Gliederung

1. Einführung
2. Berechenbarkeitsbegriff
3. LOOP-, WHILE-, und GOTO-Berechenbarkeit
4. Primitive und partielle Rekursion
5. Grenzen der LOOP-Berechenbarkeit
6. (Un-)Entscheidbarkeit, Halteproblem
7. Aufzählbarkeit & (Semi-)Entscheidbarkeit
8. Reduzierbarkeit
9. Satz von Rice
10. Das Postsche Korrespondenzproblem
11. Komplexität – Einführung
12. NP-Vollständigkeit
13. coNP
14. PSPACE

PSPACE

Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:13_by_13_game_finished.jpg

Platzkomplexität: PSPACE und LOGSPACE

Bisher: Klassifikation der Berechungsschwere von Problemen anhand von Zeitbedarf

Jetzt: Zweites wichtiges Kriterium – Speicherplatzbedarf

Zentraler Unterschied: Speicherplatz ist wiederverwendbar!

Definition (PSPACE, LOGSPACE (informell))

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ liegt in…
…PSPACE gdw. eine DTM M existiert mit $T(M) = L$ und M modifiziert höchstens polynomiell viele Speicherzellen.
…LOGSPACE gdw. eine DTM M existiert mit $T(M) = L$ und M modifiziert höchstens logarithmisch viele Speicherzellen (Eingabe darf nur gelesen werden).

Mitteilung: LOGSPACE $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE.

Definition

a) Eine Sprache A heißt **PSPACE-schwer**, falls $\forall_{L \in \mathrm{PSPACE}}\ L \leq_m^p A$.
b) A heißt **PSPACE-vollständig**, wenn A PSPACE-schwer ist und $A \in$ PSPACE.

Ein PSPACE-vollständiges Problem

Erfüllbarkeit einer **quantifizierten** aussagenlogischen Formel.

Definition

Eine **quantifizierte** aussagenlogische Formel (in Pränexform) hat die Gestalt $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \; F(x_1, \dots, x_n)$, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und F eine aussagenlogische Formel mit ungebundenen ("freien") Variablen x_i ist.

TQBF (True Quantified Boolean Formula) ist die Sprache aller wahren quantifizierten aussagenlogischen Formeln.

Beispiele:

$$\forall_x \exists_y \; (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \in \mathrm{TQBF}$$
$$\forall_x \forall_y \; (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \notin \mathrm{TQBF}$$

Spezialfälle:

$$\mathrm{SAT} \leadsto \exists_{x_1} \dots \exists_{x_n} F(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{TQBF}$$
$$\mathrm{TAUT} \leadsto \forall_{x_1} \dots \forall_{x_n} F(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{TQBF}$$

Beachte: Ähnlichkeit zu "Spielproblemen" (kann Spielerin X gewinnen?)

TQBF ist PSPACE-vollständig

Theorem

TQBF ist PSPACE-vollständig.

Beweis (Skizze)

1. $\mathrm{TQBF} \in$ PSPACE:

Werte die Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$ rekursiv für alle Variablenbelegungen β aus ($O(n + |F|)$ Platz)

```
TQBF(i):
  IF i ≤ n THEN
    β(x_i) := 0;    a := TQBF(i + 1);
    β(x_i) := 1;    b := TQBF(i + 1);
    IF Q_i = ∃ THEN
      RETURN a ∨ b;
    ELSE RETURN a ∧ b;
  ELSE RETURN β(F)
```

2. TQBF ist PSPACE-schwer: Ähnlich wie im Satz von Cook/Levin. ∎

PSPACE und Spiele

PSPACE-vollständige Probleme haben oft Bezug zur Frage nach der Existenz von Gewinnstrategien für Spiele mit zwei Spielerinnen (z.B. Schach oder Go).

Szenario:

- „$\forall$-Spielerin“ wählt Belegung für $\forall$-quantifizierte Variablen.
- „$\exists$-Spielerin“ wählt Belegung für $\exists$-quantifizierte Variablen.
- $\exists$/$\forall$-Spielerin gewinnt, wenn die Formel F wahr/falsch wird.

Frage: Existiert eine Gewinnstrategie für $\exists$-Spielerin?

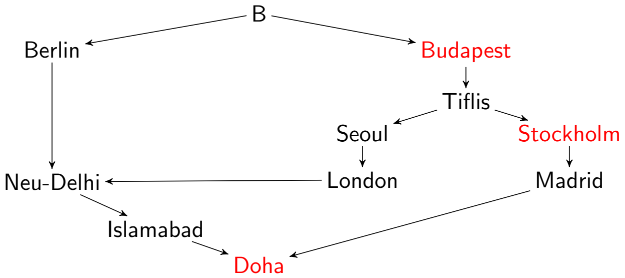
Ein Geographiespiel

Eingabe: Menge von Hauptstadtnamen.

Spielregeln:

1. zwei Spielerinnen nennen abwechselnd eine Hauptstadt
2. jede genannte Hauptstadt muss mit dem letzten Buchstaben der Zuvorgenannten beginnen
3. wer als erstes keine Hauptstadt mehr nennen kann, verliert
4. keine Mehrfachnennungen

Beispiel



Generalisiertes Geographiespiel

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Startknoten $v \in V$.
Spielregeln:

1. Spielerinnen wählen abwechelnd den "nächsten Knoten" unter den Nachfolgern des aktuellen Knotens
2. wer keinen Nachbarknoten mehr auswählen kann verliert

Spielerin 1 hat "Gewinnstrategie" $\rightsquigarrow$ Ähnlichkeit zu TQBF

Generalized Geography
Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $v \in V$
Frage: Hat Spielerin 1 eine Gewinnstrategie, die mit einem Nachbarknoten von v startet?

Theorem

GENERALIZED GEOGRAPHY ist PSPACE-vollständig.

1. GENERALIZED GEOGRAPHY $\in$ PSPACE: Einfach.
2. GENERALIZED GEOGRAPHY ist PSPACE-vollständig:

zeige $\mathrm{TQBF} \leq_m^p$ GENERALIZED GEOGRAPHY.

Abschließende Bemerkungen zu PSPACE

Mitteilung: Für viele Spiele, wie z.B. Schach, Go oder Dame, existieren verallgemeinerte Versionen (auf $n \times n$-Spielbrettern), die PSPACE-schwer sind.

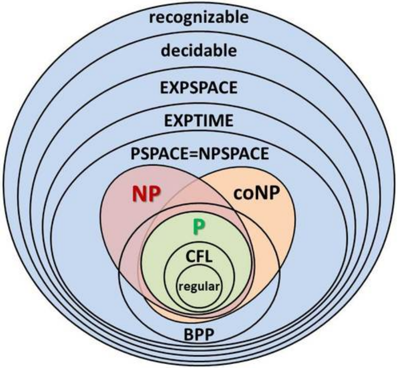
Typische Anwendungsgebiete wo PSPACE-vollständige Probleme auftreten:

- Robotik
  (Roboter spielen gegen ihre Umwelt; „Motion Planning“, „Games against Nature“)
- Wortproblem für kontextsensitive Sprachen
  (d.h. für Typ 1-Sprachen in der Chomsky-Hierarchie)

Bemerkungen zu NP und PSPACE:

- NP: kurze Zertifikate
- PSPACE: Zertifikat (Gewinnstrategie) kann exponentiell lang sein
- PSPACE $=$ NPSPACE

Eine komplexe Welt



Quelle: `http://cse.psu.edu/~sxr48/cmpsc464/Complexity-classes-diagram.jpg`