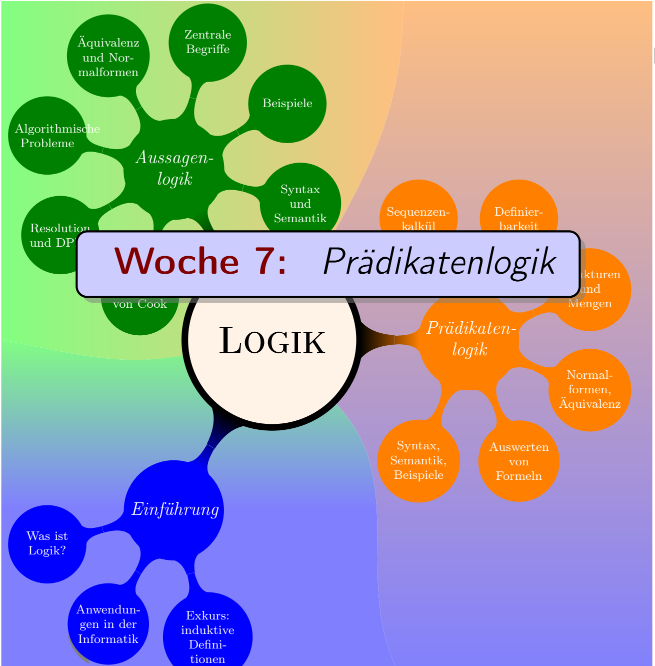
Logik im Wintersemester 2022/2023

Woche 7: *Prädikatenlogik*



Nov.	17	18	19	20	21	22	23	*Einführung*
	24	25	26	27	28	29	30	*Aussagenlogik*
	31	1	2	3	4	5	6	*Normalformen*
	7	8	9	10	11	12	13	*Resolution*
Dez.	14	15	16	17	18	19	20	*Kompaktheit*
	21	22	23	24	25	26	27	*DPLL, Satz von Cook*
	28	29	30	1	2	3	4	*Strukturen und FO*
	5	6	7	8	9	10	11	*Prädikatenlogik*
	12	13	14	15	16	17	18	*Komplexität von FO*
Jan.	19	20	21	22	23	24	25	*Weihnachten*
	26	27	28	29	30	31	1	*Neujahr*
	2	3	4	5	6	7	8	*Normalformen*
	9	10	11	12	13	14	15	*Definierbarkeit*
	16	17	18	19	20	21	22	*EF-Spiele*
Feb.	23	24	25	26	27	28	29	*EF-Spiele*
	30	31	1	2	3	4	5	*Sequenzenkalkül AL*
	6	7	8	9	10	11	12	*Sequenzenkalkül FO*
	13	14	15	16	17	18	19	*Ausblick*

7.1 Einleitung

Grenzen der Aussagenlogik

Die Aussagenlogik formalisiert das Schließen über Aussagen die entweder wahr oder falsch sein können.

Die eigentliche Bedeutung der Aussagen ist dabei irrelevant.

Um über Aussagen der folgenden Form zu sprechen, ist die Aussagenlogik also nicht geeignet:

> Für jede relle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl $n > x$ die größer als x ist.

Wir müssen über verschiedene Arten von Objekten sprechen.

Einige Aussagen müssen für alle Objekte gelten, andere nur für einige.

Prädikatenlogik

Wir führen eine Logik ein, in der solche Aussagen gemacht werden können.

Prädikatenlogik

Wir führen eine Logik ein, in der solche Aussagen gemacht werden können.

Intuitiv haben wir

- Variablen für Elemente einer Menge von Objekten, z. B. den rellen Zahlen, anstatt nur wahr oder falsch.
- Möglichkeiten, Variablen zu vergleichen, z.B. $x < y$, $x = y$ abhängig vom Kontext.
- Verknüpfungen wie $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ um komplexere Formeln bilden zu können.
- Möglichkeiten um zu sagen, dass es ein Element gibt mit bestimmten Eigenschaften oder das alle Elemente bestimmte Eigenschaften haben.

$$\forall x\big(\mathbb{R}(x) \rightarrow \exists y(\mathbb{N}(y) \wedge x < y)\big)$$

Prädikatenlogik

Wir führen eine Logik ein, in der solche Aussagen gemacht werden können.

Intuitiv haben wir

- Variablen für Elemente einer Menge von Objekten, z. B. den rellen Zahlen, anstatt nur wahr oder falsch.
- Möglichkeiten, Variablen zu vergleichen, z.B. $x < y$, $x = y$ abhängig vom Kontext.
- Verknüpfungen wie $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ um komplexere Formeln bilden zu können.
- Möglichkeiten um zu sagen, dass es ein Element gibt mit bestimmten Eigenschaften oder das alle Elemente bestimmte Eigenschaften haben.

$$\forall x \big(\mathbb{R}(x) \rightarrow \exists y (\mathbb{N}(y) \wedge x < y) \big)$$

Um dies zu erreichen, müssen wir folgendes festlegen:

- Den Kontext in dem wir arbeiten, d.h. Relationen $<, +, \ldots$ die wir verwenden dürfen $\rightsquigarrow$ Strukturen
- Die logische Sprache in der wir die Eigenschaften ausdrücken wollen $\rightsquigarrow$ Prädikatenlogik

Relationen

Relationen

Definition. Sei $k \geq 1$ und A eine Menge.

1. A^k ist die Menge aller k-Tupel von Elementen aus A.
2. Eine k-stellige Relation auf A ist eine Teilmenge von A^k.

Bemerkung. Wir erlauben auch $k = 0$.

Eine nullstellige Relation $R \subseteq A^0$ ist entweder $\emptyset$ oder $\{()\}$.

Notation.

Für einige spezielle Relationssymbole wie $<, =$ benutzen wir Infix Notation.

Z.B. schreiben wir $a = b$ und $a < b$ statt $(a, b) \in =$ bzw. $(a, b) \in <$.

