FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 18.10.2022

Nicht-öffentliche Lösungsvorschläge zum 1. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Formeln, ob sie unerfüllbar, allgemeingültig oder erfüllbar, aber nicht allgemeingültig, sind.

(i) $X \wedge (Y \vee Z)$

(ii) $((Y \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z \vee X)) \vee \neg Z$

(iii) $(D \leftrightarrow E) \wedge (A \wedge B \wedge (A \vee B)) \wedge (C \leftrightarrow D) \wedge (E \leftrightarrow \neg C)$

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Die Belegung β_1 mit $\beta_1(X) = 1$, $\beta_1(Y) = 1$ und $\beta_1(Z) = 1$ erfüllt die Formel, aber die Belegung β_2 mit $\beta_2(X) = 0$, $\beta_2(Y) = 1$ und $\beta_2(Z) = 1$ erfüllt die Formel nicht. Also ist sie erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(ii) Angenommen, es gibt eine Belegung β, die die Formel nicht erfüllt. Dann gilt $\beta(Z) = 1$, denn sonst wäre die Formel erfüllt. Also ist $[\![Y \rightarrow Z]\!]^\beta = 1$ und auch $[\![Z \vee X]\!]^\beta = 1$. Somit ist $[\![Y \rightarrow Z \vee X]\!]^\beta = 1$ und $[\![Y \rightarrow Z]\!]^\beta = 1$, und die Formel wird von β erfüllt, ein Widerspruch.

Also gilt die Annahme nicht, und die Formel ist allgemeingültig.

(iii) Angenommen, es gibt eine Belegung β, die die Formel erfüllt. Dann gilt $\beta(A) = 1 = \beta(B)$, sonst wäre $[\![(A \wedge B \wedge (A \vee B))]\!]^\beta = 0$.

Falls $\beta(C) = 1$, ist auch $\beta(D) = 1$ und $\beta(E) = 1$. Aber dann ist $[\![E \leftrightarrow \neg C]\!]^\beta = 0$, ein Widerspruch.

Falls $\beta(C) = 0$, ist $\beta(D) = 0$ und $\beta(E) = 0$. Aber dann ist $[\![E \leftrightarrow \neg C]\!]^\beta = 0$, ein Widerspruch.

Die Annahme gilt also nicht, und die Formel ist unerfüllbar.

Aufgabe 2

Der Spion M kommt spät abends in Berlin an. Eigentlich sollte er von der Spionin K am Bahnhof abgeholt werden, aber stattdessen findet er nur folgende kryptische Anweisungen unter einer Bank am Bahnsteig.

(1) Regnet es, dann trage ich einen Hut.

(2) Ich bin in der Kneipe, oder im Café oder ich trage keinen Hut.

(3) Ich bin zuhause genau dann, wenn ich weder in der Kneipe noch im Café bin.

M blickt durch die Bahnhofsfenster. Es regnet.

(i) Formalisieren Sie die Anweisungen von K durch aussagenlogische Formeln. Müssen Sie irgendwelche impliziten Bedingungen betrachten, damit Ihre Formalisierung die Anweisungen auf einer sinnvollen Art und Weise modelliert?

(ii) Wie kann M Ihre Formalisierung von *(i)* verwenden, um herauszufinden, wo K sich befindet? Ist der Ort eindeutig? Wenn nein, was sind die möglichen Orte, an denen man K finden könnte?

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Wir definieren die folgenden aussagenlogischen Variablen:

R	Es regnet.	H	K trägt einen Hut.
K	K ist in der Kneipe.	C	K ist im Café.
Z	K ist zuhause.		

Wir formalisieren die Aussage i mit der Formel φ_i. Wir brauchen zusätzlich eine Formel φ_4, da K natürlich in höchstens einem der benannten Orten sein kann.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= R \to H \\
\varphi_2 &= K \lor C \lor \neg H \\
\varphi_3 &= Z \leftrightarrow \neg K \land \neg C \\
\varphi_4 &= (K \to \neg Z \land \neg C) \land (Z \to \neg K \land \neg C) \land (C \to \neg K \land \neg Z)
\end{aligned}$$

(ii) M sucht nach einer Belegung β mit $\beta(R) = 1$, sodass $\beta \models \varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4$. Es gibt aber mehr als eine solche Belegung, z.B.

$$\begin{aligned}
\beta_1(R) &= 1 & \beta_2(R) &= 1 \\
\beta_1(H) &= 1 & \beta_2(H) &= 1 \\
\beta_1(K) &= 1 & \beta_2(K) &= 0 \\
\beta_1(C) &= 0 & \beta_2(C) &= 1 \\
\beta_1(Z) &= 0 & \beta_2(Z) &= 0
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass dies die einzigen zwei Belegungen dieser Variablen sind, die alle φ_i erfüllen. Sei hierfür β eine Belegung der obigen Variablen mit $\beta(R) = 1$ und $\beta \models \varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\beta(H) = 1, && \text{(weil } \beta \models \varphi_1) \\
\Rightarrow &\beta \models K \lor C, && \text{(weil } \beta \models \varphi_2) \\
\Rightarrow &\beta(Z) = 0, && \text{(weil } \beta \models \varphi_3) \\
\Rightarrow &\beta \models \neg(K \land C) && \text{(weil } \beta \models \varphi_4)
\end{aligned}$$

Gilt $\beta(K) = 1$, dann ist $\beta = \beta_1$. Sonst gilt $\beta(C) = 1$ und $\beta = \beta_2$.

