

## 12. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 30.01.2023.

### Aufgabe 1

Sei  $\sigma = \{E\}$  eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol  $E$ . Betrachten Sie folgende  $\sigma$ -Strukturen aus Tutorium 11. Zur Erinnerung: Die Duplikatorin gewinnt das Spiel  $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .



Geben Sie eine unterscheidende Formel  $\varphi$  für  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  an, wobei  $\text{qr}(\varphi)$  minimal ist.

### Aufgabe 2

Sei  $\tau$  eine relationale Signatur und seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$   $\tau$ -Strukturen mit den Universen  $A$  und  $B$ .

- (i) Zeigen Sie: Wenn  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ , dann sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  elementar äquivalent.
- (ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  elementar äquivalent sind, dann gilt  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

### Aufgabe 3

Falsum öffnet die Türen zum Thronraum des Logikzwergekönigs mit einem gewaltigen Schwung. «Ha! Da bin ich alter Mann! Jetzt wird alles falsch!» Der Logikzwergekönig gibt sich standfest und erhebt sich von seinem Thron. «Nichts wird passieren, du Schelm! Die Logik der Logikzwerge lässt sich nicht so einfach verbiegen!»

Der Bösewicht grinst. «Ach wirklich?», erwidert er belustigt. «Aber was wenn die Logik schon von selbst nicht viel sagt?» Falsum kann sich kaum zusammenreißen und seine Herausforderung bricht förmlich aus ihm heraus. «Erklär mir doch bitte mal wie man ungerade und gerade Dinge unterscheidet!»

Sei  $\sigma = \{E\}$  eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol  $E$ .

Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen  $\sigma$ -Strukturen mit einem Universum gerader Größe ist, in der Klasse der endlichen, zusammenhängenden Graphen, nicht  $\text{FO}[\sigma]$ -definierbar.