Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 3.1

Eigenzerlegung

27.11.2023 bis 01.12.2023

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Wir sagen $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, falls $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Der Eigenvektor $\mathbf{v}$ wird durch die von $\mathbf{A}$ beschriebene Abbildung lediglich um den Faktor λ skaliert.

1. Was ist das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$? Wie lassen sich die Eigenwerte mithilfe dessen analytisch berechnen? Wie berechnet man die zugehörigen Eigenräume?
2. Was ist die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes? Wie hängen diese zusammen?
3. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume folgender Matrizen:

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. Was bedeutet es, dass eine Matrix diagonalisierbar ist? Welche der Matrizen aus der vorherigen Aufgabe sind diagonalisierbar?
5. Wie hängt die Determinante der Matrix mit ihren Eigenwerten zusammen?
6. Wie hängt der Rang einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit ihren Eigenwerten und -vektoren zusammen?
7. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Wie verhalten sich die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen $2\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ und $\mathbf{A}^{-1}$ zu denen von $\mathbf{A}$?

Aufgabe 2: Eigenzerlegung symmetrischer Matrizen

1. Welche Eigenschaften im Bezug auf Eigenwerte und -vektoren besitzen symmetrische Matrizen, die quadratische Matrizen im Allgemeinen nicht besitzen?

Jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich in ein Produkt dreier Matrizen zerlegen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & \mathbf{u}_1^\mathsf{T} & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{u}_n^\mathsf{T} & — \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, d.h. $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} = \mathbf{I}$. Diese Zerelgung wird (reelle) Eigenzerlegung genannt.

2. Was steht in den Spalten von $\mathbf{U}$ und in der Diagonalen von $\mathbf{\Lambda}$?
3. Was für eine Art von Transformation beschreiben die Matrizen? Welche geomtrische Interpretation ergibt sich daraus für symmetrische Matrizen?
4. Zeigen Sie, dass eine Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch sein muss, um eine reelle Eigenzerlegung zu besitzen.
5. Wie kann man mithilfe der Eigenzerlegung Matrixpotenzen $\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$ effizient berechnen?

$*$ Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie folgende Aussage: Die Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle ihre Eigenwerte größer oder gleich null sind.

Aufgabe 3: Potenzmethode

Die Potenzmethode ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung des Eigenvektors zum betragsmäßig größten Eigenwertes einer (diagonalisierbaren) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei wird ein (zufälliger) Startvektor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ bestimmt und in jedem Schritt folgende Iterationsvorschrift iteriert:

$$\mathbf{v}_{t+1} \leftarrow \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_t\|}.$$

Dabei nehmen wir stets an, dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$.

1. Warum wird der Vektor in jedem Schritt normiert?
2. Für welche Startvektoren $\mathbf{v}_0$ sollte das Verfahren in der Theorie nicht gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert konvergieren? Warum passiert dies häufig trotzdem?
3. Wie kann man, unter der Annahme, dass $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, das Verfahren modifizieren, um weitere Eigenvektoren zu erhalten?
4. Wie kann man mithilfe der Potenzmethode den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert direkt bestimmen? Welche Eigenschaft muss die Matrix dafür haben?

$*$ Zeigen Sie, dass das Verfahren exponentiell mit dem Faktor $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$ konvergiert.