Aufgabe 3

Eine Bäuerin hat ihre Weide mit einem Zaun in zwei Hälften getrennt. Sie versucht nun ihre Tiere so auf die zwei Teile der Weide zu verteilen, dass die Tiere nicht miteinander kämpfen. Um dieses Problem zu lösen, versucht sie ihre Situation und ihr Wissen in einer aussagenlogische Formel zu modellieren.

Sei T die Menge der Tiere der Bäuerin und P die Menge der Paare von Tieren, die nicht zusammen sein dürfen. Die Bäuerin erstellt die Formel $\varphi_{T,P}$ wie folgt: Für jedes Tier i gibt es eine Variable A_i und die Belegung der Variable entspricht der Hälfte der Weide auf der das Tier leben soll. Für jedes Paar verschiedener Tiere i, j gibt es eine Variable $K_{i,j}$, welche besagt, dass i und j nicht zusammen sein dürfen, wenn sie mit 1 belegt wird. Die Formel ist geben durch

$$\varphi_{T,P} = \bigwedge_{i,j \in T, i \neq j} (K_{i,j} \to (A_i \leftrightarrow \neg A_j)).$$

Die Bäuerin sucht nach einer Belegung β mit $\beta \models \varphi_{T,P}$ und will aus dieser Belegung von A_i ablesen, wo das Tier i grasen soll.

(i) Finden Sie Mengen T und P und eine Belegung β so, dass $\beta \models \varphi_{T,P}$, aber keine Verteilung der Tiere möglich ist.

(ii) Beschreiben Sie wie Sie aus T und P eine Formel $\psi_{T,P}$ so konstruieren können, dass $\psi_{T,P}$ genau dann erfüllbar ist, wenn eine Verteilung der Tiere möglich. Erklären Sie dazu, wie Sie aus einer Verteilung eine erfüllende Belegung finden können, und wie Sie aus einer erfüllende Belegung für $\psi_{T,P}$ eine Verteilung der Tiere finden können.

Anmerkung: Wir gehen davon aus, dass P eine symmetrische Relation ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Wir setzen $T = \{1, 2, 3\}$ und $P = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$. Offensichtlich können wir die drei Tiere nicht auf der Weide unterbringen, da sie sich alle gegenseitig nicht leiden können und somit keine zwei von ihnen auf der selben Hälfte der Weide leben können.

Wir wählen nun die Belegung β mit $\beta(K_{i,j}) = 0$ für alle $i, j \in T$ mit $i \neq j$ und mit $\beta(T_i) = 0$ für alle $i \in V$. Da die linke Seite aller Implikationen in $\varphi_{T,P}$ falsch ist, werten alle Implikationen zu 1 aus, und somit auch die große Konjunktion. Also gilt $\beta \models \varphi_{T,P}$.

Moral: Nur weil man möchte, dass etwas in einer Formel auf eine bestimmte Weise belegt wird, heißt das noch nicht, dass das auch passiert. Man muss also die Erwartungen, die man an die Belegung der Variablen hat, auch mit formalisieren.

(ii) Wir setzen

$$\psi_{T,P} = \varphi_{T,P} \wedge \bigwedge_{(i,j)\in P} K_{i,j} \wedge \bigwedge_{\substack{i,j\in T,\\ i\neq j \text{ und}\\ (i,j)\notin P\\ (j,i)\notin P}} \neg K_{i,j}.$$

Sei β eine Belegung mit $\beta \models \psi_{T,P}$. Wegen der zwei großen Konjunktionen in $\psi_{T,P}$ gilt $\beta(K_{i,j}) = 1$ genau dann, wenn $(i, j) \in P$. Wegen der Implikationen in $\varphi_{T,P}$ gilt also, dass $\beta(A_i) \neq \beta(A_j)$ falls $(i, j) \in P$. Wenn wir das Tier i auf die rechte Seite der Weide zuteilen, falls $\beta(A_i) = 1$ ist, und auf die linke Seite sonst, dann erhalten wir eine Verteilung der Tiere ohne Konflikte.

Andersherum, wenn wir eine Verteilung der Tiere haben, konstruieren wir eine Belegung β wie folgt. Wir setzen $\beta(K_{i,j}) = 1$, falls $(i, j) \in P$ und $\beta(K_{i,j}) = 0$ sonst. Falls das Tier i auf die rechte Seite der Weide zugeteilt wird, dann setzen wir $\beta(A_i) = 1$. Sonst setzen wir $\beta(A_i) = 0$. Da wir eine Verteilung haben, gilt $\beta(A_i) \neq \beta(A_j)$ falls $(i, j) \in P$. Somit werden die Implikationen in $\psi_{T,P}$ erfüllt und es gilt $\beta \models \psi_{T,P}$.