Eigenschaften binärer Relationen

Definition. Eine binäre Relation $R \subseteq A^2$ einer Menge A ist

- reflexiv, wenn $(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
- symmetrisch, wenn aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \in R$ folgt, für alle $a, b \in A$.
- antisymmetrisch, wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ zusammen $a = b$ impliziert, für alle $a, b \in A$.
- transitiv, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ immer $(a, c) \in R$ folgt, für alle $a, b, c \in A$.

Eigenschaften binärer Relationen

Definition. Eine binäre Relation $R \subseteq A^2$ einer Menge A ist

- reflexiv, wenn $(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
- symmetrisch, wenn aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \in R$ folgt, für alle $a, b \in A$.
- antisymmetrisch, wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ zusammen $a = b$ impliziert, für alle $a, b \in A$.
- transitiv, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ immer $(a, c) \in R$ folgt, für alle $a, b, c \in A$.

Definition. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

Beispiel. Einige Beispiele für Äquivalenzrelationen

- **Gleichheit**. Für jede Menge A

$$\{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$$

Relationen.

reflexiv:
$(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.

symmetrisch:
$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

antisymmetrisch:
$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.

transitiv:
$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Definition. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

Beispiel. Einige Beispiele für Äquivalenzrelationen

- Gleichheit. Für jede Menge A

$$\{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$$

- Gleichmächtigkeit. Für jede Menge A

$$\{(B, C) \in \mathcal{P}(A)^2 : B, C \text{ haben die gleiche Kardinalität}\}$$

Relationen.
reflexiv:
$(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
symmetrisch:
$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
antisymmetrisch:
$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.
transitiv:
$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Definition. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

Beispiel. Einige Beispiele für Äquivalenzrelationen

- Gleichheit. Für jede Menge A

$$\{(a,a) \in A^2 : a \in A\}$$

- Gleichmächtigkeit. Für jede Menge A

$$\{(B,C) \in \mathcal{P}(A)^2 : B, C \text{ haben die gleiche Kardinalität}\}$$

- Logische Äquivalenz.

$$\{(\varphi,\psi) \in \mathrm{AL}^2 : \varphi \equiv \psi\}$$

Relationen.
reflexiv:
$(a,a) \in R$, für alle $a \in A$.
symmetrisch:
$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.
antisymmetrisch:
$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$.
transitiv:
$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

Definition. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Ordnungen

Definition. Sei A eine Menge.

1. Eine (strikte) partielle Ordnung $<$ über A ist eine irreflexive und transitive binäre Relation über A.

2. Eine (strikte) lineare Ordung $<$ über A ist eine partielle Ordung über A, so dass für alle $a, b \in A$:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{oder } b < a \qquad (*)$$

Relationen.
reflexiv:
$(a, a) \in R$, für alle $a \in A$.
symmetrisch:
$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
antisymmetrisch:
$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.
transitiv:
$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Definition. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

7.2 Strukturen

Signaturen

Definition. Eine Signatur ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und Konstantensymbolen.

Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine Stelligkeit

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}.$$

Beispiel.
$\sigma := \{<, +, \cdot, 0, 1\}$ mit Stelligkeiten $ar(<) = ar(+) = ar(\cdot) = 2$.

Signaturen

Definition. Eine Signatur ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und Konstantensymbolen.

Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine Stelligkeit

$$ar(R) \in \mathbb{N} \text{ bzw. } ar(f) \in \mathbb{N}.$$

Beispiel.
$\sigma := \{<, +, \cdot, 0, 1\}$ mit Stelligkeiten $ar(<) = ar(+) = ar(\cdot) = 2$.

Notation.

- Wir verwenden griechische Symbole σ, τ für Signaturen.
- Für Relationssymbole verwenden wir $R, P, Q, R', <, \leq, ...$
- Für Funktionssymbole verwenden wir $f, g, h, +, *, \cdot, ...$
- Für Konstantensymbole verwenden wir $c, d, 0, 1, \dots$

Strukturen

Definition. Sei σ eine Signatur.

Eine *σ-Struktur* $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem Universum von $\mathcal{A}$
- einer k-stelligen Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$
- einer k-stelligen Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$ für jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$
- einem Element $c^{\mathcal{A}} \in A$ für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$.

Strukturen

Definition. Sei σ eine Signatur.

Eine *σ-Struktur* $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge A, dem Universum von $\mathcal{A}$
- einer k-stelligen Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$
- einer k-stelligen Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$ für jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$
- einem Element $c^{\mathcal{A}} \in A$ für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$.

Bemerkung. Man beachte den Unterschied zwischen einem Symbol $R \in \sigma$ oder $f \in \sigma$ und seiner Interpretation $R^{\mathcal{A}}$ bzw. $f^{\mathcal{A}}$.

Strukturen

Notation.

Wir verwenden kalligraphische Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ für Strukturen und entsprechende lateinische Buchstaben $A, B. \ldots$ für deren Universen.

Wir schreiben σ-Strukturen oft als Tupel

$$\mathcal{A} := (A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \sigma})$$

oder, falls $\sigma := \{R_1, \ldots, R_n\}$ endlich ist, auch

$$\mathcal{A} := (A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}}).$$

Bemerkung. In der Literatur werden Strukturen oft mit Buchstaben in Fraktur bezeichnet: $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Sei $\sigma_{ar} := \{+, *, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik, wobei

- $+, *$ binäre Funktionssymbole und
- $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Wir können σ-Strukturen zur Modellierung von Körpern, etc. benutzen.

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Sei $\sigma_{ar} := \{+, *, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik, wobei

- $+, *$ binäre Funktionssymbole und
- $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Wir können σ-Strukturen zur Modellierung von Körpern, etc. benutzen.

Beispiel. σ_{ar}-Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, *^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ mit Universum $\mathbb{N}$ und

- $+^{\mathcal{N}}$, $*^{\mathcal{N}}$ als Addition bzw. Multiplikation der natürlichen Zahlen und
- $0^{\mathcal{N}} := 0$ und $1^{\mathcal{N}} := 1$.

