Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 5.2

Themen: Faltung, Schnelle Fourier-Transformation

Ugo & Gabriel

24. Januar 2023

Aufgabe 1: Faltung

1. Konstruieren Sie die Faltungsmatrix $\mathbf{A}$ mithilfe des Faltungskerns $\mathbf{a}'$ und der Basis der Potenzen der Zirkulationsmatrix $\mathbf{Z}$, also $(\mathbf{I}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2, \ldots, \mathbf{Z}^{n-1})$.

Lösung

Gegeben $\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_{n-1} \end{bmatrix}$, dann ergibt sich:

$$a'_0\mathbf{I} + a'_{n-1}\mathbf{Z} + a'_{n-2}\mathbf{Z}^2 + \ldots + a'_1\mathbf{Z}^{n-1} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a'_0 & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \ldots & a'_2 & a'_1 \\ a'_1 & a'_0 & a'_{n-1} & \ldots & a'_3 & a'_2 \\ a'_2 & a'_1 & a'_0 & \ldots & a'_4 & a'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{n-2} & a'_{n-3} & a'_{n-4} & \ldots & a'_0 & a'_{n-1} \\ a'_{n-1} & a'_{n-2} & a'_{n-3} & \ldots & a'_1 & a'_0 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

2. Falten Sie das Signal $\mathbf{s} = (3, 2, -1, -4, -3)^\mathsf{T}$ mit dem Faltungskern $\mathbf{b}' = (0, -1, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen dazu:
   a) Welchen kontinuierlichen Operator approximiert diese Faltung?
   b) Handelt es sich hierbei um einen Hochpass- oder Tiefpassfilter oder nichts davon?

Lösung

$$\mathbf{b}' * \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Die erste Ableitung wird durch finite Differenzen approximiert. Die zweite Ableitung wäre dann auch durchführbar mit $\mathbf{b}' * \mathbf{b}' * \mathbf{s}$.

Lösung Ende

3. Zeigen Sie, dass der Faltungsoperator kommutativ ist, das heißt $\mathbf{a}' * \mathbf{s} = \mathbf{s} * \mathbf{a}'$.

Lösung

Wir stellen uns die Frage was der i. Eintrag der jeweiligen Lösungsvektoren ist:

$$(\mathbf{a}' * \mathbf{s})_i = \sum_{k=0}^{n-1} s_k a'_{n+i-k \mod n},$$

sowie

$$(\mathbf{s} * \mathbf{a}')_i = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k s_{n+i-k \mod n}.$$

Setzen wir $(j = n + i - k) \mod n$, so ergibt sich $(k = n + i - j) \mod n$. Demnach

$$(\mathbf{s} * \mathbf{a}')_i = \sum_{k=0}^{n-1} a'_{n+i-j \mod n} s_j.$$

Wenn wir nun auch in der Laufvariable der Summe k durch j ersetzt ergibt sich

$$(\mathbf{s} * \mathbf{a}')_i = \sum_{j=n+i \mod n}^{i-1 \mod n} a'_{n+i-j \mod n} s_j.$$

Wir können diese Grenzen auf 0 und $n-1$ verschieben und erhalten

$$(\mathbf{s} * \mathbf{a}')_i = \sum_{j=0}^{n-1} s_j a'_{n+i-j \mod n} = (\mathbf{a}' * \mathbf{s})_i.$$

Lösung Ende

4. Wie kann man den Kern einer (unbekannten) Faltung leicht herausfinden, indem man die Faltung auf beliebige Signale anwendet?

Lösung

Da der Kern in der ersten Spalte der Faltungsmatrix steht, ergibt sich dieser, wenn man die Faltung auf den Einheitsimpuls $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}$ anwendet.

Lösung Ende

5. Was besagt der Faltungssatz?

Lösung

$$\mathbf{a}' * \mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{\Omega}_n \left(\operatorname{diag}\left(\overline{\mathbf{\Omega}_n}\mathbf{a}'\right) \overline{\mathbf{\Omega}_n}\mathbf{s}\right).$$

Faltung im Ortsraum entspricht Produktbildung im Frequenzraum.

