}.$$

Frage. Kann man die Klasse der endlichen lineare Ordnungen definieren oder axiomatisieren?

Beispiel: lineare Ordnungen

Beobachtung.

1. Die Klasse der linearen Ordnungen ist durch φ_{ord} definierbar.

$$\mathrm{Mod}(\varphi_{ord}) = \{\text{ Klasse der linearen Ordnungen}\}.$$

2. Die Klasse der *unendlichen linearen Ordnungen* ist nicht FO-definierbar (wird später bewiesen).

   Sie ist aber FO-axiomatisierbar, z.B. durch

$$\Phi_{\infty-ord} := \{\varphi_{ord}\} \cup \{\varphi_i : i \geq 1\} \qquad \text{mit} \qquad \varphi_i := \exists x_1 \ldots \exists x_i \bigwedge_{1 \leq j < j' \leq i} x_j < x_{j'}.$$

Frage. Kann man die Klasse der endlichen lineare Ordnungen definieren oder axiomatisieren?

Antwort. Nein, die Klasse der *endlichen linearen Ordnungen* ist nicht einmal axiomatisierbar. (Beweis später)

Beispiel: Erreichbarkeit

Beispiel. Betrachte eine Datenbank $\mathcal{D}$ mit Fluginformationen.

```
Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)
```

Frage. Ist es möglich (evtl. mit Umsteigen) von s nach t zu fliegen?

Vereinfachung. Wir vereinfachen das Beispiel ein wenig.

```
Flug(Start, Ziel)
```

Beispiel: Erreichbarkeit

Beispiel. Betrachte eine Datenbank $\mathcal{D}$ mit Fluginformationen.

```
Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)
```

Frage. Ist es möglich (evtl. mit Umsteigen) von s nach t zu fliegen?

Vereinfachung. Wir vereinfachen das Beispiel ein wenig.

```
Flug(Start, Ziel)
```

Formalisierung als Modellklasse.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Beispiel: Erreichbarkeit

Beispiel. Betrachte eine Datenbank $\mathcal{D}$ mit Fluginformationen.

```
Flug(Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel)
```

Frage. Ist es möglich (evtl. mit Umsteigen) von s nach t zu fliegen?

Vereinfachung. Wir vereinfachen das Beispiel ein wenig.

```
Flug(Start, Ziel)
```

Freie Variablen werden durch Konstantensymbole modelliert.

Formalisierung als Modellklasse.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s,t)$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

REACH $:= \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma$-Struktur, es gibt einen Pfad von $s^{\mathcal{A}}$ nach $t^{\mathcal{A}}\ \}$.

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s,t)$
2. Ein Stopp : $\varphi_2 := \exists x_1 \Big(E(s,x_1) \wedge E(x_1,t) \Big)$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s,t)$
2. Ein Stopp : $\varphi_2 := \exists x_1 \Big(E(s,x_1) \wedge E(x_1,t) \Big)$
3. Zwei Stopps : $\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \Big(E(s,x_1) \wedge E(x_1,x_2) \wedge E(x_2,t) \Big)$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s,t)$
2. Ein Stopp : $\varphi_2 := \exists x_1 \Big(E(s,x_1) \wedge E(x_1,t) \Big)$
3. Zwei Stopps : $\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \Big(E(s,x_1) \wedge E(x_1,x_2) \wedge E(x_2,t) \Big)$

Beobachtung. Für jede feste Zahl von Stopps existiert eine Formel.

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Unbeschränkt viele Zwischenstopps.

Aber gibt es eine Formel φ die genau dann in einer σ-Struktur gilt, wenn es eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen, egal wieviele Stopps eingelegt werden müssen?

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Unbeschränkt viele Zwischenstopps.

Aber gibt es eine Formel φ die genau dann in einer σ-Struktur gilt, wenn es eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen, egal wieviele Stopps eingelegt werden müssen?

Beweis? Angenommen, wir wollen zeigen, dass es keine solche gibt?

Wie kann man eine solche Aussage zeigen?

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Unbeschränkt viele Zwischenstopps.

Aber gibt es eine Formel φ die genau dann in einer σ-Struktur gilt, wenn es eine Möglichkeit gibt, von s nach t zu fliegen, egal wieviele Stopps eingelegt werden müssen?

Beweis? Angenommen, wir wollen zeigen, dass es keine solche gibt?

Wie kann man eine solche Aussage zeigen?

Methoden.

- Für einige Definierbarkeitsfragen liefert der Kompaktheitssatz eine einfache Antwort.
- *Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele* und *m*-Äquivalenz.

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

Inhalt dieses Abschnitts. Methoden, um zu Überprüfen, ob bestimmte Eigenschaften von Strukturen in der Prädikatenlogik definierbar sind.

Beispiel. Datenbank mit Fluginformationen.

Flug(`Fluggesellschaft, Flugnummer, Zeit, Start, Ziel`)

Ist es möglich, von s nach t (evtl. mit Zwischenstopps) zu fliegen?

Ist REACH $:= \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma$-Struktur, es gibt einen Pfad von $s^{\mathcal{A}}$ nach $t^{\mathcal{A}}\ \}$ definierbar oder axiomatisierbar?

Lernziele.

- Ein Gefühl dafür zu bekommen, welche Arten von Eigenschaften in der Prädikatenlogik beschrieben werden können.
- Methoden kennenzulernen, mit denen man beweisen kann, dass bestimmte Eigenschaften nicht in der Prädikatenlogik ausgedrückt werden können.

Ein weiteres Beispiel: Wortsprachen

Wortsprachen

Definierbare Sprachen. Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

Wir wollen Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ durch logische Formeln definieren.

Dazu modellieren wir $w \in \Sigma^+$ als *Wortstruktur* $\mathcal{W}_w$.

Signatur. $\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$

$\leq$	2-stelliges Relationssymbol
P_a, P_b	1-stellige Relationssymbole

Wortsprachen

Definierbare Sprachen. Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

Wir wollen Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ durch logische Formeln definieren.

Dazu modellieren wir $w \in \Sigma^+$ als *Wortstruktur* $\mathcal{W}_w$.

Signatur. $\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$

$\leq$ 2-stelliges Relationssymbol

P_a, P_b 1-stellige Relationssymbole

Wörter. $w = a_1 \dots a_n$

$$\mathcal{W}_w := \left(W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w}\right)$$

$W := \{1, \dots, n\}$

$\leq^{\mathcal{W}_w}$:= natürliche Ordnung auf W

$P_a^{\mathcal{W}_w} := \{i : a_i = a\}$

$P_b^{\mathcal{W}_w} := \{i : a_i = b\}$

Wortsprachen

Definierbare Sprachen. Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

Wir wollen Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ durch logische Formeln definieren.

Dazu modellieren wir $w \in \Sigma^+$ als *Wortstruktur* $\mathcal{W}_w$.

Signatur. $\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$

$\leq$ 2-stelliges Relationssymbol

P_a, P_b 1-stellige Relationssymbole

Wörter. $w = a_1 \dots a_n$

$$\mathcal{W}_w := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$$\begin{aligned}
W &:= \{1, \dots, n\} \\
\leq^{\mathcal{W}_w} &:= \text{natürliche Ordnung auf } W \\
P_a^{\mathcal{W}_w} &:= \{i : a_i = a\} \\
P_b^{\mathcal{W}_w} &:= \{i : a_i = b\}
\end{aligned}$$

Beispiel. $w := \underset{1}{a}\ \underset{2}{b}\ \underset{3}{a}\ \underset{4}{a}\ \underset{5}{b}$

$$\mathcal{W}_{abaab} := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$$\begin{aligned}
W &:= \{1, \dots, 5\} \\
P_a^{\mathcal{W}_w} &:= \{1, 3, 4\} \\
P_b^{\mathcal{W}_w} &:= \{2, 5\}
\end{aligned}$$

Wortsprachen

Signatur. Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

$\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$

$\leq$	2-stelliges Relationssymbol
P_a, P_b	1-stellige Relationssymbole

Wörter. $w = a_1 \dots a_n$

$$\mathcal{W}_w := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$W := \{1, \dots, n\}$

$\leq^{\mathcal{W}_w}$:= natürliche Ordnung auf W

$P_a^{\mathcal{W}_w} := \{i : a_i = a\}$

$P_b^{\mathcal{W}_w} := \{i : a_i = b\}$

Beispiel. $w := \underset{1}{a}\ \underset{2}{b}\ \underset{3}{a}\ \underset{4}{a}\ \underset{5}{b}$

$$\mathcal{W}_{abaab} := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$W := \{1, \dots, 5\}$

$P_a^{\mathcal{W}_w} := \{1, 3, 4\}$

$P_b^{\mathcal{W}_w} := \{2, 5\}$

Definierbare Sprachen. Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$ definiert

$$\mathcal{L}(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ : \mathcal{W}_w \models \varphi\}.$$

Wortsprachen

Signatur. Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

$$\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$$

$\leq$	2-stelliges Relationssymbol
P_a, P_b	1-stellige Relationssymbole

Wörter. $w = a_1 \dots a_n$

$$\mathcal{W}_w := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$$\begin{aligned} W &:= \{1, \dots, n\} \\ \leq^{\mathcal{W}_w} &:= \text{natürliche Ordnung auf } W \\ P_a^{\mathcal{W}_w} &:= \{i : a_i = a\} \\ P_b^{\mathcal{W}_w} &:= \{i : a_i = b\} \end{aligned}$$

Definierbare Sprachen. Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$ definiert

$$\mathcal{L}(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ : \mathcal{W}_w \models \varphi\}.$$

Beispiel. $w := \underset{1}{a}\ \underset{2}{b}\ \underset{3}{a}\ \underset{4}{a}\ \underset{5}{b}$

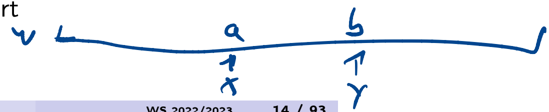
$$\mathcal{W}_{abaab} := (W, \leq^{\mathcal{W}_w}, P_a^{\mathcal{W}_w}, P_b^{\mathcal{W}_w})$$

$$\begin{aligned} W &:= \{1, \dots, 5\} \\ P_a^{\mathcal{W}_w} &:= \{1, 3, 4\} \\ P_b^{\mathcal{W}_w} &:= \{2, 5\} \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\varphi := \forall x\big(P_a(x) \rightarrow \exists y(x \leq y \wedge P_b(y))\big).$$

$\mathcal{L}(\varphi) := \{w :$ nach jedem a kommt irgendwann ein $b\}$.



Definierbare Sprachen

Definierbare Sprachen. Ist die

Sprache aller Wörter, die eine gerade Anzahl von as enthalten,

in FO definierbar?

Welche Arten formaler Sprachen sind FO-definierbar?

Alle regulären Sprachen?

Sind alle FO-definierbaren Sprachen regulär?

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Definierbare Sprachen

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Definierbare Sprachen. Ist die

Sprache aller Wörter, die eine gerade Anzahl von as enthalten,

in FO definierbar?

Welche Arten formaler Sprachen sind FO-definierbar?

Alle regulären Sprachen?

Sind alle FO-definierbaren Sprachen regulär?

Sprachen und Modellklassen. $L \subseteq \Sigma^+$ ist FO-definierbar, wenn es $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$ gibt, so dass $L = \mathcal{L}(\varphi) = \{w : \mathcal{W}_w \models \varphi\}$.

Im Prinzip suchen wir also $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$ mit $\{\mathcal{W}_w : w \in L\} = \mathrm{Mod}(\varphi)$.

Definierbare Sprachen

Definierbare Sprachen. Ist die

Sprache aller Wörter, die eine gerade Anzahl von as enthalten,

in FO definierbar?

Welche Arten formaler Sprachen sind FO-definierbar?

Alle regulären Sprachen?

Sind alle FO-definierbaren Sprachen regulär?

Sprachen und Modellklassen. $L \subseteq \Sigma^+$ ist FO-definierbar, wenn es $\varphi \in \text{FO}[\sigma_\Sigma]$ gibt, so dass $L = \mathcal{L}(\varphi) = \{w : \mathcal{W}_w \models \varphi\}$.

Im Prinzip suchen wir also $\varphi \in \text{FO}[\sigma_\Sigma]$ mit $\{\mathcal{W}_w : w \in L\} = \text{Mod}(\varphi)$.

Problem. Es kann auch andere σ_Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ geben, die φ erfüllen, aber keine Wortstrukturen sind.

Dann gilt $\{\mathcal{W}_w : w \in \mathcal{L}\} \neq \text{Mod}(\varphi)$, obschon das nur daran liegt, dass $\text{Mod}(\varphi)$ Strukturen enthält, die uns gar nicht interessieren.

