FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 9. Februar 2023

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 14. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Regeln korrekt sind. Sie dürfen dafür keine der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

(i) $\dfrac{\Phi \Rightarrow \psi(c), \Delta}{\Phi \Rightarrow \exists x \psi(x), \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Die Regel ist korrekt. Angenommen, die Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ ist gültig. Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, die Φ erfüllt. Falls $\mathcal{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ ist nichts zu zeigen.

Sonst gilt $\mathcal{I} \models \psi(c)$ wegen der Gültigkeit der oberen Sequenz. Somit gilt $\mathcal{I} \models \exists x \psi(x)$, also ist die Regel korrekt.

(ii) Die Regel ist nicht korrekt. Sei $\sigma = \{P, c\}$ eine Signatur, wobei P ein 1-stelliges Relationssymbol ist und c ein Konstantensymbol. Sei $\Phi = \{\}$, $\psi(x) := P(x)$ und $\Delta = \{\psi(c)\}$. Die Sequenz $P(c) \Rightarrow P(c)$ ist ein Axiom und somit gültig. Allerdings ist die Sequenz $\exists x P(x) \Rightarrow P(c)$ nicht gültig: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit Universum $A = \{0, 1\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $c^{\mathcal{A}} = 1$. Es gilt $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, aber nicht $\mathcal{A} \models P(c)$. Somit ist die untere Sequenz nicht gültig, und die Regel ist nicht korrekt.

Aufgabe 2

Sei $\sigma = \{f, c\}$ eine Signatur, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist.

Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\forall x\, f(x) = x \;\Rightarrow\; f(f(c)) = c$$

Lösung zu Aufgabe 2

$$\begin{array}{r}
 \\
(\Rightarrow S) \\
(\forall\Rightarrow)
\end{array}
\begin{array}{c}
\hline
\{f(c) = c\} \Rightarrow \{f(c) = c\} \\
\hline
\{f(c) = c\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\} \\
\hline
\{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}
\end{array}
\text{ mit } \psi(x) := (f(x) = c),\ t := c,\ t' := f(c)$$

Aufgabe 3

Der Logikzwergenkönig liegt erschöpft am Boden. Es waren einfach zu viele Korrektheitsbeweise für ihn. Falsum dagegen sitzt zufrieden auf dem Thron. «Jetzt ist endlich alles falsch. Das habt ihr nun davon!»

Doch dann tritt Karl Kühl in den Thronsaal und stampft auf Falsum zu. «Du mieser Wicht! Du denkst wohl, dass es jetzt vorbei ist!» Falsum lacht laut. «Ja! Natürlich! Jetzt ist alles falsch und ihr könnt nichts mehr dagegen tun!»

«Achja? Hast du das auch wirklich durchdacht?» «Ich bin Falsum! Wenn sich jemand mit der Wahrheit der Falschheit auskennt, dann ja wohl ich!» «Aber hast du auch daran gedacht, dass wenn alles falsch ist auch alles wahr ist?»

Falsum guckt etwas verwirrt, dann begreift er es. «Nein! Sei leise du pedantischer Informatikgnom!» Karl packt Falsum am Schopf und zerrt ihn vom Thron. «Ha! Da alles falsch ist, ist auch wahr, dass die Logikzwerge immer gewinnen und, dass du zurück in deinen Tunnel musst. Ich zeigs dir!» «Nein! Alles nur das nicht! Nein!»

Sei $\sigma = \{L, R, f\}$ eine Signatur, wobei L, R einstellige Relationssymbole sind und f ein einstelliges Funktionssymbol ist.[1]

Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\exists s \neg L(s),\ \forall b(\neg L(b) \to \exists a\ f(a) = a),\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s).$$

Lösung zu Aufgabe 3

$$
(\exists \Rightarrow)\ \dfrac{(\forall \Rightarrow)\ \dfrac{(\to\Rightarrow)\ \dfrac{(\exists \Rightarrow)\ \dfrac{(\forall \Rightarrow)\ \dfrac{(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow S)\ \dfrac{\overline{\neg L(c),\ R(d) \Rightarrow R(d),\ \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ f(d) = d,\ R(d) \Rightarrow R(f(d)),\ \forall s L(s)}\ (1)}{\neg L(c),\ f(d) = d,\ R(d),\ \neg R(f(d)) \Rightarrow \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ f(d) = d,\ R(d) \wedge \neg R(f(d)) \Rightarrow \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ f(d) = d,\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ \exists a\ f(a) = a,\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s)} \quad \overline{\neg L(c),\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \neg L(c), \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ \neg L(c) \to \exists a\ f(a) = a,\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s)}}{\neg L(c),\ \forall b(\neg L(b) \to \exists a\ f(a) = a),\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s)}}{\exists s \neg L(s),\ \forall b(\neg L(b) \to \exists a\ f(a) = a),\ \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x))) \Rightarrow \forall s L(s)}
$$

(1) mit $\psi(x) := R(x)$, $t := f(d)$ und $t' := d$.

[1] L steht dafür, dass die Logikzwerge gewinnen.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\to\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\to)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (*)$$

$$(\exists\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*) \qquad (\Rightarrow\exists)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(S\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \qquad (=)\ \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.