Sowie:

Produktbildung im Ortsraum entspricht Faltung im Frequenzraum.

Lösung Ende

6. Die Faltung lässt sich nach einem Basiswechsel effizient im Eigenraum der Faltungsmatrix durchführen. Gegeben das Signal $\mathbf{s}$ sowie der Kern $\mathbf{a}'$. Auf wie viele Vektoren muss die DFT angewendet werden, um das gefaltete Signal im Ortsraum zu berechnen?

Lösung

Zunächst müssen $\mathbf{s}$ und $\mathbf{a}'$ in den Frequenzraum gebracht werden. Danach muss das gefilterte Signal vom Frequenzraum in den Ortsraum zurück gebracht werden

$$\overline{\mathbf{\Omega}}^{\mathsf{T}} \operatorname{diag}(\mathbf{\Omega}\mathbf{a}')\mathbf{\Omega}\mathbf{s},$$

also drei.

Lösung Ende

7. Wieso lohnt sich der Aufwand des Basiswechsels, der jeweils durch eine Matrix-Multiplikation definiert ist, anstatt eine einzige Matrix-Vektor-Multiplikation, die der Faltungsmatrix $\mathbf{A}$, durchzuführen?

Lösung

Durch die Struktur der DFT lässt sich der Basiswechsel mithilfe der schnellen Fourier-Transformation in $\mathcal{O}(n \log n)$ durchführen. Das ist ein enormer Geschwindigkeitsvorteil, da Matrix-Vektor-Multiplikation sonst $\mathcal{O}(n^2)$ benötigt.

Lösung Ende

8. Der ideale Tiefpassfilter (bekannt aus der Hausaufgabe) funktioniert wie folgt:
   i) Wir berechnen die Fourier-Transformation $\hat{\mathbf{z}}$ des Signals $\mathbf{z}$.
   ii) Wir bestimmen die höchste Frequenz m, welche im Signal beibehalten werden soll.
   iii) Wir setzen, unter Berücksichtigung der Symmetrien, die Anteile aller Frequenzen, die höher sind als die maximale Frequenz, auf 0.

   Der Filter ist ein linearer Filter und kann durch Faltung implementiert werden.
   a) Wie sieht der zugehörige Faltungskern $\hat{\mathbf{a}}'$ im Frequenzraum aus?
   b) Wie sieht der zugehörige Faltungskern $\mathbf{a}'$ im Ortsraum aus?

Lösung

a) Da wir den Anteil an hohen Frequenzen auf Null setzen, ist der Faltungskern im Frequenzraum $\hat{a}' = (1, \dots, 1, 0 \dots, 0, 1, \dots, 1)^{\mathsf{T}}$.
b) Führen wir eine inverse Fourier-Transformation auf den Faltungskern im Frequenzraum aus, so erhalten wir eine Superposition langsam schwingender Kosinus- bzw. Sinusschwingungen.

Lösung Ende

Aufgabe 2: Schnelle Fourier-Transformation

1. Gegeben der Real- sowie Imaginärteil des Frequenzspektrums $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^8$ eines periodischen Signals $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^8$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}32 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0\end{bmatrix}\\ \operatorname{Im}\hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}0 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

   a) Wie lautet der durchschnittliche Signalwert? Den ersten Eintrag denormalisieren und durch die Signallänge teilen, also $32/8 = 4$

   b) Handelt es sich um ein rein reelles, rein imaginäres Signal oder nichts davon? reell, der erste imaginäre Eintrag ist 0, der Realteil ist achsensymetrisch und der Imaginärteil punktsymetrisch.

   c) Welche (kleinste) Periodenlänge besitzt das Signal? 4, das erkennt man daran, dass die ungeraden Frequenzen 0 sind. Unser Resultat ist also eine Linearkombination von Frequenzen, dessen ersten vier Werte gleich den letzten vier ist. Daher gilt das auch für die Linearkombination.

