FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 11. Dezember 2022

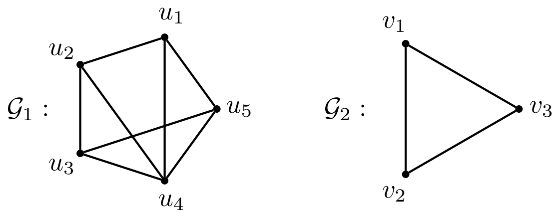
7. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 12.12.2022.

Für dieses Blatt sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur wobei E ein zweistelliges Relationsymbol ist.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Graphen, welche wir als σ-Strukturen sehen, deren Universum die Knotenmenge des Graphen ist und deren Kantenmenge durch die Interpretation von E kodiert wird:



Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Es gilt $\mathcal{G}_1 \to_{hom} \mathcal{G}_2$.

(ii) Es gilt $\mathcal{G}_2 \to_{hom} \mathcal{G}_3$.

(iii) Es gilt $\mathcal{G}_1 \to_{hom} \mathcal{G}_3$.

Aufgabe 2

Seitdem die Logikzwerge in den Wänden des unendlichen Tunnels schillernde Edelsteine gefunden haben[1], ist eine regelrechte Manie ausgebrochen. Die Faszination mit den vielen Farben die die Edelsteine reflektieren ist so groß, dass kaum einem Zwerg auffällt, dass immer wieder jemand beim Schürfen in die Unendlichkeit fällt. Ein Zwerg jedoch ist unbeeindruckt. «Am Ende sehen die ganzen Steine doch alle gleich aus.», behauptet Karl Kühl.

Wir nennen einen Graphen G *k-färbbar*, für $k \in \mathbb{N}$, wenn eine Funktion $f : V(G) \to [k]$ existiert, sodass $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$. Weiter sei $\mathcal{K}_k$ die σ-Struktur zum vollständigen Graphen K_k.[2]

Sei G ein ungerichteter Graph, sei $\mathcal{G}$ die zu G gehörende σ-Struktur und sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie: G ist genau dann k-färbbar, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{K}_k$ gibt.

Aufgabe 3

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}$ drei σ-Strukturen, wobei $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Wenn kein Homomorphismus von $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{B}$ existiert, dann existiert auch kein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei beliebige σ-Strukturen. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind isomorph genau dann, wenn ein bijektiver Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, oder umgekehrt, existiert.

[1] «We're rich!»

[2] Es gilt $K_k = (\{v_1, \dots, v_k\}, \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j \text{ und } i, j \in [k]\})$.