Definition.
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{C}$ Klasse von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ axiomatisiert durch Φ, oder Φ ist *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.
2. $\mathcal{C}$ ist FO-axiomatisierbar, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.
3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für ein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Relative Definierbarkeit

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$

Wir schreiben $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Relative Definierbarkeit

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$

Wir schreiben $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Sprachen als Modellklassen. Sei $\mathfrak{W}$ die Klasse aller σ_Σ-Wortstrukturen.

Dann ist $L \subseteq \Sigma^+$ FO-definierbar gdw. es $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$ gibt mit

$$\{\mathcal{W}_w : w \in \mathcal{L}\} \quad = \quad \mathrm{Mod}_{\mathfrak{W}}(\varphi).$$

Relative Definierbarkeit

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$

Wir schreiben $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Sprachen als Modellklassen. Sei $\mathfrak{W}$ die Klasse aller σ_Σ-Wortstrukturen.

Dann ist $L \subseteq \Sigma^+$ FO-definierbar gdw. es $\varphi \in \text{FO}[\sigma_\Sigma]$ gibt mit

$$\{\mathcal{W}_w : w \in \mathcal{L}\} \quad = \quad \text{Mod}_{\mathfrak{W}}(\varphi).$$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^+ : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^{+} : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Vereinfachung. Ob $w \in \mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ hängt nur von den vorkommenden as ab.

Es reicht daher, Wörter über dem Alphabet $U := \{a\}$ zu betrachten, d.h.

$$\sigma_U\text{-Wortstrukturen } \mathcal{W} := (W, \leq^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}) \text{ mit } P_a^{\mathcal{W}} = W.$$

Da $P_a^{\mathcal{W}} = W$, können wir die Relation $P_a^{\mathcal{W}}$ ignorieren und nur die lineare Ordnung $(W, \leq^{\mathcal{W}})$ betrachten.

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$

Beispiel. Ist die Sprache

$$\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a} := \{w \in \{a, b\}^+ : w \text{ enthält eine gerade Anzahl } a\text{s } \}$$

FO-definierbar in $\mathfrak{W}$?

Vereinfachung. Ob $w \in \mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ hängt nur von den vorkommenden as ab.

Es reicht daher, Wörter über dem Alphabet $U := \{a\}$ zu betrachten, d.h.

$$\sigma_U\text{-Wortstrukturen } \mathcal{W} := (W, \leq^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}) \text{ mit } P_a^{\mathcal{W}} = W.$$

Da $P_a^{\mathcal{W}} = W$, können wir die Relation $P_a^{\mathcal{W}}$ ignorieren und nur die lineare Ordnung $(W, \leq^{\mathcal{W}})$ betrachten.

Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$. Die Frage, ob $\mathcal{L}_{\text{EVEN-}a}$ FO-definierbar ist, reduziert sich auf die FO-Definierbarkeit der Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen.

Beispiele dieses Abschnitts

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}} \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Zusammenfassung

Definition.

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse $\mathcal{C}$ von σ-Strukturen.

1. $\mathcal{C}$ wird axiomatisiert durch eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, oder Φ ist ein *Axiomensystem* für $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$.

2. $\mathcal{C}$ ist FO-*axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

3. $\mathcal{C}$ ist FO-*definierbar*, oder *endlich axiomatisierbar*, wenn $\mathcal{C} = \text{Mod}(\varphi)$ für einen einen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
   Äquivalent. $\mathcal{C} = \text{Mod}(\Phi)$ für eine endlich Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

4. Eine Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es einen Satz $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass
   $$\mathcal{C} \quad = \quad \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \psi\}$$
   Wir schreiben $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

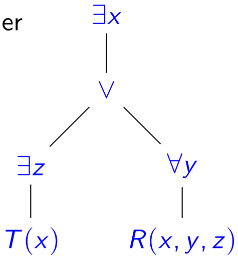
11.2 Der Quantorenrang von Formeln

Der Quantorenrang einer Formel

Definition. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathrm{FO}$ ist induktiv definiert durch:

- $\mathrm{qr}(\psi) := 0$ für quantorenfreie Formeln ψ
- $\mathrm{qr}(\neg\psi') := \mathrm{qr}(\psi')$
- $\mathrm{qr}((\varphi * \psi)) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{qr}(\exists x\varphi) = \mathrm{qr}(\forall x\varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$

Der Quantorenrang ist also die maximale *Schachtelungstiefe* der Quantoren in einer Formel.



Der Quantorenrang einer Formel

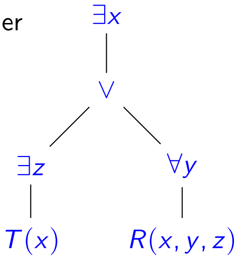
Definition. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in \mathsf{FO}$ ist induktiv definiert durch:

- $\mathrm{qr}(\psi) := 0$ für quantorenfreie Formeln ψ
- $\mathrm{qr}(\neg\psi') := \mathrm{qr}(\psi')$
- $\mathrm{qr}((\varphi * \psi)) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\mathrm{qr}(\exists x\varphi) = \mathrm{qr}(\forall x\varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$

Der Quantorenrang ist also die maximale *Schachtelungstiefe* der Quantoren in einer Formel.

Beispiel.

- $\mathrm{qr}\Big(\exists x\forall y(x = y \vee R(x, y, z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big(\exists x(\exists z T(x) \vee \forall y\, R(x, y, z))\Big) = 2$
- $\mathrm{qr}\Big((\forall z\neg E(x, z) \vee \forall z E(z, x))\Big) = 1$



Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Definition. Wir nennen eine Signatur σ *relational*, wenn σ nur Relationssymbole enthält.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Definition. Wir nennen eine Signatur σ *relational*, wenn σ nur Relationssymbole enthält.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Folgerung. Für $m \geq 0$ (und $k = 0$) sei

$$\mathtt{Qr}_m := \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : qr(\varphi) \leq m\}$$

und

$$\equiv_m := \{(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \mathtt{Qr}_m \text{ und } \psi \equiv \varphi\}.$$

Dann ist $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathtt{Qr}_m$ mit endlichem Index.

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad \neg\varphi \in BK(\Phi)$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Ein nützliches, wenn auch etwas technisches Lemma

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi),\quad (\varphi \vee \psi),\quad \neg\varphi \in BK(\Phi)$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{B}$ σ-Interpretationen.

Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,

dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,

dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

Beispiel. Sei $\Phi := \{P(x), E(x, y), \exists z(E(x, z) \wedge E(z, y))\}$ und

$\psi(x, y) := \big(P(x) \wedge E(x, y)\big) \vee \big(\neg P(x) \wedge \exists z(E(x, z) \wedge E(z, y))\big)$.

Dann $\psi_{\text{AL}} := \big(X_{P(x)} \wedge X_{E(x,y)}\big) \vee \big(\neg X_{P(x)} \wedge X_{\exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))}\big)$

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_{\mathcal{I}}, \beta_{\mathcal{J}}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{\mathcal{I}}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_{\mathcal{J}}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta\end{array}\right. \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Beispiel. Sei $\Phi := \{P(x), E(x,y), \exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))\}$ und

$\psi(x,y) := \big(P(x) \wedge E(x,y)\big) \vee \big(\neg P(x) \wedge \exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))\big)$.

Dann $\psi_{\mathrm{AL}} := \big(X_{P(x)} \wedge X_{E(x,y)}\big) \vee \big(\neg X_{P(x)} \wedge X_{\exists z(E(x,z) \wedge E(z,y))}\big)$

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_\mathcal{I}, \beta_\mathcal{J}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\begin{array}{l} \beta_\mathcal{I}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_\mathcal{J}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta \end{array} \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Nach Konstruktion gilt $(*)$:
$\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{I} \models \psi_{\text{AL}}$ und
$\mathcal{J} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{J} \models \psi_{\text{AL}}$.

Beweis des Hilfslemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,
dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Beweis. Für jedes $\theta \in \Phi$ führen wir eine Aussagenvariable X_θ ein.

Sei nun $\psi \in BK(\Phi)$. Wir übersetzen ψ in eine aussagenlogische Formel ψ_{AL}, indem wir jede Unterformel $\theta \in \Phi$ von ψ durch X_θ ersetzen.

$\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ induzieren Belegungen $\beta_\mathcal{I}, \beta_\mathcal{J}$ für ψ_{AL} wie folgt:

$$\begin{array}{l} \beta_\mathcal{I}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta \\ \beta_\mathcal{J}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \theta \end{array} \quad \text{für alle } \theta \in \Phi.$$

Nach Konstruktion gilt $(*)$:
$\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{I} \models \psi_{\mathsf{AL}}$ und
$\mathcal{J} \models \psi$ gdw. $\beta_\mathcal{J} \models \psi_{\mathsf{AL}}$.

Da $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, folgt $\beta_\mathcal{I} = \beta_\mathcal{J}$ und (wegen $(*)$):

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \beta_\mathcal{I} \models \psi_{\mathsf{AL}} \text{ gdw. } \beta_\mathcal{J} \models \psi_{\mathsf{AL}} \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \psi. \qquad \square$$

Erweiterung des Lemmas

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Beweis. Wie zuvor definieren wir

$$
\begin{array}{rcll}
V & := & \{X_\varphi : \varphi \in \Phi\} & \\
\psi \in BK(\Phi) & \rightsquigarrow & \psi_{\text{AL}} \in \text{AL} & \text{ersetze Unterformeln } \theta \in \Phi \text{ durch } X_\theta \\
\sigma\text{-Interpretation } \mathcal{I} & \rightsquigarrow & \text{mit Belegung } \beta_\mathcal{I} & \beta_\mathcal{I}(X_\theta) := 1 \text{ gdw. } \mathcal{I} \models \theta, \text{ für alle } \theta \in \Phi.
\end{array}
$$

Wie eben gilt für alle $\psi \in BK(\Phi)$ und σ-Interpretationen $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \beta_\mathcal{I} \models \psi_{\text{AL}}.$$

Falls also $\psi_{\text{AL}} \equiv \psi'_{\text{AL}}$, dann auch $\psi \equiv \psi'$.

Wir wissen bereits, dass es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln über der Variablenmenge V gibt.

Also gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

$\square$

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Notation. Sei X eine Menge und $\overline{y}$ ein Tupel.

Wir schreiben $\overline{y} \subseteq X$ als Abkürzung für „$y_i \in X$ für alle i“.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Notation. Sei X eine Menge und $\overline{y}$ ein Tupel.

Wir schreiben $\overline{y} \subseteq X$ als Abkürzung für „$y_i \in X$ für alle i".

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathsf{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Induktionsverankerung. Sei $m = 0$ (und k beliebig).

Da σ endlich und relational ist, existieren nur endlich viele verschiedene atomare Formeln $\psi(y_1, \dots, y_r)$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Beispiel. $\sigma := \{E, P\}$

$X = \{x_1, x_2\}$ $(k = 2)$

Atomare Formeln:

$E(x_1, x_2), E(x_1, x_1), E(x_2, x_1), E(x_2, x_2), P(x_1), P(x_2)$

Die Zahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \text{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Beweis. Für alle $m, k \geq 0$ sei $\mathcal{L}_{m,k}$ eine maximale Menge paarweise nicht-äquivalenter Formeln $\psi(\overline{y})$ mit Quantorenrang $\leq m$ und $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Zu zeigen ist also, dass $\mathcal{L}_{m,k}$ für alle $m, k \geq 0$ endlich ist.

Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Induktionsverankerung. Sei $m = 0$ (und k beliebig).

Da σ endlich und relational ist, existieren nur endlich viele verschiedene atomare Formeln $\psi(y_1, \dots, y_r)$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Aus dem vorherigen Lemma folgt, dass es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente quantorenfreie Formeln $\psi(\overline{y})$ mit $\overline{y} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ gibt.

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ endlich.
Es gibt nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Beweis des Lemmas

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Beweis des Lemmas

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y \psi$ oder $\forall y \psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y \psi$ oder $\forall y \psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

Beispiel. Sei $m = 2$.

$$\varphi := E(x_1, x_2) \vee \neg\exists x_1 \forall y P(x_1, y) \vee \exists z \big(\forall x_2 E(z, x_2) \vee \exists x_3 (P(x_3) \wedge E(z, x_2))\big)$$

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Beobachtung. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit Quantorenrang m sind Boolesche Kombinationen von

- Formeln $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ mit Quantorenrank $< m$ und
- Formeln der Form $\exists y \psi$ oder $\forall y \psi$, wobei $\mathrm{qr}(\psi) < m$.

Konsequenz.
Da $\exists y \psi \equiv \exists x_{k+1} \psi[y/x_{k+1}]$ und $\forall y \psi \equiv \forall x_{k+1} \psi[y/x_{k+1}]$ für alle $y \notin X$, können wir O.B.d.A. annehmen, dass φ eine Bool. Komb. von Formeln

1. $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ und Formeln
2. $\exists z \psi$ oder $\forall z \psi$ mit $z \in \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ und $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}$.

Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_{m-1,k} \cup \{\exists z \psi, \forall z \psi : z \in \{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}\}$.

Beweis des Lemmas

$\mathcal{L}_{m,k}$: max. Menge paarweise nicht-äquiv. Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Induktionsvoraussetzung. Für alle $k \geq 0$ ist $\mathcal{L}_{m-1,k}$ endlich.

Induktionsschritt. Sei $k \geq 0$ beliebig. Wir müssen die Aussage nun für Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{L}_{m,k}$ mit Quantorenrang $\leq m$ beweisen.

Konsequenz.

Da $\exists y\psi \equiv \exists x_{k+1}\psi[y/x_{k+1}]$ und $\forall y\psi \equiv \forall x_{k+1}\psi[y/x_{k+1}]$ für alle $y \notin X$, können wir O.B.d.A. annehmen, dass φ eine Bool. Komb. von Formeln

1. $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k}$ und Formeln
2. $\exists z\psi$ oder $\forall z\psi$ mit $z \in \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ und $\psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}$.

Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_{m-1,k} \cup \{\exists z\psi, \forall z\psi : z \in \{x_1, \ldots, x_{k+1}\}, \psi \in \mathcal{L}_{m-1,k+1}\}$.

Nach IV sind $\mathcal{L}_{m-1,k}, \mathcal{L}_{m-1,k+1}$ und daher auch $\mathcal{L}'$ endlich.

Aus vorherigem Lemma folgt, dass $BK(\mathcal{L}')$ und somit $\mathcal{L}_{m,k}$ endlich ist. □

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ endlich. Es gibt nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

Zusammenfassung

Quantorenrang. Max. Schachtelungstiefe der Quantoren.

Lemma. Sei σ eine endliche relationale Signatur.

Für alle $m, k \geq 0$ gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ vom Quantorenrang $\leq m$.

Definition. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Klasse $BK(\Phi)$ der Booleschen Kombinationen von Φ ist die kleinste Klasse für die gilt:

- $\Phi \subseteq BK(\Phi)$
- $(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad \neg\varphi \in BK(\Phi)$ für alle $\varphi, \psi \in BK(\Phi)$

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$,

dann $\mathcal{I} \models \psi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi$ für alle $\psi \in BK(\Phi)$.

Lemma. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ endlich. Dann gibt es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln in $BK(\Phi)$.

11.3 Elementare Äquivalenz

Wiederholung: Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Signatur. $\sigma := \{E, s, t\}$ E 2-stelliges Rel.symb, s, t Konstantensymb.

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Versuch einer Antwort.

1. Direktflug: $\varphi_1 := E(s, t)$
2. Ein Stopp : $\varphi_2 := \exists x_1 \Big(E(s, x_1) \wedge E(x_1, t) \Big)$
3. Zwei Stopps : $\varphi_3 := \exists x_1 \exists x_2 \Big(E(s, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, t) \Big)$

Beobachtung. Für jede feste Zahl von Stopps existiert eine Formel.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

REACH $:= \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ σ-Struktur, es gibt einen Pfad von $s^{\mathcal{A}}$ nach $t^{\mathcal{A}}$ $\}$.

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

In anderen Worten.

Es existiert kein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass für alle $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und
für alle $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt es ein $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ mit $\mathcal{A} \not\models \varphi$ oder
es existiert ein $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi$.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Frage. Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Behauptung. Es gibt keinen Satz der Prädikatenlogik, der REACH definiert.

In anderen Worten.

Es existiert kein $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass	für alle $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und für alle $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ gilt: $\mathcal{B} \not\models \varphi$.
für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$	gibt es ein $\mathcal{A} \in \text{REACH}$ mit $\mathcal{A} \not\models \varphi$ oder es existiert ein $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi$.

Beweisversuch. Wir wollen zeigen, dass es für jeden Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, so dass

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (d.h. in $\mathcal{A}$ ex. ein Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ aber nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Beweisversuch. Zeige, dass es für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt, mit

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Problem. Wir müssen für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ neue Strukturen finden.

Erreichbarkeit in der Prädikatenlogik

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\ \}.$$

Beweisversuch. Zeige, dass es für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt, mit

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Problem. Wir müssen für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ neue Strukturen finden.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ: $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ: $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \mathrm{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \mathrm{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. ~~$\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$~~
3. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Elementare Äquivalenz

Definition. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Zeige. Es ex. $\mathcal{A} \in \mathit{Reach}$, $\mathcal{B} \notin \mathit{Reach}$ s.d. für alle φ:
$\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{B} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Besser. Zeige: es gibt σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$

1. $\mathcal{A} \in \text{REACH}$, $\mathcal{B} \notin \text{REACH}$ (in $\mathcal{A}$ ex. Weg von s nach t, in $\mathcal{B}$ nicht.)
2. ~~$\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi$ oder aber $\mathcal{A} \not\models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$~~
3. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Problem. Solche Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kann es nicht geben.

Nach Voraussetzung enthält $\mathcal{A}$ einen $s^{\mathcal{A}} - t^{\mathcal{A}}$-Pfad

$$P = (s = v_0, v_1, \cdots, v_n = t).$$

Also $\mathcal{A} \models \psi_k := \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_n \big(x_0 = s \wedge x_n = t \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} E(x_i, x_{i+1})\big)$.

Aus $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{B} \models \psi_k$ und daher existiert auch in $\mathcal{B}$ ein $s^{\mathcal{B}} - t^{\mathcal{B}}$-Pfad.

m-Äquivalenz

Erinnerung. Der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel $\psi \in$ FO ist die maximale Schachtelungstiefe der Quantoren.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$.

Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind m-äquivalent, geschrieben $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn für alle σ-Sätze ψ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Beobachtung. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

m-Äquivalenz

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *m-äquivalent*, $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$ für alle ψ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik. m-Äquivalenz eignet sich oft besser als elementare Äquivalenz zum Beweis der Nicht-Definierbarkeit bestimmter Aussagen.

Behauptung. Kein FO-Satz definiert

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}}\}.$$

Beweisansatz. Es reicht, für alle $m \geq 0$ zwei σ-Strukturen

$\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ zu finden, so dass

- $\mathcal{A}_m \in$ REACH aber $\mathcal{B}_m \notin$ REACH und
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ mit $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} \;=\; \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ mit $\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \text{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

m-*Äquivalenz und Definierbarkeit*

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Da aber $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$, gilt auch $\mathcal{B}_m \models \varphi$.

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Beweis (durch Widerspruch).

Ang., es gäbe $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ mit $\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) = \mathcal{C}$.

Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Betrachte $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{A}_m \models \varphi$.

Da aber $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$, gilt auch $\mathcal{B}_m \models \varphi$.

Widerspruch zu $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$. $\square$

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathsf{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

m-Äquivalenz

Wir erweitern die elementare und m-Äquivalenz noch auf Strukturen mit ausgezeichneten Elementen und Formeln mit freien Variablen.

Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.

1. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind m-äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$
2. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind elementar äquivalent, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *m-äquivalent*, $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$ für alle ψ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

11.4 Partielle Isomorphismen

Wiederholung: m-Äquivalenz

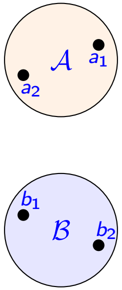
Definition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.

1. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind *m-äquivalent*, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

2. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind *elementar äquivalent*, geschrieben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle σ-Formeln $\psi(\overline{x})$ und freien Variablen $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$ gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Notation. Für $k = 0$ schreiben wir kurz $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.



Wiederholung: m-Äquivalenz und Definierbarkeit

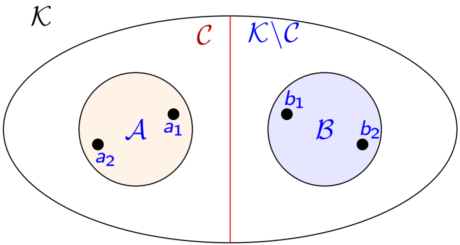
Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 0$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
für alle $\psi(\overline{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.



Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass
$$\mathcal{C} \;=\; \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$
$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

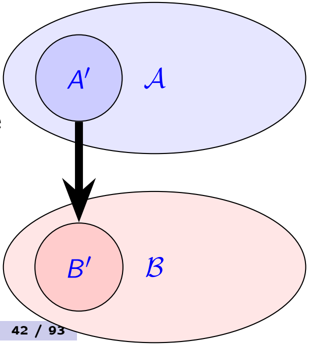
Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, ..., a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), ..., h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$



Partielle Isomorphismen

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
$h : A \to B$ bijektiv, so dass für alle $R \in \sigma$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A^k$ gilt:

$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$
gdw.
$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

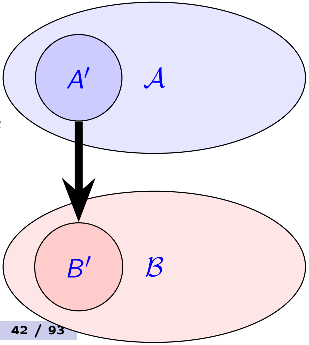
Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, \dots, a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$



Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:

$\mathcal{A}$: $1 - 2 - 3 - 4$

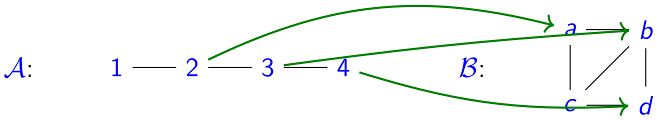
$\mathcal{B}$:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ c \arrow[r, dash] & d \end{tikzcd}$$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:



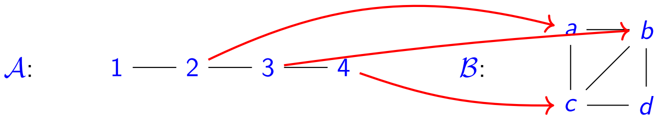
Die Abbildung $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto d$ ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{E\}$ und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie folgt gegeben:



Die Abbildung $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto d$ ein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Die Abbildung definiert durch $\pi : 2 \mapsto a, 3 \mapsto b, 4 \mapsto c$ ist jedoch kein partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

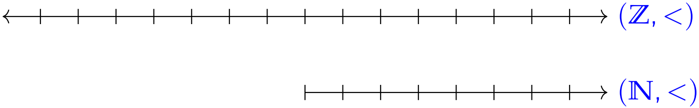
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

gdw.

$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

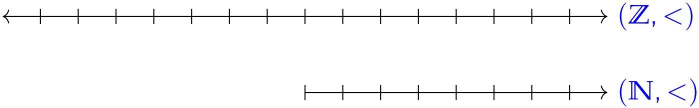
Sei $\sigma := \{<\}$, $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{B}})$.



Frage. Was sind die partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Beispiele zu partiellen Isomorphismen

Sei $\sigma := \{<\}$, $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, <^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{B}})$.



Frage. Was sind die partiellen Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Antwort. Alle Abbildungen $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die ordnungserhaltend sind.

D.h. wenn π die Menge $A' \subseteq \mathbb{N}$ auf $B' \subseteq \mathbb{Z}$ abbildet und

$$A = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

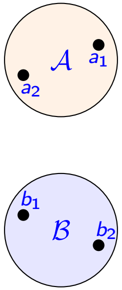
dann gilt

$$\pi(a_1) < \pi(a_2) < \cdots < \pi(a_n).$$

0-*Äquivalenz*

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\bar{a} := a_1, \ldots, a_k \in A^k$ und $\bar{b} := b_1, \ldots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

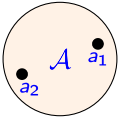
1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} h: & \{a_1, \ldots, a_k\} & \to & \{b_1, \ldots, b_k\} \\ & a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$
ist ein partieller Isomorphismus.
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$

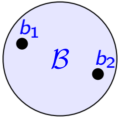


0-Äquivalenz

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} h: & \{a_1, \dots, a_k\} & \to & \{b_1, \dots, b_k\} \\ & a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$
ist ein partieller Isomorphismus.
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:
Def. $\equiv_0$ $$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$





Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$ Semantik von FO

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:

   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:

   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$
mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$	gdw.	$(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$	Semantik von FO
	gdw.	$(b_{i_1}, \dots, b_{i_j}) \in R^{\mathcal{B}}$	Definition partieller Isomorphismen

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (1) ⇒ (2)

Voraussetzung. $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ und $h : \{a_1, \dots, a_k\} \to \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $h(a_i) := b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist ein partieller Isomorphismus.

Sei $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

Da ψ atomar gilt $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$ oder $\psi := x_i = x_j$.

Wir betrachten hier den Fall $\psi := R(x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$.

Es gilt

$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$	gdw.	$(a_{i_1}, \dots, a_{i_j}) \in R^{\mathcal{A}}$	Semantik von FO
	gdw.	$(b_{i_1}, \dots, b_{i_j}) \in R^{\mathcal{B}}$	Definition partieller Isomorphismen
	gdw.	$\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.	

