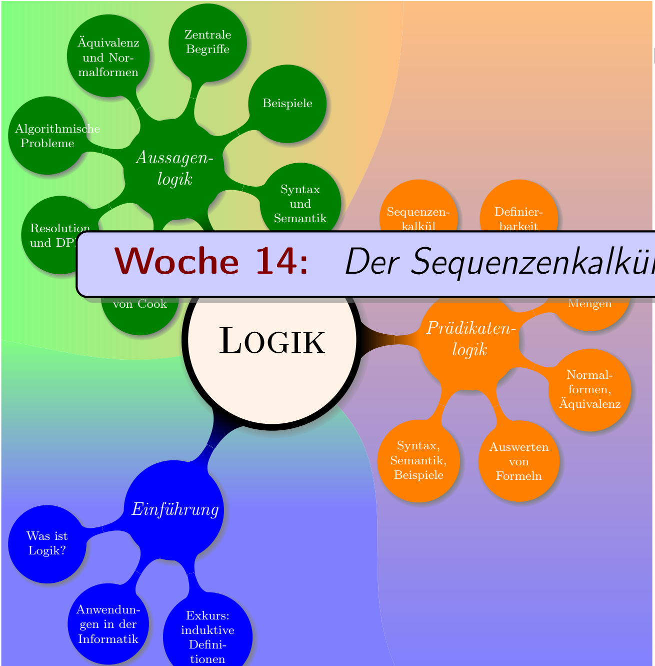
Logik im Wintersemester 2022/2023

Woche 14: *Der Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik*



Nov.	17	18	19	20	21	22	23	*Einführung*
	24	25	26	27	28	29	30	*Aussagenlogik*
	31	1	2	3	4	5	6	*Normalformen*
	7	8	9	10	11	12	13	*Resolution*
Dez.	14	15	16	17	18	19	20	*Kompaktheit*
	21	22	23	24	25	26	27	*DPLL, Satz von Cook*
								kturen und FO
	5	6	7	8	9	10	11	*Prädikatenlogik*
	12	13	14	15	16	17	18	*Komplexität von FO*
Jan.	19	20	21	22	23	24	25	*Weihnachten*
	26	27	28	29	30	31	1	*Neujahr*
	2	3	4	5	6	7	8	*Normalformen*
	9	10	11	12	13	14	15	*Definierbarkeit*
	16	17	18	19	20	21	22	*EF-Spiele*
Feb.	23	24	25	26	27	28	29	*EF-Spiele*
	30	31	1	2	3	4	5	*Sequenzenkalkül AL*
	6	7	8	9	10	11	12	*Sequenzenkalkül FO*
	13	14	15	16	17	18	19	*Ausblick*

14.1 Der Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik

Erweiterung des Sequenzenkalküls auf FO

Wir erweitern den Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik.

Dazu können wir alle bisherigen Regeln und Definitionen direkt übernehmen.

Wir brauchen nur noch Regeln für die Quantoren.

Dies erfordert allerdings etwas Vorarbeit.

Wir haben gesehen, dass bei Substitutionen die Kombination von freien und gebundenen Variablen Probleme bereiten kann.

Um ähnliche Probleme im Sequenzenkalkül zu vermeiden, werden wir freie Variablen durch Konstantensymbole substituieren und somit nur mit Sätzen arbeiten.

Elimination von Variablen

Lemma. Sei σ eine Signatur.

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ eine Formel mit $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

Seien $c_1, \dots, c_k$ Konstantensymbole mit $c_i \notin \sigma$ für alle $1 \leq i \leq k$.

φ ist erfüllbar gdw. $\varphi[x_1 / c_1, \dots, x_k / c_k]$ erfüllbar ist.

Beweis. Wenn φ erfüllbar ist, dann gibt es

- eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ und
- eine Belegung β mit $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathrm{def}(\beta)$,

so dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$.

Aber dann erfüllt die $\sigma \cup \{c_1, \dots, c_k\}$-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}_{|\sigma} = \mathcal{A}$ und $c_i^{\mathcal{B}} := \beta(x_i)$ die Formel $\varphi[x_1 / c_1, \dots, x_k / c_k]$.

Die Umkehrung ist analog.

Elimination von Variablen

Das Lemma zeigt, dass Erfüllbarkeit, Gültigkeit, ... von Formeln auf entsprechende Aussagen über Sätzen reduziert werden können.

