Technische Universität Berlin, 19.02.2024

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Schriftlicher Test: Berechenbarkeit und Komplexität

(Weller/Froese/Kellerhals/Kunz, Wintersemester 2023/2024)

Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktzahl:	50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	**Summe**
Punktzahl:	16	16	18	50
Davon erreicht:				

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Aussagen **und Mitteilungen** aus den Vorlesungsfolien als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert.

Erinnerung an Erkenntnisse der Vorlesung:

- Q ist in NP, falls Ja-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind, d.h. es existiert eine deterministische, polynomzeitbeschränkte TM M, sodass für alle x gilt
$$x \in Q \iff \exists_{u \in \Sigma^{\mathrm{poly}(|x|)}} \langle x, u \rangle \in T(M).$$
Q ist in coNP, falls Nein-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind (analog zu oben).
- Für alle $\mathcal{X} \in \{\mathrm{NP}, \mathrm{coNP}, \mathrm{PSPACE}\}$ ist Q $\mathcal{X}$-schwer (-vollständig), falls $\forall_{L \in \mathcal{X}}\ L \leq_m^p Q$ (und $Q \in \mathcal{X}$).
- Die Menge TQBF aller wahren quantifizierten aussagenlogischen Formeln ist PSPACE-vollständig und entscheidbar.
- $\leq_m^p$ ist transitiv.
- $\mathrm{coNP} = \{L \mid \overline{L} \in \mathrm{NP}\}$
- $\mathrm{PSPACE} = \{L \mid L \leq_m^p \mathrm{TQBF}\}$
- 2-SAT $\in$ P
- $\overline{\mathrm{SAT}}$ und TAUT sind coNP-vollständig.
- SAT, Vertex Cover und Clique sind NP-vollständig.
- P = coP

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Vermischtes** (16 Punkte)

(a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist oder nicht (ohne Begründung). (4 P)

(1) $n^n \in O(2^{n^2})$

(2) $O(n) = O(100n)$

(3) $n^3 + 2n^2 \in O(n^2 \log n)$

(4) $1.2^n \in O(n^{10})$

——————Lösungsskizze——————

(1) und (2) sind wahr.

(b) Beweisen Sie **drei** der folgenden Aussagen. (Für die anderen Aussagen brauchen Sie nichts beweisen, manche Aussagen sind auch nicht wahr.) (12 P)

(1) $\text{NP} \neq \text{coNP} \implies \text{P} \neq \text{NP}$

(2) $\text{NP} = \text{coNP} \implies \text{P} = \text{NP}$

(3) Wenn eine NP-schwere Sprache in coNP liegt, dann gilt NP = coNP.

(4) $\text{P} = \text{NP} \implies \text{P} = \text{PSPACE}$

(5) Jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ mit $L \leq_m^p \emptyset$ enthält endlich viele Wörter.

(6) Für alle Sprachen $L, Q \in \text{NP}$ mit $L \leq_m^p Q$ und $Q \leq_m^p L$ gilt, dass L und Q NP-schwer sind.

——————Lösungsskizze——————

(1) ist die Kontraposition zu $\text{P} = \text{NP} \implies \text{NP} = \text{coNP}$. Nehmen wir an, dass P = NP. Dann gilt für jede Sprache $L \in \text{NP}$, dass sie auch in P ist, und damit auch in coP. Da $\text{coP} \subseteq \text{coNP}$ ist, gilt auch, dasss $L \in \text{coNP}$. Also ist $\text{NP} \subseteq \text{coNP}$. Mit den gleichen Schritten können wir zeigen, dass jede Sprache in coNP auch in NP ist. Es folgt NP = coNP.

(3) sei A NP-schwer und in coNP. Dann gilt für alle L in NP, dass $L \leq_m^p A$. Da A in coNP ist, folgt aus der Reduktion, dass L auch in coNP ist. Folglich ist $\text{NP} \subseteq \text{coNP}$. Nun, wenn A NP-schwer und in coNP ist, dann ist $\overline{A}$ coNP-schwer und in NP. Aus den obigen Argumenten folgt dann auch $\text{coNP} \subseteq \text{NP}$, und folglich auch NP=coNP.

(5) Die einzige Sprache L mit $L \leq_m^p \emptyset$ ist $L = \emptyset$. Gäbe es ein $x \in L$, so müsste die Reduktionsfunktion f dieses Wort auf ein Wort $f(x) \in \emptyset$ abbilden – ein Widerspruch.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 2: **Klassendiagramm** (16 Punkte)

Zeichnen Sie ein Inklusionsdiagramm, das die Klassen P, NP, coNP und PSPACE enthält. Begründen Sie jede Ihrer Inklusionen.

Hinweis: Sie müssen keine transitiven Inklusionen begründen. Das heißt, falls Sie $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z$ begründet haben, müssen Sie $X \subseteq Z$ nicht begründen.