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis (2) ⇒ (3)

Voraussetzung. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}].$$

Zu Zeigen. Die gleiche Aussage gilt für alle quantorenfreien Formeln.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma BK. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \varphi \quad \text{f.a. } \varphi \in \Phi,$$

dann

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \psi \quad \text{f.a. } \psi \in BK(\Phi).$$

Beweis (2) $\Rightarrow$ (3)

Voraussetzung. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}].$$

Zu Zeigen. Die gleiche Aussage gilt für alle quantorenfreien Formeln.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Lemma BK.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma BK. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ σ-Interpretationen.

Wenn

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \varphi \quad \text{f.a. } \varphi \in \Phi,$$

dann

$$\mathcal{I} \models \psi \text{ gdw. } \mathcal{J} \models \psi \quad \text{f.a. } \psi \in BK(\Phi).$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Dann gilt $\mathcal{A} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{a}]$.

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Injektivität von h: wenn $a_i \neq a_j$, dann $h(a_i) \neq h(a_j)$.

Sei also $i < j$ mit $a_i \neq a_j$.

Dann gilt $\mathcal{A} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{a}]$.

Aus der Voraussetzung folgt daher $\mathcal{B} \models (\neg x_i = x_j)[\overline{b}]$ und somit

$$b_i \neq b_j \quad \text{d.h.} \quad h(a_i) \neq h(a_j).$$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}}$$

$\square$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:

1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) $\Rightarrow$ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{a}]$$

$\square$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis (3) ⇒ (1)

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad & \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{a}] \\ & \text{gdw. } \mathcal{B} \models R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})[\overline{b}] \end{aligned}$$

□

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \\ \text{gdw.} \\ (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beweis $(3) \Rightarrow (1)$

Voraussetzung. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(\overline{x})$ gilt

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Zu Zeigen. Abb. h mit $h(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, ist part. Isomorphismus.

Relationserhaltung: für alle r-stelligen $R \in \sigma \cup \{=\}$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r$ gilt:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Sei also $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq k$ wie zuvor. Es gilt:

$$\begin{aligned}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \quad & \text{gdw. } \mathcal{A} \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})[\overline{a}] \\ & \text{gdw. } \mathcal{B} \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})[\overline{b}] \\ & \text{gdw. } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}. \qquad \square\end{aligned}$$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ atomar:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
3. $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ quantorenfrei:
$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \text{ gdw. } (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

0-Äquivalenz

Lemma. Sei σ eine relationale Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{b} := b_1, \dots, b_k \in B^k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} h: & \{a_1, \dots, a_k\} & \to & \{b_1, \dots, b_k\} \\ & a_i & \mapsto & b_i \end{array} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$

   ist ein partieller Isomorphismus.

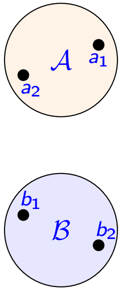
2. Für alle atomaren Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

3. Für alle quantorenfreien Formeln $\psi(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$



Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Vereinbarung. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir in diesem Abschnitt nur relationale Signaturen, d.h. Signaturen, in denen nur Relationssymbole vorkommen.

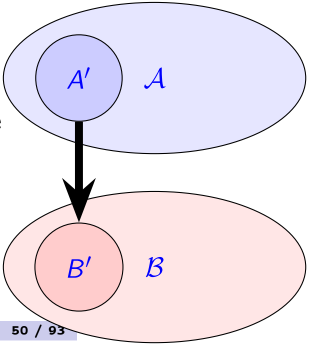
Definition. Sei σ eine (relationale) Signatur.

Ein partieller Isomorphismus zwischen zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $h : A' \to B$, für ein $A' \subseteq A$, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A'$, wobei $k = ar(R)$,

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Isomorphismus $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
$h : A \to B$ bijektiv, so dass für alle $R \in \sigma$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A^k$ gilt:

$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$
gdw.
$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}$.



11.5 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

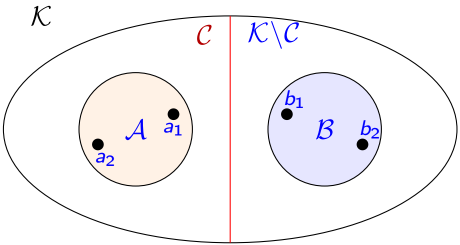
Wiederholung: m-Äquivalenz und Definierbarkeit

Lemma. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn es für alle $m \geq 1$ σ-Strukturen $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ gibt, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann gibt es keinen Satz $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ der $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ definiert.



Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$$

für alle $\psi(\overline{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

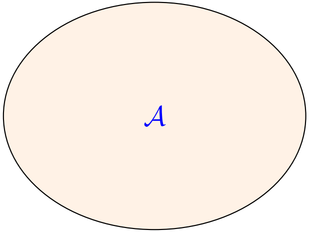
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y \, E(x, y) \big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Partielle Isomorphismen

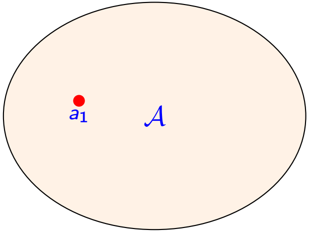
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partielle Isomorphismen

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

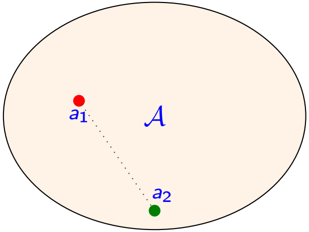
gdw.

$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$

Partielle Isomorphismen

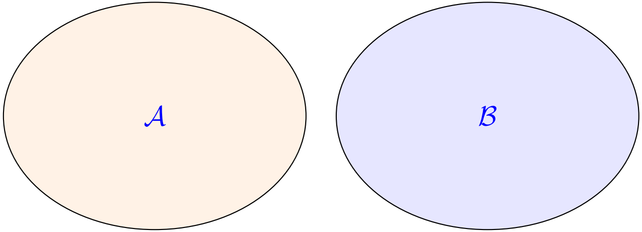
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.
$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y)\big)$$
$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

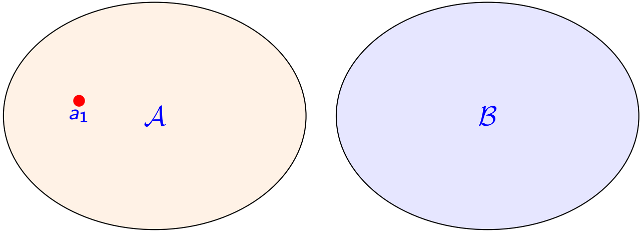
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.
$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y) \big)$$
$R(x)$: „x ist rot“

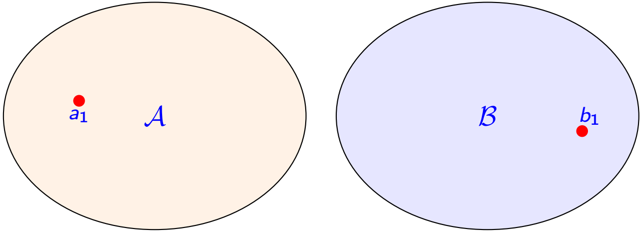
Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y) \big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Partielle Isomorphismen

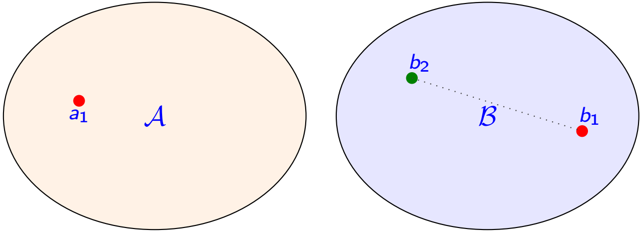
Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \ldots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Formel.

$$\varphi := \exists x \big(R(x) \land \forall y\, E(x, y) \big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

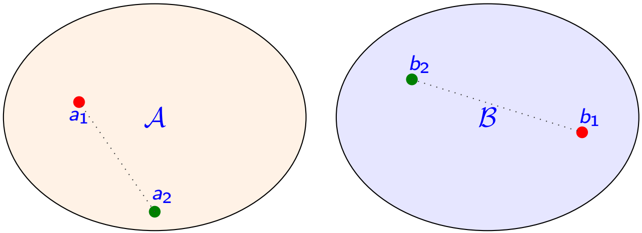
Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Partielle Isomorphismen

Frage. Wie kann man denn zeigen, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$?

Antwort für $m = 0$. Partielle Isomorphismen.

Antwort für $m > 0$?



Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv,
so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit
$k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Formel.

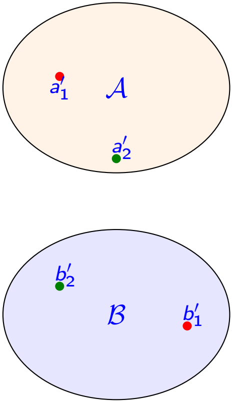
$$\varphi := \exists x \big(R(x) \wedge \forall y\, E(x, y)\big)$$

$R(x)$: „x ist rot“

Behauptung. $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Seien σ eine relationale Signatur, $m, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$, $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.



Spieler und deren Ziele.

Das m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ wird von zwei Spielern, dem Herausforderer (H) und der Duplikatorin (D), gespielt.

Herausforderers Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$

Duplikatorins Ziel: Zeige, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$

Notation.

Ist $k = 0$ so schreiben wir kurz $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

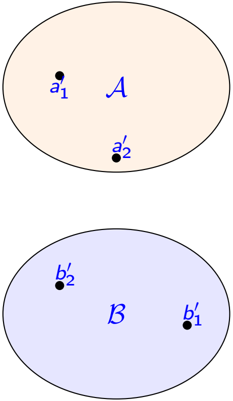
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Herausforderer: $(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

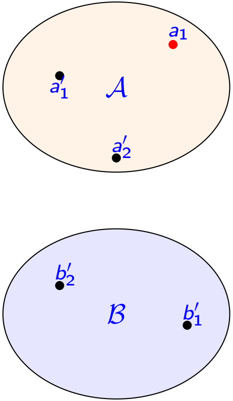
Duplikatorin: $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

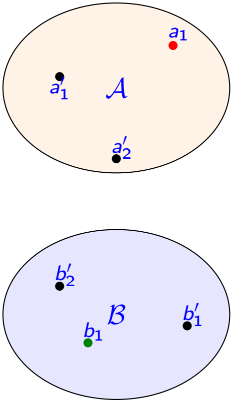
Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a_i' \in A$ oder $b_i' \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a_i' \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b_i' \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a_i' \in A$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

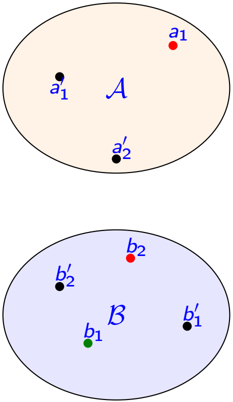
Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.



Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

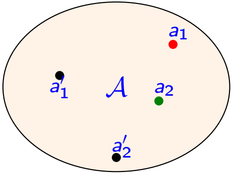
Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

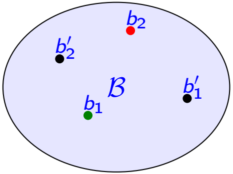
In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.





Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Die Regeln des Spiels. Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

In Runde $i = 1, \dots, m$:

1. Herausforderer wählt ein Element $a'_i \in A$ oder $b'_i \in B$.
2. Danach antwortet die Duplikatorin. Hat der Herausforder $a'_i \in A$ gewählt, wählt die Duplikatorin $b'_i \in B$.

   Anderenfalls wählt sie $a'_i \in A$.

Gewinnbedingung. Nach Runde m wird der Gewinner ermittelt:

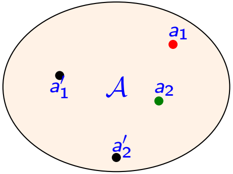
Die Duplikatorin hat gewonnen, wenn die Abbildung

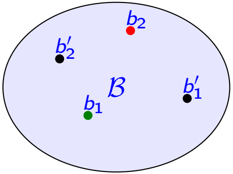
$$h : a'_1 \mapsto b'_1, \dots, a'_k \mapsto b'_k, a_1 \mapsto b_1, \dots, a_m \mapsto b_m$$

ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Herausforderer:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \not\equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

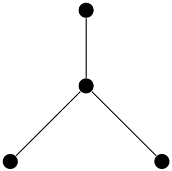
Duplikatorin:
$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$.

