

Stochastik für Informatiker:innen - Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag, 26.05.2023, 18:00 Uhr

Aufgabe 1

- a) Sei X die Anzahl der Atome einer radioaktiven Substanz, die in einer Sekunde zerfallen. Diese Zahl sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde mehr als zwei Zerfälle beobachtet werden? Ist diese Wahrscheinlichkeit größer, als die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde weniger als zwei Zerfälle beobachtet werden?
- b) Ein Land hat 4 Bewohnerinnen in einem Dorf und abzählbar unendlich viele Bewohnerinnen in der Hauptstadt. Eine Bewohnerin aus der Hauptstadt hat Y Freundinnen aus diesem Land, wobei Y Zipf-verteilt mit Parameter 4 ist. Darüber hinaus wissen wir, dass die Bewohnerin keine Freundin aus der Hauptstadt hat, falls nicht alle Bewohnerinnen des Dorfes ihre Freundinnen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens eine Freundin aus der Hauptstadt hat?

Hinweis: Sie können die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \pi^4/90$ verwenden.

6 Punkte

Aufgabe 2

Die Anzahl der Studierenden, die die Sprechstunde für die Veranstaltung "Stochastik für Informatiker" besuchen, ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Diese studieren jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ unabhängig voneinander Informatik. Sei X die Anzahl der Informatikstudierenden, die die Sprechstunde besuchen, und Y die Anzahl der Studierenden, die die Sprechstunde besuchen, aber nicht Informatik studieren. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

Hinweis: Die Zufallsvariable X ist Poisson-verteilt mit Parameter $p\lambda$. Analog ist Y Poisson-verteilt mit Parameter $(1 - p)\lambda$.

6 Punkte

Aufgabe 3

Wir betrachten das Experiment, das aus dem vierfachen Werfen einer fairen Münze besteht. Hierbei seien

X : Anzahl Köpfe in den ersten drei Würfeln,

Y : Anzahl Köpfe im dritten und vierten Wurf.

- a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.
- b) Geben Sie die Verteilungen von X sowie von Y an.
- c) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y an.
- d) Sind X und Y unabhängig?

e) Seien

Z : Anzahl Köpfe in den letzten drei Würfeln,
 W : Anzahl Köpfe im zweiten und dritten Wurf.

Ist die gemeinsame Verteilung von X und Y die gleiche wie die gemeinsame Verteilung von Z und W ? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

6 Punkte

Hinweise:

- Ihre Lösungen geben Sie bitte gut lesbar bis Freitag, 26.05.2023, 18:00 Uhr in Ihrem Tutorium ab. Zudem besteht die Möglichkeit, Ihre Lösungen als PDF per E-Mail an den Leiter oder die Leiterin Ihres Tutoriums zu schicken. Wir behalten uns vor, nicht lesbare Lösungen konsequent mit null Punkten zu bewerten.
- Ihre Lösungen werden in den Tutorien in KW 22 besprochen.
- Fällt Ihr Tutorium auf einen Feiertag, dürfen Sie in dieser Woche ein anderes Tutorium besuchen.