Aufgaben zur Vorlesung **WiSe 22/23**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche **17.11.2022**

5. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 21.11.2022–25.11.2022)

Aufgabe 1. Die Sudan-Funktion

Die partielle Sudan-Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$f(n,x,y) \coloneqq \begin{cases} x+y, & \text{falls } n=0, \\ x, & \text{falls } n>0 \text{ und } y=0, \\ f(n-1, f(n,x,y-1), f(n,x,y-1)+y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Ist f total?
2. Berechnen Sie $f(1,1,1)$ und $f(2,1,1)$.
3. Zeigen Sie, dass $f(1,x,y) = f(1,0,y) + 2^y \cdot x$.
4. Diskutieren Sie (ohne formalen Beweis) ob f μ-rekursiv ist.

——————Lösungsskizze——————

1. Ist f total?
   Für $n = 0$ ist f für alle $x, y \in \mathbb{N}$ definiert. Sei nun $f(n,x,y)$ für ein beliebiges n und alle $x, y \in \mathbb{N}$ definiert (1). Dann ist $f(n+1,x,0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert. Sei y beliebig und $f(n+1,x,y)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert (2).

   Dann gilt

   $$f(n+1,x,y+1) = \underbrace{f(n, \overbrace{f(n+1,x,y)}^{\text{def. wg. (2)}}, \overbrace{f(n+1,x,y)}^{\text{def. wg. (2)}} + y + 1)}_{\text{def. wg. (1)}}.$$

   Also ist $f(n,x,y)$ für alle $n, x, y \in \mathbb{N}$ definiert.

2. Berechnen Sie $f(1,1,1)$ und $f(2,1,1)$.

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= f(0, f(1,1,0), f(1,1,0)+1) \\ &= f(0,1,2) \\ &= 3 \\ f(2,1,1) &= f(1, f(2,1,0), f(2,1,0)+1) \\ &= f(1,1,1+1) \\ &= f(1,1,2) \\ &= f(0, f(1,1,1), f(1,1,1)+2) \\ &= f(0,3,3+2) \\ &= f(0,3,5) \\ &= 8 \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass $f(1,x,y) = f(1,0,y) + 2^y \cdot x$. Für $y = 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(1,x,0) &= x \\ &= 0 + x \\ &= f(1,0,0) + 2^0 \cdot x \end{aligned}$$

   Es gelte die Aussage für ein beliebiges $y \in \mathbb{N}$ (1). Dann gilt für $y+1$:

$$\begin{aligned} f(1,x,y+1) &= f(0, f(1,x,y), f(1,x,y) + y + 1) \\ &= 2f(1,x,y) + y + 1 \\ &\overset{(1)}{=} 2(f(1,0,y) + 2^y \cdot x) + y + 1 \\ &= f(1,0,y) + (f(1,0,y) + y + 1) + 2^{y+1} \cdot x \\ &= f(0, f(1,0,y), f(1,0,y) + y + 1) + 2^{y+1} \cdot x \\ &= f(1,0,y+1) + 2^{y+1} \cdot x \end{aligned}$$

4. Ist f μ-rekursiv?
   Da f offensichtlich im intuitiven Sinne berechenbar ist, und die Menge der μ-rekursiven Funktionen gleich der Menge der Turing-berechenbaren Funktionen ist, folgt aus der Church'schen These, dass f auch μ-rekursiv ist.

   Konkreter: Es lässt sich ein WHILE-Programm für f angeben, das ähnlich wie das WHILE-Programm für die Ackermannfunktion (siehe VL) funktioniert.

Aufgabe 2. Ackermannfunktion und primitive Rekursion
Betrachten Sie folgende Funktion mit Ähnlichkeiten zur Ackermannfunktion:

$h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$h(x,y,z) := \begin{cases} z+1 & \text{, falls } x = y = 0, \\ h(0, y-1, 1) & \text{, falls } x = z = 0 \neq y, \\ h(0, y-1, h(0, y-1, z-1)) & \text{, falls } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \neq z, \\ h(x-1, 1, 1) & \text{, falls } x \neq 0 \text{ und } y = z = 0, \\ h(x, z, 0) + 1 & \text{, falls } x \neq 0 \neq z \text{ und } y = 0 \text{ und} \\ h(x, y-1, z+1) & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Diskutieren Sie, warum h nicht primitiv-rekursiv ist.
——————Lösungsskizze——————
Diese Version der Ackermannfunktion ist für $x = y = z = 1$ nicht definiert, da $h(1,1,1) = h(1,0,2) = h(1,2,0) + 1 = h(1,1,1) + 1$. Somit ist diese Funktion nicht total und daher weder LOOP-berechenbar noch primitiv-rekursiv.