Notation. In der Formulierung des Sequenzenkalküls werden wir ausschließlich mit Sätzen arbeiten.

Das heißt, wann immer wir $\Phi, \Delta, \varphi, \psi, \ldots$ schreiben, meinen wir Sätze bzw. Mengen von Sätzen.

Ausname. Wenn wir $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ schreiben, dann soll das bedeuten, dass die Formeln eine freie Variable x haben.

Hinweis. Für den Rest des Abschnitts fixieren wir eine Signatur σ und eine abzählbar unendliche Menge $c_0, c_1, \ldots$ von Konstantensymbolen $c_i \notin \sigma$, für alle $i \geq 0$.

Das heißt, formal arbeiten wir in der Signatur $\tau := \sigma \cup \{c_0, c_1, \ldots\}$.

Sequenzen

Definition.

1. Eine Sequenz ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

für Multimengen $\Phi, \Delta \subseteq \text{FO}$.

Wir nennen Φ die Voraussetzungen und Δ die Konklusionen.

2. Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$, die alle Formeln in Φ erfüllt, mindestens eine Formel in Δ erfüllt.

3. Ist $\Phi \Rightarrow \Delta$ nicht gültig, dann gibt es eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$, die alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt, aber kein $\delta \in \Delta$.

Wir sagen: $\mathcal{I}$ falsifiziert die Sequenz.

Sequenzen.

$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$

$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x,y)), \neg E(s,t)\} \Rightarrow \{s = t\}$

Gültige Sequenzen.

$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x,y)), \neg E(s,t)\} \Rightarrow \{s = t\}$

$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$

$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists y R(y)\}$

Nicht gültige Sequenzen.

$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$

Axiome und Regeln

Definition. Ein Axiom des Sequenzenkalküls ist eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$, so dass $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$.

Beispiel für ein Axiom.
$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$

Die Regeln des Sequenzenkalküls. Die Regeln des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik bestehen aus

- den Regeln des aussagenlogischen Kalküls erweitert um
- die Gleichheitsregel,
- die Substitutionsregel und
- die Quantorenregeln.

Die Regeln für Gleichheit und Substitution

Die Regel für Gleichheit.

$$(=\Rightarrow)\ \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

t, t': Terme ohne freie Variablen
$\psi(x)$: Formel mit $frei(\psi) = \{x\}$.

Die Regeln der Substitution.

$$(S \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$t \doteq t'$: steht für $t = t'$ oder $t' = t$.

Beispiel. Sei $\sigma := \{R, f, c\}$, wobei R ein Relationssymbol, f ein Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist.

$$(\Rightarrow S)\ \frac{\overline{Rfc \Rightarrow Rfc}}{Rfc, fc = c \Rightarrow Rffc}$$

(setze $\psi(x) := Rfx$ und wende $(\Rightarrow S)$ an)

Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)} \qquad t \text{ Term}$$

Beispiel. Das folgende ist ein Beweis für $\exists x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y \exists x Rxy$

$$(\exists \Rightarrow)\ \cfrac{(\exists \Rightarrow)\ \cfrac{(\Rightarrow \exists)\ \cfrac{(\Rightarrow \exists)\ \cfrac{\overline{R(c,d) \Rightarrow R(c,d)}}{R(c,d) \Rightarrow \exists x R(x,d)}}{R(c,d) \Rightarrow \exists y \exists x R(x,y)}}{\exists y R(c,y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x,y)}}{\exists x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x,y)}$$

Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn c nicht in Φ, Δ und $\psi(x)$ vorkommt

Beispiel. Das folgende ist ein Beweis für $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{R(c,d) \Rightarrow R(c,d)}}{R(c,d) \Rightarrow \exists x R(x,d)}\,(\Rightarrow \exists)}{\forall y R(c,y) \Rightarrow \exists x R(x,d)}\,(\forall \Rightarrow)}{\forall y R(c,y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x,y)}\,(\Rightarrow \forall)}{\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x,y)}\,(\exists \Rightarrow)$$

Der Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik

Die Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}\ c \text{ n. i. } \Phi, \Delta, \psi$$

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}\ c \text{ n.i. } \Phi, \Delta, \psi \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

$$(S \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \qquad (\Rightarrow=)\ \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

14.2 Beispiele für Sequenzenkalkülbeweise

Erinnerung: Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \text{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x \neg\varphi$, $\quad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
2. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann

$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi) \\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

3. Wenn y nicht in φ vorkommt, dann gilt

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi[x/y], \qquad \forall x\varphi \equiv \forall y\varphi[x/y]$$

Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

Lemma. Sei $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathrm{Var}$.

