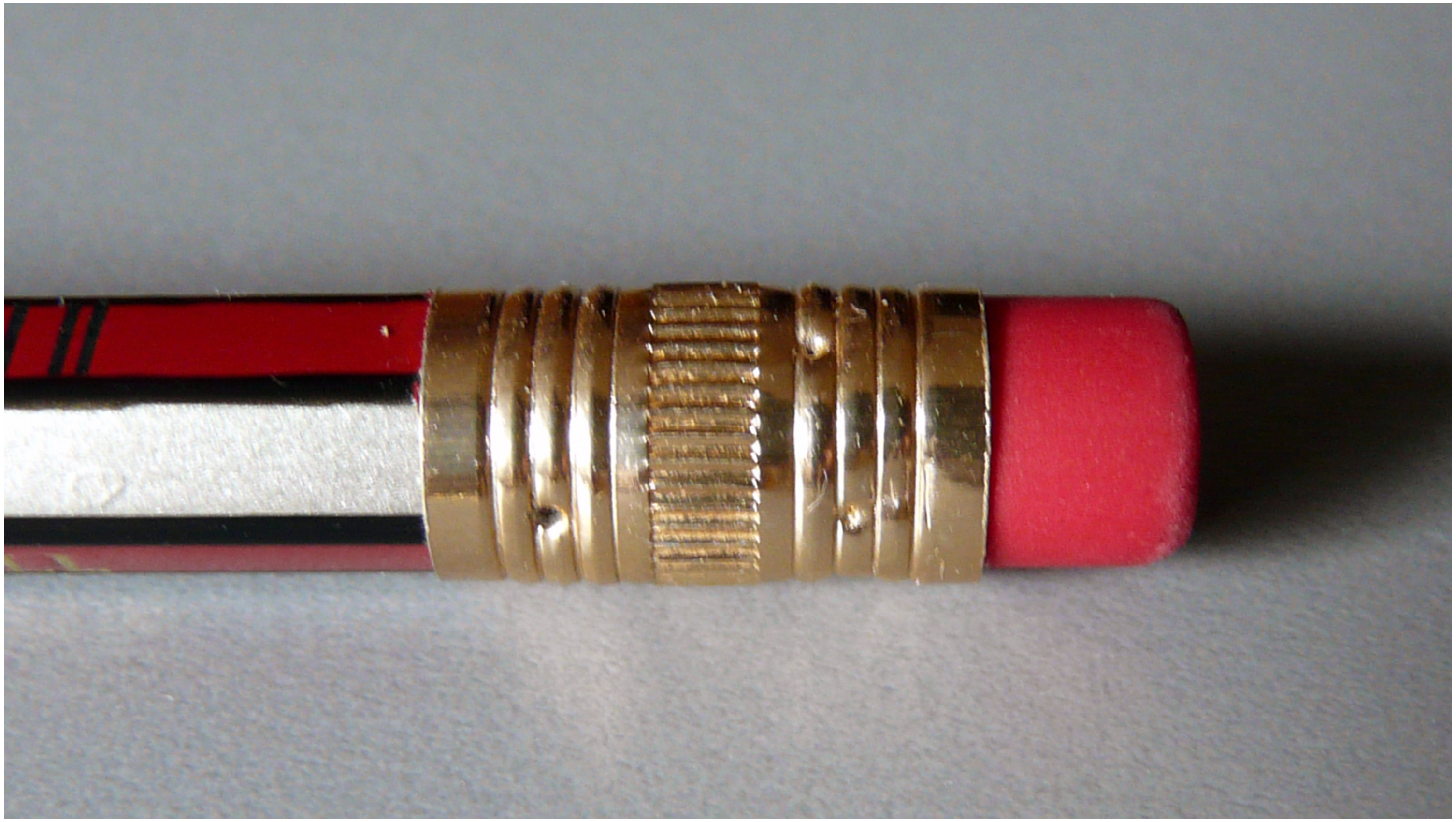
Gliederung

Berechenbarkeitsbegriff



Ziel: Intuitiver Begriff $\rightsquigarrow$ mathematische Formalisierung.

Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Bleistift#/media/File:Bleistiftzwinge_fcm.jpg

Diskussion intuitiver Berechenbarkeitsbegriff

(Intuitive) Berechenbarkeit von Funktionen:

$$\boxed{\text{Eingabe}} \longrightarrow \boxed{\text{Algorithmus}} \longrightarrow \boxed{\text{Ausgabe}}$$

- DFA $\rightsquigarrow$ endlicher Speicher nicht "berechnungsmächtig" genug
- Turing-Maschine $\rightsquigarrow$ Speichergröße unbeschränkt
- LOOP-/WHILE-/GOTO- Programme $\rightsquigarrow$ Variablengröße unbeschränkt
- ...

Bemerkung: leichte Diskrepanz zu modernen Computern

Frage: Sind Turing-Maschinen mit endlichem Band genauso "mächtig" wie DFAs?

Berechenbarkeitsbegriff

Definition

Eine (eventuell partielle) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt **berechenbar**, wenn es einen endlichen Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, sodass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m$$

$$\Longleftrightarrow$$

bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k)$ hält $\mathcal{A}$ nach endlicher Zeit mit Ausgabe m.

Bemerkung: existenzielle Aussage!

Beispiel 1 (k=1)

1 **INPUT** (n)
2 **WHILE** true **DO** $\{\}$

$\rightsquigarrow \Omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto \perp$

Berechenbarkeitsbegriff - Beispiele

Beispiel 2

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists_{i\in\mathbb{N}} \lfloor \pi \cdot 10^i \rfloor = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erläuterung: ✓

$f(n) = 1$ genau dann, wenn n genau den “ersten Dezimalstellen” von π entspricht

Algorithmus

1. approximiere π “ausreichend genau”
2. vergleiche mit Eingabe

Beispiel 3

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists_{i,j,p\in\mathbb{N}} \text{ sodass } 10^j > n \text{ und} \\ & \lfloor \pi \cdot 10^i - p \cdot 10^j \rfloor = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erläuterung: ?

$f(n) = 1$ genau dann, wenn n in der Dezimalbruchentwicklung von π vorkommt

Beispiel 4

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists_{i,j,p\in\mathbb{N}} \text{ sodass } j > n \text{ und} \\ & \lfloor \pi \cdot 10^i - p \cdot 10^j \rfloor = \underbrace{11\ldots1}_{\times n} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erläuterung: ✓

$f(n) = 1$ genau dann, wenn die Dezimalbruchentwicklung von π n konsekutive einsen enthält

Berechenbarkeitsbegriff V

Problem: Berechenbarkeitsbegriff basiert auf Definition von "Algorithmus"...

Church'sche These

Intuitive Berechenbarkeit = Turing-Berechenbarkeit

Bemerkung:
noch kein echt "mächtigeres" Berechnungsmodell als Turing-Maschine entdeckt

Church'sche These $\Rightarrow$ ein solches gibt es nicht

Turing-Berechenbarkeit I

Definition (Turing-Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit)

- Eine (eventuell partielle) Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt **Turing-berechenbar**, wenn es eine DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m \iff \text{bei Eingabe } (n_1, \ldots, n_k) \text{ hält } M \text{ nach endlicher Zeit mit Ausgabe } m.$$
$$\iff \exists_{z \in E}\ z_0\,\mathrm{BIN}(n_1)\#\ldots\#\,\mathrm{BIN}(n_k) \vdash_M^* z\,\mathrm{BIN}(m)$$

wobei BIN zahlen auf ihre Binärdarstellung abbildet.

- Eine (eventuell partielle) Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt **Turing-berechenbar**, wenn es eine DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, sodass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt

$$f(x) = y \iff \exists_{z \in E}\ z_0 x \vdash_M^* zy$$

- Eine Sprache L heißt
entscheidbar wenn χ_L berechenbar ist und
semi-entscheidbar wenn χ'_L berechenbar ist

Charakteristische Funktion

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L \\ 0, & \text{falls } x \notin L \end{cases}$$

Halbe Charakteristische Fkt.

$$\chi'_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L \\ \perp, & \text{falls } x \notin L \end{cases}$$

Frage: Was wenn $f(n) = \perp$?

