Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 5.2

Themen: Faltung, Schnelle Fourier-Transformation

Ugo & Gabriel

24. Januar 2023

Aufgabe 1: Faltung

1. Konstruieren Sie die Faltungsmatrix $\mathbf{A}$ mithilfe des Faltungskerns $\mathbf{a}'$ und der Basis der Potenzen der Zirkulationsmatrix $\mathbf{Z}$, also $(\mathbf{I}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2, \ldots, \mathbf{Z}^{n-1})$.

2. Falten Sie das Signal $\mathbf{s} = (3, 2, -1, -4, -3)^\mathsf{T}$ mit dem Faltungskern $\mathbf{b}' = (0, -1, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen dazu:
   a) Welchen kontinuierlichen Operator approximiert diese Faltung?
   b) Handelt es sich hierbei um einen Hochpass- oder Tiefpassfilter oder nichts davon?

3. Zeigen Sie, dass der Faltungsoperator kommutativ ist, das heißt $\mathbf{a}' * \mathbf{s} = \mathbf{s} * \mathbf{a}'$.

4. Wie kann man den Kern einer (unbekannten) Faltung leicht herausfinden, indem man die Faltung auf beliebige Signale anwendet?

5. Was besagt der Faltungssatz?

6. Die Faltung lässt sich nach einem Basiswechsel effizient im Eigenraum der Faltungsmatrix durchführen. Gegeben das Signal $\mathbf{s}$ sowie der Kern $\mathbf{a}'$. Auf wie viele Vektoren muss die DFT angewendet werden, um das gefaltete Signal im Ortsraum zu berechnen?

7. Wieso lohnt sich der Aufwand des Basiswechsels, der jeweils durch eine Matrix-Multiplikation definiert ist, anstatt eine einzige Matrix-Vektor-Multiplikation, die der Faltungsmatrix $\mathbf{A}$, durchzuführen?

8. Der ideale Tiefpassfilter (bekannt aus der Hausaufgabe) funktioniert wie folgt:
   i) Wir berechnen die Fourier-Transformation $\hat{\mathbf{z}}$ des Signals $\mathbf{z}$.
   ii) Wir bestimmen die höchste Frequenz m, welche im Signal beibehalten werden soll.
   iii) Wir setzen, unter Berücksichtigung der Symmetrien, die Anteile aller Frequenzen, die höher sind als die maximale Frequenz, auf 0.

   Der Filter ist ein linearer Filter und kann durch Faltung implementiert werden.
   a) Wie sieht der zugehörige Faltungskern $\hat{\mathbf{a}}'$ im Frequenzraum aus?
   b) Wie sieht der zugehörige Faltungskern $\mathbf{a}'$ im Ortsraum aus?

Aufgabe 2: Schnelle Fourier-Transformation

1. Gegeben der Real- sowie Imaginärteil des Frequenzspektrums $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^8$ eines periodischen Signals $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^8$.

$$\operatorname{Re}\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 32 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\operatorname{Im}\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Wie lautet der durchschnittliche Signalwert?
   b) Handelt es sich um ein rein reelles, rein imaginäres Signal oder nichts davon?
   c) Welche (kleinste) Periodenlänge besitzt das Signal?

2. Auf welche der folgenden Signale ist die FFT[1] und auf welche die DFT anwendbar?
   a) $\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
   b) $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^4$
   c) $\mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^{17}$
   d) $\mathbf{s}_3 \in \mathbb{C}^{256}$
   e) $\mathbf{s}_4 \in \mathbb{R}^{1000}$

3. Konstruieren Sie die DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_{2n}$ mithilfe der der DFT-Matrix $\mathbf{\Omega}_n$, einer Permutationsmatrix $\mathbf{P}$, sowie einer Diagonalmatrix $\mathbf{F}$. Wie kann man diese Eigenschaft nutzen?

4. Wie sieht das Signal $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ aus, nachdem man $\mathbf{P}$ einmal angewendet hat? Wie sieht das Signal aus, nach dem man den kompletten Umsortierungs Schritt der FFT angewendet hat?

5. Gegeben eine Position im ursprünglichen Index, wie lässt sich die Position im umsortieren Signal effizient berechnen? Wie verhält es sich mit der Rückrichtung?

6. Die schnelle Fourier-Transformation bildet nur in den Frequenzraum ab, wie kann man das Verfahren erweitern, um vom Frequenzraum in den Ortsraum abzubilden?

7. Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ ein komplexes Signal der Länge n mit den Indizes $0, \ldots, n-1$, dessen inverse Fourier-Transformation wir berechnen möchten. Wir definieren folgende Funktionen:
   - rev kehrt die Einträge des Signals (bis auf den ersten) um, sodass
   $$\operatorname{rev}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (z_0, z_{n-1}, \ldots, z_1)$$
   - swap vertauscht den Real- und Imaginärteil des Signals

   Zeigen Sie, dass die inverse Fourier-Transformation eines Signals berechnet werden kann durch Anwendung der (vorwärts) Fourier-Transformation auf folgende Weisen:
   a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \overline{\mathcal{F}(\overline{\mathbf{z}})}$
   b) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\operatorname{rev}(\mathbf{z}))$
   c) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \operatorname{rev}(\mathcal{F}(\mathbf{z}))$
   d) $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \operatorname{swap}(\mathcal{F}(\operatorname{swap}(\mathbf{z})))$

[1] Der FFT-Algorithmus aus unserer Vorlesung