

13. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 29.01.2024–02.02.2024)

Aufgabe 1. Schnitt von NP und coNP (Schriftlicher Test WS 20/21)

Wir erinnern: Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$ das *Komplement* von L . Die Komplexitätsklasse coNP enthält alle Sprachen, deren Komplement in NP ist, also $\text{coNP} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in \text{NP}\}$.

Das Problem 2-COLORING ist wie folgt definiert:

2-COLORING

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Frage: Lassen sich die Knoten von G mit zwei Farben so färben, dass keine zwei mit einer Kante verbundenen Knoten die gleiche Farbe haben?

Zeigen Sie, dass 2-COLORING in $\text{NP} \cap \text{coNP}$ liegt.

Aufgabe 2. Verschiedenes zu P, NP und coNP

(a) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

- (i) Falls $\text{NP} \neq \text{coNP}$, dann gilt $\text{P} \neq \text{coNP}$.
- (ii) Falls $A \leq_m^p B$ für zwei Sprachen A, B , dann gilt $A \in \text{P} \Leftrightarrow B \in \text{NP}$.
- (iii) Jedes Problem in $\text{NP} \setminus \text{P}$ lässt sich auf jedes NP-vollständige Problem mittels einer Polynomzeitreduktion reduzieren.

(b) Das Tautologieproblem ist wie folgt definiert:

TAUT

Eingabe: Aussagenlogische Formel F .

Frage: Ist F eine Tautologie, d.h. wird F für alle $\{0,1\}$ -wertigen Belegungen der in F verwendeten Booleschen Variablen zu wahr (d.h. 1) ausgewertet?

Wo liegt der Fehler im folgenden „Beweis“, dass $\text{TAUT} \in \text{NP}$?

„Wir zeigen, dass es eine nichtdeterministische Turing-Maschine gibt, die für eine gegebene aussagenlogische Formel F entscheidet, ob diese eine Tautologie ist. Dazu wird zunächst die Formel $\neg F$ erstellt und anschließend auf der Eingabe $\neg F$ eine NTM simuliert, die SAT in Polynomzeit löst, d.h., die entscheidet, ob $\neg F$ erfüllbar ist (da SAT in NP liegt, gibt es eine solche NTM). Die Formel F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ nicht erfüllbar ist.“

(c) Welches der folgenden Probleme ist NP-schwer, welches coNP-schwer?

- (i) **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel F .
Frage: Ist $\neg F$ erfüllbar?
- (ii) **Eingabe:** Ein Graph G und eine positive ganze Zahl k .
Frage: Existiert nach dem Löschen von k beliebigen Knoten stets noch mindestens eine Kante im verbleibenden Graph?