Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 2.1

Themen: Lineare Gleichungssysteme, LR-Zerlegung

Ugo & Gabriel

15. November 2022

Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Gx} = \mathbf{b}$ mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivotisierung:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5.8 \\ -3.2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Gx} = \mathbf{b}$ aus der vorherigen Teilaufgabe mithilfe der Gauß-Elimination mit Pivotisierung.

Lösung

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2.5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2.5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5.8 \\ -3.2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

3. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems.

b) Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivoting im dezimalen Gleitkommazahlenformat $\mathbb{G}(10, 2)$ mit zwei Stellen.

c) Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Gauß-Elimination mit Pivoting im dezimalen Gleitkommazahlenformat $\mathbb{G}(10, 2)$ mit zwei Stellen.

d) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Lösungen für x_1.

e) Was sagen die jeweiligen relativen Fehler aus?

Lösung

a) $x_1 = \frac{5000}{9950} \approx 0.5025, x_2 = \frac{4950}{9950} \approx 0.497$

b) $\begin{bmatrix} 0.005 & 1 \\ 0 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -99 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0.50$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0.50, x_2 = 0.50$

d) ohne pivoting: $\frac{\frac{5000}{9950} - 0}{\frac{5000}{9950}} \approx 1$, mit pivoting: $\frac{\frac{5000}{9950} - 0.5}{\frac{5000}{9950}} \approx 0.005$.

e) Der berechnete Wert ist 100% bzw. 0.5% von der korrekten Lösung entfernt.

Lösung Ende

4. Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen folgender Ebene und Gerade in Parameterform:

$$\text{Ebene:} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$

$$\text{Gerade:} \quad \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow s\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - u\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 2 & 0\\-1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\\u\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix}s\\t\\u\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Schnittpunkt

$$\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Lösung Ende

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt folgender drei Ebenen gegeben in Parameterform:

$$\text{Ebene 1:} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 2:} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + m\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 3:} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Tipp: Repräsentieren Sie die Ebenen in Normalform.

Lösung

Normalformen:

$$\text{Ebene 1: } \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x} = -1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 2: } \left(\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix}6 & -1 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x} = -6 = \begin{bmatrix}6 & -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 3: } \left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix}-4 & -2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x} = -7 = \begin{bmatrix}-4 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Also ergbit sich folgendes LGS:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\6 & -1 & -4\\-4 & -2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-1\\-6\\-7\end{bmatrix}$$

mit folgender Lösung:

$$\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix}2.23529412\\1.29411765\\4.52941176\end{bmatrix}.$$

Lösung Ende

Aufgabe 2: LR-Zerlegung

1. Wie kann man, mithilfe einer (modifizierten) Gauß-Elimination, die Inverse einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnen? Welche Laufzeit hat der Ansatz?

Lösung

a) Man löst das LGS $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ für jeden Standardbasisvektor $\mathbf{e}_i$ mit der Gauß-Elimination und Rückwärtseinsetzen und die Inverse ist dann $\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$. Dies ist nicht sehr effizient und hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$.

b) Man löst das LGS $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ gegen alle n Standardbasisvektoren (also die Identität) gleichzeitig und überführt $\mathbf{A}$ mithilfe der Gauß-Jordan-Elimination in die Identität, sodass $\mathbf{B}$ nach der Elimination die Inverse von $\mathbf{A}$ enthält. Dies hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^3)$.

Lösung Ende

2. Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösung

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

3. Wie kann man die Inverse dazu nutzen lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen? Welche Voraussetzungen müssen für $\mathbf{A}$ erfüllt sein und welche Laufzeit ergibt sich, angenommen die Inverse sei bereits berechnet?

Lösung

Man kann das LGS durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ lösen. Diese Matrix-Vektor-Multiplikation hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$. Damit man dies überhaupt machen kann, muss $\mathbf{A}$ eine Inverse besitzen, d.h. $\mathbf{A}$ muss regulär und insbesondere quadratsich sein. Die Inverse eignet sich also nicht für überbestimmte Systeme.

Lösung Ende

4. Warum ist es keine gute Idee die Inverse zum Lösen von linearen Gleichungssystemen zu berechnen?

Lösung

Das Berechnen der Inversen ist numerisch instabil.