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Sei $\sigma_{ar} := \{+, *, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik, wobei

- $+, *$ binäre Funktionssymbole und
- $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Wir können σ-Strukturen zur Modellierung von Körpern, etc. benutzen.

Beispiel. σ_{ar}-Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, *^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ mit Universum $\mathbb{N}$ und

- $+^{\mathcal{N}}$, $*^{\mathcal{N}}$ als Addition bzw. Multiplikation der natürlichen Zahlen und
- $0^{\mathcal{N}} := 0$ und $1^{\mathcal{N}} := 1$.

Beispiel. Eine andere σ_{ar}-Struktur ist $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, *^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$ mit Universum $\mathbb{Z}$ und

- $+^{\mathcal{Z}}$, $*^{\mathcal{Z}}$ als Addition und Multiplikation der ganzen Zahlen und
- $0^{\mathcal{Z}} := 0$ und $1^{\mathcal{Z}} := 1$.

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Bemerkung. σ_{ar}-Strukturen müssen nicht „natürliche" arithmetische Strukturen wie die reellen oder ganzen Zahlen sein.

Wir können genauso eine σ_{ar}-Struktur

$$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$$

mit Universum $\mathbb{N}$ definieren, wobei

- $+^{\mathcal{A}}(a, b) := a^2 + b^2$,
- $*^{\mathcal{A}}$ die übliche Addition der natürlichen Zahlen ist und
- $0^{\mathcal{A}} := 17$ sowie $1^{\mathcal{A}} := 0$.

Beispiel: Arithmetische Strukturen

Bemerkung. σ_{ar}-Strukturen müssen nicht „natürliche" arithmetische Strukturen wie die reellen oder ganzen Zahlen sein.

Wir können genauso eine σ_{ar}-Struktur

$$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$$

mit Universum $\mathbb{N}$ definieren, wobei

- $+^{\mathcal{A}}(a, b) := a^2 + b^2$,
- $*^{\mathcal{A}}$ die übliche Addition der natürlichen Zahlen ist und
- $0^{\mathcal{A}} := 17$ sowie $1^{\mathcal{A}} := 0$.

Tropische Geometrie. $\{+, \cdot\}$-Struktur $\mathfrak{T} := (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{T}}, \cdot^{\mathfrak{T}})$ wobei

- $a +^{\mathfrak{T}} b := \max\{a, b\}$
- $a \cdot^{\mathfrak{T}} b := a + b$.

Graphen als Strukturen

Definition. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$ die Signatur der Graphen.

Mit jedem gerichteten Graph (V, E) assoziieren wir eine σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{G} := (G, E^{\mathcal{G}})$ mit

- $G := V$
- $E^{\mathcal{G}} := E$.

$\{a, b\} \in E(G)$

$(a, b), (b, a) \in E^{G}$

Notation. Für Graphen und deren Strukturen $\mathcal{G}$ weichen wir bisweilen von der Konvention ab und bezeichnen das Universum von $\mathcal{G}$ als V.

Gefärbte Graphen

Gefärbte Graphen. Jeder Knoten kann mit einer Farbe aus einer festen Menge $\mathcal{C}$ von Farben gefärbt sein.

Sei $\mathcal{C}$ eine endliche Menge und sei $\sigma := \{E\} \cup \mathcal{C}$ mit $E \notin \mathcal{C}$.

Wir modellieren $\mathcal{C}$-gefärbte Graphen (V, E) als Strukturen

$$\mathcal{G} := (V, E^{\mathcal{G}}, (C^{\mathcal{G}})_{C \in \mathcal{C}})$$

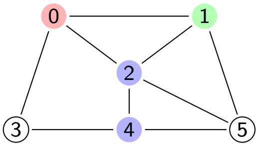
wobei $C^{\mathcal{G}}$ alle Knoten mit Farbe C enthält.

Beispiel.

Sei $\mathcal{C}$:= {Rot, Grün, Blau}.

In G gilt:

Rot$^{\mathcal{G}} = \{0\}$,
Grün$^{\mathcal{G}} = \{1\}$ und
Blau$^{\mathcal{G}} = \{2, 4\}$.



Prädikatenlogik

Wir führen eine Logik ein, in der solche Aussagen gemacht werden können.

Intuitiv haben wir

- Variablen für Elemente einer Menge von Objekten, z. B. den rellen Zahlen, anstatt nur wahr oder falsch.
- Möglichkeiten, Variablen zu vergleichen, z.B. $x < y$, $x = y$ abhängig vom Kontext.
- Verknüpfungen wie $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ um komplexere Formeln bilden zu können.
- Möglichkeiten um zu sagen, dass es ein Element gibt mit bestimmten Eigenschaften oder das alle Elemente bestimmte Eigenschaften haben.

$$\forall x \big(\mathbb{R}(x) \rightarrow \exists y (\mathbb{N}(y) \wedge x < y)\big)$$

Um dies zu erreichen, müssen wir folgendes festlegen:

- Den Kontext in dem wir arbeiten, d.h. Relationen $<, +, \ldots$ die wir verwenden dürfen $\rightsquigarrow$ Strukturen
- Die logische Sprache in der wir die Eigenschaften ausdrücken wollen $\rightsquigarrow$ Prädikatenlogik

7.3 Syntax der Prädikatenlogik

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Definition (Variablen erster Stufe).

Wir fixieren eine abzählbar unendliche Menge Var von *Variablen erster Stufe*, oder kurz *Variablen*, die v_i für alle $i \in \mathbb{N}$ enthält.

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Definition (Variablen erster Stufe).
Wir fixieren eine abzählbar unendliche Menge Var von *Variablen erster Stufe*, oder kurz *Variablen*, die v_i für alle $i \in \mathbb{N}$ enthält.

$x + y \rightsquigarrow \in A$

Definition. Sei σ eine Signatur.
Die Menge $\mathcal{T}_\sigma$ der σ-Terme ist induktiv definiert wie folgt:

$x + y = z$ wohl[illegible]

Basisfall.