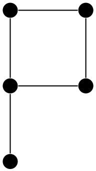




Beispiel

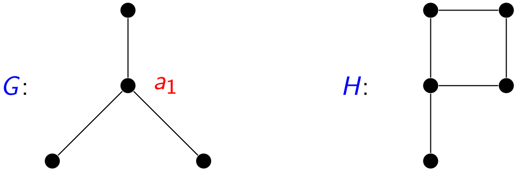
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen

G: 

H: 

Beispiel

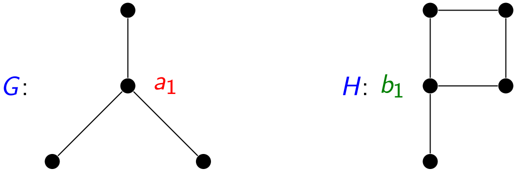
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

Beispiel

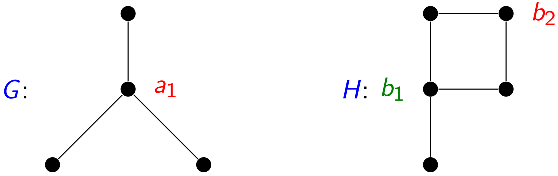
Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen



indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

Beispiel

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen

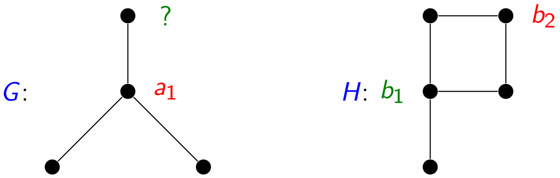


indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

In Runde 2 wählt der dann einen Knoten b_2 in H, der nicht zu Knoten b_1 benachbart ist.

Beispiel

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G, H)$ für die Graphen

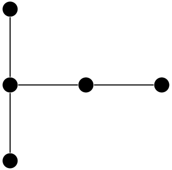


indem er in Runde 1 den mittleren Knoten a_1 in G wählt.

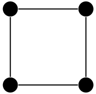
In Runde 2 wählt der dann einen Knoten b_2 in H, der nicht zu Knoten b_1 benachbart ist.

Beispiel

G':



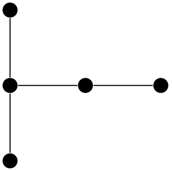
H':



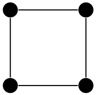
Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

Beispiel

G':



H':

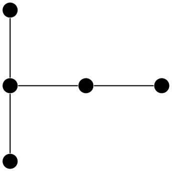


Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

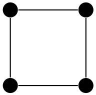
Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

Beispiel

G':



H':



Frage. Wer gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$?

Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_2(G', H')$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_3(G', H')$, da es in G' drei Knoten gibt, die paarweise nicht benachbart sind.

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt“?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Lemma (determinierte Spiele). In jedem Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat genau eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie.

Was bedeutet eigentlich „gewinnnt"?

Gewinnen? Was bedeutet es eigentlich, dass Duplikatorin *das Spiel* $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt? Eigentlich gewinnt Sie ja nur eine Partie!

Vielleicht hat Herausforderer ja nicht besonders schlau gespielt?

Strategie: Abbildung, die für jede Runde und jeden möglichen Spielstand den nächsten Zug der Spieler:in angibt.

Gewinnstrategie: Strategie, mit der die Spieler:in jede Partie gewinnt, egal wie die Gegenspieler:in zieht.

Lemma (determinierte Spiele). In jedem Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat genau eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie.

Das Spiel gewinnen. Hat eine der beiden Spieler:innen eine Gewinnstrategie, dann sagen wir, dass sie das Spiel gewinnt.

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \rightarrow B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.
4. Wenn es ausgezeichnete Elemente $\overline{a}' \in A^k$ und $\overline{b}' \in B^k$ gibt, dann gewinnt Duplikatorin $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann, wenn $h : a'_i \mapsto b'_i$, für alle i, ein partieller Isomorphismus ist.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$ und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von EF-Spielen

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen.

Eigenschaften von EF-Spielen.

1. Herausforderer gewinnt $\mathfrak{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn es ein $R \in \sigma$ und ein $a \in A$ gibt mit $(a, \dots, a) \in R^{\mathcal{A}}$ aber für alle $b \in B$ gilt $(b, \dots, b) \notin R^{\mathcal{B}}$ oder umgekehrt.
2. Wenn Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt er auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' > m$.
3. Umgekehrt gilt: Wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann gewinnt sie auch $\mathfrak{G}_{m'}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m' < m$.
4. Wenn es ausgezeichnete Elemente $\overline{a}' \in A^k$ und $\overline{b}' \in B^k$ gibt, dann gewinnt Duplikatorin $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann, wenn $h : a'_i \mapsto b'_i$, für alle i, ein partieller Isomorphismus ist.
5. Wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, dann gewinnt die Duplikatorin $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m \geq 0$.

Partieller Isomorphismus h.
$h : A' \subseteq A \to B' \subseteq B$ injektiv, so dass
für alle $R \in \sigma \cup \{=\}$ mit $k = ar(R)$
und $a_1, \dots, a_k \in A'^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$$
gdw.
$$(h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

EF-Spiele auf linearen Ordnungen

Theorem.

Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

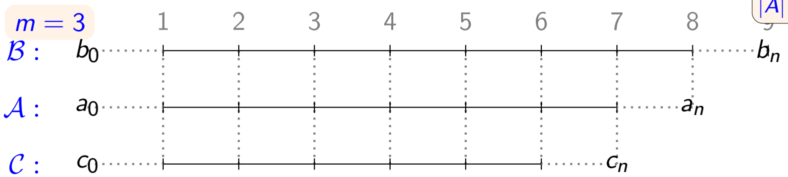
$$\text{Die Duplikatorin gewinnt das Spiel } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

$$\iff$$

$$|A| = |B| \quad \text{oder} \quad |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Beweisskizze

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

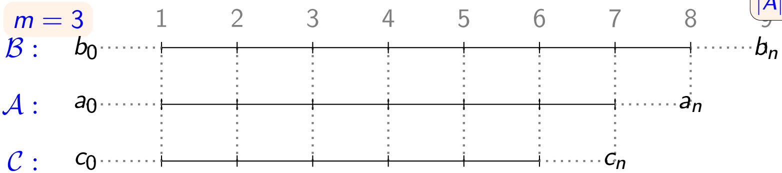


Strukturen. Seien $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $A = \{1, \dots, n_a\}$ und $B := \{1, \dots, n_b\}$.

Zur Vereinfachung sei $a_0 = b_0 = 0$, $a_n = n_a + 1$ und $b_n = n_b + 1$.

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Strukturen. Seien $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $A = \{1, \dots, n_a\}$ und $B := \{1, \dots, n_b\}$.

Zur Vereinfachung sei $a_0 = b_0 = 0$, $a_n = n_a + 1$ und $b_n = n_b + 1$.

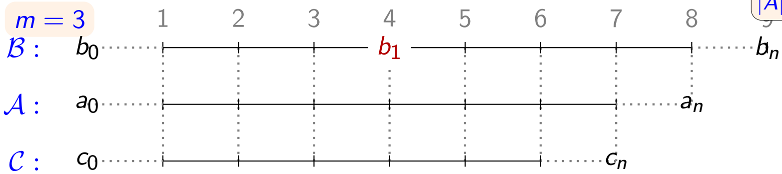
Invariante. Ang., nach Runde i wurden $a_1, \dots, a_i$ und $b_1, \dots, b_i$ gezogen.

Dann gilt für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:

1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $|A(j, j')|, |B(j, j')| \geq 2^{m-i} - 1$.

$(B(j, j') := \{b \in B : b_j < b < b_{j'}$ oder $b_{j'} < b < b_j\}$ $A(j, j')$ analog)

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

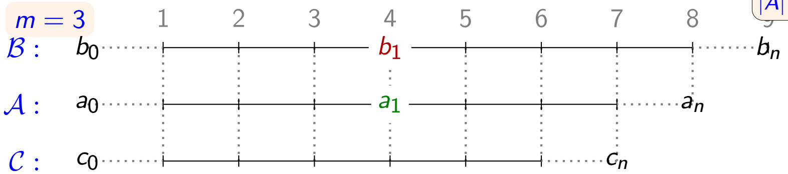
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

a_1 existiert, da $|A| \geq 2^m - 1$ und $2 \cdot (2^{m-1} - 1) - 1 = 2^m - 1$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

a_1 existiert, da $|A| \geq 2^m - 1$ und $2 \cdot (2^{m-1} - 1) - 1 = 2^m - 1$.

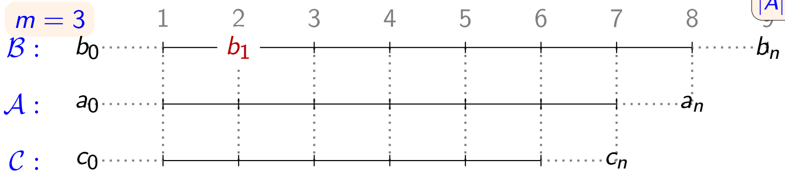
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{matrix}|A(j,j')| \\ |B(j,j')|\end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

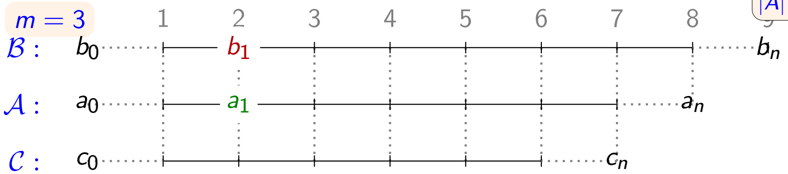
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{matrix} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

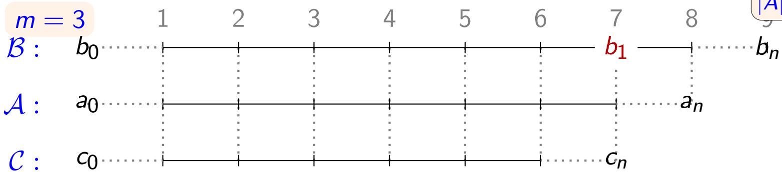
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:

1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$$

Beweisskizze



Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \ldots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \ldots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Runde 1.

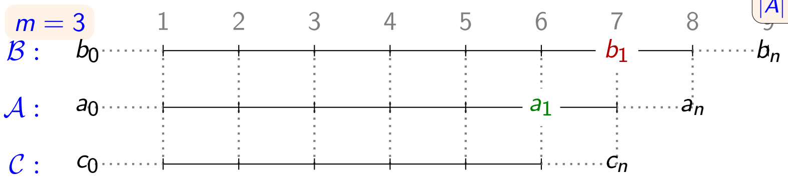
Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| > 2^{m-1} - 1$.
D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \ldots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$
$$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| > 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff |A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

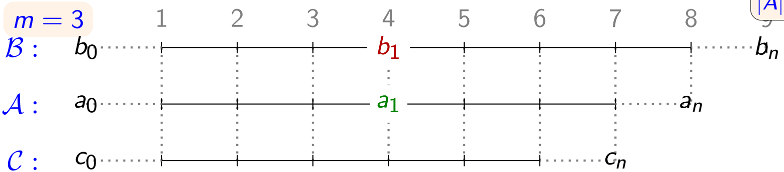
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')| \\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 1.

Fall 1. H zieht $b_1 \in B$ „in der Mitte“: $|B(b_0, b_1)|, |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)|, |A(a_1, a_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Fall 2. H zieht $b_1 \in B$ „weit links“: $|B(b_0, b_1)| < 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_0, a_1)| = |B(b_0, b_1)|$.

Fall 3. H zieht $b_1 \in B$ „weit rechts“: $|B(b_1, b_n)| > 2^{m-1} - 1$.

D wählt $a_1 \in A$ mit $|A(a_1, a_n)| = |B(b_1, b_n)|$.

Theorem. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$ $|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

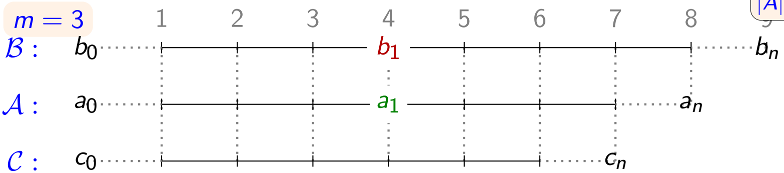
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Runde 2.

Beobachtung. Wenn H in $B(b_0, b_1)$ oder $A(a_0, a_1)$ zieht, muss H in $A(a_0, a_1)$ bzw. $B(b_0, b_1)$ antworten.

Analog wenn H in $B(b_1, b_n)$ oder $A(a_1, a_n)$ zieht.

Nach Runde 1 spielen wir also eigentlich zwei getrennte Spiele $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}[A(a_0, a_1)], \mathcal{B}[B(b_0, b_1)])$ und $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}[A(a_1, a_n)], \mathcal{B}[B(b_1, b_n)])$.

Wegen der Invariante gelten für beide Spiele wieder die Voraussetzungen des Theorems.

Wir können also einfach rekursiv weiter spielen.

