Primitive und partielle Rekursion

Quelle: commons.wikimedia.org/wiki/File:Barnsley_fern_mutated_-Leptosporangiate_fern.png

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

  i) alle konstanten Funktionen $f : \underline{\mathbb{N}^k} \to \underline{\mathbb{N}}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = \underline{c} \in \mathbb{N}$

0_1 … die einstellige Nullfunktion

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

  i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = c$

  ii) die Nachfolgerfunktion $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{succ}(n) = n + 1$

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

   i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = c$

   ii) die Nachfolgerfunktion $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{succ}(n) = n + 1$

   iii) die Projektionen $\pi_i^k : \underline{\mathbb{N}^k} \to \underline{\mathbb{N}}$ mit $\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = \underline{x_i}$

$\pi_1^k(x_1, \ldots, x_k) = x_1$

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

   i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = c$

   ii) die Nachfolgerfunktion $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{succ}(n) = n + 1$

   iii) die Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$

(b) **und** abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = c$

ii) die Nachfolgerfunktion $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{succ}(n) = n + 1$

iii) die Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$

(b) **und** abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

i) **Komposition** von $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$:

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f = h \circ (g_1, \ldots, g_m)$ d.h.

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k))$$

„h nach $g_1 \ldots g_m$"

$$f = \underset{h}{\mathrm{succ}} \circ \underset{g_1}{\pi_2^2}$$

$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(x_1, x_2) = \mathrm{succ}(\underbrace{\pi_2^2(x_1, x_2)}_{= x_2}) = \mathrm{succ}(x_2)$$

Primitiv-rekursive Funktionen I

Definition

Die Klasse der **primitiv-rekursiven Funktionen** ist die kleinste Klasse von Funktionen die

(a) folgende **Grundfunktionen** enthält:

i) alle konstanten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \ldots, x_k) = c$

ii) die Nachfolgerfunktion $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathsf{succ}(n) = n + 1$

iii) die Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$

(b) **und** abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

i) **Komposition** von $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = h \circ (g_1, \ldots, g_m) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k))$$

ii) **primitive Rekursion** mit $\underline{g : \mathbb{N}^k} \to \mathbb{N}$ und $\underline{h : \mathbb{N}^{k+2}} \to \mathbb{N}$:

$$f : \underline{\mathbb{N}^{k+1}} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \underline{\mathsf{pr}}(\underline{h, g}) \text{ d.h.}$$

Basis * $$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

Rekursion * $$\underline{f(n+1}, x_1, \ldots, x_k) = h(\underline{n}, \underline{f(n, x_1, \ldots, x_k)}, x_1, \ldots, x_k).$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad \mathrm{add}(x,y) = x+y$

add := $\mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi_2^3, \pi_1^1)$ d.h.

$h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$* \quad f(0, \underline{x_1, \ldots, x_k}) = g(\underline{x_1, \ldots, x_k})$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi^3_2, \pi^1_1) \text{ d.h.}$$

Basis $\mathrm{add}(\underline{0}, \underline{x}) = \underline{\pi^1_1}(\underline{x}) = \underline{x}$

Rek $\mathrm{add}(\underline{n+1}, x) = (\underline{\mathrm{succ}} \circ \underline{\pi^3_2})(\overset{1}{n}, \overset{2}{\underline{\mathrm{add}(n, x)}}, \overset{3}{x})$

$$= \mathrm{succ}(\underline{\mathrm{add}(n, x)})$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi^3_2, \pi^1_1)$ d.h.

$$\mathrm{add}(0, x) = \pi^1_1(x) = x$$

$$\mathrm{add}(n+1, x) = (\mathrm{succ} \circ \pi^3_2)(n, \mathrm{add}(n, x), x)$$

$$= \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x))$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mul(x,y) = x · y

$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\underbrace{\mathrm{add} \circ (\pi^3_2, \pi^3_3)}_{h}, 0_1)$ d.h.

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g(x) = 0$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$
$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$
$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi_2^3, \pi_1^1) \text{ d.h.}$$

$$\mathrm{add}(0, x) = \pi_1^1(x) = x$$
$$\mathrm{add}(n+1, x) = (\mathrm{succ} \circ \pi_2^3)(n, \mathrm{add}(n, x), x)$$
$$= \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x))$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3), \underline{0_1}) \text{ d.h.}$$

$$* \quad \mathrm{mul}(\underline{0}, x) = \underline{0_1(x)} = 0$$
$$\mathrm{mul}(n+1, x) = (\underline{\mathrm{add}} \circ (\underline{\pi_2^3, \pi_3^3}))(n, \underline{\mathrm{mul}(n, x)}, \underline{x})$$
$$= \underline{\mathrm{add}}(\underline{\mathrm{mul}(n, x)}, \underline{x}) = \mathrm{mul}(n,x) + x$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Bemerkung: Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind total.

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi^3_2, \pi^1_1)$ d.h.

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(0, x) &= \pi^1_1(x) = x \\ \mathrm{add}(n+1, x) &= (\mathrm{succ} \circ \pi^3_2)(n, \mathrm{add}(n, x), x) \\ &= \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x)) \end{aligned}$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\mathrm{add} \circ (\pi^3_2, \pi^3_3), 0_1)$ d.h.

$$\begin{aligned} \mathrm{mul}(0, x) &= 0_1(x) = 0 \\ \mathrm{mul}(n+1, x) &= (\mathrm{add} \circ (\pi^3_2, \pi^3_3))(n, \mathrm{mul}(n, x), x) \\ &= \mathrm{add}(\mathrm{mul}(n, x), x) \end{aligned}$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$

$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$

$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Bemerkung: Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind total.