- $v_i \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle $v_i \in \mathrm{Var}$
- $c \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$

Induktionsschritt.
Ist $f \in \sigma$ ein Funktionssymbol, $ar(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann ist

$$f(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{T}_\sigma.$$

Ein Term, in dem keine Variablen vorkommen, heißt Grundterm.

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Definition (Variablen erster Stufe).

Wir fixieren eine abzählbar unendliche Menge Var von *Variablen erster Stufe*, oder kurz *Variablen*, die v_i für alle $i \in \mathbb{N}$ enthält.

Definition. Sei σ eine Signatur.

Die Menge $\mathcal{T}_\sigma$ der σ-Terme ist induktiv definiert wie folgt:

Basisfall.

- $v_i \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle $v_i \in \mathrm{Var}$
- $c \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$

Induktionsschritt.

Ist $f \in \sigma$ ein Funktionssymbol, $ar(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann ist

$$f(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{T}_\sigma.$$

Ein Term, in dem keine Variablen vorkommen, heißt **Grundterm**.

Beispiele.

Sei $\sigma := \{<, +, *, 0, 1\}$.

Folgende Ausdrücke sind σ-Terme.

- $((x + x) * y)$
- $(((1 + 1) * 0) + 1)$
- $x * x + y$

$+(*(+(1,1),0),1)$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Definition (Variablen erster Stufe).

Wir fixieren eine abzählbar unendliche Menge Var von *Variablen erster Stufe*, oder kurz *Variablen*, die v_i für alle $i \in \mathbb{N}$ enthält.

Definition. Sei σ eine Signatur.

Die Menge $\mathcal{T}_\sigma$ der σ-Terme ist induktiv definiert wie folgt:

Basisfall.

- $v_i \in \mathcal{T}_\sigma$ für alle $v_i \in$ Var
- $c \in \mathcal{T}_\sigma$ fü

Induktionssch

Ist $f \in \sigma$ ein Funktionssymbol, $ar(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann ist

$$f(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}_\sigma.$$

Ein Term, in dem keine Variablen vorkommen, heißt **Grundterm**.

Bemerkung. Wir werden $+, \cdot, \dots$ in Infixnotation verwenden, auch wenn das streng genommen keine prädikatenlogischen Terme sind.

Beispiele.
Sei $\sigma := \{<, +, *, 0, 1\}$.

Folgende Ausdrücke sind σ-Terme.

- $((x + x) * y)$
- $(((1 + 1) * 0) + 1)$
- $x * x + y$

Syntax der Prädikatenlogik: Formeln

Definition. Sei σ eine Signatur. Die Menge $\mathsf{FO}[\sigma]$ der *prädikatenlogischen Formeln über* σ ist induktiv wie folgt definiert.

Basisfall.

- $t = t' \in \mathsf{FO}[\sigma]$ für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \dots, t_k) \in \mathsf{FO}[\sigma]$, für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Formeln der Form $t = t'$ und $R(t_1, \dots, t_k)$ heißen *atomar*.

Syntax der Prädikatenlogik: Formeln

Definition. Sei σ eine Signatur. Die Menge $\text{FO}[\sigma]$ der *prädikatenlogischen Formeln über σ* ist induktiv wie folgt definiert.

Basisfall.

- $t = t' \in \text{FO}[\sigma]$ für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \dots, t_k) \in \text{FO}[\sigma]$, für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Formeln der Form $t = t'$ und $R(t_1, \dots, t_k)$ heißen *atomar*.

Induktionsschritt.

- Wenn $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, dann $\neg\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$, dann $(\varphi \vee \psi) \in \text{FO}[\sigma]$, $(\varphi \wedge \psi) \in \text{FO}[\sigma]$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{FO}[\sigma]$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $x \in \text{Var}$, dann $\exists x\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\forall x\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

$\text{FO}[\sigma]$ heißt die *Prädikatenlogik über σ* oder die *Sprache/Logik erster Stufe über σ*.

Beispiele

Die Sprache der Graphen. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$.

Die folgenden Ausdrücke sind Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma_{Graph}]$.

- $E(x, y)$
- $\exists x \forall y \ \big(E(x, y) \vee x = y\big)$
- $\exists x_1 \exists x_2 \big((E(x, x_1) \wedge E(x_1, x_2)) \wedge E(x_2, y)\big)$

Definition $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Atomare Formeln.

- $t = t' \in \mathrm{FO}[\sigma]$ für alle $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \dots, t_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$, für alle $R \in \sigma$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Zusammengesetzte Formeln.

- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\neg\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann
  $(\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$
  $(\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$, dann $\exists x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\forall x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiele

Die Sprache der Graphen. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$.

Die folgenden Ausdrücke sind Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma_{Graph}]$.

- $E(x, y)$
- $\exists x \forall y \; \big(E(x, y) \vee x = y\big)$
- $\exists x_1 \exists x_2 \big(\big(E(x, x_1) \wedge E(x_1, x_2)\big) \wedge E(x_2, y)\big)$

Die Sprache der Arithmetik und Ordnung. Sei $\sigma := \{<, +, *\}$.

Die folgenden Ausdrücke sind Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma]$.

- $x < x + x$
- $\forall x \exists y x < y$
- $\exists x \neg \exists y \; y < x$

Definition $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Atomare Formeln.

- $t = t' \in \mathrm{FO}[\sigma]$ für alle $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \dots, t_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$, für alle $R \in \sigma$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Zusammengesetzte Formeln.

- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\neg\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$, dann $\exists x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\forall x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Beispiele

Die Sprache der Graphen. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$.

Die folgenden Ausdrücke sind Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma_{Graph}]$.

- $E(x, y)$
- $\exists x \forall y\ (E(x, y) \lor x = y)$
- $\exists x_1 \exists x_2 ((E(x, x_1) \land E(x_1, x_2)) \land E(x_2, y))$

Die Sprache der Arithmetik und Ordnung. Sei $\sigma := \{<, +, *\}$.

Die folgenden Ausdrücke sind Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma]$.