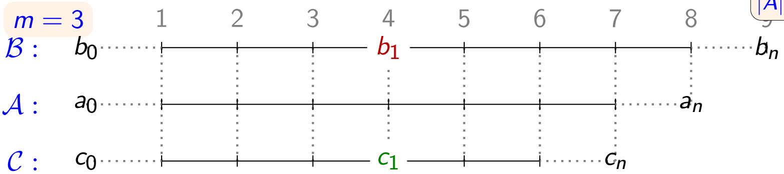
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

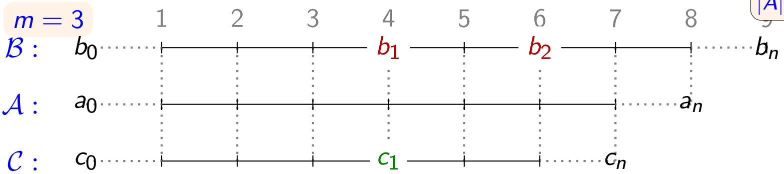
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

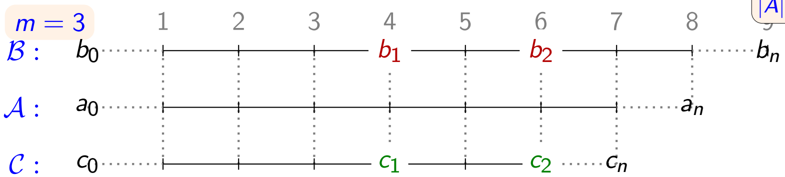
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|$, $|B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

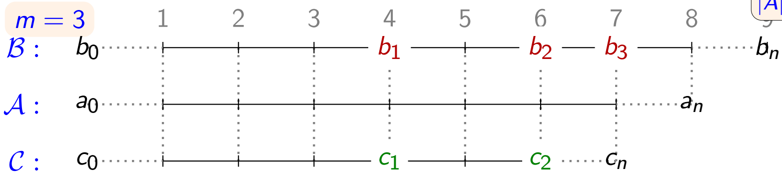
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left. \begin{matrix} |A(j,j')| \\ |B(j,j')| \end{matrix} \right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B},\mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte" von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0,c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1,c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0,b_1)|,\quad |B(b_1,b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1,c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1,b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0,b_1)$.

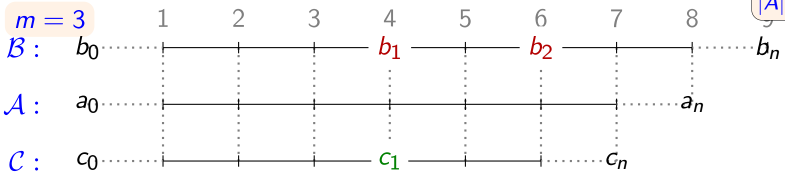
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1,\dots,n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1,\dots,n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1,\dots,a_i,\ b_1,\dots,b_i$.
Für alle $j,j' \in \{0,\dots,i,n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j,j')| = |B(j,j')|$ oder
$$\left.\begin{matrix}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{matrix}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$

$B(j,j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

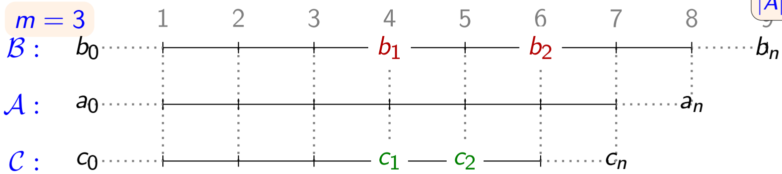
Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \ldots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$
$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \ldots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \ldots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \lor b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$ aber $|B(b_0, b_1)|$, $|B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

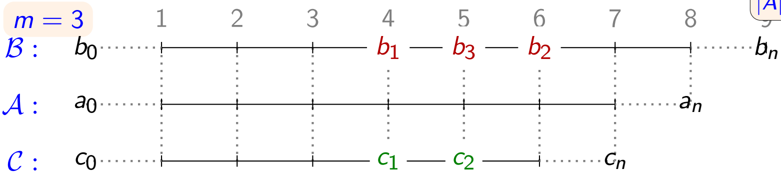
Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder $\left.\begin{array}{l}|A(j,j')|\\|B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1$.

$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

Beweisskizze



Das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. H zieht b_1 „in der Mitte“ von $\mathcal{B}$.

D antwortet mit c_1.

Nun gilt aber $|C(c_0, c_1)| < 2^{m-1} - 1$ oder $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$
aber $|B(b_0, b_1)|, \quad |B(b_1, b_n)| \geq 2^{m-1} - 1$.

Falls $|C(c_1, c_n)| < 2^{m-1} - 1$, spielt H mit der gleichen Strategie auf $B(b_1, b_n)$ weiter, ansonsten auf $B(b_0, b_1)$.

Theorem.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff$
$|A| = |B|$ oder $|A|, |B| \geq 2^m - 1$.

Strukturen. O.B.d.A.
$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$
$A = \{1, \dots, n_a\}$
$a_0 = 0$ und $a_n = n_a$

$\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.
$B := \{1, \dots, n_b\}$.
$b_0 = 0$ und $b_n = n_b$.

Invariante. Nach Runde i:
Gezogen: $a_1, \dots, a_i$, $b_1, \dots, b_i$.
Für alle $j, j' \in \{0, \dots, i, n\}$:
1. $a_j < a_{j'}$ gdw. $b_j < b_{j'}$ und
2. $|A(j, j')| = |B(j, j')|$ oder
$$\left.\begin{array}{l}|A(j,j')| \\ |B(j,j')|\end{array}\right\} \geq 2^{m-i} - 1.$$
$B(j, j') = \{b : b_j < b < b_{j'} \vee b_{j'} < b < b_j\}$

EF-Spiele auf linearen Ordnungen

Theorem.

Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{Die Duplikatorin gewinnt das Spiel } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A| = |B| \quad \text{oder} \quad |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Wichtige Variante des m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiels:

Spiel $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ mit unbeschränkter Zugzahl.

Hier wählt der Herausforderer zunächst eine Zahl $m \geq 0$ und dann wird das m-Runden Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ gespielt.

Theorem (Satz von Ehrenfeucht). Sei σ eine Signatur, $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen mit $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}((\mathcal{A}, \overline{a}), (\mathcal{B}, \overline{b}))$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m((\mathcal{A}, \overline{a}), (\mathcal{B}, \overline{b}))$

11.6 Der Satz von Ehrenfeucht

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\hat{=}$ Gewinnstrategie)

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Beobachtung.

D hat eine Gewinnstrategie in $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. sie

- für jeden Zug a_1 von H in $\mathcal{A}$ ein Element $b_1 \in B$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat und
- für jeden Zug b_1 von H in $\mathcal{B}$ ein Element $a_1 \in A$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat.

Theorem. Für $m \geq 0$: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Beweis des Satzes

Intuition. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, $\overline{a}' \in A^k, \overline{b}' \in B^k$ und $m \geq 0$.
Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$ genau dann gilt, wenn die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$ gewinnt, d.h. eine Gewinnstrategie hat.

Theorem. Für $m \geq 0$: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Beobachtung.

D hat eine Gewinnstrategie in $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. sie

- für jeden Zug a_1 von H in $\mathcal{A}$ ein Element $b_1 \in B$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat und
- für jeden Zug b_1 von H in $\mathcal{B}$ ein Element $a_1 \in A$ wählen kann, so dass sie eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}', a_1, \mathcal{B}, \overline{b}', b_1)$ hat.

Es bietet sich daher ein Beweis des Satzes per Induktion über m an.

Der Basisfall $m = 0$.

Sei $m = 0$.

Zu zeigen.

$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b}')$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Der Basisfall $m = 0$.

Sei $m = 0$.

Zu zeigen.

$(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b}')$ gdw. D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$.

Beweis.

D gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

gdw.

$h : a'_1 \mapsto b'_1, \dots, a'_l \mapsto b'_l$ ein partieller Isomorphismus ist.

Daher ist zu zeigen, dass dies genau dann gilt, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Genau das besagt das schon bewiesene Lemma.

Theorem. Für $m \geq 0$:
$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ gdw.
D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

Lemma.
Folgende Aussagen äquivalent:
1. $h : A' \to B'$ mit $h(a_i) = b_i$ ist partieller Isom.
2. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ atomar:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
3. $\psi(x_1, \dots, x_k)$ quantorenfrei:
   $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ gdw. $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$
4. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \overline{b})$

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\widehat{=}$ Gewinnstrategie)

m-Isomorphietypen

Als Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Ehrenfeucht verwenden wir folgende induktiv definierte Formeln $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$:

m-Isomorphietypen oder Hintikka-Formeln. Sei σ eine Signatur.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$

m-Isomorphietypen

Als Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Ehrenfeucht verwenden wir folgende induktiv definierte Formeln $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$:

m-Isomorphietypen oder Hintikka-Formeln. Sei σ eine Signatur.
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

und für $m \geq 0$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \big\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \big\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \big\}.$$

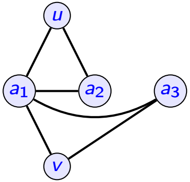
Beispiel

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$
$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a\in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

$m = 0$.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},uv}(x_1,x_2) := \begin{pmatrix} \neg E(x_1,x_2) & \wedge & \neg E(x_2,x_1) & \wedge \\ \neg E(x_1,x_1) & \wedge & \neg E(x_2,x_2) & \wedge \\ \neg x_1 = x_2 & \wedge & \neg x_2 = x_1 & \wedge \\ x_1 = x_1 & \wedge & x_2 = x_2 & \end{pmatrix}.$$

Graph $\mathcal{A}$.



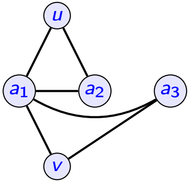
Beispiel

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \right\}$$
$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \right\}$$

$m = 0.$

$$\varphi^0_{\mathcal{A},uv}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \neg E(x_1, x_2) & \wedge & \neg E(x_2, x_1) & \wedge \\ \neg E(x_1, x_1) & \wedge & \neg E(x_2, x_2) & \wedge \\ \neg x_1 = x_2 & \wedge & \neg x_2 = x_1 & \wedge \\ x_1 = x_1 & \wedge & x_2 = x_2 & \end{pmatrix}.$$

Graph $\mathcal{A}$.



$m > 0.$

$$\varphi^1_{\mathcal{A},uv}(x_1, x_2) :=$$
$$\exists x_3 \begin{pmatrix} E(x_1, x_3) & \wedge & E(x_2, x_3) & \wedge \dots \\ \neg x_3 = x_1 & \wedge & \neg x_2 = x_3 & \wedge \\ \varphi^0_{\mathcal{A},uv} \cdots & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (\varphi^0_{\mathcal{A},uva_1} \text{ für } a = a_1) \\ x_1 \hat{=} u \quad x_2 \hat{=} v \\ x_3 \hat{=} a_1 \end{pmatrix}$$

$\wedge \dots$ (entspr. für $a = a_2, a_3, a = u, a = v$)

m-Isomorphietypen

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \right\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beobachtung.

- Der Quantorenrang von $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ ist genau m.

m-Isomorphietypen

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a \in A} \{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \}$$

Beobachtung.

- Der Quantorenrang von $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ ist genau m.

- Wir haben bereits bewiesen, dass es für jedes $m \geq 0$ und jede feste Menge X von Variablen nur eine endliche Anzahl paarweise nicht-äquivalenter Formeln mit Quantorenrang $\leq m$ und freien Variablen aus X gibt.

  Weil hier der Quantorenrang m und die freien Variablen $x_1, \dots, x_{k+1}$ beschränkt sind, sind die großen Konjunktionen und Disjunktionen endlich, auch wenn das Universum A unendlich groß ist.

Ein technisches Hilfslemma

Lemma.

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ und $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis $3 \Rightarrow 2$

Beweis $(3) \implies (2)$.

Voraussetzung: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$

Zu zeigen: $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Lemma.
1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis $3 \Rightarrow 2$

Beweis $(3) \implies (2)$.

Voraussetzung: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$

Zu zeigen: $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Angenommen $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{a}]$ und $\mathrm{qr}(\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}) = m$

folgt sofort $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Lemma.
1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beweis $1 \Longleftrightarrow 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$$\mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \big\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \big\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\}$$

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$$\mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$$

gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a\in A} \left\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\}$$

Beweis $1 \iff 2$

Beweis $(1) \iff (2)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Der Beweis folgt per Induktion über m.

Für $m = 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$

gdw. $\mathcal{B} \models \varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$ (haben wir eben bewiesen).

