Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

# Wissenschaftliches Rechnen - Übung 5.1

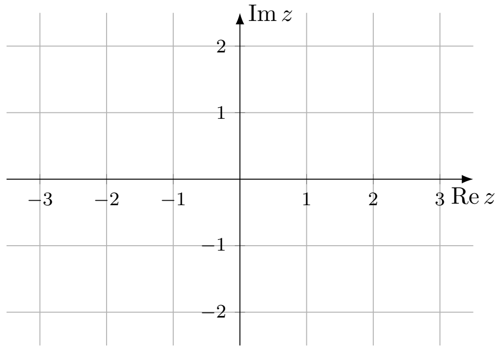
Diskrete Fourier-Transformation

15.01.2024 bis 19.01.2024

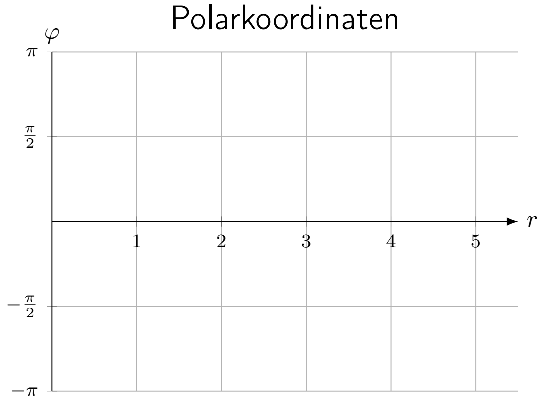
## Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

Die diskrete Fourier-Transformation benötigt Kenntnisse zu komplexen Zahlen. Darum sollen im Folgenden die Grundlagen von komplexen Zahlen wiederholt werden. Gegeben sind zunächst die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ in kartesischer Darstellung sowie $z_2 = 2\exp(\frac{5\pi i}{6})$ in Polarkoordinaten.

Kartesische Koordinaten




Polarkoordinaten



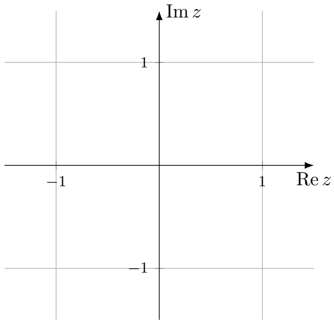

1. Wie funktioniert die Umrechnung von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten und andersherum? Wandeln Sie $z_1$ und $z_2$ in die jeweils andere Darstellung um und zeichnen Sie diese in den obigen Abbildungen hinein.

2. Berechnen Sie die Summe $z_3 = z_1 + z_2$ und das Produkt $z_4 = z_1 \cdot z_2$ und zeichnen Sie diese ebenfalls in die Abbildungen hinein. Welche Darstellung eignet sich für die jeweilige Operation am besten?

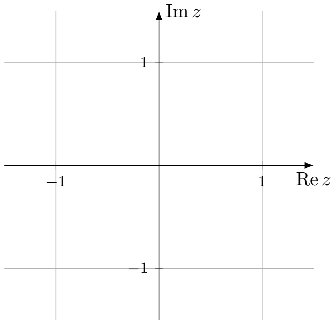
3. Berechnen Sie die komplex Konjugierte $\overline{z_1}$ von $z_1$ in beiden Darstellungen und zeichnen Sie diese ebenfalls in die Abbildungen hinein. Welche geometrische Bedeutung hat die komplexe Konjugation?

4. Gegeben ist die Gleichung $z^n = 1$. Ermitteln Sie alle Lösungen dieser, die sogenannten Einheitswurzeln, in Abhängigkeit von $n$. Zeichnen Sie die Lösungen für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$ in die folgenden Abbildungen hinein. Welche Eigenschaften und geometrische Bedeutung haben sie?

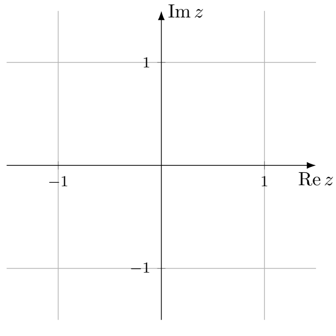
Dritte Einheitswurzeln




Vierte Einheitswurzeln




Fünfte Einheitswurzeln



# Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation bildet ein zeitdiskretes, endliches Signal, von dem man ausgeht, dass es periodisch fortsetzt wird, auf ein diskretes, periodisches Frequenzspektrum ab. Sie gehört zu den wichtigsten Werkzeugen der Signalverarbeitung.

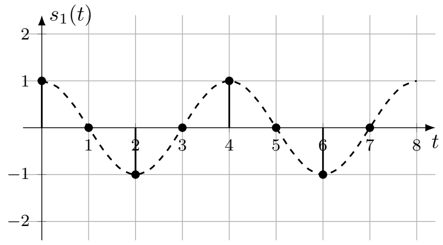
1. Wie ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ definiert? Welche unterschiedlichen Eigenschaften hat dieses im Vergleich zu reellen Skalarprodukten? Welche analogen Matrixeigenschaften ergeben sich dadurch für komplexe Matrizen?

2. Wie ist die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $\hat{\mathbf{z}}$ eines diskreten Signals $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ definiert? Wie lässt sie sich diese als Produkt von $\mathbf{z}$ mit einer Matrix schreiben?

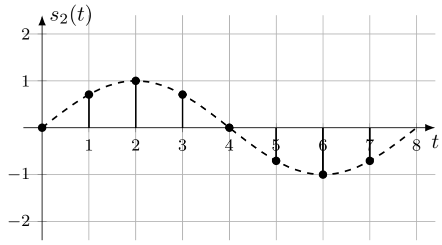
3. Welche Eigenschaften hat die besagte Matrix? Welche Eigenschaften ergeben sich dadurch für die diskrete Fourier-Transformation?

4. Gegeben sind vier kontinuierliche reelle Signale $s_1, \ldots, s_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche äquidistant an den Stützstellen $\{0, \ldots, 7\}$ abgetastet wurden.

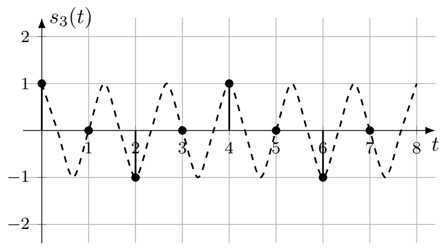
$s_1(t) = \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$



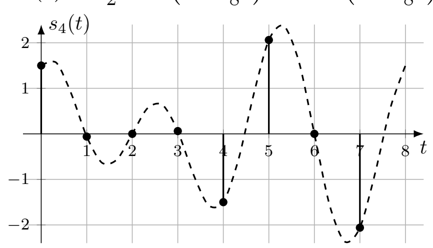

$s_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{8}\right)$




$s_3(t) = \cos\left(6 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$




$s_4(t) = \frac{3}{2}\cos\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{8}\right)$




Wie sieht die Fourier-Transformierte $\hat{\mathbf{s}}_i$ der Vektoren $\mathbf{s}_i = (s_i(0), \ldots, s_i(7))^\mathsf{T}$ aus? Was bedeutet jeder Eintrag im Frequenzspektrum des Fourier-transformierten Signals? Welche Symmetrien kommen bei der DFT eines reellen Signals zustande?

5. Wie lässt sich die inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT) berechnen? Welche Konventionen sind bezüglich der DFT und IDFT zu beachten?