- $x < x + x$
- $\forall x \exists y x < y$
- $\exists x \neg \exists y\ y < x$

Bemerkung. Wir werden $<, +$ in Infixnotation verwenden, auch wenn das streng genommen keine prädikatenlogischen Formeln sind.

Definition $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Atomare Formeln.

- $t = t' \in \mathrm{FO}[\sigma]$ für alle $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$.
- $R(t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$, für alle $R \in \sigma$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$.

Zusammengesetzte Formeln.

- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\neg\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \land \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$, dann $\exists x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\forall x\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Notation

Notation.

1. Wir vereinbaren die gleichen Klammerregeln wie in der Aussagenlogik.

   Wir schreiben also $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$ statt $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$.

   Vorsicht: Die Formeln $\exists x E(x,x) \vee \exists z E(x,z)$ und $\exists x(E(x,x) \vee \exists z E(x,z))$ haben eine komplett andere Bedeutung.

Notation

Notation.

1. Wir vereinbaren die gleichen Klammerregeln wie in der Aussagenlogik.

   Wir schreiben also $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$ statt $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$.

   Vorsicht: Die Formeln $\exists x E(x,x) \vee \exists z E(x,z)$ und $\exists x (E(x,x) \vee \exists z E(x,z))$ haben eine komplett andere Bedeutung.

2. Relationssymbole $<, \leq, >, \geq, \ldots$ und Funktionssymbole $+, *, \ldots$ werden wir oft in Infixnotation schreiben.

   D.h. wir verwenden Formeln der Form $x < y + z$ statt korrekt zu schreiben: $< (x, +(y,z))$.

Freie und gebundene Variablen

$\exists x \, F(x, z)$

Definition. Sei σ eine Signatur.

Wir definieren $\text{var}(t)$ als die Menge der in einem σ-Term t vorkommenden Variablen.

Formal wird $\text{var}(t)$ wie folgt induktiv definiert:

- Wenn $t := v_i \in \text{Var}$, dann $\text{var}(t) := \{v_i\}$.
- Wenn $t := c$ für ein Konstantensymbol $c \in \sigma$, dann
$$\text{var}(t) := \emptyset.$$
- Wenn $t := f(t_1, \dots, t_k)$ für ein k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und Terme $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann
$$\text{var}(t) := \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k).$$

Freie und gebundene Variablen

Definition. Sei σ eine Signatur und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Die Menge $\mathit{frei}(\varphi)$ der *freien Variablen* von φ ist induktiv definiert als:

- Wenn $\varphi := t_1 = t_2$, für $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$.
- Wenn $\varphi := R(t_1, \dots, t_k)$ für $R \in \sigma$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{var}(t_i)$.
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) := \mathit{frei}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- $\mathit{frei}((\varphi * \psi)) := \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$ für alle $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi := \exists x\psi$ oder $\varphi := \forall x\psi$, für $x \in \mathrm{Var}$ and $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \mathit{frei}(\psi) \setminus \{x\}$.

Beispiele.

- $\mathit{frei}(E(x, y)) = \{x, y\}$
- $\varphi := \exists x \forall y (x = y \vee E(x, y))$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$
- $\varphi := \exists x_1 (E(x, x_1) \wedge E(x_1, y))$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \{x, y\}$
- $\varphi := \exists y (x < y \wedge \exists x y < x)$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \{x\}$

Freie und gebundene Variablen

Definition. Sei σ eine Signatur und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Die Menge $\mathit{frei}(\varphi)$ der *freien Variablen* von φ ist induktiv definiert als:

- Wenn $\varphi := t_1 = t_2$, für $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$.
- Wenn $\varphi := R(t_1, \dots, t_k)$ für $R \in \sigma$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{var}(t_i)$.
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) := \mathit{frei}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- $\mathit{frei}((\varphi * \psi)) := \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$ für alle $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
- Wenn $\varphi := \exists x\psi$ oder $\varphi := \forall x\psi$, für $x \in \mathrm{Var}$ and $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dann $\mathit{frei}(\varphi) := \mathit{frei}(\psi) \setminus \{x\}$.

Beispiele.
- $\mathit{frei}(E(x, y)) = \{x, y\}$
- $\varphi := \exists x \forall y (x = y \vee E(x, y))$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$
- $\varphi := \exists x_1 (E(x, x_1) \wedge E(x_1, y))$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \{x, y\}$
- $\varphi := \exists y (x < y \wedge \exists xy < x)$
  $\mathit{frei}(\varphi) = \{x\}$

Eine Formel φ mit $\mathit{frei}(\varphi) := \emptyset$ heißt ein *Satz*.

Eine Variable, die in φ vorkommt, aber nicht frei ist, heißt *gebunden*.

Wir schreiben $\varphi(v_1, \dots, v_k)$ um zu sagen, dass $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$.

7.4 Semantik der Prädikatenlogik

Belegungen

$\varphi(x) := \forall y\ x < y$

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

1. Eine *Belegung* in $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\beta : \mathrm{def}(\beta) \to A$ mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathrm{Var}$.

   β ist *passend* für $f \in \mathrm{FO}[\sigma] \cup \mathcal{T}_\sigma$, wenn $\mathit{frei}(f) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.

2. Eine *σ-Interpretation* ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$, bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

   $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ ist passend für $f \in \mathrm{FO}[\sigma] \cup \mathcal{T}_\sigma$, wenn β zu f passt.

Belegungen

Definition. Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

1. Eine *Belegung* in $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\beta : \mathrm{def}(\beta) \to A$ mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathrm{Var}$.

   β ist *passend* für $f \in \mathrm{FO}[\sigma] \cup \mathcal{T}_\sigma$, wenn $\mathit{frei}(f) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.
2. Eine *σ-Interpretation* ist ein Paar $(\mathcal{A}, \beta)$, bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

   $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ ist passend für $f \in \mathrm{FO}[\sigma] \cup \mathcal{T}_\sigma$, wenn β zu f passt.

Notation. Sei β eine Belegung, $x \in \mathrm{Var}$ und $a \in A$.