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^{\mathbf{0}}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$

$\varphi^{m+\mathbf{1}}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge_{a\in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\}$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge \Big\{\psi(\overline{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\Big\}$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$\bigwedge_{a\in A} \left\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\right\}$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Longleftrightarrow$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beweis 2 $\Longleftarrow$ 1

Für $m > 0$ gilt:

$\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Longleftrightarrow$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt

$\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow}$ für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$ und

für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$,
so dass $\mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b]$

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a\in A} \left\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\}$$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}) \\
\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt} \\
\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow}\ & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A}, \bar{a}a}[\bar{b}b] \text{ und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A}, \bar{a}a}[\bar{b}b] \\
\Longleftrightarrow\ & \mathcal{B} \models \Big(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A}, \bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \ \wedge\ \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A}, \bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1})\Big)\ [\bar{b}]
\end{aligned}
$$

Lemma.

1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A}, \bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A}, \bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A}, \bar{a}}(\bar{x}) := \bigwedge_{a \in A} \big\{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A}, \bar{a}, a}(\bar{x}, x_{k+1})\big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \big\{\varphi^m_{\mathcal{A}, \bar{a}, a}(\bar{x}, x_{k+1})\big\}$$

Beweis $2 \Longleftrightarrow 1$

Für $m > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathtt{D} \text{ gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}) \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathtt{D}\ \mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \text{ gewinnt} \\
\overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow} \quad & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b] \text{ und} \\
& \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \\
& \qquad \text{so dass } \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}[\bar{b}b] \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{B} \models \Big(\bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \ \wedge\ \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{x}, x_{k+1}) \Big) [\bar{b}] \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}].
\end{aligned}$$

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{ \psi(\bar{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \big\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \big\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1}) \big\}$$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$

Beweis $(1) \Longrightarrow (3)$.

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Lemma.
1. $\mathtt{D}$ gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \Big\{ \psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \Big\}$$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \left\{ \exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \right\}$$

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3)

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3).

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Angenommen, D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Lemma.
1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$\bigwedge \Big\{\psi(\bar{x}) : \psi$ ist atomar oder negiert atomar und $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\Big\}$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{x}) :=$

$\bigwedge_{a\in A} \left\{\exists x_{k+1}\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\} \wedge$
$\forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \left\{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a},a}(\bar{x}, x_{k+1})\right\}$

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3)

Beweis (1) $\Longrightarrow$ (3).

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Fall $m = 0$ wurde schon bewiesen. Sei nun $m > 0$.

Angenommen, D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Sei $\psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in$ FO mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ und $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$.

Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}'] \iff \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$

$$\bar{a}' := (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \qquad \bar{b}' := (b_{i_1}, \dots, b_{i_n}).$$

ψ ist eine Boolsche Kombination aus Formeln

1. mit Quantorenrang $< m$ und
2. Formeln der Form $\exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Es reicht daher, Formeln des Typs 2 zu betrachten.

Lemma.

1. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

$\Leftrightarrow$ 2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$

$\Leftrightarrow$ 3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hintikka-Formeln.

$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge \Big\{\psi(\overline{x}) : \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\Big\}$$

$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) :=$

$$\bigwedge_{a \in A} \{\exists x_{k+1} \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\} \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \{\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1})\}$$

Beweis $1 \iff 3$

Sei also $\psi \; = \; \exists x_{k+1} \; \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\, \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\, \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass $\mathtt{D}$ $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a] \iff \mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b].$$

Mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$ folgt daraus $\mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b]$ und daher $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$.

Beweis $1 \Longleftrightarrow 3$

Sei also $\psi = \exists x_{k+1}\ \chi(\bar{x}', x_{k+1})$, wobei $\mathrm{qr}(\chi) = m - 1$.

Angenommen, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}']$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$.

Wähle ein solches a.

Da D $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gewinnt, gibt es ein $b \in B$, so dass D $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$ gewinnt.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a] \iff \mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b].$$

Mit $\mathcal{A} \models \chi[\bar{a}', a]$ folgt daraus $\mathcal{B} \models \chi[\bar{b}', b]$ und daher $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}']$.

Der Fall $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}']$ folgt analog.

Ein technisches Hilfslemma

Lemma.

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ und $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.
3. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem (Satz von Ehrenfeucht).

Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen,
$\overline{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A^k$ und $\overline{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B^k$.

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   1.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   1.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$
2. Für alle $m \geq 0$ sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   2.1 $(\mathcal{A}, \overline{a}') \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}')$
   2.2 Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}', \mathcal{B}, \overline{b}')$

(Erinnerung: „gewinnt“ $\widehat{=}$ Gewinnstrategie)

Bemerkung

Bemerkung. Sei σ eine Signatur und $m \in \mathbb{N}$.

Aus dem technischen Hilfslemma folgt, dass $\equiv_m$ nur *endlich* viele Äquivalenzklassen hat.

Die Äquivalenzklasse, zu der eine gegebene Struktur $\mathcal{A}$ gehört, wird dabei durch den Satz $\varphi^m_{\mathcal{A}}$ definiert.

11.7 Anwendungen von EF-Spielen

Wiederholung: Beispiele dieses Abschnitts

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge }\}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s^{\mathcal{A}} \text{ nach } t^{\mathcal{A}} \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Zählen in der Prädikatenlogik

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\mathrm{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge }\}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge }\}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle
$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) & \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\} \\ \mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) & \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}. \end{array}$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle
$$\mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) \quad \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\}$$
$$\mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) \quad \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Theorem. Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Zählen in der Prädikatenlogik

Frage 1: Kann man in FO zählen?

Ist die Klasse

$$\text{EVEN}_{\leq} := \{(A, \leq) : A \text{ ist endlich und gerader Länge } \}$$

in der Klasse $\mathcal{O}$ aller endlichen linearen Ordnungen FO-definierbar?

Das ist letztlich die Frage, ob die Prädikatenlogik zählen kann.

Antwort. Die Klasse $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{O}$.

Für $m \geq 0$ wähle
$$\mathcal{A}_m := (A, \leq^{\mathcal{A}}) \quad \text{mit } A = \{1, \dots, 2^m\}$$
$$\mathcal{B}_m := (B, \leq^{\mathcal{B}}) \quad \text{mit } B = \{1, \dots, 2^m + 1\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_m \in \text{EVEN}_{\leq}$ und $\mathcal{B}_m \in \mathcal{O} \setminus \text{EVEN}_{\leq}$.

Wie in Video 12.2 bewiesen, gewinnt D das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$, und, nach dem Satz von Ehrenfeucht, gilt $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$

Somit ist $\text{EVEN}_{\leq}$ nicht in $\mathcal{O}$ definierbar (siehe Video 11.3).

Definition. $\mathcal{K}$ Klasse von σ-Strukturen.

Klasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ FO-definierbar, wenn es $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gibt, so dass

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models \psi\}.$$

$\text{Mod}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Lemma. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{K}$ Klassen von σ-Strukturen.

Wenn für alle $m \geq 1$ $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathcal{K}$ existieren, so dass

- $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$,

dann ist $\mathcal{C}$ nicht in $\mathcal{K}$ FO-definierbar.

Theorem. Seien $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$ endliche lineare Ordnungen. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{D gewinnt } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$
$$\iff$$
$$|A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| \geq 2^m - 1.$$

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

s, t Konstantensymbole

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{ \mathcal{A} \quad : \quad \mathcal{A} \quad \sigma\text{-Struktur, es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

~~s, t Konstantensymbole~~

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t)\ \sigma\text{-Struktur},\ s, t \in A,\ \text{es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\ \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E, s, t\}$

~~s, t Konstantensymbole~~

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t)\ \sigma\text{-Struktur}, s, t \in A, \text{ es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\}.$$

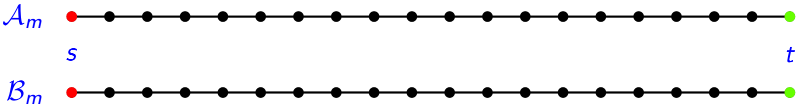
Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Antwort. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

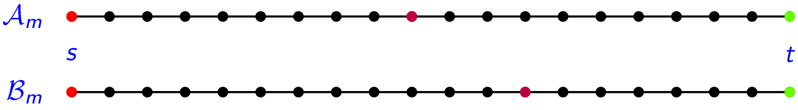
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

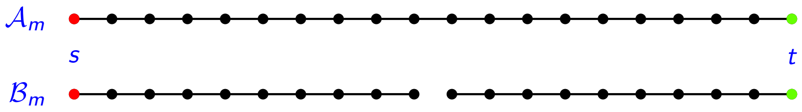
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

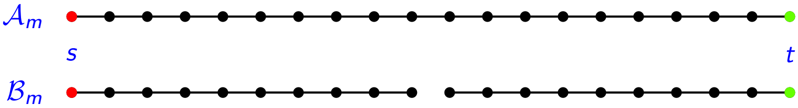
Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.



Beweis: Idee 1

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

Versuch 1. Wir versuchen eine ähnliche Idee wie bei den Ordnungen.

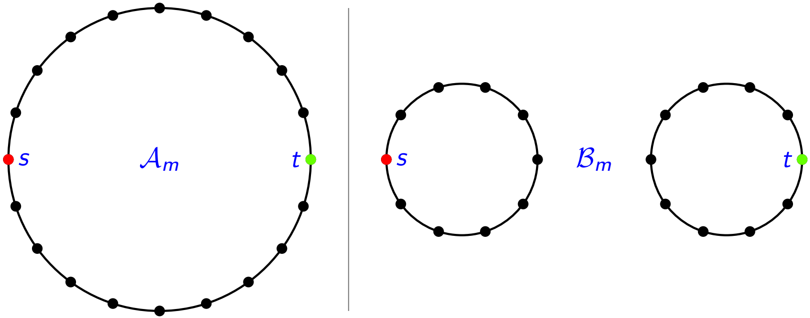


Problem. $\mathcal{B}_m$ hat jetzt 4 Knoten vom Grad 1, $\mathcal{A}_m$ aber nur 2.

Beweis: Idee 2

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

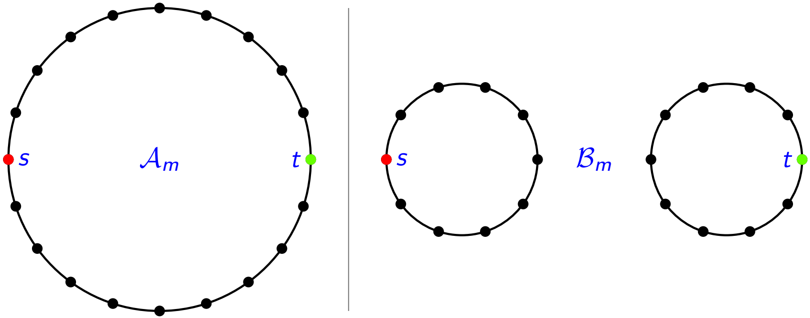
Versuch 2. Um das Problem zu vermeiden wählen wir statt langen Pfaden einfach lange Kreise.



Beweis: Idee 2

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

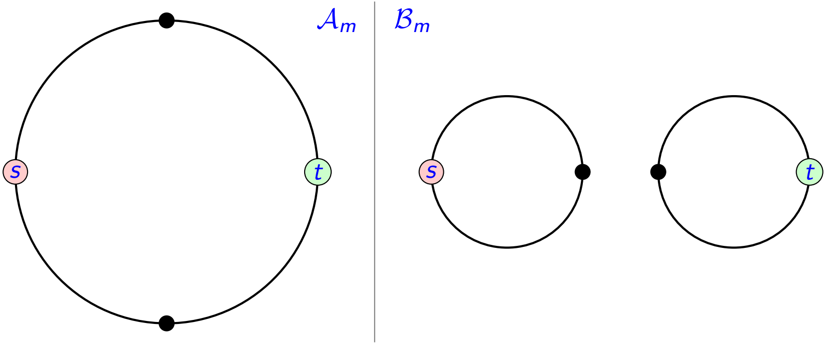
Versuch 2. Um das Problem zu vermeiden wählen wir statt langen Pfaden einfach lange Kreise.



Frage. Wie lang müssen die Kreise sein?

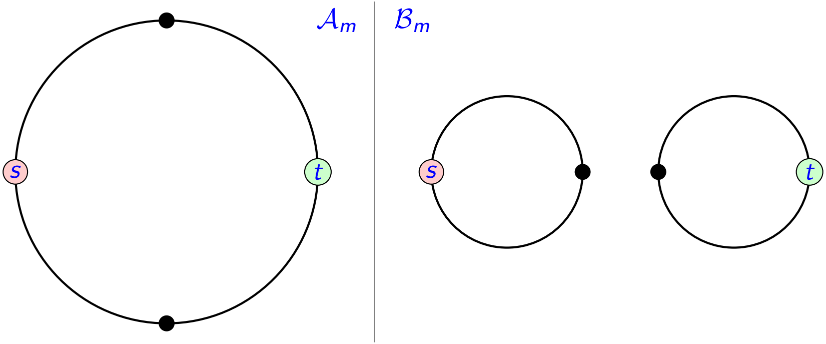
Kreislänge für $m = 0$.