Turing-Berechenbarkeit - Beispiele

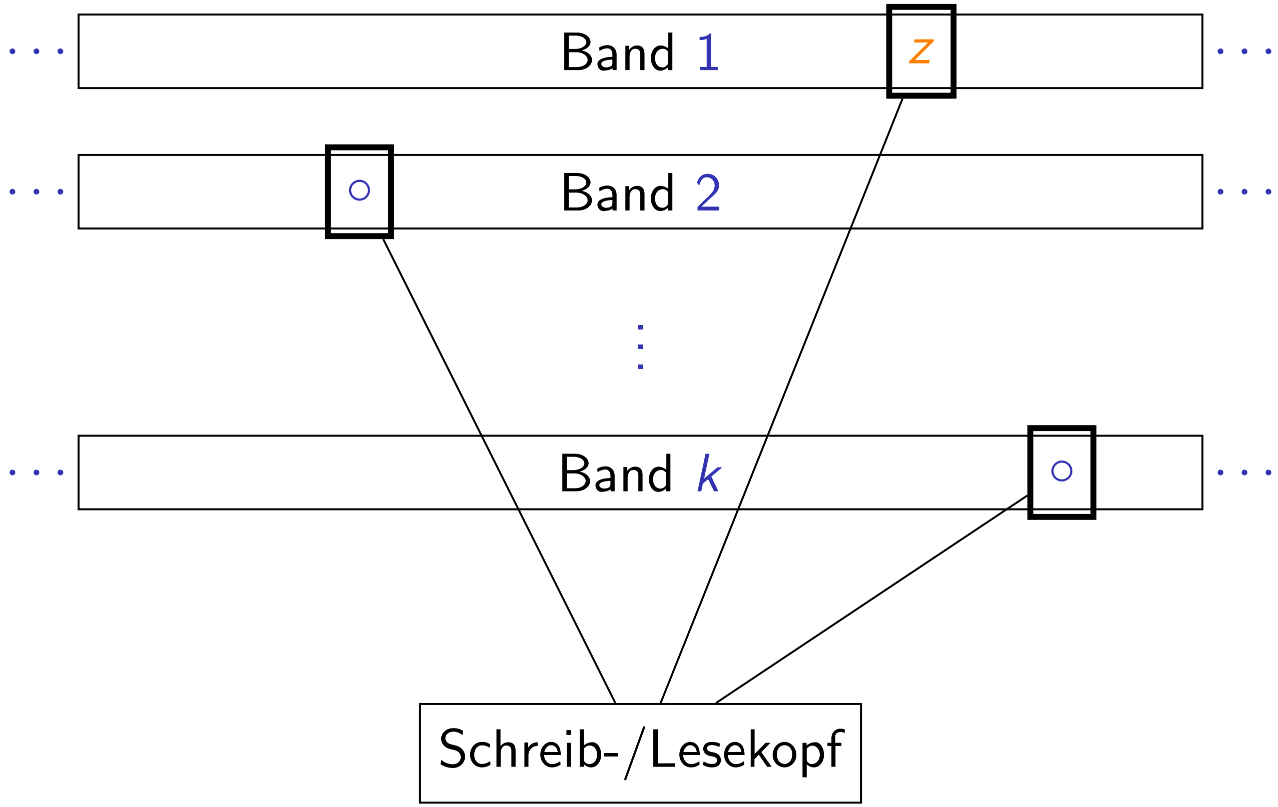
Turing-berechenbar?

1. Nachfolgerfunktion succ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ ✓
2. nirgends definierte „Funktion“ Ω ✓
3. χ_L für L vom Typ 3? ✓
4. χ_L für $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$? ✓

Frage: Entspricht unsere TM für 4. **genau** der Berechenbarkeitsdefinition?

