Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 2.1

Lineare Gleichungssysteme

13.11.2023 bis 17.11.2023

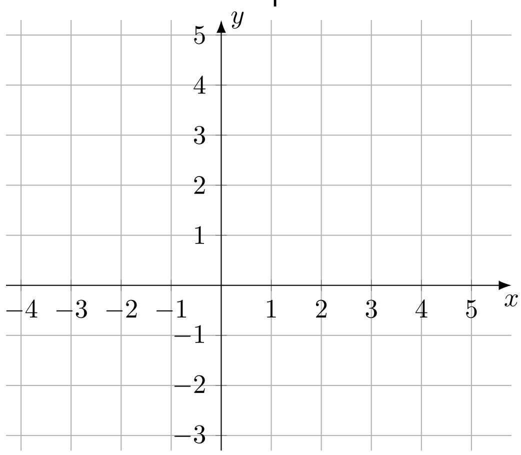
Aufgabe 1: Geometrische Bedeutung

Zunächst schauen wir uns die geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen an. Gegeben sei folgendes LGS:

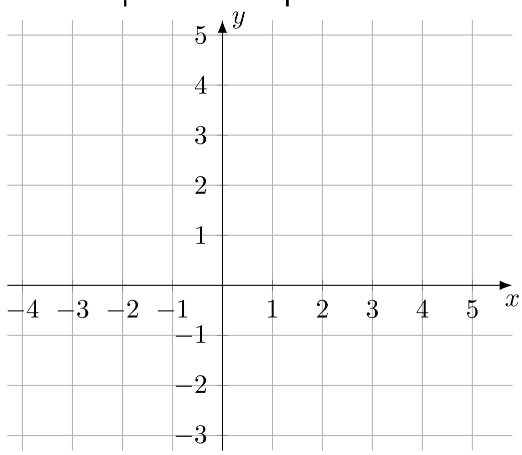
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie das LGS in Matrixschreibweise um.
2. Visualisieren Sie sich das Problem in Zeilen- sowie Spalteninterpretation.

Zeileninterpretation



Spalteninterpretation



3. Was bedeuten die folgenden Begriffe und wie hängen sie mit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zusammen?
   a) Form (m und n)
   b) Rang
   c) Kern

   Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus und erklären Sie, wie der Lösungsraum und dessen Dimension mit dem Kern und dem Rang zusammenhängt.

	Form	$\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$	$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$	Anzahl Lösungen
Quadratisches System mit regulärer Matrix	$m = n$	Voller Rang $(= m = n)$		
Unterbestimmtes System	$m > n$	Voller Rang $(= n)$		
Überbestimmtes System	$m < n$	Voller Rang $(= m)$		
Systemmatrix mit Rangdefizit	m, n beliebig	Kein voller Rang $(< m, < n)$		

Aufgabe 2: Lösungsverfahren

1. Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   a) Unter welchen Bedingungen besitzt es genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?
   b) Geben Sie, unter der Annahme, dass es genau eine Lösung gibt, die Lösung an.
   c) Welche Laufzeit benötigt das Lösen eines solchen LGS mit $n \times n$-Matrix?

2. Nun sei folgendes lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   Wir nehmen dabei an, dass das System genau eine Lösung besitzt.

   a) Unter welchen Voraussetzungen hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?
   b) Geben Sie die Lösung des Gleichungssystems an. Wie nennt sich das angewandte Lösungsverfahren?
   c) Welche Laufzeit benötigt dieses Verfahren bei einer $n \times n$-Matrix?

3. Gegeben ist folgendes LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, das genau eine Lösung besitzt:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   a) Welches Lösungsverfahren kann hier angewandt werden?
   b) Welche Laufzeit benötigt dieses Verfahren bei einer $n \times n$-Matrix?

4. Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   a) Führen Sie die Gauß-Elimination ohne (Spalten)Pivoting für dieses so weit wie möglich durch. Welches Problem stellt sich dabei?
   b) Führen Sie nun die Gauß-Elimination mit (Spalten)Pivoting durch, bis die Systemmatrix in eine obere Dreiecksmatrix transformiert wurde.
   c) Begründen Sie, dass das LGS genau eine Lösung hat.
   d) Wie kann nun die Lösung des LGS ermittelt werden?
   e) Welche Laufzeit hat das Lösen von allgemeinen linearen Gleichungssystemen mit einer $n \times n$-Matrix?

5. Warum sollte Pivoting auch in Fällen durchgeführt werden, in denen es nicht notwendig ist?