Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 5.2

Schnelle Fourier-Transformation

22.01.2024 bis 26.01.2024

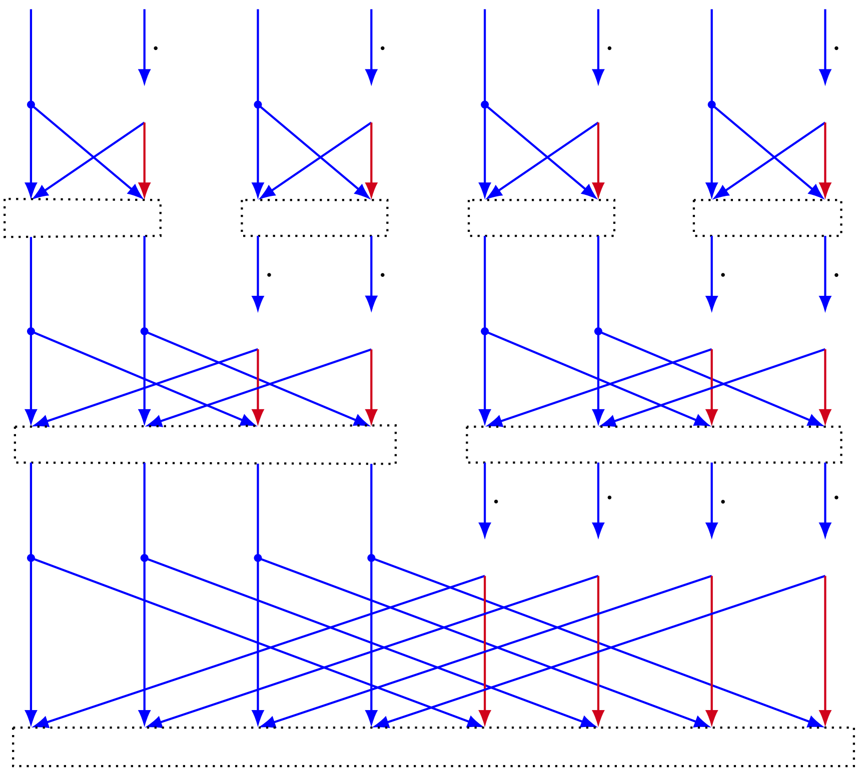
Aufgabe 1: Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

1. Welche Laufzeit hat die diskrete Fourier-Transformation, wenn man sie naiv (wie auf dem letzten Aufgabenblatt gezeigt) implementiert?

2. Konstruieren Sie die DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_{2n}$ mithilfe der DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_n$, einer $2n \times 2n$ Permutationsmatrix $\mathbf{P}_{2n}$, sowie einer $n \times n$ Diagonalmatrix $\mathbf{F}_n$. Wie kann man diese Eigenschaft nutzen, um die Fourier-Transformation von Signalen der Länge 2^n effizient zu berechnen?

3. Der rekursive FFT-Algorithmus lässt sich auch interativ implementieren, wobei die erste Phase eine Umsortierung ist. Wie wird das Signal $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_{2^n-1})^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{(2^n)}$ umsortiert? Führen Sie dies explizit am Signal $\mathbf{z} = (-\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{4})^\mathsf{T}$ durch.

4. Die nächste Phase ist die Kombinationsphase. Ergänzen Sie dazu das folgende Schema („Butterflynetzwerk"), wobei Sie mit dem umsortierten Signal aus der vorherigen Aufgabe beginnen. Geben Sie abschließend die Fourier-Transformation $\hat{\mathbf{z}}$ von $\mathbf{z}$ an, wobei Sie den Normierungsfaktor vernachlässigen dürfen.

