8. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 11.12.2022–15.12.2022)

Aufgabe 1. Totalitätsproblem (Fortsetzung)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *co-semi-entscheidbar*, falls $\overline{L}$ semi-entscheidbar ist. Wie im 7. Aufgabenblatt definieren wir das *Totalitätsproblem* durch:

$$T = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält bei jeder möglichen Eingabe } x \in \{0,1\}^*\}.$$

(a) Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass, wenn $A \leq B$ und B co-semi-entscheidbar ist, dann auch A co-semi-entscheidbar ist.

(b) Schlussfolgern Sie aus (a), dass T nicht co-semi-entscheidbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass T nicht semi-entscheidbar ist.

(d) Schlussfolgern Sie aus (c), dass nicht $T \leq K$ gilt, wobei K das spezielle Halteproblem ist.

Anmerkung: Dies zeigt, dass T in einem gewissen Sinne „echt schwerer“ ist als alle semi-entscheidbaren und alle co-semi-entscheidbaren Sprachen.

Aufgabe 2. (Semi-)Entscheidbarkeit

Ist die Sprache

$$L \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert ein Wort der Länge } 1\}$$

semi-entscheidbar? Ist sie entscheidbar?

Hinweis: Sie können die Existenz einer *universellen* Turing-Maschine, die eine beliebige andere Turing-Maschine “simulieren” kann, annehmen.

Aufgabe 3. Satz von Rice

Ziegen Sie für jede der folgenden Sprachen entweder, dass diese unentscheidbar ist (mittels Satz von Rice), oder, dass sie entscheidbar ist.

(a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid |T(M_w)| = 12\}$

(b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ besitzt eine gerade Anzahl von Zuständen}\}$

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid |T(M_w)| = \infty\}$

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \varepsilon \in T(M_w)\}$

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid T(M_w) \text{ enthält mindestens ein Wort ungerader Länge}\}$

Aufgabe 4. Fleißige Biber

Ein *unärer fleißiger Biber* ist eine Turing-Maschine

$$B = (\{z_0, \dots, z_n\}, \{1\}, \{1, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_n\})$$

mit n Nicht-Endzuständen, die bei Eingabe des leeren Wortes in endlich vielen Schritten hält und dabei die maximal mögliche Anzahl 1'en aufs Band schreibt, verglichen mit allen anderen Turing-Maschinen, welche die gleichen Voraussetzungen erfüllen (n Nicht-Endzustände, Alphabete $\{1\}$ und $\{1, \Box\}$ und Halten bei leerer Eingabe).

a) Geben Sie eine Überführungsfunktion δ an, sodass die Turing-Maschine

$$(\{z_0, z_1, z_2\}, \{1\}, \{1, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_2\})$$

bei leerer Eingabe möglichst viele 1'en aufs Band schreibt und hält.

b) Ist die Sprache $\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ ist ein fleißiger Biber}\}$ entscheidbar?
Sie können davon ausgehen, dass die folgende Funktion unberechenbar ist: $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $b(n)$ ist die Anzahl 1'en, die ein fleißiger Biber mit n Nicht-Endzuständen aufs Band schreibt. Außerdem können Sie die Existenz einer *universellen* Turing-Maschine, die eine beliebige andere Turing-Maschine "simulieren" kann, annehmen.