Gliederung

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

b) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \qquad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

b) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \qquad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **(rekursiv) aufzählbar**, falls $A = \emptyset$ gilt oder falls es eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ derart gibt, dass $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = f(\mathbb{N})$.

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(i)$

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

b) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \qquad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **(rekursiv) aufzählbar**, falls $A = \emptyset$ gilt oder falls es eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ derart gibt, dass $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = f(\mathbb{N})$.
Das heißt, f zählt A auf.

Beachte: f muss weder injektiv noch monoton sein!

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

b) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \qquad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **(rekursiv) aufzählbar**, falls $A = \emptyset$ gilt oder falls es eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ derart gibt, dass $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = f(\mathbb{N})$.
Das heißt, f zählt A auf.

Beachte: f muss weder injektiv noch monoton sein!

Frage: Können Sie ein f angeben, das die Sprache $\{w \in \underline{\{0,1\}^*} \mid w \text{ ist Binärkodierung einer Primzahl}\}$ aufzählt?

Entscheidbare und Semi-Entscheidbare Sprachen

Theorem

$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

Entscheidbare und Semi-Entscheidbare Sprachen

Theorem

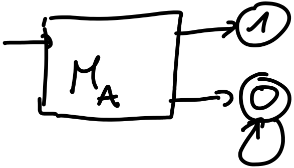
$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

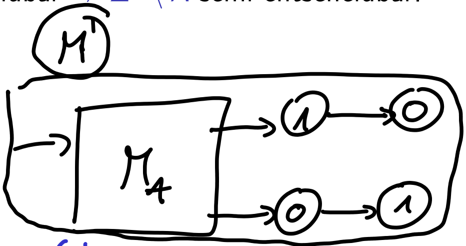
Beweis

„$\Rightarrow$“: A entscheidbar $\Rightarrow$

1. ~~A semi-entscheidbar~~.
2. ~~$\Sigma^* \setminus A$ entscheidbar~~ $\Rightarrow$ ~~$\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar~~.

χ_A berechenbar





$\Rightarrow \chi'_A$ berechenbar

$w \notin A \Leftrightarrow \chi_A(w) = 1$ 0 $\Leftrightarrow M_A$ hält bei Eing. w mit Ausg 1 0

$\Updownarrow$ $\Leftrightarrow M'$ —— " ———— 0 1

$w \in \Sigma^* \setminus A$

Entscheidbare und Semi-Entscheidbare Sprachen

Theorem

$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

Beweis

„$\Rightarrow$": A entscheidbar $\Rightarrow$

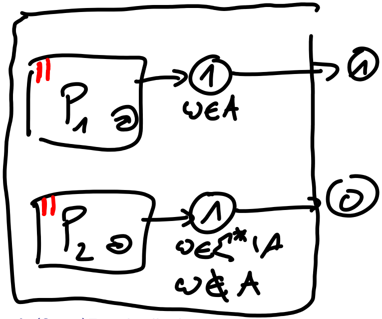
1. A semi-entscheidbar.
2. $\Sigma^* \setminus A$ entscheidbar $\Rightarrow$ $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar.

„$\Leftarrow$": χ'_A und $\chi'_{\Sigma^* \setminus A}$ berechenbar durch WHILE-Programme mit einer **WHILE**-Schleife (& disjunkten Variablennamen):

$x_i := 1$; **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** P_A **END**; $x_0 := 1$ P_1

sowie

$x_j := 1$; **WHILE** $x_j \neq 0$ **DO** $P_{\bar{A}}$ **END**; $x_0 := 1$ P_2



Entscheidbare und Semi-Entscheidbare Sprachen

Theorem

$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

Beweis

„$\Rightarrow$“: A entscheidbar $\Rightarrow$

1. A semi-entscheidbar.
2. $\Sigma^* \setminus A$ entscheidbar $\Rightarrow$ $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar.

„$\Leftarrow$“: χ'_A und $\chi'_{\Sigma^*\setminus A}$ berechenbar durch WHILE-Programme mit einer **WHILE**-Schleife (& disjunkten Variablennamen):

$x_i := 1$; **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** $\boxed{P_A}$ **END**; $x_0 := 1$

sowie

$x_j := 1$; **WHILE** $x_j \neq 0$ **DO** $\boxed{P_{\bar{A}}}$ **END**; $x_0 := 1$

Dann entscheidet folgendes Programm A:

```
x_i := 1; x_j := 1;
WHILE x_i ≠ 0 und x_j ≠ 0 DO
  | P_A; P_Ā;
END
IF x_i = 0 THEN x_0 := 1 ELSE x_0 := 0;
```

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$
(Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$
(Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

Beweis

„$\Rightarrow$“: $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar
$\rightsquigarrow \chi'_A$ berechnet durch

```
x_2 := 0;
WHILE x_0 ≠ 1 DO
    IF f(x_2) = x_1 THEN x_0 := 1;
    x_2 := x_2 + 1;
END
```

$f(0) = x_1$?
$f(1) = x_1$?
$f(2) = x_1$?
$\vdots$

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

Beweis

„$\Rightarrow$“: $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar

$\rightsquigarrow \chi'_A$ berechnet durch

```
x2 := 0;
WHILE x0 ≠ 1 DO
    IF f(x2) = x1 THEN x0 := 1;
    x2 := x2 + 1;
END
```

„$\Leftarrow$“ (Skizze):

Konstruiere Algorithmus der eine totale Funktion f berechnet die A aufzählt:

Versuch 1: Berechne erst $\chi'_A(0)$, dann $\chi'_A(1)$, ...

