Gliederung

(Semi-)Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Definition (Erinnerung)

a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

b) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \qquad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **(rekursiv) aufzählbar**, falls $A = \emptyset$ gilt oder falls es eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ derart gibt, dass $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = f(\mathbb{N})$.
Das heißt, f zählt A auf.

Beachte: f muss weder injektiv noch monoton sein!

Frage: Können Sie ein f angeben, das die Sprache $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ist Binärkodierung einer Primzahl}\}$ aufzählt?

Entscheidbare und Semi-Entscheidbare Sprachen

Theorem

$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

Beweis

„$\Rightarrow$“: A entscheidbar $\Rightarrow$
1. A semi-entscheidbar.
2. $\Sigma^* \setminus A$ entscheidbar $\Rightarrow$ $\Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar.

„$\Leftarrow$“: χ'_A und $\chi'_{\Sigma^* \setminus A}$ berechenbar durch WHILE-Programme mit einer **WHILE**-Schleife (& disjunkten Variablennamen):

$x_i := 1$; **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** P_A **END**; $x_0 := 1$

sowie

$x_j := 1$; **WHILE** $x_j \neq 0$ **DO** $P_{\bar{A}}$ **END**; $x_0 := 1$

Dann entscheidet folgendes Programm A:

$x_i := 1$; $x_j := 1$;
WHILE $x_i \neq 0$ und $x_j \neq 0$ **DO**
  P_A; $P_{\bar{A}}$;
END
IF $x_i = 0$ **THEN** $x_0 := 1$ **ELSE** $x_0 := 0$;

(Rekursiv) Aufzählbare Sprachen

Theorem

Eine Sprache L ist aufzählbar

gdw.

L is semi-entscheidbar.

Beachte: Wir nehmen an, dass $\chi'_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ & Σ^* berechenbar)

Beweis

„$\Rightarrow$": $f(\mathbb{N}) = A$ total & berechenbar
$\rightsquigarrow \chi'_A$ berechnet durch

```
x_2 := 0;
WHILE x_0 ≠ 1 DO
    IF f(x_2) = x_1 THEN x_0 := 1;
    x_2 := x_2 + 1;
END
```

„$\Leftarrow$" (Skizze):
Konstruiere Algorithmus der eine totale Funktion f berechnet die A aufzählt:

Versuch 3: In Schritt i des Algorithmus für f, simuliere Algorithmus für $\chi'_A(j)$ für jedes $j \leq i$ genau einen Schritt, bis $n + 1$ "Erfolge" ($\chi'_A(j) = 1$) beobachtet wurden und gebe das letzte erfolgreiche w_j aus.

Zusammenfassung (Semi-) Entscheidbarkeit

Für beliebige Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ gelten folgende Äquivalenzen:

A ist semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ ist aufzählbar

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert

$\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer (partiellen) berechenbaren Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)

$\Leftrightarrow A$ ist Typ 0-Sprache (Chomsky-Hierarchie)

A ist entscheidbar

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar

$\Leftrightarrow A$ endlich oder aufzählbar durch totale, berechenbare, streng monotone Funktion

$\Leftrightarrow A = T(M)$ wird von einer Turing-Maschine M akzeptiert die auf allen Eingaben hält

$\Leftrightarrow A$ ist Urbild eines Bildwertes einer totalen, berechenbaren Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$
(A läßt sich schreiben als $A = f^{-1}(1)$, mit $1 \in \Pi^*$)

$\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer totalen, berechenbaren, streng monotonen Funktion $g : \Pi^* \to \Sigma^*$
(A läßt sich schreiben als $A = g(\Pi^*)$)