1. $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\neg\varphi, \qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\neg\varphi$

Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.

$$\begin{array}{rc}
 & \overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)} \\
(\Rightarrow\neg) & \overline{\neg\varphi(c), \varphi(c)} \\
(\Rightarrow\exists) & \overline{\Rightarrow \neg\varphi(c), \exists x\ \varphi} \\
(\Rightarrow\forall) & \overline{\Rightarrow \forall x\neg\varphi, \exists x\ \varphi} \\
(\neg\Rightarrow) & \neg\exists x\ \varphi \Rightarrow \forall x\neg\varphi
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rc}
 & \overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)} \\
(\neg\Rightarrow) & \overline{\neg\varphi(c), \varphi(c) \Rightarrow} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\forall x\neg\varphi, \varphi(c) \Rightarrow} \\
(\exists\Rightarrow) & \overline{\forall x\neg\varphi, \exists x\ \varphi \Rightarrow} \\
(\Rightarrow\neg) & \forall x\neg\varphi \Rightarrow \neg\exists x\ \varphi
\end{array}$$

SK-Regeln FO.

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi\wedge\varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi\wedge\varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi\vee\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi\rightarrow\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ c n.i. $\Phi, \Delta, \psi(x)$

$(\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}$ c n.i. $\Phi, \Delta, \psi(x)$

$(=\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$

Beweis des Lemmas Teil 2

Lemma. Wenn $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ dann $\varphi \vee \exists x\, \psi \quad \equiv \quad \exists x(\varphi \vee \psi)$.

Beweis. Sequenzenkalkülbeweis von $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}\,(\Rightarrow \vee)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}\,(\Rightarrow \exists)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi(c) \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}\,(\Rightarrow \vee)}{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}\,(\Rightarrow \exists)}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}\,(\exists \Rightarrow)
}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}\,(\vee \Rightarrow)
$$

Der Sequenzenkalkülbeweis von $\exists x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi \vee \exists x \psi(x)$ ist ähnlich.

Anmerkung. Die Annahme, dass x nicht in φ vorkommt, wird im linken Zweig benutzt, da wir sonst folgenden nicht-Beweis erhielten.

$$
\dfrac{\dfrac{\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c), \psi(c)}{\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c) \vee \psi(c)}\,(\Rightarrow \vee)}{\varphi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\Rightarrow \exists)
$$

SK-Regeln FO.

$(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$(\exists \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ c n.i. $\Phi, \Delta, \psi(x)$

$(\Rightarrow \exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$

$(\forall \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow \forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$ c n.i. $\Phi, \Delta, \psi(x)$

$(=\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(S \Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$

14.3 Korrektheit und Vollständigkeit

Korrektheit der Regeln

Wir definieren die Korrektheit der prädikatenlogischen Regeln genauso wie für die Aussagenlogik.

Definition. Eine Regel

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi' \Rightarrow \Delta'}$$

ist korrekt, wenn aus der Gültigkeit von $\Phi \Rightarrow \Delta$ die Gültigkeit von $\Phi' \Rightarrow \Delta'$ folgt.

Korrektheit der Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \qquad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ and } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

Lemma. Die Regeln für den Allquantor sind korrekt.

Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

Behauptung. Die $(\forall \Rightarrow)$ Regel ist korrekt.

Beweis.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, so dass $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$.

Zu zeigen: $\mathcal{I} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$.

Sei $a := [\![t]\!]^{\mathcal{I}}$. Da $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$, gilt insbesondere $\mathcal{I} \models \psi[a]$.

Es folgt, dass $\mathcal{I} \models \psi(t)$ und, da nach Voraussetzung „$\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta$“ gültig ist, gibt es ein $\delta \in \Delta$ mit $\mathcal{I} \models \delta$. $\square$

Korrektheit der $(\Rightarrow\forall)$ *Regel*

$$(\Rightarrow\forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}$$ wenn c nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$ vorkommt

Behauptung. Die $(\Rightarrow\forall)$ Regel ist korrekt.

Beweis. Sei τ die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in $\Phi, \Delta, \psi(x)$ vorkommen, außer c.

Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ eine τ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

1. Wenn $\mathcal{I} \models \delta$, für ein $\delta \in \Delta$, dann sind wir fertig.
2. Anderenfalls, gilt $\mathcal{I} \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$. Z.z. $\mathcal{I} \models \forall x\psi(x)$

   Für $a \in A$ sei $\mathcal{I}_a$ die $\tau \cup \{c\}$-Expansion von $\mathcal{I}$ mit $c^{\mathcal{I}_a} := a$.

   Da c nur in ψ vorkommt, folgt aus dem Koinzidenzlemma, dass $\mathcal{I}_a \models \Phi$ aber $\mathcal{I}_a \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$. Also gilt $\mathcal{I}_a \models \psi(c)$.

   Es folgt, dass $\mathcal{I}_a \models \psi(c)$ für alle $a \in A$ und somit $\mathcal{I} \models \forall x\psi(x)$. □

Beispiel.
Sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. mit
$\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}})$
$\beta(x) := 3$

Für $a = 5$ ist dann
$\mathcal{I}_5 := ((\mathbb{N}, +^{\mathcal{I}_5}, c^{\mathcal{I}_5}), \beta)$
mit
$+^{\mathcal{I}_5} := +^{\mathcal{A}}$ und
$c^{\mathcal{I}_5} = 5$

Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$ wenn c nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$ vorkommt

Die Voraussetzung "c kommt nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$ vor" ist notwendig.

Beispiel.

Sei $\Delta := \emptyset$ und $\Phi := R(c)$ und $\psi(x) := R(x)$.

Dann ist $\Phi \Rightarrow \psi(c)$ sicherlich gültig.

Aber $\Phi \Rightarrow \forall x R(x)$ ist nicht gültig, wie die Struktur $\mathcal{A} := (\{0,1\}, c^{\mathcal{A}} := 0, R^{\mathcal{A}} := \{0\})$ zeigt.

Beweise im Sequenzenkalkül

Definition. Ein Beweis im Sequenzenkalkül ist ein Baum, dessen Knoten wie folgt mit Sequenzen beschriftet sind:

- Die Blätter sind mit Axiomen beschriftet.
- Jeder innere Knoten ist mit der Konsequenz einer Regel beschriftet und dessen Kinder mit deren Prämissen. Jeder innere Knoten hat also entweder ein oder zwei Kinder.

Definition.

1. $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist im Sequenzenkalkül beweisbar, oder ableitbar, wenn es als Beschriftung eines Knotens in einem Beweis vorkommt.
2. $\psi \in \mathrm{FO}$ ist aus $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ ableitbar oder beweisbar, geschrieben $\Phi \vdash_S \psi$, wenn $\Phi \Rightarrow \psi$ beweisbar ist.
3. Eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ von Formeln ist inkonsistent, wenn es eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_S \varphi$ und $\Phi \vdash_S \neg\varphi$.
4. Ansonsten ist Φ konsistent.

Beweise im Sequenzenkalkül

Bemerkung. Die Klasse der ableitbaren Sequenzen ist also die kleinste Klasse, die alle Axiome enthält und wann immer sie die Prämissen einer Regel enthält, dann auch deren Konsequenz.

Korrektheit des Sequenzenkalküls

Theorem (Korrektheitssatz).

Die Regeln des Sequenzenkalküls sind korrekt, d.h. jede beweisbare Sequenz ist gültig.

Beweis. Der Satz folgt sofort aus der Korrektheit der einzelnen Regeln.

Wir haben die Korrektheit der aussagenlogischen Regeln sowie der Regeln für den Allquantor bewiesen,

Die anderen Regeln sind zur Übung empfohlen.

Vollständigkeit und Korrektheit

Theorem.

1. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Menge von Formeln und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

   $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \Rightarrow \psi$ beweisbar ist.

2. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Menge von Formeln.

   Φ ist erfüllbar genau dann, wenn Φ konsistent ist.

Beweis. Die Richtung von „rechts nach links" ist im wesentlichen der Korrektheitssatz.

Die andere Richtung ist erheblich schwieriger und ist als Gödel's Vollständigkeitssatz bekannt.

(Nicht zu verwechseln mit Gödel's Unvollständigkeitssatz.)

