FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 26. Januar 2023

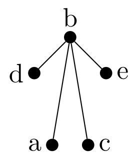
Öffentliche Lösungsvorschläge zum 11. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

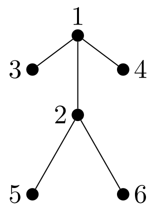
Falsum erklimmt in erstaunlicher Geschwindigkeit den unendlichen Tunnel und ist bald schon in unmittelbarer Nähe der Logikzwergenhauptstadt Ehrentrocken. Zufällig ist die erste Person die Falsum über den Weg läuft der Zwerg der mit dem König diskutiert hat. «Halt!», ruft der Logikzwerg. «Bist du nicht Falsum? In den Geschichten heißt es immer, dass du ein Zwerg bist der zu gierig und zu tief gegraben hat. Aber du siehst gar nicht wie ein Zwerg aus!»

«Ha ha! Ja, das ist wahr. Aber inzwischen bin ich gar kein Zwerg mehr! Inzwischen bin ich nämlich falsch! Und du, mein zwergiger Freund, kannst mich nicht aufhalten, denn ich weiß wie man Zwerge wie dich dominieren kann!»

Sei $\sigma := \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Seien $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{F}$ zwei σ-Strukturen, die wie folgt definiert werden.



$\mathcal{Z}$



$\mathcal{F}$

(i) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{F}$.

(ii) Geben Sie einen partiellen Isomorphismus h von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{F}$ an, wobei $|\operatorname{def}(h)|$ maximal ist.

(iii) Geben Sie eine unterscheidende Formel für $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{F}$ an.

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Die Struktur $\mathcal{Z}$ enthält 5 Elemente, $\mathcal{F}$ enthält allerdings 6. So gibt es keine bijektive Funktion zwischen den beiden Universen, und somit auch keinen Isomorphismus.

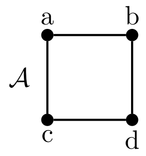
(ii) Die Abbildung $h : a \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4, b \mapsto 1$ ist ein partieller Isomorphismus.

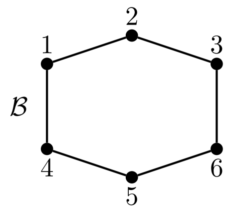
Es gibt keinen partiellen Isomorphismus h mit $|\operatorname{def}(h)| = 5$, da $\mathcal{F}$ keinen Knoten vom Grad mindestens vier enthält, und so können wir nicht b und alle seine Nachbarn auf $\mathcal{F}$ abbilden.

(iii) Sei $\varphi := \exists x \forall y (y = x \vee E(x, y))$. Die Formel besagt, dass es eine dominierende Menge der Größe 1 in der Struktur gibt. Auf $\mathcal{Z}$ ist die Menge $\{b\}$ eine solche dominierende Menge. Die kleinste dominierende Menge in $\mathcal{F}$ hat allerdings Größe 2. Somit gilt $\mathcal{Z} \models \varphi$ und $\mathcal{F} \not\models \varphi$.

Aufgabe 2

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie folgende σ-Strukturen.





(i) Finden Sie die größte Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt. Geben Sie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin an.

(ii) Finden Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die der Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt. Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer an.

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Wir wählen $m = 2$. Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit folgender Strategie.

In Runde i schreiben wir $\mathcal{H}_i$ für die von Herausforderer gewählte Struktur. und h_i für das von Herausforderer gewähltes Element. Die andere Struktur heißt $\mathcal{D}_i$. Die in $\mathcal{H}_i$ gespielte Elemente heißen $h_1, h_2, \ldots h_i$ und die in $\mathcal{D}_i$ heißen $d_1, d_2, \ldots d_i$.

Runde 1: Die Duplikatorin wählt $d_1 \in D_1 \cap \{1, a\}$.

Runde 2: Für jeden Knoten v in $\mathcal{D}_2$ finden wir Knoten $u, w \in D_2$ mit $(v, w) \in E^{\mathcal{D}_2}$ und $(v, u) \notin E^{\mathcal{D}_2}$. Also findet die Duplikatorin ein $d_2 \in \mathcal{D}_2$ für das gilt $(d_1, d_2) \in E^{\mathcal{D}_2}$ genau dann, wenn $(h_1, h_2) \in E^{\mathcal{H}_2}$. Falls der Herausforderer h_2 aus $\{d_1, h_1\}$ wählt, kann die Duplikatorin mit dem jeweils anderen Element aus $\{d_1, h_1\}$ antworten. Somit gewinnt die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Weil der Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt (unten gezeigt), ist $m = 2$ maximal.