1. $\beta[x/a]$ bezeichnet die Belegung β' mit $\beta'(y) := \beta(y)$ für alle $y \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$ und $\beta'(x) := a$.
2. $\mathcal{I}[x/a]$ bezeichnet die Interpretation $(\mathcal{A}, \beta[x/a])$.

Semantik der Prädikatenlogik: Terme

Definition. Sei σ eine Signatur.

Induktiv über den Termaufbau definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem Term $t \in \mathcal{T}_\sigma$ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ für t einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuweist.

Basisfall.

- $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$ für alle $x \in \mathrm{Var}$
- $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$.

Induktionsschritt.

Ist $f \in \sigma$ eine k-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ dann

$$[\![f(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}).$$

$c^{\mathcal{A}}$

Definition.
σ: Signatur, $\mathcal{A}$: σ-Struktur.
- *Belegung*: $\beta : \mathrm{def}(\beta) \to A$ mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathrm{Var}$.
- β *passend* für f: *frei*$(f) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.
- σ*-Interpretation*: $(\mathcal{A}, \beta)$

Semantik der Prädikatenlogik: Formeln

Definition. Sei σ eine Signatur.

Induktiv über den Formelaufbau definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ für φ einen Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0,1\}$ zuordnet.

Basisfall.

- Für alle Terme $t, t' \in \mathcal{T}_\sigma$ definieren wir

$$[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle Terme $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_\sigma$ definieren wir

$$[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$(a_1, \quad , a_k) \in R^{\mathcal{A}}$

Definition.
σ: Signatur, $\mathcal{A}$: σ-Struktur.
- *Belegung*: $\beta : \mathrm{def}(\beta) \to A$ mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathrm{Var}$.
- β *passend* für f: $\mathit{frei}(f) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.
- σ*-Interpretation*: $(\mathcal{A}, \beta)$

Definition $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$.
Basisfall.
- $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$ für $x \in \mathrm{Var}$
- $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$ für $c \in \sigma$.

Induktionsschritt.
- $[\![f(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}})$.

Semantik der Prädikatenlogik: Formeln

Induktionsschritt.

- Die Semantik der Verknüpfungen $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ist wie in der Aussagenlogik definiert. Z.B. wenn $\varphi := \neg\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ dann definieren wir
$$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{I}} := 1 - \llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{I}}.$$

- Wenn $\varphi := \exists x \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ dann definieren wir
$$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{es gibt } a \in A, \text{ so dass } \llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$(\mathcal{A}, \beta \cup \{x \mapsto c\})$.

- Wenn $\varphi := \forall x \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ definieren wir
$$\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \llbracket\psi\rrbracket^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition.
σ: Signatur, $\mathcal{A}$: σ-Struktur.
- *Belegung*: $\beta : \mathrm{def}(\beta) \rightarrow A$ mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathrm{Var}$.
- β *passend* für f: *frei*$(f) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.
- σ*-Interpretation*: $(\mathcal{A}, \beta)$

Definition $\llbracket t\rrbracket^{\mathcal{I}}$.

Basisfall.
- $\llbracket x\rrbracket^{\mathcal{I}} := \beta(x)$ für $x \in \mathrm{Var}$
- $\llbracket c\rrbracket^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$ für $c \in \sigma$.

Induktionsschritt.
- $\llbracket f(t_1, \dots, t_k)\rrbracket^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}(\llbracket t_1\rrbracket^{\mathcal{I}}, \dots, \llbracket t_k\rrbracket^{\mathcal{I}})$.

Die Modellbeziehung

Definition. Sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formel und sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge.

1. Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt φ, wenn $\mathcal{I}$ zu φ passt und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

   Wir sagen auch: $\mathcal{I}$ ist ein Modell von φ und schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$.

2. Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt Φ, wenn $\mathcal{I}$ zu allen $\psi \in \Phi$ passt und $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ für alle $\psi \in \Phi$.

   Wir sagen auch: $\mathcal{I}$ ist ein Modell von Φ und schreiben $\mathcal{I} \models \Phi$.

Das Koinzidenzlemma

Lemma (Koinzidenzlemma).

Seien σ, τ, τ' Signaturen, so dass $\sigma \subseteq \tau \cap \tau'$ und

$$\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)\text{: } \tau\text{-Interpretation} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} := (\mathcal{B}, \gamma)\text{: } \tau'\text{-Interpretation,}$$

so dass

- $A = B$ und
- $S^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{B}}$ für alle Symbole, die in σ vorkommen.

Dann gilt:

1. Ist $t \in \mathcal{T}_\sigma$ ein σ-Term und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathrm{var}(t)$, dann
$$[\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{J}}.$$
2. Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formel und $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \mathit{frei}(\varphi)$, dann
$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{J}}.$$

7.5 Beispiele für prädikatenlogische Formeln

Beispiele

Sei $\sigma := \{+, *, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über $\mathbb{N}$ mit üblicher Interpretation von $+^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}$.

Sei $\beta : x \mapsto 2, y \mapsto 3$ und $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Beispiele.

- $[\![x * x]\!]^{\mathcal{I}} := \underset{2}{\beta(x)} \underset{\cdot}{*^{\mathcal{A}}} \underset{2}{\beta(x)} = 4$.

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele

Sei $\sigma := \{+, *, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über $\mathbb{N}$ mit üblicher Interpretation von $+^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}$.

Sei $\beta : x \mapsto 2, y \mapsto 3$ und $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Beispiele.

- $[\![x * x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x) *^{\mathcal{A}} \beta(x) = 4$.
- $[\![x * x = y + 1]\!]^{\mathcal{I}} = 1$, da $\beta(x) *^{\mathcal{A}} \beta(x) := 4 = \beta(y) +^{\mathcal{A}} 1^{\mathcal{A}} := 3 + 1$.

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele

Sei $\sigma := \{+, *, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über $\mathbb{N}$ mit üblicher Interpretation von $+^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}$.

Sei $\beta : x \mapsto 2, y \mapsto 3$ und $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Beispiele.