Lösung Ende

5. Stellen Sie, am Beispiel der Aufgabe 1.1, alle Rechenschritte der Gauß-Elimination durch Matrixmultiplikationen dar. Lässt sich in jedem Schritt auch der inverse Schritt darstellen? Falls ja, wie sehen diese aus?

Lösung

$$\mathbf{G} = \mathbf{G_0} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Erster Schritt:

$$\mathbf{L_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_0^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G_1} = \mathbf{L_0 G_0}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{L_0 b_0},$$

$$\mathbf{G_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zweiter Schritt:

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G_2} = \mathbf{L_1 G_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{L_1 b_1},$$

$$\mathbf{G_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dritter Schritt:

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G_3} = \mathbf{L_2 G_2}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{L_2 b_2},$$

$$\mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{L_2 L_1 L_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{L_2 L_1 L_0 G},$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

sowie

$$(\mathbf{L_2 L_1 L_0})^{-1} = \mathbf{L_0}^{-1}\mathbf{L_1}^{-1}\mathbf{L_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{L_0}^{-1}\mathbf{L_1}^{-1}\mathbf{L_2}^{-1}\mathbf{G}_3,$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösung Ende

6. Wie lassen sich mithilfe einer Matrixmultiplikation zwei Zeilen einer Matrix vertauschen?

Lösung

Wir tauschen die Zeilen 2 und 3 der Matrix $\mathbf{G}_2$ mithilfe der Permutationsmatrix $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{PG_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Man sieht, dass $\mathbf{P}$ eine Orthogonalmatrix ist, daher gilt für alle Permutationsmatritzen $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$. Im Falle einer einzelnen Vertauschung ist $\mathbf{P}$ zusätzlich symetrisch, daraus ergibt sich direkt, dass $\mathbf{P}$ eine Involution ist: $\mathbf{PP} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$.

Lösung Ende

Eine **LR-Zerlegung** ist eine Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$. Bei der Gauß-Elimination wird implizit eine LR-Zerlegung berechnet:

i) $\mathbf{R}$ ist die obere Dreiecksmatrix nach der Elimination.

ii) $\mathbf{L}$ enthält die additiv inversen Faktoren $\ell_{i,j}$, sodass bei der Elimination von $a_{i,j}$ die i-te Zeile $-\ell_{i,j}$ mal zur j-ten Zeile addiert wurde (also die aufmultiplizierten inversen Rechenschritte aus der letzten Aufgabe).

7. Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der obigen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivoting.

Lösung

Eine Möglichkeit ist:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

8. Wie kann man eine LR-Zerlegung dazu nutzen ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen? Tun Sie dies explizit für die obige Matrix $\mathbf{A}$ und folgenden Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösung

Ein LGS $\mathbf{LRx} = \mathbf{b}$ lässt sich durch Kombination aus Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen lösen. Dazu löst man zunächst $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ nach $\mathbf{y}$ und danach $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$. Für den gegebenen Vektor $\mathbf{b}$ erhalten wir:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

9. Welche Laufzeit benötigt das Lösen linearer Gleichungssysteme mit einer LR-Zerlegung? Was ist der Vorteil über der Inversen und der gewöhnlichen Gauß-Elimination gefolgt vom Rückwärtseinsetzen?

Lösung

- Berechnen der LR-Zerlegung: $\mathcal{O}(n^3)$, Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen: $\mathcal{O}(n^2)$
- Vorteil gegenüber der Inversen: Stabilität
- Vorteil gegenüber Gauß-Elimination + Rückwärtseinsetzen: LGS für verschiedene rechte Seiten $\mathbf{b}$ nach einer einzigen Berechnung der LR-Zerlegung effizient lösbar

Lösung Ende

10. Wie kann man mithilfe einer LR-Zerlegung die Determinante einer Matrix effizient berechnen? Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

Lösung

Es gilt: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{R}$. Da $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ Dreiecksmatrizen sind, ist die Determinante gleich des Produktes der Diagonaleinträge. Also ist:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$$

Es gilt $\det \mathbf{A} = -2$.

Lösung Ende