FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 24. November 2022

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 4. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Sei $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \cdots$ eine unendliche Folge von aussagenlogischen Formelmengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ genau dann erfüllbar ist, wenn alle Φ_n erfüllbar sind.

Lösung zu Aufgabe 1

Wenn Φ erfüllbar ist, ist auch jede Teilmenge erfüllbar, also insbesondere auch jedes Φ_n.

Angenommen alle Φ_n sind erfüllbar. Sei $\Phi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \subseteq \Phi$ eine nicht leere endliche Teilmenge. (Die leere Menge ist erfüllbar, also gibt es für sie nichts zu zeigen.) Weil $\varphi_i \in \Phi$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt, gibt es für jedes $1 \leq i \leq k$ ein n_i mit $\varphi_i \in \Phi_{n_i}$.

Wir setzen $m := \max_{1\leq i\leq k} n_i$. Dann ist $\Phi' \subseteq \Phi_m$. Die Menge Φ_m ist nach Annahme erfüllbar. Also ist auch Φ' erfüllbar.

Wir haben gezeigt, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Damit folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Φ erfüllbar ist.

Aufgabe 2

Tief unter dem SAT-Berg leben die Logikzwerge. Schon seit dem Anfang der Zeit graben sie nach Wahrheiten und durchdringen so tiefer und tiefer die Materie.

Vor vielen Generationen gab schließlich der große Logikzwergenkönig Verum den Auftrag immer weiter nach unten zu graben. Dabei sollte nie im Kreis gegraben werden und auch nie unendlich oft von der gleichen Stelle aus.

Überzeugt von der Wahrheit und Weisheit dieser Aussagen, verfolgen die Logikzwerge nun schon seit Jahrtausenden diese Maxime. Doch vor Kurzem stellte ein Logikzwergenforscher etwas schreckliches fest: Die Logikzwerge haben zu tief gegraben! Und nun hat sich unter den Logikzwergen ein Weg in die Unendlichkeit eröffnet.

Zeigen Sie die folgende, als **Lemma von Kőnig** bekannte Aussage, mit Hilfe des Kompaktheitssatzes: Jeder unendliche Baum mit endlichem Knotengrad enthält einen unendlich langen Pfad.

Anmerkung: Es gibt unendliche Bäume mit unendlicher Höhe, welche keinen unendlichen Pfad enthalten.

Lösung zu Aufgabe 2

Zur Anmerkung: Dieser Baum lässt sich konstruieren indem wir an einen Knoten w, welcher die Wurzel des Baums wird, für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Endpunkt eines Pfads der Länge n anhängen. Somit gibt es keine obere Schranke an die Länge eines längsten Pfades im Baum, da ja jeder Pfad jeder Länge (aus $\mathbb{N}$) im Baum enthalten ist, aber es gibt auch keinen unendlichen Pfad. Wichtig ist hierbei zu bemerken, dass in dieser Konstruktion w unendlichen Grad besitzt.

Sei T ein unendlicher Baum mit endlichem Knotengrad. Wir fixieren einen beliebigen Knoten w als Wurzel und richten alle Kanten von T weg von der Wurzel.

Wir zeigen, dass es einen unendlichen gerichteten Pfad in T gibt, der bei w anfängt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$S_n := \{v \in V(T) \mid \text{Es gibt einen gerichteten Pfad der Länge genau } n \text{ von } w \text{ nach } v\}\,.$$

Alle S_n sind endlich, da der Baum endlichen Knotengrad besitzt. Weiter ist $S_0 = \{w\}$ und alle S_n sind nicht leer, da T unendlich ist und alle Knoten in T einen endlichen Knotengrad besitzen.

Wir definieren zuerst eine Formel φ_n, welche genau dann von einer Belegung β erfüllt werden soll, wenn genau ein $v \in S_n$ mit $\beta(X_v) = 1$ existiert.

$$\varphi_n := \bigvee_{v \in S_n} X_v \wedge \bigwedge_{u,v \in S_n, u \neq v} \neg(X_u \wedge X_v)$$

Unser Ziel ist, dass uns eine erfüllende Belegung einen unendlichen gerichten Pfad zeigt. Wir setzen nun

$$\Phi := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(X_v \to X_u) \mid (u,v) \in E(T)\}\,.$$

Die Formel $(X_v \to X_u)$ sorgt dabei dafür, dass wenn X_v im Pfad ist, dann muss auch der Elternknoten u von v im Pfad enthalten sein. Dies sichert, dass die Knoten die uns die Belegung ausweist auch tatsächlich miteinander verbunden sind.

Wir zeigen mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass Φ erfüllbar ist. Sei $\Phi' \subseteq \Phi$ endlich. Falls Φ' kein φ_i enthält, belegen wir alle Variablen mit 0. Dies erfüllt alle Formeln der Form $X_v \to X_u$ in Φ'. Andernfalls, sei $n \in \mathbb{N}$ maximal mit $\varphi_n \in \Phi'$. Wähle ein $z \in S_n$ und nehme den Pfad P in T von w nach z. Setze $\beta(X_v) := 1$, falls $v \in V(P)$, und $\beta(X_v) := 0$ sonst.

Alle $\varphi_i \in \Phi'$ werden von β erfüllt, denn P enthält genau einen Knoten von jedem S_i (wäre das nicht der Fall, dann wäre P keinen Pfad von w nach z). Für jedes $v \in V(P)$ mit $v \neq w$ gilt, dass P die eindeutige eingehende Kante $(u,v) \in E(T)$ von v enthalten muss. Also gilt auch $u \in V(P)$ und somit $\beta \models X_v \to X_u$ für alle $(u,v) \in E(T)$. Dadurch haben wir bewiesen, dass $\beta \models \Phi'$ und es folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Φ erfüllbar ist.

Nun sei β eine erfüllende Belegung für Φ. Definiere den unendlichen Pfad P mit $V(P) := \{v \in V(T) \mid \beta(X_v) = 1\}$ und $E(P) = \{\{v,u\} \mid (u,v) \in E(T) \text{ und } u,v \in V(P)\}$. Da $\beta \models \varphi_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $v \in S_n$ mit $\beta(X_v) = 1$ und somit auch $v \in V(P)$. Falls $n = 0$ gilt $v = w$. Sonst hat v einen Vorgänger u in T, und somit gilt $(u,v) \in E(T)$. Also gilt $X_v \to X_u \in \Phi$ und $\beta \models X_v \to X_u$. Somit ist $\beta(X_u) = 1$. Der Pfad P ist also ein unendlicher Pfad in T, der mit der Wurzel w beginnt.