Gliederung

Reduzierbarkeit I

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$

Erinnerung: spezielles Halteproblem $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } w\}$ unentscheidbar
Informell: keine TM kann feststellen, ob die eingegebene TM auf ihrem Codewort hält oder nicht
Klar: H ist Generalisierung von K
Informell: H ist sicher nicht leichter zu entscheiden als $K \rightsquigarrow H$ ist unentscheidbar!
Formell:

zentrales Konzept der ***Reduktion****!*

Reduzierbarkeit II

Definition

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$.

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B (**Beachte**: f muss weder surjektiv noch injektiv sein).

$A \leq B$ formalisiert die Intuition "A ist leichter als B" d.h.

"wenn wir B entscheiden könnten, dann könnten wir auch A entscheiden"

Beispiel

$K \leq H$ wird vermittelt durch die Reduktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*$ mit $f(w) = w\#w$.

Frage: Ist eine Sprache L entscheidbar, so ist χ_L eine Reduktion von L auf welche Sprache?

Reduzierbarkeit III

Lemma

$A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ (wobei $\overline{A} =$ Co-A).

Lemma

Gilt $A \leq B$ und ist B (semi-)entscheidbar, so ist auch A (semi-)entscheidbar.

Beweis

Sei f eine Reduktion von A auf B (d.h. f total, berechenbar mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).
Dann gilt $\chi'_A = \chi'_B \circ f$, denn

$$x \in A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = 1$$
$$x \notin A \Rightarrow (\chi'_B \circ f)(x) = \chi'_B(f(x)) = \perp$$

Ist also χ_B (bzw. χ'_B) berechenbar, so auch χ_A (bzw. χ'_A).

Wortproblem für Turing-Maschinen

Lemma

Für die Sprache $U := \{w\#x \mid x \in T(M_w)\}$ gilt: $U \leq H$ und $H \leq U$.

Beweis

Konstruktion einer Reduktion f

$H \leq U$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in einen Endzustand übergeht, sobald M_w hält (egal ob akzeptierend oder ablehnend).

$U \leq H$: bei Eingabe w berechnet f das Codewort einer Maschine M', die wie M_w arbeitet, aber in eine Endlosschleife geht, wenn M_w in einem Nicht-Endzustand hält.

Fazit: H und U im Berechenbarkeitssinne „äquivalent“ (U unentscheidbar da $K \leq H \leq U$)

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \mid w\# \in H\}$.

Theorem

H_0 ist unentscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \leq H_0$ (“H leichter als H_0”) durch Konstruktion einer Reduktion f von H auf H_0.
Erinnerung: $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$.
Bei Eingabe $w\#x$ berechnet f das Codewort einer Maschine M', die zunächst das Wort x auf dem Band erzeugt und dann wie M_w arbeitet ($\rightsquigarrow$ M_w hält auf $x \Leftrightarrow M'$ hält auf ϵ).
(bei allen anderen Eingaben über $\{0, 1, \#\}$ gibt f eine ungültige Kodierung aus, z.B. 0)

Es gilt für alle Wörter $q \in \{0, 1, \#\}^*$:
Falls $q = w\#x$ für $w, x \in \{0, 1\}^*$, dann

$$\begin{aligned} w\#x \in H &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf } x \\ &\Leftrightarrow M' \text{ hält auf } \epsilon \Leftrightarrow f(w\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Sonst: $q \notin H$ und $f(q) \notin H_0$. Fazit: $H \leq H_0$.