Das 0-Runden Spiel.



Kreislänge für $m = 0$.

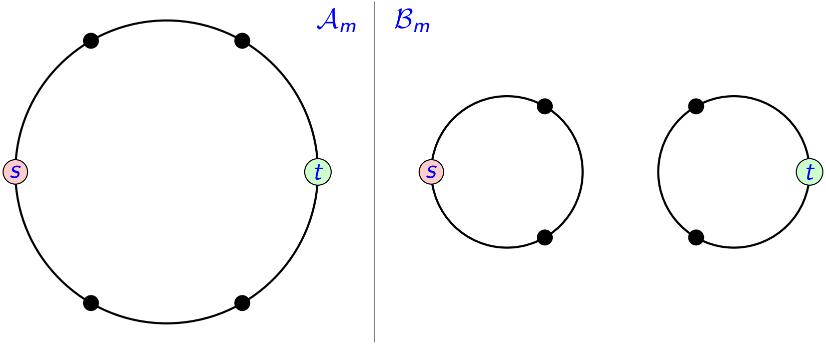
Das 0-Runden Spiel.



Für $m = 0$ muss in jede Richtung 1 Knoten zwischen s und t liegen.

Kreislänge für $m = 1$.

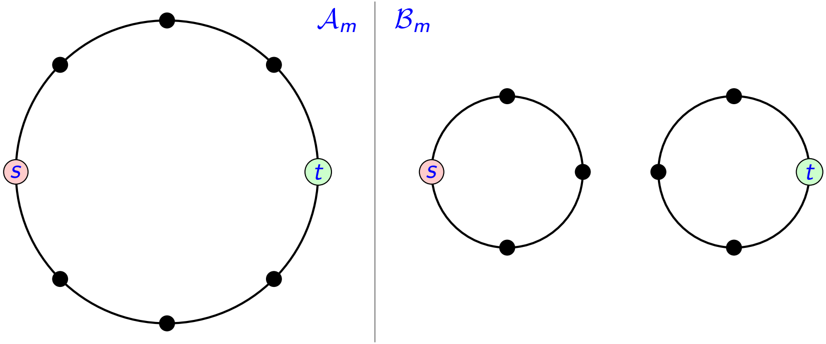
Das 1-Runden Spiel.



Für $m = 1$ müssen in jede Richtung 2 Knoten zwischen s und t liegen.

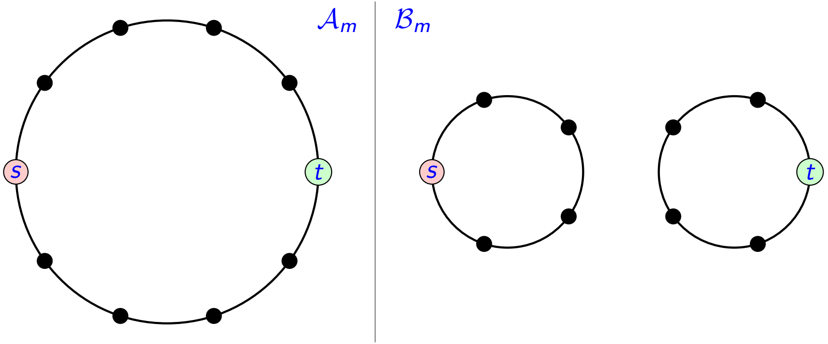
Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



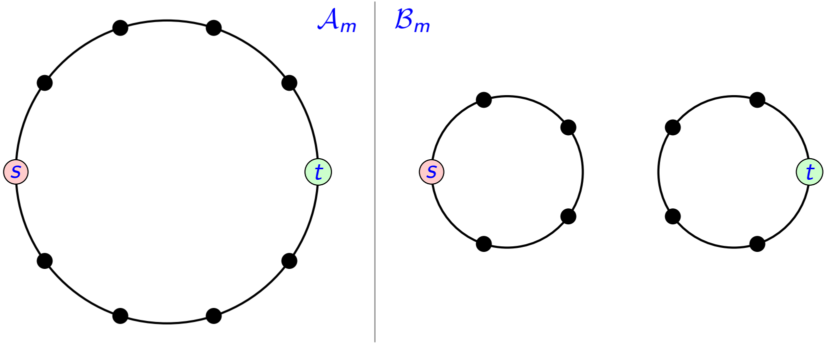
Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?



Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

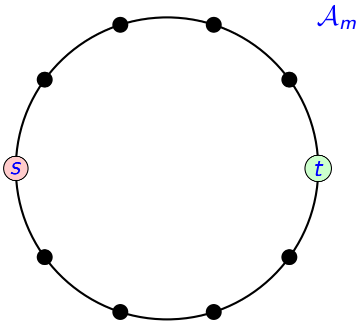
Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?

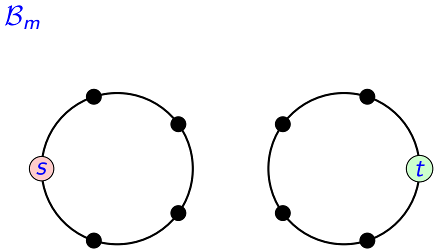


Für $m = 2$ müssen in jede Richtung 4 Knoten zwischen s und t liegen.

Kreislänge für $m = 2$: 3 oder 4?

Das 2-Runden Spiel. 3 oder 4 Knoten zwischen s und t?





Für $m = 2$ müssen in jede Richtung 4 Knoten zwischen s und t liegen.

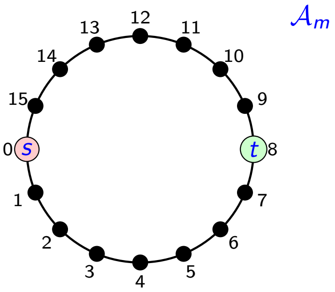
Beobachtung: Die Zahl der Knoten zwischen s und t verdoppelt sich in jedem Schritt.

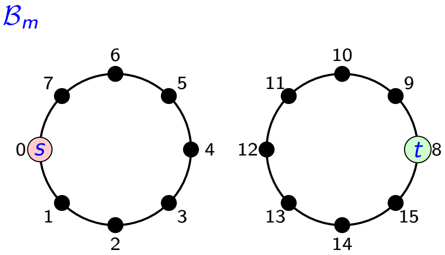
Beweis, dass Reach nicht definierbar ist

Behauptung. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beweis. Für $m \geq 0$ sei $M = 2^{m+2}$ und
$\mathcal{A}_m := (A_m, E^{\mathcal{A}_m})$ ein Kreis der Länge M und
$\mathcal{B}_m := (B_m, E^{\mathcal{B}_m})$ zwei disjunkte Kreise der Länge $\frac{1}{2}M$.

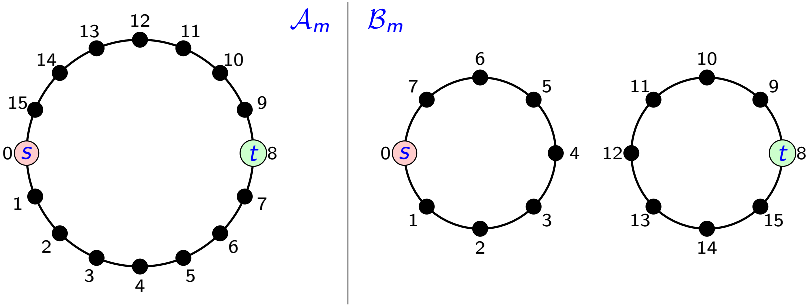
Sei $A_m := \{a_0, \dots, a_M\}$ und $B_m := \{b_0, \dots, b_M\}$.





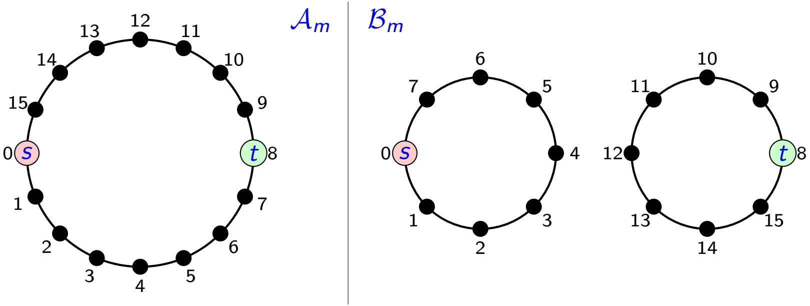
Beweis, dass REACH nicht definierbar ist

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



Beweis, dass Reach nicht definierbar ist

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$

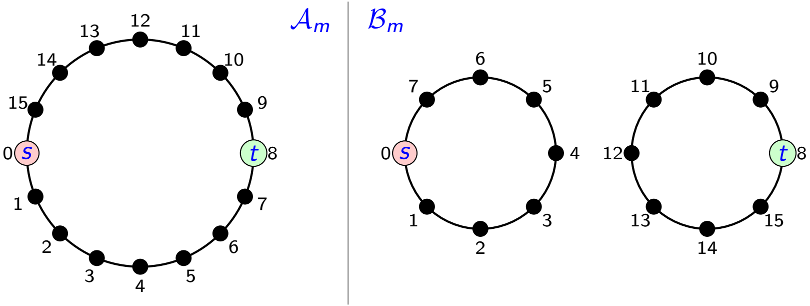


Notation.
$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$
$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$
$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Beweis, dass Reach nicht definierbar ist

Notation.
$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$
$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$
$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



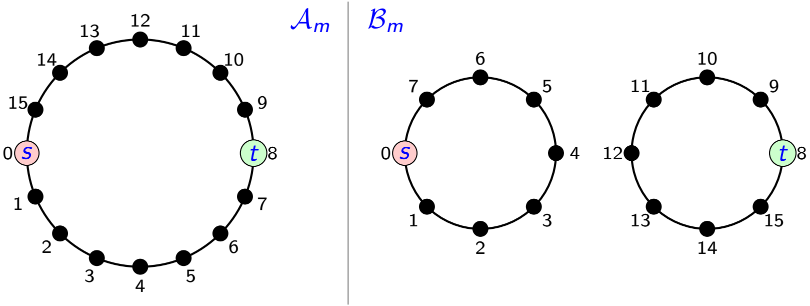
Invariante $(\star)$. Ang., nach i Runden sind $a_{j_1}, \ldots, a_{j_i}$, $b_{j_1}, \ldots, b_{j_i}$ gezogen.

Für alle $l, l' \in \{0, j_1, \ldots, j_i, \frac{M}{2}\}$ und $r \leq 2^{m-i}$:

$$a_l \oplus r = a_{l'} \text{ gdw. } b_l \oplus r = b_{l'}.$$

Beweis, dass REACH nicht definierbar ist

Behauptung. D gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}_m, a_0, a_{\frac{M}{2}}, \mathcal{B}_m, b_0, b_{\frac{M}{2}})$



Invariante $(\star)$. Ang., nach i Runden sind $a_{j_1}, \dots, a_{j_i}$, $b_{j_1}, \dots, b_{j_i}$ gezogen.

Für alle $l, l' \in \{0, j_1, \dots, j_i, \frac{M}{2}\}$ und $r \leq 2^{m-i}$:

$$a_l \oplus r = a_{l'} \text{ gdw. } b_l \oplus r = b_{l'}.$$

Notation.

$a_j \oplus r = a_{j+r \mod M}$

$b_j \oplus r = b_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

$b'_j \oplus r = b'_{j+r \mod \frac{M}{2}}$

Spielverlauf.

Nach Runde $i = m$:
$(\star) \Rightarrow h : a_{j_l} \mapsto b_{j_l}$ part Isom.

Nach Runde $i = 0$:

$(\star)$ nach Konst. erfüllt.

Wenn $(\star)$ nach Runde i gilt, kann D $(\star)$ nach Runde $i+1$ erfüllen.

Erreichbarkeit

Frage 2: Erreichbarkeit.

Signatur $\sigma := \{E\}$

E 2-stelliges Relationssymbol

Ist folgende Klasse FO-definierbar?

$$\text{REACH} := \{(\mathcal{A}, s, t) : (\mathcal{A}, s, t)\ \sigma\text{-Struktur},\ s, t \in A,\ \text{es gibt einen Pfad von } s \text{ nach } t\ \}.$$

Dahinter steht die Frage, ob die Prädikatenlogik Schleifenkonstrukte oder Rekursion ausdrücken kann.

Antwort. REACH ist nicht FO-definierbar.

Beispiele Nicht-Definierbarer Klassen

Nicht-Definierbare Klassen.

- REACH ist nicht FO-definierbar.
- $\text{EVEN}_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar.
- Die Sprache aller Wörter $w \in \{a, b\}^+$ mit genauso vielen a's wie b's ist nicht definierbar.
- Die Klasse aller unendlichen Strukturen.
- ...

Nicht-Axiomatisierbare Klassen.

- Die Klasse aller endlichen Strukturen.
- ...