——————Lösungsskizze——————

Wir verweisen auf die Beweise aus Vorlesungen, Modulkonferenzen und Übungsblättern. Es muss gezeigt werden, dass P $\subseteq$ NP, P $\subseteq$ coNP, NP $\subseteq$ PSPACE und coNP $\subseteq$ PSPACE.

————————————————

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 3: **Polynomzeitreduktionen** (18 Punkte)

Betrachten Sie das folgende NP-schwere Problem.

3-Coloring
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Lässt sich jeder Knoten mit einer der Farben Rot, Blau oder Grün färben, sodass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben?

(a) Zeigen Sie für eine der folgenden Aussagen, dass diese aus 3-Coloring $\leq_m^p$ 2-SAT folgt. (Für die anderen zwei Aussagen brauchen Sie nichts zeigen.) (3 P)

- P = coNP
- P = NP
- P = PSPACE

——————Lösungsskizze——————

Es gilt P = NP. Denn 3-Coloring ist NP-schwer und 2-SAT ist in P. Es folgt, dass jede Sprache L in NP auf 3-Coloring polynomzeitreduzierbar ist und wegen obiger Polynomzeitreduktion auch auf 2-SAT polynomzeitreduzierbar ist. Daraus folgt, dass L auch in P ist, folglich ist NP $\subseteq$ P, und somit P = NP.

(b) Betrachten Sie die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, die bei Eingabe eines kodierten Graphen $G = (V, E)$ eine kodierte KNF-Formel φ ausgibt, die wie folgt definiert ist. (8 P)

(i) Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es drei Variablen v_r (Rot), v_g (Grün), v_b (Blau).

(ii) Für jeden Knoten $v \in V$ und jedes Paar von Farben $i, j \in \{\mathrm{r}, \mathrm{g}, \mathrm{b}\}$ mit $i \neq j$ enthält φ die Klausel $(\neg v_i \vee \neg v_j)$
(äquivalent zu $(v_i \to \neg v_j)$ und zu $(v_j \to \neg v_i)$ – „kein Knoten hat mehr als eine Farbe“).

(iii) Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und jede Farbe $i \in \{\mathrm{r}, \mathrm{g}, \mathrm{b}\}$ enthält φ die Klausel $(\neg u_i \vee \neg v_i)$
(äquivalent zu $(u_i \to \neg v_i)$ und zu $(v_i \to \neg u_i)$ – „Nachbarn haben verschiedene Farben“).

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $\langle G \rangle \in$ 3-Coloring $\implies f(\langle G \rangle) \in$ 2-SAT
2. $f(\langle G \rangle) \in$ 2-SAT $\implies \langle G \rangle \in$ 3-Coloring

——————Lösungsskizze——————

1. Wenn $\langle G \rangle \in$ 3-Coloring, dann gibt es eine gültige 3-Färbung. Entsprechend der Farbe von Knoten v setzen wir die entsprechende Variable v_r, v_g oder v_b wahr und die anderen beiden Variablen auf falsch. Das erfüllt offensichtlich die Klauseln in (ii). Weiter erfüllt diese Belegung die Klauseln in (iii), da keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben. Die Belegung erfüllt also alle Klauseln, folglich gilt $f(\langle G \rangle) \in$ 2-SAT.
2. Diese Aussage gilt nicht. Nehmen wir an, dass $\langle G \rangle \notin$ 3-Coloring. Wir beobachten, dass alle Literale in der Formel $f(\langle G \rangle)$ negativ sind. Wenn alle Variablen auf Falsch gesetzt werden, ist also jede Klausel erfüllt. Also ist $f(\langle G \rangle)$ erfüllbar – ein Widerspruch zu 2.

(c) Modifizieren Sie die obige Funktion f durch Hinzufügen von Klauseln, sodass eine Polynomzeitreduktion von 3-Coloring auf 3-SAT entsteht und beweisen Sie deren Korrektheit. (7 P)

Hinweis: Eine Eingabe für 3-SAT besteht aus Klauseln mit *höchstens* drei Literalen.

——————Lösungsskizze——————

Wir fügen die Klausel $(v_r \vee v_g \vee v_b)$ für jeden Knoten $v \in V$ hinzu. Die Belegung aus 1. erfüllt die neuen Klauseln, also gilt $\langle G \rangle \in$ 3-Coloring $\implies f(\langle G \rangle) \in$ 2-SAT.

Nehmen wir nun an, dass $f(\langle G \rangle) \in$ 2-SAT. Also gibt es eine gültige Belegung der Variablen in der Formel. Wir färben jeden Knoten $v \in V$ mit der Farbe i für die die Variable v_i wahr ist.

Wegen der neuen Klausel ist mindestens eine der drei Variablen wahr. Wegen der Klauseln aus (ii) ist höchstens eine der drei Variablen wahr. Folglich wird jeden Knoten genau eine Farbe zugewiesen. Wegen der Klauseln aus (iii) haben keine zwei benachbarte Knoten die gleiche Farbe. Also ist die Färbung gültig, und $\langle G \rangle \in$ 3-Coloring.

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)