Ableitbarkeit vs. Semantische Folgerung

Sequenzenkalkül	Semantische Konzepte
Sequenz $\Phi \Rightarrow \psi$ ist gültig	Aus Φ folgt logisch ψ
$\vdash_S$	$\models$
Φ ist konsistent	Φ ist erfüllbar
$\emptyset \Rightarrow \psi$ gültig	ψ allgmeingültig
$\psi \Rightarrow \emptyset$ gültig	ψ unerfüllbar

Entscheidbarkeit der Aussagenlogik

Wir haben gesehen, dass es einen Algorithmus gibt, der als Eingabe eine aussagenlogische Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ bekommt und entscheidet, ob $\Phi \Rightarrow \Delta$ im aussagenlogischen Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Eingabe.

Insbesondere kann der Algorithmus benutzt werden, um für eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ zu entscheiden, ob $\Rightarrow \psi$ beweisbar und somit ψ eine Tautologie ist.

Theorem.

1. Das Allgemeingültigkeitsproblem der Aussagenlogik ist entscheidbar.
2. Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist entscheidbar.

Das klassische "Entscheidungsproblem"

Die Frage, on es einen solchen Algorithmus auch für die Prädikatenlogik gibt, war eines der wichtigsten Probleme der mathematischen Logik.

> Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt. (...) Das Entscheidungsproblem muss als das Hauptproblem der mathematischen Logik betrachtet werden.

(D. Hilber, W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Vol. 1, Berlin 1928, p.73ff.

Das klassische Entscheidungsproblem

Eine positive Antwort auf das Entscheidungsproblem, also ein Algorithmus, der Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln entscheiden könnte, hätte weitreichende Folgen für die Mathematik.

Wir könnten dann zum Beispiel die Gruppentheorie entscheiden, d.h. für jede Formel in der Signatur der Gruppen entscheiden, ob sie in allen Gruppen gilt.

Für die Prädikatenlogik kann ein solcher Algorithmus nicht existieren.

Theorem. (Church, Turing 1936, 1937)

Das Allgemeingültigkeits- und somit das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Das heißt, es gibt keinen Algorithmus, der auf Eingabe $\psi \in \mathsf{FO}$, korrekt entscheidet, ob ψ gültig ist.

14.4 Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik

Der Kompaktheitssatz

Theorem. (Kompaktheit der Prädikatenlogik)

1. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge.

   Φ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.

2. Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

   $\Phi \models \psi$ gdw. es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$ gibt.

Beweis des Kompaktheitssatzes

Behauptung 1. Eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Beweis. Wenn Φ erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

Sei also jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

Angenommen, Φ ist nicht erfüllbar.

Dann gibt es also ein $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$.

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt nun, dass $\Phi \vdash_S \psi$ und $\Phi \vdash_S \neg\psi$.

Seien Φ_1, Φ_2 die dabei benutzen Formeln aus Φ. Da Sequenzenkalkülbeweise endlich sind, ist auch $\Phi_1 \cup \Phi_2$ endlich.

Nach Konstruktion sind ψ und $\neg\psi$ bereits aus $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ableitbar und somit ist $\Phi_1 \cup \Phi_2$ inkonsistent und somit unerfüllbar, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Der Kompaktheitssatz

Behauptung 2. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

$\Phi \models \psi$ gdw. es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt mit $\Phi_0 \models \psi$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil.

Denn:

$\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist

gdw. es ex. unerfüllbare endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\neg\psi\}$

gdw. $\Phi_0 \setminus \{\neg\psi\} \models \psi$. $\square$

Der Kompaktheitssatz

Theorem. (Kompaktheit der Prädikatenlogik)

1. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge.

   Φ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.

2. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

   $\Phi \models \psi$ gdw. es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$ gibt.

Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes

Sei $\sigma := \{E, s, t\}$, wobei s, t Konstantensymbole sind.

σ-Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten s, t.

Ziel. Wir wollen zeigen, dass die Klasse REACH der σ-Strukturen, in denen es einen Weg von s nach t gibt, nicht in FO definierbar ist.

Beweis. Angenommen, REACH wäre durch ψ definiert.

Sei $\varphi_k := \exists x_0 \dots \dots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} E(x_i, x_{i+1}) \wedge x_0 = s \wedge x_k = t$.

Es gilt offenbar $\mathcal{A} \models \varphi_k$, wenn es einen Pfad in $\mathcal{A}$ von s nach t der Länge k gibt.

Nun sei $\Phi := \{\neg\varphi_k : k \geq 1\} \quad \cup \quad \{\psi\}$. Dann ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar, Φ jedoch nicht, ein Widerspruch zum Kompaktheitssatz.