12. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 23.01.2023–27.01.2023)

Aufgabe 1. Clique and Half Clique

Eine Clique der Größe k in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ und $\{u, v\} \in E$ für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$.

Beweisen Sie, dass das Problem Half Clique NP-schwer ist.

Half Clique
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Gibt es eine Clique der Größe $|V|/2$ in G?

Aufgabe 2. Polynomzeitreduktion (Klausuraufgabe 2012)

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

Clique
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Clique der Größe k in G

Multicolored Clique
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$.
Frage: Gibt es eine Clique V' der Größe k in G, sodass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ein $v \in V'$ existiert mit $c(v) = i$?

Hinweis: Intuitiv ist Multicolored Clique die Aufgabe, eine Clique V' der Größe k zu finden, wobei es für jede „Farbe" $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *genau* einen Knoten mit Farbe i in V' gibt.

Betrachten Sie die folgende Reduktion von Clique auf Multicolored Clique.

Reduktion: Sei der Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Eingabe für Clique. Wir konstruieren einen Graph $G' = (V', E')$ zusammen mit einer Färbung $c : V' \to \{1, 2, \ldots, k\}$ in 3 Schritten:

1. Für jeden Knoten $v \in V$ führe k Knoten $v^1, v^2, \ldots, v^k$ in G' ein. Setze $c(v^i) = i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
2. Verbinde für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und für alle $1 \leq i, j \leq k$ die Knoten v^i und u^j in G' durch eine Kante.
3. Verbinde für alle $1 \leq i < j \leq k$ und Knoten $v \in V$ die Knoten v^i und v^j mit einer Kante.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(G, k) = (G', c, k)$.

Überprüfen Sie die obige Reduktion auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Reduktion, d. h. zeigen Sie

$$\forall (G, k) : (G, k) \in \textsc{Clique} \Leftrightarrow f(G, k) \in \textsc{Multicolored Clique}.$$

Aufgabe 3. Transitivität von Reduktionen (Klausuraufgabe SoSe 2017)
Im Folgenden seien Σ und Π zwei endliche Alphabete. Betrachten Sie die folgenden beiden Reduktionstypen.

Definition 1. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *linearzeit-reduzierbar* bzw. *quadratzeit-reduzierbar* auf eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (in Zeichen $A \leq_m^\ell B$ bzw. $A \leq_m^q B$) genau dann, wenn es eine totale, in *linearer* Zeit ($O(|x|)$ für jedes $x \in \Sigma^*$) bzw. *quadratischer* Zeit ($O(|x|^2)$ für jedes $x \in \Sigma^*$) berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

1. Begründen Sie die Transitivität für einen der beiden Reduktionstypen.
2. Argumentieren Sie kurz (in 2-3 Sätzen), warum Transitivität im Kontext des Vollständigkeitskonzepts eine sinnvolle Eigenschaft für Reduktionen ist.

Aufgabe 4. Erfüllende Belegung Finden
Aus der Vorlesung ist folgendes NP-vollständiges Problem bekannt:

> **KNF-SAT**
> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform.
> **Frage:** Ist F erfüllbar?

Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn P = NP, dann gibt es einen Polynomzeitalgorithmus, der für eine gegebene erfüllbare Formel in KNF eine erfüllende Belegung findet.