Problem: $\chi'_A(0)$ kann endlos laufen!

$\mathbb{N} = \{\underline{0}, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\underline{\in A?}$

$A = \{$

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$
(Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

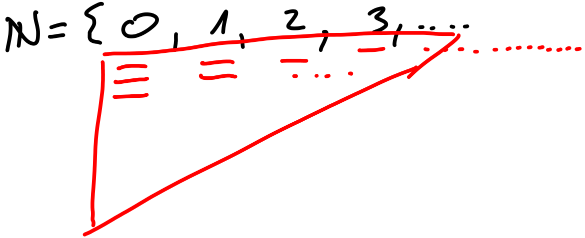
Beweis

„$\Rightarrow$“: $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar
$\leadsto \chi'_A$ berechnet durch

```
x_2 := 0;
WHILE x_0 ≠ 1 DO
    IF f(x_2) = x_1 THEN x_0 := 1;
    x_2 := x_2 + 1;
END
```

„$\Leftarrow$“ (Skizze):
Konstruiere Algorithmus der eine totale Funktion f berechnet die A aufzählt:

Versuch 2: Simuliere $\chi'_A(i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen Schritt, dann noch einen Schritt, ...
Problem: es gibt unendlich viele Eingaben $i \in \mathbb{N}$!



(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

Beweis

„$\Rightarrow$“: $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar

$\leadsto \chi'_A$ berechnet durch

$x_2 := 0;$

WHILE $x_0 \neq 1$ **DO**

  IF $f(x_2) = x_1$ **THEN** $x_0 := 1;$

  $x_2 := x_2 + 1;$

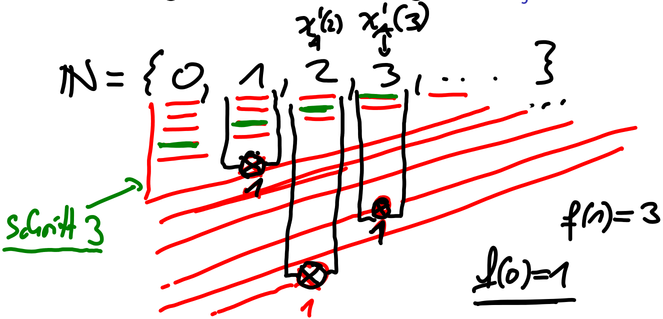
END

$f(n) =$

„$\Leftarrow$“ (Skizze):

Konstruiere Algorithmus der eine totale Funktion f berechnet die A aufzählt:

Versuch 3: In Schritt i des Algorithmus für f, simuliere Algorithmus für $\chi'_A(j)$ für jedes $j \leq i$ genau einen Schritt, bis n+1 “Erfolge” ($\chi'_A(j) = 1$) beobachtet wurden und gebe das letzte erfolgreiche w_j aus.



(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

Beweis

„$\Rightarrow$“: $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar

$\rightsquigarrow \chi'_A$ berechnet durch

```
x_2 := 0;
WHILE x_0 ≠ 1 DO
    IF f(x_2) = x_1 THEN x_0 := 1;
    x_2 := x_2 + 1;
END
```

„$\Leftarrow$“: Sei χ'_A berechnet durch WHILE-Programm mit $k+1$ Variablen $y_0, \ldots, y_k$ (P nutzt y_0 nicht):

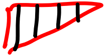
$y_k := 1$; **WHILE** $y_k \neq 0$ **DO** P **END**; $y_0 := 1$

Das folgende Programm zählt A auf:

```
x_1 := x_1 + 1;
WHILE x_1 ≠ 0 DO
    PUSH 0, x_2, 0, ..., 0, x_2 TO n_1;
    WHILE n_1 ≠ 0 und x_1 ≠ 0 DO
        (POP x_0, y_k, ..., y_0 FROM n_1;)
        (P;
        IF y_k = 0 THEN x_1 := x_1 − 1;
        ELSE PUSH y_0, ..., y_k, x_0 TO n_2;
    END
    n_1 := n_2;
    x_2 := x_2 + 1;
END
```

$\chi'_A(x_2)$

← #Erfolge noch zu sehen



Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

[$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)]

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)

A ist entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)

A ist entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ endlich oder aufzählbar durch totale, berechenbare, streng monotone Funktion

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

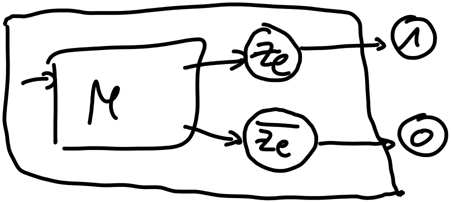
$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)

A ist entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ endlich oder aufzählbar durch totale, berechenbare, streng monotone Funktion

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert die auf allen Eingaben hält



Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)

A ist entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ endlich oder aufzählbar durch totale, berechenbare, streng monotone Funktion

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert die auf allen Eingaben hält

$\Leftrightarrow A$ ist Urbild eines Bildwertes einer totalen, berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(1)$, mit $1 \in \Pi^*$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer totalen, berechenbaren, streng monotonen Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)