- $[\![x * x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x) *^{\mathcal{A}} \beta(x) = 4$.
- $[\![x * x = y + 1]\!]^{\mathcal{I}} = 1$, da $\beta(x) *^{\mathcal{A}} \beta(x) := 4 = \beta(y) +^{\mathcal{A}} 1^{\mathcal{A}} := 3 + 1$.
- Sei $\varphi(x, y) := \exists z(x * x = y + z)$.

  Um zu zeigen, dass $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ müssen wir ein Element $a \in \mathbb{N}$ mit $[\![x * x = y + z]\!]^{\mathcal{I} \cup \{z \mapsto a\}} = 1$ finden. $\mathcal{I}[z/a]$

  Sei $\beta' := \beta \cup \{z \mapsto 1\}$ und $\mathcal{I}' := (\mathcal{A}, \beta')$.

  Dann gilt $[\![x * x = y + z]\!]^{\mathcal{I}'} = 1$ und daher $[\![\exists z(x * x = y + z)]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Arithmetik

$\cancel{x \neq 1}$ $\neg x = 1$ $\neg(x = 1)$

$\sigma := \{+, *, <, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über den natürlichen Zahlen mit der üblichen Interpretation von $+, *, <, 0, 1$

$\varphi_{prim}(x) := \neg x = 1 \wedge \varphi_1(x)$

Beispiele. Was drücken folgende Formeln aus?

- $\varphi_1(x) := \forall y \forall z(y * z = x \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))$

für welche $a \in A = \mathbb{N}$ gilt: $(\mathcal{A}, [x/a]) \models \varphi_1$?

$[x/0]$: „$\forall y \forall z(y \cdot z = 0 \rightarrow \underbrace{y = 1 \vee z = 1}))$"

$y = 2$, $z = 0$

$[x/1]$: „$\forall y \forall z(\underbrace{y \cdot z = 1} \rightarrow \underbrace{(y = 1 \vee z = 1)}))$"

$1 \quad \neg y = 2$

wenn $\beta(y) \cdot^{\mathcal{A}} \beta(z) = 1$, dann $\beta(y) = 1$ und $\beta(z) = 1$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Arithmetik

$\sigma := \{+, *, <, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über den natürlichen Zahlen mit der üblichen Interpretation von $+, *, <, 0, 1$

Beispiele. Was drücken folgende Formeln aus?

- $\varphi_1(x) := \forall y \forall z (y * z = x \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))$
- $\varphi_2 := \forall y \exists x \, (y < x \wedge \varphi_1(x))$ ⟵ Satz

  Anmerkung. Hier wird φ_1 in die Formel φ_2 „eingesetzt"'. Im allgemeinen nicht unproblematisch, siehe nächste Woche.

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Arithmetik

$\sigma := \{+, *, <, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über den natürlichen Zahlen mit der üblichen Interpretation von $+, *, <, 0, 1$

Beispiele. Was drücken folgende Formeln aus?

- $\varphi_1(x) := \forall y\, \forall z \big(y * z = x \rightarrow (y = 1 \vee z = 1)\big)$
- $\varphi_2 := \forall y \exists x \, \big(y < x \wedge \varphi_1(x)\big)$

  Anmerkung. Hier wird φ_1 in die Formel φ_2 „eingesetzt"'. Im allgemeinen nicht unproblematisch, siehe nächste Woche.
- $\varphi_3 := \forall x \forall y (x * y = y * x)$

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Arithmetik

$\sigma := \{+, *, <, 0, 1\}$: Signatur der Arithmetik

$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$: Struktur über den natürlichen Zahlen mit der üblichen Interpretation von $+, *, <, 0, 1$

Beispiele. Was drücken folgende Formeln aus?

- $\varphi_1(x) := \forall y\, \forall z\big(y * z = x \rightarrow (y = 1 \vee z = 1)\big)$
- $\varphi_2 := \forall y \exists x\, \big(y < x \wedge \varphi_1(x)\big)$

  Anmerkung. Hier wird φ_1 in die Formel φ_2 „eingesetzt"'. Im allgemeinen nicht unproblematisch, siehe nächste Woche.
- $\varphi_3 := \forall x \forall y (x * y = y * x)$
- $\varphi_4 := \forall x \forall y \forall z\ \big(\ (x * y) * z\ =\ x * (y * z)\big)$

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv"

   für alle x gilt $x \not< x$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \\ & \quad \text{für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \\ & \quad \text{für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv“

   für alle x gilt $x \not< x$

   $$\forall x \neg x < x$$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv“

   für alle x gilt $x \not< x$

   $\forall x \neg x < x$

2. „$<$ ist transitiv“

   für alle x, y, z, wenn ($x < y$ und $y < z$ dann $x < z$)

   $\forall x \forall y \forall z \; ((x<y \land y<z) \to x<z)$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv“

   für alle x gilt $x \not< x$

   $$\forall x \neg x < x$$

2. „$<$ ist transitiv“

   für alle x, y, z, wenn $x < y$ und $y < z$ dann $x < z$

   $$\forall x \forall y \forall z \big((x < y \land y < z) \rightarrow x < z\big)$$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \lor, \land, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv“

   für alle x gilt $x \not< x$

   $$\forall x \neg x < x$$

2. „$<$ ist transitiv“

   für alle x, y, z, wenn $x < y$ und $y < z$ dann $x < z$

   $$\forall x \forall y \forall z\big((x < y \land y < z) \rightarrow x < z\big)$$

3. Das heißt, wir können wie folgt sagen, dass $<$ eine partielle Ordnung ist:

   $$\varphi_{par\text{-}ord} := \Big(\forall x \neg x < x\Big) \land \Big(\forall x \forall y \forall z\big((x < y \land y < z) \rightarrow x < z\big)\Big)$$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \lor, \land, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv“

   für alle x gilt $x \not< x$

   $$\forall x \neg x < x$$

2. „$<$ ist transitiv“

   für alle x, y, z, wenn $x < y$ und $y < z$ dann $x < z$

   $$\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)$$

3. Das heißt, wir können wie folgt sagen, dass $<$ eine partielle Ordnung ist:

   $$\varphi_{par\text{-}ord} := \Big(\forall x \neg x < x\Big) \wedge \Big(\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)\Big)$$

4. “$<$ ist total”: $\varphi_t := \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Ordnungen

Sei $\sigma := \{<\}$ die Signatur strikter Ordnungen.

