**FG Logik und Semantik**
**Technische Universität Berlin**
**Prof. Stephan Kreutzer**

WiSe 2022/23
Stand: 24. November 2022

# Öffentliche Lösungsvorschläge zum 5. Tutorium – Logik

## Aufgabe 1

Sei $\text{AL}^*$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln welche nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ benutzen und in welchen es gerade viele Vorkommen von $\wedge$ und ungerade viele Vorkommen von $\vee$ gibt.

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $\text{AL}^*$ eine Normalform ist.

**Anmerkung:** Diese Aufgabe kann man auch wesentlich einfacher ohne strukturelle Induktion lösen. Sie ist aber dennoch eine gute Übungsaufgabe für einen solchen Beweis.

## Lösung zu Aufgabe 1

Zu zeigen ist also, dass für jede Formel $\varphi \in \text{AL}$ eine Formel $\varphi' \in \text{AL}^*$ existiert mit $\varphi \equiv \varphi'$. Insbesondere lässt sich diese Aussage zeigen, indem wir für eine andere Normalform der Aussagenlogik zeigen, dass jede Formel in dieser Normalform eine äquivalent Formel in $\text{AL}^*$ besitzt. Wir betrachten deshalb im Folgenden ausschließlich Formeln in Negationsnormalform.

**IA**: Falls $\varphi = X$, für eine $X \in \text{AV}\textsc{ar}$, können wir $\varphi' = (X \vee X)$ definieren. Es gilt $X \vee X \equiv X$ und somit erfüllt $\varphi'$ die Anforderungen.

Für $\varphi = \top$, wählen wir $\varphi' = X \vee \neg X$, für ein $X \in \text{AV}\textsc{ar}$, was laut Skript auch äquivalent zu $\top$ ist.

Sollte $\varphi = \bot$ gelten, setzen wir $\varphi' = ((X \vee X) \wedge X \wedge \neg X)$, wieder für ein $X \in \text{AV}\textsc{ar}$, und somit gilt erneut, dass $\varphi' \equiv \bot$.

**IV**: Für zwei feste Formeln $\psi, \chi \in \text{AL}$ in NNF existieren Formeln $\psi', \chi' \in \text{AL}^*$ mit $\psi \equiv \psi'$ und $\chi' \equiv \chi$.

**IS**: Falls $\varphi = \neg\psi$, können wir einfach $\varphi' = \neg\psi'$ setzen, da $\psi'$ laut der IV die Anforderungen bereits erfüllt.

Für $\varphi = \psi \vee \chi$, stellen wir fest, dass $\varphi' = \psi' \vee \chi'$ gerade viele Vorkommen von $\wedge$ enthalten muss, da dies laut IV auch für $\psi'$ und $\chi'$ gilt. Aus der IV folgt ebenfalls, dass $\varphi'$ ungerade viele Vorkommen von $\vee$ enthält, da $\psi'$ und $\chi'$ jeweils ungerade viele Vorkommen von $\vee$ enthalten und ein zusätzliches $\vee$ den äußersten Operator von $\varphi'$ bildet.

Sollte $\varphi = \psi \wedge \chi$ gelten, setzen wir $\varphi' = \psi' \wedge \chi' \wedge \chi'$. Laut IV enthalten $\psi'$ und $\chi'$ jeweils gerade viele $\wedge$. Da $\varphi'$ außerhalb der Unterformeln $\psi'$ und $\chi'$ genau zwei $\wedge$ benutzt, gibt es also gerade viele $\wedge$ in $\varphi'$. Für $\vee$ sagt uns die IV, dass $\psi'$ und $\chi'$ ungerade viele Vorkommen von $\vee$ enthalten. Da wir $\chi'$ allerdings zwei mal verwenden, ergibt sich, dass es in $\varphi'$ insgesamt wieder ungerade viele Vorkommen von $\vee$ gibt.

## Aufgabe 2

Der Zwerg namens Dipell ist eines Tages in den unendlichen langen Schacht unter dem SAT-Berg gefallen und lebt nun ganz alleine am Boden der Unendlichkeit. In seiner finstersten Stunde begegnet ihm ein schreckliches Gespenst. «Ich bin Falsum! Der Untergang des SAT-Bergs und der ewige Feind der Logikzwerge!»

«Ha!», erwidert Dipell. «Das kann ja jeder behaupten!» Das Gespenst grinst und entblößt somit seine gelb-grauen Zähne. «Oh doch! Genau der bin ich! Und ich habe die Formel um dir dies zu beweisen.» Verängstigt überprüft Dipell die Erfüllbarkeit der furchteinflößenden Formel des Grauens.

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Formel an.

$$\varphi := (Z \lor Y) \land (\neg W \lor \neg Y) \land (W \lor \neg Y) \land (\neg W \lor Y \lor \neg Z \lor X) \land (Y \lor \neg Z)$$

**Lösung zu Aufgabe 2**

Wir stellen zuerst fest, dass $\varphi$ bereits in KNF ist. Wir können die rekursiven Aufrufe des Algorithmus mit folgendem Baum darstellen, wobei jede Kante die Belegung einer Variable darstellt.

$$\{\{Z, Y\}, \{\neg W, \neg Y\}, \{W, \neg Y\}, \{\neg W, Y, \neg Z, X\}, \{Y, \neg Z\}\}$$

erweitere mit $\beta(Y) = 1$ und reduziere:

$$\{\cancel{\{Z, Y\}}, \{\neg W, \cancel{\neg Y}\}, \{W, \cancel{\neg Y}\}, \cancel{\{\neg W, Y, \neg Z, X\}}, \cancel{\{Y, \neg Z\}}\}$$

reduziere mit $\beta(W) = 1$:

$$\{\{\cancel{\neg W}\}, \{\cancel{W}\}\}$$

unerfüllbar

erweitere mit $\beta(Y) = 0$ und reduziere:

$$\{\{Z, \cancel{Y}\}, \cancel{\{\neg W, \neg Y\}}, \cancel{\{W, \neg Y\}}, \{\neg W, \cancel{Y}, \neg Z, X\}, \{\cancel{Y}, \neg Z\}\}$$

reduziere mit $\beta(Z) = 1$:

$$\{\{\cancel{Z}\}, \{\neg W, \cancel{\neg Z}, X\}, \{\cancel{\neg Z}\}\}$$

unerfüllbar

Da keiner der Zweige eine erfüllende Belegung geliefert hat, gibt der Algorithmus zurück, dass die Formel $\varphi$ unerfüllbar ist.

**Aufgabe 3**

*(i)* Sei $M$ eine endliche Menge und sei $R \subseteq M^2$ eine Menge von Tupeln über $M$.

Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{M,R}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn eine Menge $R'$ von Tupeln über $M$ existiert, so dass $R'$ eine lineare Ordnung über $M$ ist und $R \subseteq R'$ gilt. Geben Sie insbesondere an wie man aus einer erfüllenden Belegung eine lineare Ordnung über $M$ konstruieren kann welche $R$ erweitert und umgekehrt, wie man aus einer linearen Ordnung über $M$ welche $R$ erweitert eine erfüllende Belegung für $\varphi_{M,R}$ erstellt.

*Zur Erinnerung:* Lineare Ordnungen sind irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv und je zwei Elemente in ihrer Grundmenge müssen vergleichbar sein (total).

*(ii)* Sei $G$ ein Graph und sei $U \subseteq V(G)$ eine Menge von Knoten. Wir nennen $U$ *unabhängig*, falls für alle $u, v \in U$ gilt, dass $\{u, v\} \notin E(G)$.

Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{G,k}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn $G$ eine unabhängige Menge der Größe $k$ enthält. Geben Sie insbesondere an wie man aus einer erfüllenden Belegung eine unabhängige Menge der Größe $k$ in $G$ konstruieren kann und umgekehrt, wie man aus einer unabhängigen Menge der Größe $k$ in $G$ eine erfüllende Belegung für $\varphi_{G,k}$ erstellt.

**Lösung zu Aufgabe 3**

*(i)*

$$\varphi_{M,R} := \bigwedge_{(a,b)\in R} X_{ab} \land \bigwedge_{\substack{a,b,c\in M\\ a\neq b}} \big(\neg X_{aa} \land (X_{ab} \leftrightarrow \neg X_{ba}) \land (X_{ab} \land X_{bc} \to X_{ac}) \land (X_{ab} \lor X_{ba})\big)$$

Um die Formel zu erfüllen wir anfangs verlangt, dass $X_{ab}$ mit 1 belegt werden muss, wenn $(a, b)$ ein Tupel aus $R$ ist. Anschließend werden die grundlegenden Eigenschaften einer linearen Ordnung formalisiert, hier in der Reihenfolge: Irreflexivität, Antisymmetrie, Transitivität und Totalität.

Hieraus lassen sich folgende Konstruktionen ableiten. Wenn $\beta$ eine erfüllende Belegung für die Formel ist, so definieren wir die folgende lineare Ordnung $R'$, welche $R$ erweitert,

$$R' := \{(a, b) \mid \beta(X_{a,b}) = 1\}.$$

Gegeben eine lineare Ordnung $R'$, welche $R$ erweitert, definieren wir folgende erfüllende Belegung für $\varphi_{M,R}$

$$\beta(X_{ab}) = \begin{cases} 1 & , (a, b) \in R' \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

*(ii)*

$$\varphi_{G,k} \coloneqq \bigwedge_{\{u,v\} \in E(G)} X_{uv} \wedge \bigvee_{\substack{U \subseteq V(G) \\ |U|=k}} \Big( \bigwedge_{u,v \in U} \neg X_{uv} \wedge \bigwedge_{u \in U} Y_u \wedge \bigwedge_{v \in V(G) \setminus U} \neg Y_v \Big)$$

Wir beobachten, dass der erste Teil der Formel verlangt, dass $X_{uv}$ mit 1 belegt wird, wenn die Variable für eine existierende Kante steht. Innerhalb der großen Veroderung wird anschließend verlangt, dass eine Menge $U$ existieren soll, sodass auf dieser Menge $X_{uv}$ mit 0 belegt werden muss, wenn die Variable für eine nicht-existierende Kante steht. Des Weiteren bilden die Variablen $Y_u$ die unabhängige Menge $U$ ab, falls diese existiert.

Auf Basis der obigen Beobachtungen geben wir nun die folgenden Konstruktionen an. Gegeben eine erfüllende Belegung $\beta$ für $\varphi_{G,k}$ definieren wir die Menge

$$U := \{u \in V(G) \mid \beta(Y_u) = 1\}.$$

Sei $U$ eine unabhängige Menge der Größe $k$ in $G$. Wir definieren eine erfüllende Belegung $\beta$ für $\varphi_{G,k}$ mit

$$\beta(X_{uv}) = \begin{cases} 1 & , \{u, v\} \in E(G) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\beta(Y_u) = \begin{cases} 1 & , u \in V(G) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Alternativ ließe sich auch folgende Formel verwenden:

$$\varphi_{G,k} \coloneqq \bigvee_{\substack{U \subseteq V(G) \\ |U|=k}} \Big( \bigwedge_{u \in U} Y_u \wedge \bigwedge_{u \in V(G) \setminus U} \neg Y_u \wedge \bigwedge_{\{u,v\} \in E(G)} \neg (Y_u \wedge Y_v) \Big).$$