2. Auf welche der folgenden Signale ist die FFT[1] und auf welche die DFT anwendbar?

   a) $\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}^\mathsf{T}$

   b) $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^4$

   c) $\mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^{17}$

   d) $\mathbf{s}_3 \in \mathbb{C}^{256}$

   e) $\mathbf{s}_4 \in \mathbb{R}^{1000}$

   ——— Lösung ———

   Die DFT ist auf alle Signale anwendbar, die FFT nur auf solche, dessen Länge einer Zweierpotenz entspricht, also $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_3$.

   ——— Lösung Ende ———

3. Konstruieren Sie die DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_{2n}$ mithilfe der der DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_n$, einer Permutationsmatrix $\mathbf{P}$, sowie einer Diagonalmatrix $\mathbf{F}$. Wie kann man diese Eigenschaft nutzen?

   ——— Lösung ———

   Siehe Skript 7.6. Rekursive diskrete Fouriertransformation.

   ——— Lösung Ende ———

4. Wie sieht das Signal $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ aus, nachdem man $\mathbf{P}$ einmal angewendet hat? Wie sieht das Signal aus, nach dem man den kompletten Umsortierungs Schritt der FFT angewendet hat?

   ——— Lösung ———

   Erster Schritt: $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.
   Letzter Schritt: $\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 8\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

   ——— Lösung Ende ———

[1] Der FFT-Algorithmus aus unserer Vorlesung

5. Gegeben eine Position im ursprünglichen Index, wie lässt sich die Position im umsortieren Signal effizient berechnen? Wie verhält es sich mit der Rückrichtung?

Lösung

Man wandelt die Bitdarstellung von LSB-0 (least significant bit) in MSB-0 (most significant bit) um, man dreht also die Bitreihenfolge des Index um. Da die Operation selbstinvers ist, gilt dies für beide Richtungen.

Lösung Ende

6. Die schnelle Fourier-Transformation bildet nur in den Frequenzraum ab, wie kann man das Verfahren erweitern, um vom Frequenzraum in den Ortsraum abzubilden?

Lösung

Da $\mathbf{\Omega}_n^{-1} = \overline{\mathbf{\Omega}_n}$ muss im jedem Schritt anstatt mit ω_{2m}^j mit $\overline{\omega_{2m}^j}$ multipliziert werden.

Lösung Ende

7. Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ ein komplexes Signal der Länge n mit den Indizes $0, \ldots, n-1$, dessen inverse Fourier-Transformation wir berechnen möchten. Wir definieren folgende Funktionen:
   - rev kehrt die Einträge des Signals (bis auf den ersten) um, sodass
   $$\mathrm{rev}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (z_0, z_{n-1}, \ldots, z_1)$$
   - swap vertauscht den Real- und Imaginärteil des Signals

   Zeigen Sie, dass die inverse Fourier-Transformation eines Signals durch Anwendung der (vorwärts) Fourier-Transformation auf folgende Weisen berechnet werden kann:

   a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \overline{\mathcal{F}(\overline{\mathbf{z}})}$

   b) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathrm{rev}(\mathbf{z}))$

   c) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathrm{rev}(\mathcal{F}(\mathbf{z}))$

   d) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathrm{swap}(\mathcal{F}(\mathrm{swap}(\mathbf{z})))$

Lösung

Seien $\hat{\mathbf{z}} = \mathcal{F}(\mathbf{z})$ und $\tilde{\mathbf{z}} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z})$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\hat{z}_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\tilde{z}_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right).\end{aligned}$$

a) Hier sind folgende Identitäten nützlich: Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ sowie $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\hat{\bar{z}}}_k &= \overline{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right)} \\
&= \overline{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}_j \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \overline{\sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}_j \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\overline{z}}_j \overline{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k \cdot j\right)\right) \\
&= \tilde{z}_k
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathrm{rev}(\mathbf{z}))_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_{n-j} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k \cdot (n-j)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right) \exp(2\pi i k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right) \\
&= \tilde{z}_k
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rev}(\mathcal{F}(\mathbf{z}))_k &= \hat{z}_{n-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} (n-k) \cdot j\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right) \exp(2\pi i j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} k \cdot j\right) \\
&= \tilde{z}_k
\end{aligned}
$$

d) TODO

Eigentlich eine sehr spaßige Aufgabe.

Lösung Ende