Mehrband-Turing-Maschinen I

...erlauben bequemeres Programmieren (um Berechenbarkeit zu zeigen)



(Deterministische) k-Band Turing-Maschine M

Überführungsfunktion $\delta\colon (Z \setminus E) \times \Gamma^k \to Z \times (\Gamma \times \{L, R, N\})^k$.
Konfiguration $\alpha_1 z \beta_1,\ \alpha_2 \circ \beta_2,\ \dots\ ,\ \alpha_k \circ \beta_k$
Startkonfiguration $z_0 x_1,\ \circ x_2,\ \dots\ ,\ \circ x_k$
Folgekonfiguration $\vdash_M^1$ entsprechend...

Berechnung von Funktionen

$$z_0 x_1, \circ x_2, \dots, \circ x_k \ \vdash_M^* \ z_e \, \mathrm{BIN}(f(x_1, \dots, x_k)), \alpha_2 \circ \beta_2, \dots, \alpha_k \circ \beta_k$$

Akzeptanz von Sprachen

$$z_0 x, \circ\Box, \dots, \circ\Box \ \vdash_M^* \ \alpha_1 z_e \beta_1, \alpha_2 \circ \beta_2, \dots, \alpha_k \circ \beta_k$$

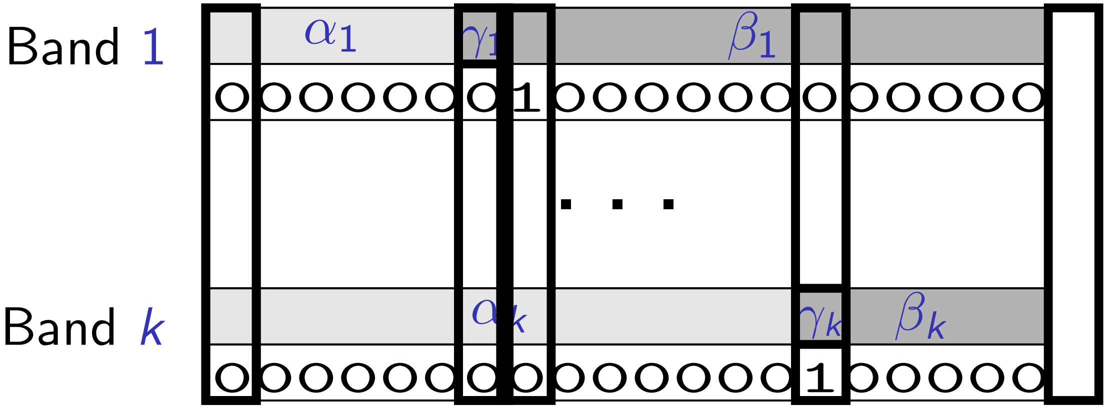
für $z \in Z$ und $z_e \in E$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Gamma^*$.

Mehrband-TM Äquivalenz

Theorem

Zu jeder k-Band-TM M gibt es eine Einband-TM Q mit $T(M) = T(Q)$ (bzw. $f_M = f_Q$).

Beweisidee: Q **simuliert** M mithilfe eines „fetten Bandes” mit $2k$ „Spuren“:



“speichere” das ersten Zeichen $\beta_i[0] \in \Gamma$ von β_i für alle $i \leq k$ im Zustand
“speichere” neues Zeichen $\gamma_i \in \Gamma$ & Kopfrichtung $d_i \in \{L, R, N\}$ für alle $i \leq k$ im Zustand

Mehrband-Turing-Maschinen III

Die Idee besteht darin, eine Einband-Turing-Maschine Q mit einem erweiterten Bandalphabet zu verwenden. Die Elemente des Bandalphabets bestehen dabei jeweils aus $2k$ Zeichen des ursprünglichen Bandalphabets.

Für jedes Band i gibt es 2 „Spuren“, wovon eine den Inhalt von Band i enthält. In der zweiten Spur befindet sich genau eine 1, die die Position des Kopfes auf Band i angibt, und sonst nur 0'en. Somit erhalten wir eine Turing-Maschine Q mit einem „fetten“ Band, das alle Informationen über die k Bänder von M enthält. Diese können nun von einem „Dickkopf“ gelesen und der Überführungs-funktion von M entsprechend manipuliert werden.