1. „$<$ ist irreflexiv"

   für alle x gilt $x \not< x$

   $$\forall x \neg x < x$$

2. „$<$ ist transitiv"

   für alle x, y, z, wenn $x < y$ und $y < z$ dann $x < z$

   $$\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)$$

3. Das heißt, wir können wie folgt sagen, dass $<$ eine partielle Ordnung ist:

   $$\varphi_{par\text{-}ord} := \Big(\forall x \neg x < x\Big) \wedge \Big(\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)\Big)$$

4. "$<$ ist total": $\varphi_t := \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

5. Eine lineare Ordung $<$ wird formalisiert durch $\varphi_{ord} := \varphi_{par\text{-}ord} \wedge \varphi_t$.

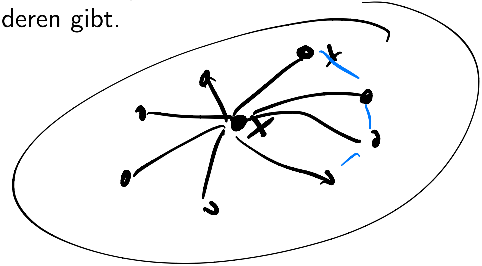
Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Graphen

Die Sprache der Graphen. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$.

- $\varphi := \exists x \forall y \big(x = y \lor E(x,y)\big)$ $\qquad$ $frei(\varphi) := \emptyset$

  φ gilt in einem Graph, wenn es einen Knoten mit Kanten zu allen anderen gibt.



Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1,\dots,t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}},\dots,[\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \lor, \land, \to, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x\psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x\psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiele: Graphen

Die Sprache der Graphen. Sei $\sigma_{Graph} := \{E\}$.

- $\varphi := \exists x \forall y (x = y \vee E(x, y))$ $\qquad$ $frei(\varphi) := \emptyset$

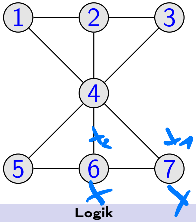
  φ gilt in einem Graph, wenn es einen Knoten mit Kanten zu allen anderen gibt.

- (x,y)

  $\varphi := \exists x_1 \exists x_2 ((E(x, x_1) \wedge E(x_1, x_2)) \wedge E(x_2, y))$

  $frei(\varphi) := \{x, y\}$.

  es gibt einen Pfad der Länge 1 oder 3 von $\beta(x)$ zu $\beta(y)$



$\beta(y)=7$
$\beta(x)=6$

Semantik.

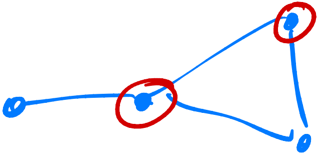
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein ausführliches Beispiel: Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$, $u \in X$ oder $v \in X$.

Problem. Gegeben G, $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leq k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?



φ_k :

$G \models \varphi_k$ gdw. G hat vertex cover der Größe $\leq k$.

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein ausführliches Beispiel: Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$, $u \in X$ oder $v \in X$.

Problem. Gegeben G, $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leq k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?

Schritt 1. Schreiben Sie das Problem in natürlicher Sprache auf.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leq k$ wenn
- es gibt eine Menge X von $\leq k$ Knoten, so dass
- jede Kante (u, v) einen Endpunkt u oder v in X hat.

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein ausführliches Beispiel: Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$, $u \in X$ oder $v \in X$.

Problem. Gegeben G, $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leq k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?

Schritt 1. Schreiben Sie das Problem in natürlicher Sprache auf.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leq k$ wenn

- es gibt eine Menge X von $\leq k$ Knoten, so dass
- jede Kante (u, v) einen Endpunkt u oder v in X hat.

Diese Fomalisierung benutzt

- eine Menge X über die wir in der Prädikatenlogik nicht quantifizieren können
- eine Aussage der Form für alle Kanten, was wir ebenfalls nicht benutzen können

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein ausführliches Beispiel: Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$, $u \in X$ oder $v \in X$.

Problem. Gegeben G, $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leq k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?

Wir formulieren das Problem daher um.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leq k$, wenn

- es k Knoten $\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{X}$, nicht unbedingt paarweise verschieden, gibt, so dass
- für alle u, v: wenn es eine Kante zwischen u, v gibt, dann ist u eins der x_i oder v eins der x_i.

$\forall e = \{u, v\} \in E(G): \quad u \in X$ oder $v \in X$

Semantik.

- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein ausführliches Beispiel: Vertex Cover

Definition. Ein *vertex cover* eines ung. Graphs $G := (V, E)$ ist eine Menge $X \subseteq V$, s.d. für alle Kanten $e := (u, v) \in E$, $u \in X$ oder $v \in X$.

Problem. Gegeben G, $k \in \mathbb{N}$, enthält G ein vertex cover der Größe $\leq k$.

Kann dies in der Prädikatenlogik formalisiert werden?

Wir formulieren das Problem daher um.

G enthält ein vertex cover der Größe $\leq k$, wenn
- es k Knoten $x_1, \dots, x_k$, nicht unbedingt paarweise verschieden, gibt, so dass
- für alle u, v: wenn es eine Kante zwischen u, v gibt, dann ist u eins der x_i oder v eins der x_i.

Das können wir nun eins-zu-eins in die Prädikatenlogik übersetzen.

$$\exists x_1 \dots \exists x_k \; \forall u \forall v \Big(E(u, v) \rightarrow \big(\bigvee_{i=1}^{k} (u = x_i \lor v = x_i) \big) \Big)$$

Semantik.
- $[\![t = t']\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t']\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \cdots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\neg, \lor, \land, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in AL
- $[\![\exists x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $[\![\forall x \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}[x/a]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$