Aufgabe 3. Ackermannfunktion und geschlossene Formeln
Sei ack die Ackermannfunktion (in der Variante von Rósza Péter)

$$\begin{aligned} &\mathrm{ack}(0,y) := y+1, \\ &\mathrm{ack}(x,0) := \mathrm{ack}(x-1,1), \text{ und} \\ &\mathrm{ack}(x,y) := \mathrm{ack}(x-1, \mathrm{ack}(x, y-1)). \end{aligned}$$

1. Leiten Sie eine geschlossene Formel für $\mathrm{ack}(2, y)$ her, die nur Addition und Multiplikation enthält. (Hinweis: Sie können verwenden, dass $\mathrm{ack}(2, y)$ eine lineare Funktion in y ist, d.h., dass $\mathrm{ack}(2, y) = b \cdot y + c$ für gewisse Konstanten b und c gilt.)
2. Beweisen Sie, dass $\mathrm{ack}(3, y) = 2^{y+3} - 3$.
3. Beweisen Sie, dass $\mathrm{ack}(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, wobei der Turm (inkl. der Basis) genau $y+3$ mal die 2 enthält.

——————Lösungsskizze——————

1. Da die Funktion linear ist (Hinweis), brauchen wir nur zwei Punkte zu berechnen, um die Gerade zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ack}(2,0) &= \mathrm{ack}(1,1) \\
&= \mathrm{ack}(0, \mathrm{ack}(1,0)) \\
&= \mathrm{ack}(0, \mathrm{ack}(0,1)) \\
&= \mathrm{ack}(0,2) = 3 \\
\mathrm{ack}(2,1) &= \mathrm{ack}(1, \mathrm{ack}(2,0)) \\
&= \mathrm{ack}(1,3) \\
&= \mathrm{ack}(0, \mathrm{ack}(1,2)) \\
&= 1 + \mathrm{ack}(1,2) \\
&= 1 + \mathrm{ack}(0, \mathrm{ack}(1,1)) \\
&= 2 + 3 = 5.
\end{aligned}$$

   Dann ist $\mathrm{ack}(2, y) = b \cdot y + c$, wobei $c = \mathrm{ack}(2, 0) = 3$ und $b = \frac{\mathrm{ack}(2,1) - \mathrm{ack}(2,0)}{1-0} = 2$. Also ist $\mathrm{ack}(2, y) = 2 \cdot y + 3$.

2. Wir führen einen Induktionsbeweis durch.
   IA: $\mathrm{ack}(3, 0) = \mathrm{ack}(2, 1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 = 8 - 3 = 2^3 - 3$
   IS: Nehmen wir an, dass $\mathrm{ack}(3, y) = 2^{y+3} - 3$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $\mathrm{ack}(3, y+1) = 2^{y+1+3} - 3$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{ack}(3, y+1) = \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(3, y)) &\overset{\mathrm{IV}}{=} \mathrm{ack}(2, 2^{y+3} - 3) = 2 \cdot (2^{y+3} - 3) + 3 \\
&= 2^{y+1+3} - 6 + 3 = 2^{y+1+3} - 3.
\end{aligned}$$

   $\square$

3. Wir definieren zunächst die Hilfsfunktion $t \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei

$$\begin{aligned}
t(0) &:= 1 \\
t(n) &:= 2^{t(n-1)} \text{ für } n > 0.
\end{aligned}$$

   Wir müssen dann zeigen, dass $\mathrm{ack}(4, y) = t(y + 3) - 3$.
   IA: $\mathrm{ack}(4, 0) = \mathrm{ack}(3, 1) = 2^{1+3} - 3 = 2^{2^2} - 3 = t(0 + 3) - 3$
   IS: Nehmen wir an, dass $\mathrm{ack}(4, y) = t(y + 3) - 3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{ack}(4, y+1) &= \mathrm{ack}(3, \mathrm{ack}(4, y)) \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} \mathrm{ack}(3, t(y+3) - 3) \\
&= 2^{t(y+3)} - 3 \\
&= t(y+4) - 3.
\end{aligned}$$

   $\square$