Theorem (ohne Beweis)

primitiv-rekursiv $\equiv$ LOOP-berechenbar

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi_2^3, \pi_1^1)$ d.h.

$$\mathrm{add}(0, x) = \pi_1^1(x) = x$$

$$\mathrm{add}(n+1, x) = (\mathrm{succ} \circ \pi_2^3)(n, \mathrm{add}(n, x), x) = \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x))$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3), 0_1)$ d.h.

$$\mathrm{mul}(0, x) = 0_1(x) = 0$$

$$\mathrm{mul}(n+1, x) = (\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3))(n, \mathrm{mul}(n, x), x) = \mathrm{add}(\mathrm{mul}(n, x), x)$$

Primitiv-rekursive Funktionen II

Erinnerung: primitive Rekursion

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mathrm{pr}(h, g) \text{ d.h.}$$
$$f(0, x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$$
$$f(n+1, x_1, \ldots, x_k) = h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

Bemerkung: Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind total.

Theorem (ohne Beweis)

primitiv-rekursiv $\equiv$ LOOP-berechenbar

Beispiel 1 – add : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{add} := \mathrm{pr}(\mathrm{succ} \circ \pi_2^3, \pi_1^1)$ d.h.

$$\mathrm{add}(0, x) = \pi_1^1(x) = x$$
$$\mathrm{add}(n+1, x) = (\mathrm{succ} \circ \pi_2^3)(n, \mathrm{add}(n, x), x)$$
$$= \mathrm{succ}(\mathrm{add}(n, x))$$

Beispiel 2 – mul : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mathrm{mul} := \mathrm{pr}(\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3), 0_1)$ d.h.

$$\mathrm{mul}(0, x) = 0_1(x) = 0$$
$$\mathrm{mul}(n+1, x) = (\mathrm{add} \circ (\pi_2^3, \pi_3^3))(n, \mathrm{mul}(n, x), x)$$
$$= \mathrm{add}(\mathrm{mul}(n, x), x)$$

Frage: Konstruieren Sie mittels primitiver Rekursion: (1) modifizierte Vorgängerfunktion $f(x) = \max\{x-1, 0\}$, (2) modifizierte Subtraktion $f(x, y) = max\{x - y, 0\}$, (3) Fakultätsfunktion $f(x) = x!$

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und
b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:
   i) Komposition,
   ii) primitive Rekursion und

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und

b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

   i) Komposition,

   ii) primitive Rekursion und

   iii) μ-**Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min \{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \land \underbrace{\forall_{0 \leq i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \neq \bot}_{\text{s.d. } g \text{ vorher voll definiert}}\}$$

„kleinste Nullstelle von g s.d. g vorher voll definiert"

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und
b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:
   i) Komposition,
   ii) primitive Rekursion und
   iii) μ-**Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min \{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \leq i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \neq \bot\}$$

$\leadsto$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und

b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

   i) Komposition,

   ii) primitive Rekursion und

   iii) μ-**Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min\{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \leq i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \neq \bot\}$$

$\rightsquigarrow$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

Frage: Welche uns bekannte Funktion verbirgt sich hinter $\mu(1_2)$?

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und

b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:

   i) Komposition,

   ii) primitive Rekursion und

   iii) **μ-Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min \{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \leq i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \neq \bot\}$$

$\rightsquigarrow$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

Theorem (ohne Beweis)

μ-rekursiv $\equiv$
Turing/WHILE/GOTO-berechenbar

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und
b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:
   i) Komposition,
   ii) primitive Rekursion und
   iii) **μ-Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \dots, x_k) := \min \{n \mid g(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \le i < n}\, g(i, x_1, \dots, x_k) \ne \bot\}$$

$\leadsto$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

Theorem (ohne Beweis)

μ-rekursiv $\equiv$ Turing/WHILE/GOTO-berechenbar

Theorem (Kleene'sche Normalform, ohne Beweis)

Zu jeder μ-rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es 2 primitiv-rekursive Funktionen g und h sodass

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k, \mu(h)(x_1, \dots, x_k)).$$

μ-rekursive Funktionen I

Definition (μ- bzw. partielle Rekursion)

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen die

a) die Grundfunktionen enthält und
b) abgeschlossen ist unter folgenden Operationen:
   i) Komposition,
   ii) primitive Rekursion und
   iii) μ-**Operator** von $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f = \mu(g) \text{ d.h.}$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) := \min\{n \mid g(n, x_1, \ldots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \leq i < n}\, g(i, x_1, \ldots, x_k) \neq \bot\}$$

$\rightsquigarrow$ $\mu(g)$ womöglich nicht total!

Theorem (ohne Beweis)

μ-rekursiv $\equiv$
Turing/WHILE/GOTO-berechenbar

Theorem (Kleene'sche Normalform, ohne Beweis)

Zu jeder μ-rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es 2 primitiv-rekursive Funktionen g und h sodass

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \underline{g(x_1, \ldots, x_k, \mu(h)(x_1, \ldots, x_k))}.$$

$\rightsquigarrow$ es reicht immer **ein** μ-Operator