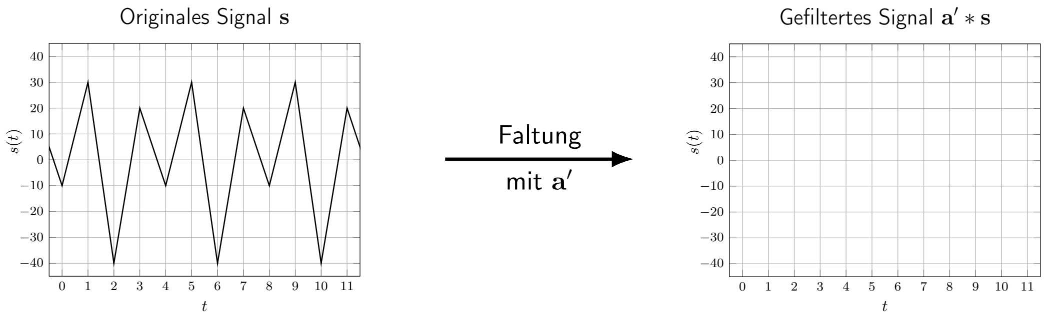


5. Welche Laufzeit hat die schnelle Fourier-Transformation, falls man sie iterativ bzw. rekursiv implementiert?

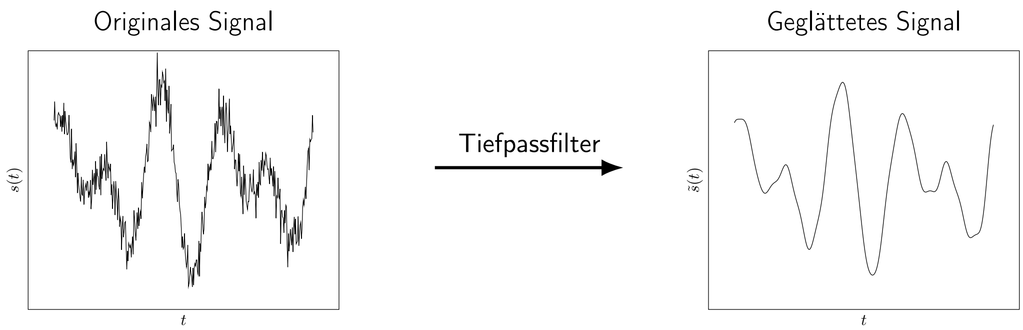
6. Wie lässt sich das Berechnungsschema so ändern, dass man die inverse Fourier-Transformation berechnet?

Aufgabe 2: Faltung

Eine weitere Anwendung der schnellen Fourier-Transformation, neben der Frequenzanalyse, ist die effiziente Berechnung der diskreten, zyklischen Faltung. Gegeben ist das Signal $\mathbf{s} = (-10, 30, -40, 20)^\mathsf{T}$, das unten nochmals dargestellt ist, sowie der Faltungskern $\mathbf{a}' = \frac{1}{4}(2, 1, 0, 1)^\mathsf{T}$.



1. Die zyklische Faltung $\mathbf{a}' * \mathbf{s}$ kann man als Produkt des Signals $\mathbf{s}$ mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ schreiben. Geben Sie die zugehörige Faltungsmatrix $\mathbf{A}$ an.
2. Wo findet sich der Faltungskern $\mathbf{a}'$ in der Matrix wieder? Wie kann man einen unbekannten Faltungskern durch die Faltung mit einem Signal ermitteln? Welche Eigenschaften hat die Faltung?
3. Berechnen Sie die Faltung $\mathbf{a}' * \mathbf{s}$ im Ortsraum und zeichnen Sie das gefilterte Signal in die obige Abbildung hinein. Welchen Effekt hat die Faltung mit $\mathbf{a}'$ auf das Signal?
4. Was besagt der Faltungssatz? Berechnen Sie erneut die Faltung $\mathbf{a}' * \mathbf{s}$, wenden Sie aber diesmal den Filter im Frequenzraum an.
5. Welche Laufzeit hat die zyklische Faltung, falls man sie direkt implementiert und falls man sie mithilfe des Faltungssatzes und der FFT implementiert?
6. Eine weitere Anwendung der schnellen Fourier-Transformation ist der aus der Hausaufgabe bekannte (ideale) Tiefpassfilter. Bei diesem werden die Anteile eines Signals, die zu einer höheren Frequenz als eine Maximalfrequenz $f_{\max}$ gehören, aus diesem entfernt.

   Zwar lässt sich dieser auch durch Faltung im Ortsraum realisieren, jedoch implementiert man diesen meist über die (I)FFT.

   a) Beschreiben Sie die Schritte, die notwendig sind, um die hohen Frequenzen aus dem Eingangssignal herauszufiltern.
   b) Wie sieht der Filter $\hat{\mathbf{a}}'$ im Frequenzraum aus, mit dem elementweise multipliziert wird?
   c) Wie sieht der zugehörige Filter $\mathbf{a}'$ im Ortsraum aus?
7. Unter welchen Voraussetzungen ist es ratsam, die Faltung direkt zu implementieren, statt den Faltungssatz und die FFT zu verwenden?