FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 12. Januar 2023

10. Tutorium – Logik

Besprochen in der Woche vom 16.01.2023.

Aufgabe 1

Sei $\sigma = \{0\}$ eine Signatur, wobei 0 ein Konstantensymbol ist. Geben Sie zu folgenden Formeln in $\mathrm{FO}[\sigma]$ den Quantorenrang an.

(i) $\varphi_1 := \forall x \forall y \, (\exists z \; z = x \lor \exists z \forall w \; 0 = w)$

(ii) $\varphi_2 := \exists a \exists b \exists a \, (\forall c \, 0 = a \land \forall x \forall y \, (y \neq b \to b = 0))$

Aufgabe 2

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Geben Sie eine Formel φ_k an, sodass $\mathrm{Mod}(\varphi_k)$ die Menge der endlichen Kreise der Länge k ist.

(ii) Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen Kreise ist in der Klasse der endlichen, zusammenhängenden Graphen $\mathrm{FO}[\sigma]$-definierbar.

(iii) Zeigen Sie: Die Klasse der 2-färbbaren Graphen ist $\mathrm{FO}[\sigma]$-axiomatisierbar.

Hinweis: Ein Graph ist 2-färbbar genau dann, wenn er keinen (endlichen) Kreis ungerade Länge enthält.

Aufgabe 3

Während die Zwerge sich um Steine streiten, macht Falsum sich tief unten im unendlichen Tunnel bereit, den SAT-Berg zu erobern. Als erstes versucht er die endlichen Dinge zu zähmen, denn es gibt schließlich nur endlich viele Logikzwerge zu bekämpfen. Bald wird Falsums Einfluss direkt oben im SAT-Berg zu spüren sein und dann kann er endlich alle Formeln zu falsch auswerten lassen!

Sei $\sigma = \{R\}$ eine Signatur, wobei R ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

(i) Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind elementar äquivalent genau dann, wenn sie m-äquivalent für alle $m \in \mathbb{N}$ sind.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei endliche σ-Strukturen.

(ii) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\mathcal{C}} \in \mathrm{FO}[\sigma]$ an, sodass $\mathrm{Mod}(\varphi_{\mathcal{C}}) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \mathcal{E} \cong \mathcal{C}\}$.

(iii) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ elementar äquivalent sind, dann gilt $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Anmerkung: Die Umkehrrichtung gilt ebenfalls. Dies lässt sich wahlweise mit struktureller Induktion oder mit Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen beweisen.