FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

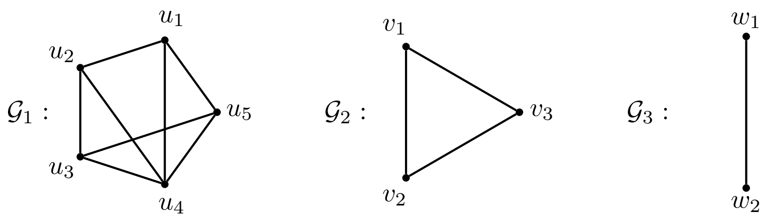
WiSe 2022/23
Stand: 11. Dezember 2022

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 7. Tutorium – Logik

Für dieses Blatt sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur wobei E ein zweistelliges Relationsymbol ist.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Graphen, welche wir als σ-Strukturen sehen, deren Universum die Knotenmenge des Graphen ist und deren Kantenmenge durch die Interpretation von E kodiert wird:



Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Es gilt $\mathcal{G}_1 \to_{hom} \mathcal{G}_2$.

(ii) Es gilt $\mathcal{G}_2 \to_{hom} \mathcal{G}_3$.

(iii) Es gilt $\mathcal{G}_1 \to_{hom} \mathcal{G}_3$.

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Wir definieren die Abbildung $h_1 : \mathcal{G}_1 \to_{\text{hom}} \mathcal{G}_2$ wie folgt

$$h_1(u_1) \coloneqq v_1 \qquad h_1(u_2) \coloneqq v_2 \qquad h_1(u_3) \coloneqq v_1$$
$$h_1(u_4) \coloneqq v_3 \qquad h_1(u_5) \coloneqq v_2$$

Nun zeigen wir, dass h_1 ein Homomorphismus ist. Die einzigen Kanten, die in $\mathcal{G}_2$ nicht vorhanden sind, sind $(v_1, v_1), (v_2, v_2), (v_3, v_3)$. Also reicht es zu zeigen, dass für jede Kante (x, y) in $\mathcal{G}_1$ gilt $h(x) \neq h(y)$. Da weder (u_1, u_3) noch (u_2, u_5) Kanten in $\mathcal{G}_1$ sind, ist h_1 ein Homomorphismus.

(ii) Angenommen, es gebe ein $h_2 : \mathcal{G}_2 \to_{\text{hom}} \mathcal{G}_3$. Es gilt $h_2(v_1) \neq h_2(v_2)$ und $h_2(v_1) \neq h_2(v_3)$, weil $\mathcal{G}_3$ keine Schleifen hat. Das impliziert allerdings, dass $h_2(v_2) = h_2(v_3)$, weil $\mathcal{G}_3$ nur zwei Knoten hat. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, h_2 sei ein Homomorphismus.

(iii) Angenommen, es gebe ein $h_3 : \mathcal{G}_1 \to_{\text{hom}} \mathcal{G}_3$. Es gilt $h_3(u_3) \neq h_3(u_4)$ und $h_3(u_3) \neq h_3(v_5)$, weil $\mathcal{G}_3$ keine Schleifen hat. Das impliziert allerdings, dass $h_3(u_4) = h_3(u_5)$, weil $\mathcal{G}_3$ nur zwei Knoten hat. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, h_3 sei ein Homomorphismus.

Aufgabe 2

Seitdem die Logikzwerge in den Wänden des unendlichen Tunnels schillernde Edelsteine gefunden haben[1], ist eine regelrechte Manie ausgebrochen. Die Faszination mit den vielen Farben die die Edelsteine reflektieren ist so groß, dass kaum einem Zwerg auffällt, dass immer wieder jemand beim Schürfen in die Unendlichkeit fällt. Ein Zwerg jedoch ist unbeeindruckt. «Am Ende sehen die ganzen Steine doch alle gleich aus.», behauptet Karl Kühl.

[1] «We're rich!»

Wir nennen einen Graphen G *k-färbbar*, für $k \in \mathbb{N}$, wenn eine Funktion $f : V(G) \to [k]$ existiert, sodass $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$. Weiter sei $\mathcal{K}_k$ die σ-Struktur zum vollständigen Graphen K_k.[2]

Sei G ein ungerichteter Graph, sei $\mathcal{G}$ die zu G gehörende σ-Struktur und sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie: G ist genau dann k-färbbar, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{K}_k$ gibt.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir zeigen zuerst, dass ein $h : \mathcal{G} \to_{\text{hom}} \mathcal{K}_k$ existiert, falls der Graph $\mathcal{G}$ k-färbbar ist. Sei $c : V(G) \to [k]$ eine k-Färbung von $\mathcal{G}$. Wir definieren $h : \mathcal{G} \to_{\text{hom}} \mathcal{K}_k$ wie folgt

$$h(u) = v_i, \text{ falls } c(u) = i \text{ für } u \in V(G).$$

Wir zeigen, dass h ein Homomorphismus ist. Sei $(u, v) \in E^{\mathcal{G}}$. Dann gilt $c(u) \neq c(v)$ und somit $h(u) \neq h(v)$. Also gilt $(h(u), h(v)) \in E^{\mathcal{K}_k}$.

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{G}$ k-färbbar ist falls ein Homomorphismus $h : \mathcal{G} \to_{\text{hom}} \mathcal{K}_k$ existiert. Wir definieren die Abbildung $c : V(G) \to [k]$ wie folgt

$$c(u) = i, \text{ falls } h(u) = v_i \text{ für } u \in V(G).$$

Sei $\{u, v\} \in E(G)$ und somit $(u, v), (v, u) \in E^{\mathcal{G}}$. Da G keine Schleifen hat, gilt $u \neq v$ und somit $h(u) \neq h(v)$, da K_k ebenfalls schleifenfrei ist. Also ist $c(u) \neq c(v)$, und c ist eine k-Färbung von G.

Aufgabe 3

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}$ drei σ-Strukturen, wobei $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Wenn kein Homomorphismus von $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{B}$ existiert, dann existiert auch kein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Wir zeigen die Aussage mittels Kontraposition. Sei $h : \mathcal{A} \to_{\text{hom}} \mathcal{B}$. Wir definieren $h' : \mathcal{A}' \to_{\text{hom}} \mathcal{B}$ durch $h'(a) = h(a)$ für alle a in Universum von $\mathcal{A}'$.

Nun seien a, b Elemente aus $\mathcal{A}'$ mit $(a, b) \in E^{\mathcal{A}'}$. Weil $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, ist $(a, b) \in E^{\mathcal{A}}$. Somit gilt $(h'(a), h'(b)) = (h(a), h(b)) \in E^{\mathcal{B}}$, und h' ist ein Homomorphismus.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei beliebige σ-Strukturen. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind isomorph genau dann, wenn ein bijektiver Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, oder umgekehrt, existiert.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Aussage stimmt nicht. Seien $\mathcal{A} = (\{1\}, E^{\mathcal{A}} = \emptyset)$ und $\mathcal{B} = (\{1\}, E^{\mathcal{B}} = \{(1, 1)\})$ zwei σ-Strukturen. Die Identitätsfunktion ist offensichtlich bijektiv und desweiteren auch ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (da in $\mathcal{A}$ nichts in Relation steht, gibt es auch nichts zu überprüfen). Aber die Identitätsfunktion ist kein Isomorphismus, da in $\mathcal{B}$ das einzige Element des Universums in $E^{\mathcal{B}}$ mit sich selbst in Relation steht und $E^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

[2] Es gilt $K_k = (\{v_1, \ldots, v_k\}, \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j \text{ und } i, j \in [k]\})$.