(ii) Wir wählen $m = 3$. In der ersten zwei Runden wählte der Herausforderer die Knoten 2 und 5 von $\mathcal{B}$. Die Duplikatorin antwortet mit $d_1, d_2 \in A$, wobei $(d_1, d_2) \notin E^{\mathcal{A}}$ gelten muss, da $(2, 5) \notin E^{\mathcal{B}}$. Nun spielt der Herausforderer einen Knoten $v \in A$ mit $(d_1, v) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(d_2, v) \in E^{\mathcal{A}}$. Es gibt keinen Knoten $u \in B$ mit $(2, u) \in E^{\mathcal{B}}$ und $(5, u) \in E^{\mathcal{B}}$, also gewinnt der Herausforderer in der dritten Runde.

Weil die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt (oben gezeigt), ist $m = 3$ minimal.

Aufgabe 3

Sei $\tau = \{R\}$ eine Signatur, wobei R ein einstelliges Relationssymbol ist. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei endliche τ-Strukturen, mit den Universen A und B, die m-äquivalent sind.

(i) Zeigen Sie: Falls $m > \min\{|A|, |B|\}$, dann gilt $|A| = |B|$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Wir übernehmen die Formel $\varphi_{\mathcal{A}}$ aus Tutorium 10 Aufgabe 3*(ii)* mit $\mathrm{Mod}(\varphi_{\mathcal{A}}) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E}$ ist eine τ-Struktur und $\mathcal{E} \cong \mathcal{A}\}$, wobei

$$\psi_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \coloneqq \forall y(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \wedge \bigvee_{i=1}^{k} y = x_i \wedge \bigwedge_{a_i \in R^{\mathcal{A}}} R(x_i) \wedge \bigwedge_{a_i \in A \setminus R^{\mathcal{A}}} \neg R(x_i)) \text{ und}$$
$$\varphi_{\mathcal{A}} \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k \psi_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots x_k).$$

(ii) Zeigen Sie: Falls $m > \max\{|A|, |B|\}$, dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(iii) Zeigen Sie: Falls $m = \max\{|A|, |B|\}$, dann gilt ebenfalls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Sei $r = \min\{|A|, |B|\} + 1$. Wir definieren die Formel

$$\varphi_r := \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_r \bigwedge_{1 \le i < j \le r} x_i \neq x_j,$$

welche fordert, dass die Struktur mindestens r unterschiedliche Elemente hat. Die Formel φ hat Quantorenrang $r \le m$. Falls $|A| \neq |B|$ ist $r \le \max\{|A|, |B|\}$, also wird die Formel von einer der Strukturen erfüllt, aber nicht von der anderen, ein Widerspruch.

(ii) Die Konstruktion von $\varphi_{\mathcal{A}}$ lässt schließen, dass ihr Quantorenrang gleich $|A| + 1$ ist. Da $m \ge |A| + 1$ und $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathcal{A}}$, muss auch $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$ gelten, da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ m-äquivalent sind.

(iii) Aus *(i)* und $\max\{|A|, |B|\} \ge \min\{|A|, |B|\}$ folgt $|A| = |B|$. Wir modifizieren nun $\varphi_{\mathcal{A}}$ wie folgt:

$$\psi'_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_m) \coloneqq \bigwedge_{1 \le i < j \le m} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{a_i \in R^{\mathcal{A}}} R(x_i) \wedge \bigwedge_{a_i \in A \setminus R^{\mathcal{A}}} \neg R(x_i) \text{ und}$$
$$\varphi'_{\mathcal{A}} \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_m \psi'_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots x_m).$$

$\varphi'_{\mathcal{A}}$ hat also Quantorenrang m. Es gilt weiterhin, dass $\mathcal{A} \models \varphi'_{\mathcal{A}}$ und somit auch $\mathcal{B} \models \varphi'_{\mathcal{A}}$. Da wir laut unseren Voraussetzungen wissen, dass $|A| = |B| = m$, folgt also, dass $b_1, \dots, b_m \in B$ existieren, sodass $\mathcal{B} \models \psi'_{\mathcal{A}}[b_1, \dots, b_m]$. Insbesondere gilt auch $B \setminus \{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$. Also gibt es eine Bijektion $\pi : B \to A$ mit $\pi(b_i) = a_i$, sodass $\mathcal{A} \models \psi'_{\mathcal{A}}[\pi(b_1), \dots, \pi(b_m)]$. Analog zu unserer Argumentation aus Tutorium 10 folgt daraus, dass π ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist.