Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 1.1

Lineare Algebra

30.10.2023 bis 03.11.2023

Allgemeine Hinweise

- Es wird jede Woche ein Aufgabenblatt zum aktuellen Thema veröffentlicht.
- Diese Aufgaben dienen primär zur Vorbereitung auf die Theorieaufgaben und den schriftlichen Test und werden in den Tutorien besprochen.
- Wir bemühen uns zeitnah Lösungsvorschläge auf ISIS hochzuladen.
- Bei den mit dem Stern $(*)$ gekennzeichneten Aufgaben handelt es sich um Aufgaben, die teilweise über den Stoff des Kurses hinausgehen.
- Wir empfehlen jeder Person die Aufgaben vor- und nachzubereiten.

Aufgabe 1: Skalarprodukt

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dem uns wohlbekannten Skalarprodukt. Zwar existieren unterschiedliche Skalarprodukte für Vektorräume jeglicher Art, jedoch betrachten wir in dieser Aufgabe nur den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und das Standardskalarprodukt. Später im Kurs thematisieren wir den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ sowie Räume von Funktionen.

1. Was ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$? Wie lässt sich dieses mithilfe von Matrixmultiplikation schreiben?

Lösung

Das Standardskalarprodukt ist eine bivariate Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \mathbf{u}^\mathsf{T} \mathbf{v}.$$

Anmerkung: Wir benutzen absichtlich die Bezeichnung *Standard*skalarprodukt, da es viele verschiedene Skalarprodukte (selbst nur im $\mathbb{R}^n$) gibt. Ein Skalarprodukt (im $\mathbb{R}^n$) ist ganz allgemein eine bivariate Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche die folgenden Eigenschaften (Axiome) erfüllt:

- Symmetrie:
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$
- Bilinearität (d.h. Linearität in beiden Argumenten):
$$\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$
$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$
- Positiv definit:
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Jede Funktion, die diese Voraussetzungen erfüllt, darf sich Skalarprodukt nennen. Skalarprodukte kann man als **Ähnlichkeitsmaß** interpretieren. Mithilfe eines Skalarproduktes lassen sich Längen und Winkel definieren (dazu in den nächsten Aufgaben mehr).

Lösung Ende

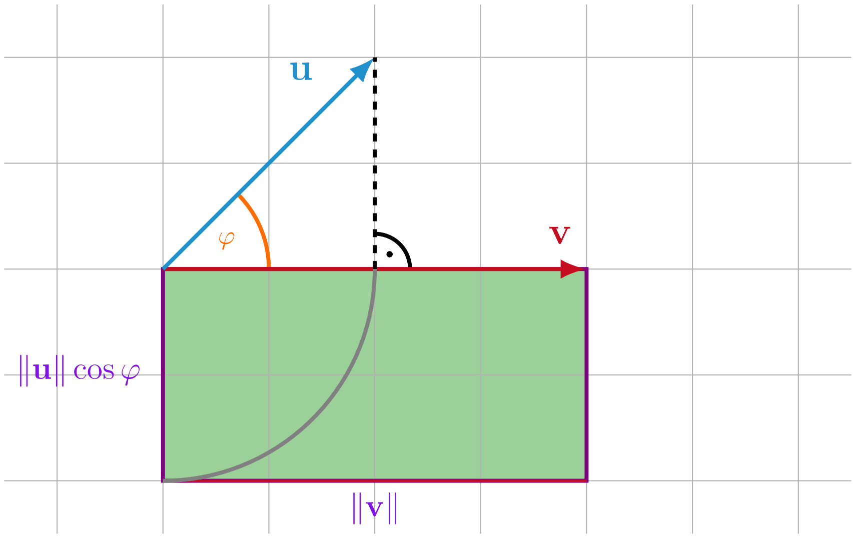
2. Welche geometrische Bedeutung besitzt das Standardskalarprodukt im euklidischen Raum?

Lösung

Es gilt zunächst:

$$\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \underbrace{\|\mathbf{v}\| \cos\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})}_{\text{Orthogonale Projektion von } \mathbf{v} \text{ auf } \mathbf{u}}$$

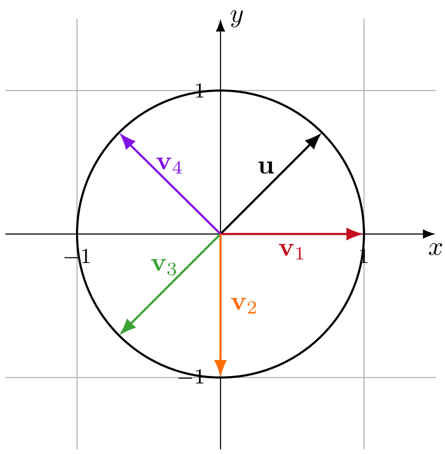
Es beschreibt die Länge der orthogonalen Projektion des einen Vektors auf anderen, multipliziert mit der Länge des anderen Vektors. Anschaulich:



Das Skalarprodukt entspricht im Betrag der grünen Fläche, wobei für dessen Vorzeichen die Orientierung der beiden Vektoren ausschlaggebend ist. Bemerkenswerterweise ist diese Operation symmetrisch.

Lösung Ende

3. Gegeben ist ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sowie vier weitere Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$.



Ordnen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ nach dem Wert ihres Skalarproduktes mit $\mathbf{u}$. Wie ist das Vorzeichen jedes der Skalarprodukte?

Lösung

Da alle Vektoren die gleiche Länge haben, wird das Skalarprodukt mit zunehmend kleinerem Winkel zu $\mathbf{u}$ maximal. Somit gilt: $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}_1 > \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}_4 > \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}_2 > \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}_3$. Außerdem gilt für das Vorzeichen:

- Positiv (Winkel kleiner $\frac{\pi}{2}$): $\mathbf{v}_1$
- Null (Winkel exakt $\frac{\pi}{2}$): $\mathbf{v}_4$
- Negativ (Winkel größer $\frac{\pi}{2}$): $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$

Lösung Ende

4. Was ist die euklidische/ℓ^2-Norm $\|\mathbf{u}\|$ eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$? Wie kann man sie mithilfe des Skalarproduktes schreiben?

Lösung

Die ℓ^2-Norm ist wie folgt definiert:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}}$$

Lösung Ende

Aufgabe 2: Lineare Transformationen

In diesem Abschnitt geht es um lineare Transformationen. Für diesen Kurs ist ein tiefes Verständnis von linearen Transformationen und insbesondere der dazu verwendeten Matrixmultiplikation essenziell.

1. Was bedeutet es, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist?

Lösung

Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$
$$f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}).$$

Manchmal findet man auch folgende (gleichbedeutende) Alternative: Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt, dass:

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

Insbesondere muss gelten, dass $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lösung Ende

2. Lineare Funktionen kann man bekanntlich als Matrix darstellen. Welche der folgenden Abbildungen sind linear und wie sieht die Matrix dazu aus?

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (2x + 3y, x - y + 2z, 3z - 2y)^\mathsf{T}$
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) = (2x^2 + 4y, 3y - z)^\mathsf{T}$
   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $h(x, y) = (2x - y, x + y, y - x)^\mathsf{T}$
   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $k(x, y) = (x + 3, y - 2)^\mathsf{T}$

Lösung

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) Nicht linear, da lineare Abbildungen nicht quadrieren dürfen.

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) Nicht linear, da lineare Abbildungen nicht verschieben dürfen.

Lösung Ende

3. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wie kann man die Multiplikation der Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Vektor $\mathbf{v}$ veranschaulichen?

Lösung

Linearkombination der Spaltenvektoren:

$$\mathbf{Av} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Skalarprodukt aus Zeilen der Matrix und Spaltenvektor:

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} (1,2,-1)(3,1,2)^\mathsf{T} \\ (0,-1,1)(3,1,2)^\mathsf{T} \\ (3,1,-2)(3,1,2)^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Lösung Ende

4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ drei lineare Transformationen. Wie sieht die Transformationsmatrix aus, falls man zuerst $\mathbf{A}$, dann $\mathbf{B}$ und letztendlich $\mathbf{C}$ ausführen will?

Lösung

Die Transformationsmatrix entspricht dem Produkt der Matrizen, aber von rechts nach links: $\mathbf{CBA}$.

Lösung Ende

5. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine beliebige Matrix.
   a) Was beschreiben die folgenden Begriffe und wann existieren diese für die Matrix $\mathbf{A}$?
      i. Transponierte Matrix
      ii. Inverse Matrix
      iii. Determinante
   b) Unter welchen Voraussetzungen erfüllt die Matrix folgende Eigenschaften?
      i. Symmetrisch
      ii. Diagonalmatrix
      iii. Orthogonal

Lösung

a) i. Die Transponierte $\mathbf{A}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ gebildet. Für ihre Einträge gilt: $(\mathbf{A}^\mathsf{T})_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i}$ für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Jede Matrix hat eine eindeutige Transponierte.

   ii. Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ ist eine Matrix, die multipliziert mit $\mathbf{A}$ von beiden Seiten die Identitätsmatrix $\mathbf{I}$ ergibt: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Jede invertierbare Matrix muss quadratisch sein, jedoch besitzt nicht jede quadratische Matrix eine Inverse. Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat genau dann eine (eindeutige) Inverse, wenn folgende (äquivalente) Bedingungen für $\mathbf{A}$ gelten:
   - $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$
   - Determinante ungleich Null
   - Null ist kein Eigenwert

Wir nennen invertierbare Matrizen auch regulär. Quadratische Matrizen, die nicht regulär sind, nennt man singulär.

iii. Die Determinante ist ein Skalar, der einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig zugeordnet werden kann. Ihr Betrag gibt an, wie sich das Volumen bei der durch $\mathbf{A}$ beschriebenen Abbildung ändert, wohingegen ihr Vorzeichen angibt, ob sich die Orientierung von (Basis-)Vektoren ändert. Für kleine Matrizen lässt sich die Determinante einfach berechnen.
Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\det \mathbf{A} = ad - bc$$

$$\begin{array}{cc} + & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \\ - & \end{array}$$

Determinante einer 3×3-Matrix (Regel von Sarrus):

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = {} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ & - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \multicolumn{5}{c}{\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right]} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Determinanten von größeren Matrizen werden wir in diesem Kurs nicht berechnen müssen.

b) i. Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch, falls sie gleich ihrer Transponierten ist: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$. Insbesondere ist jede symmetrische Matrix quadratisch. Die geometrische Bedeutung von symmetrischen Matrizen wird im Laufe des Kurses noch besprochen.

ii. Eine Diagonalmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine quadratische Matrix, die außerhalb ihrer Diagonalen nur Nullen enthält: $a_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Diagonalmatrizen repräsentieren Streckungen.

iii. Eine orthogonale (bezüglich des Standardskalarproduktes) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine quadratische Matrix, deren Zeilen bzw. Spalten orthonormal sind:

$$\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Das bedeutet, dass zwei unterschiedliche Zeilen- bzw. Spaltenvektoren orthogonal sind und Einheitslänge haben. Die Inverse von orthogonalen Matrizen entspricht ihrer Transponierten: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$. Insbesondere sind alle orthogonalen Matrizen regulär. Orthogonale Matrizen haben eine Determinante von 1 oder -1, jedoch ist dies nur eine notwendige Bedingung. Sie repräsentieren Rotationen (um den Ursprung) und Spiegelungen (an Ursprungsebenen). Sie erhalten das Standardskalarprodukt

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{u})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

und damit auch Längen und Winkel (bezüglich diesem): $\|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ und $\sphericalangle(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Hinweis: Eine quadratische Matrix mit orthonormalen Spalten bezeichnet man üblicherweise als orthogonal, nicht orthonormal!

Lösung Ende

6. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf diese Eigenschaften:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Geben Sie zusätzlich, falls möglich, ihre Transponierte, Inverse und Determinante an.

Lösung

a) Die Matrix ist nicht symmetrisch, da $a_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} = a_{2,1}$. Sie ist keine Diagonalmatrix, da $a_{1,2} \neq 0$ (alternativ ist $a_{2,1} \neq 0$). Sie ist aber orthogonal, da

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ihre Transponierte und gleichzeitig ihre Inverse ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ihre Determinante beträgt

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Die Matrix $\mathbf{B}$ ist eine Diagonalmatrix und damit auch symmetrisch. Sie ist nicht orthogonal, da

$$\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativ lässt sich das auch über die Determinante oder den Fakt begründen, dass ihre Einträge nicht im Intervall $[-1, 1]$ liegen. Da sie symmetrisch ist, ist sie gleich ihrer Transponierten. Ihre Inverse ist

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ihre Determinante ist

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 6.$$

c) Die Matrix $\mathbf{C}$ ist offensichtlich symmetrisch. Sie ist keine Diagonalmatrix, da $c_{1,2} = 1 \neq 0$ sowie $c_{2,1} = 1 \neq 0$. Sie ist orthogonal, da

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da sie symmetrisch ist, ist sie gleich ihrer Transponierten. Da sie symmetrisch und orthogonal ist, ist sie gleich ihrer Inversen. Zuletzt ist ihre Determinante:

$$\det \mathbf{C} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Lösung Ende

Aufgabe 3: Lineare Unterräume und Basiswechsel

Besonders viel Verwirrung stiftet bei vielen das Thema Basiswechsel. Eine zentrale Erkenntnis dieses Kurses wird sein, dass man verschiedene Daten (Vektoren, Funktionen, ...) bezüglich unterschiedlichen Basen darstellen kann und jede von ihnen Vor- und Nachteile hat.

1. Was ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$? Wie sehen Unterräume geometrisch aus?

Lösung

Ein linearer Unterraum V ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche selbst Vektorräume sind. Das heißt, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ wieder in V ist. Lineare Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind der Ursprung, Ursprungsgeraden, Ursprungsebenen, ...

Lösung Ende

2. Was bedeuten die folgenden Begriffe in Bezug auf lineare Unterräume?
   a) Linearkombination
   b) Linear unabhängig
   c) Basis
   d) Dimension

Lösung

a) Gegeben einer Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Eine Linearkombination ist ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, welche durch die Summe von skalaren Vielfachen von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ zustande kommt:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Die Menge aller Linearkombinationen einer Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ist stets ein linearer Unterraum, den wir als Spann von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ bezeichnen.

b) Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist linear unabhängig zu einer Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, falls er nicht als Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ geschrieben werden kann. Er liegt also nicht im Spann von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

c) Eine Basis ist eine geordnete Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ minimaler Größe, die einen linearen Unterraum aufspannt. Insbesondere ist jeder Vektor der Basis linear unabhängig zu den restlichen Vektoren.

d) Die Dimension eines linearen Unterraums entspricht der minimalen Anzahl an Vektoren, die benötigt werden, um den linearen Unterraum aufzuspannen. Also ist die Dimension die Mächtigkeit jeder Basis des Unterraums.

Lösung Ende

3. Gegeben sind die vier Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Bei welchen von ihnen bilden die Spalten eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und/oder eine Basis eines linearen Unterraumes des $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Lösung

a) Die Spalten von $\mathbf{A}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Dies lässt sich dadurch begründen, dass die Matrix regulär ist.

b) Die Spalten von $\mathbf{B}$ bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da die Matrix lediglich zwei Spalten hat und der $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 hat. Sie bilden jedoch die Basis eines linearen Unterraums $V \subset \mathbb{R}^3$ (hier ist V die Ebene $z = 0$), da ihre Spalten keine Vielfache voneinander sind.

c) Da $\mathbf{C}$ vier Spalten besitzt, kann sie keine Basis des $\mathbb{R}^3$ (der 3 Dimensionen hat) oder eines linearen Unterraumes des $\mathbb{R}^3$ (der 3 Dimensionen oder weniger hat) sein. Jedoch entspricht der Spann ihrer Spaltenvektoren dem $\mathbb{R}^3$.

d) Da $\mathbf{D}$ den Nullvektor als Spalte hat, können ihre Spaltenvektoren ebenso keine Basis bilden. Der Nullvektor ist linear abhängig zu jedem Vektor. Da ihre erste und dritte Spalte linear unabhängig sind, spannen sie einen zweidimensionalen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ auf.

Lösung Ende

4. Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, der bezüglich der Standardbasis dargestellt wird:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Des Weiteren sei eine weitere Basis A des $\mathbb{R}^3$ als Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Basisvektoren in ihren Spalten gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis A dar.

b) Mit welcher Matrix wird er transformiert, um die Koeffizienten bezüglich der Basis A zu erhalten?

c) Sei $\mathbf{v}_B$ ein Vektor, der bezüglich einer weiteren Basis B des $\mathbb{R}^3$ dargestellt ist. Mit welcher Matrix muss er transformiert werden, um dessen Koeffizienten bezüglich der Basis A zu erhalten?

Lösung

a) Da $\mathbf{v}_A$ wie folgt bezüglich den Spalten von $\mathbf{A}$ dargestellt werden kann

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

hat der Vektor hat folgende Koeffizienten bezüglich A:

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

b) Um für einen Vektor, der bezüglich der Standardbasis dargestellt ist, die Koeffizienten bezüglich A zu ermitteln, muss man ihn mit der inversen Matrix der Basisvektoren $\mathbf{A}^{-1}$ transformieren.

c) Die komplette Umrechnung ist aus folgendem Schema zu entnehmen:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Basis } A} \arrow[r, bend left, "\mathbf{A}"] & \boxed{\text{Standardbasis}} \arrow[l, bend left, "\mathbf{A}^{-1}"] \arrow[r, bend left, "\mathbf{B}^{-1}"] & \boxed{\text{Basis } B} \arrow[l, bend left, "\mathbf{B}"]
\end{tikzcd}$$

Somit ist die notwendige Transformationsmatrix $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Lösung Ende

Aufgabe 4: Eigenwerte und Eigenvektoren

In dieser Aufgaben werden Eigenwerte- und Eigenvektoren kurz angeschnitten und die Grundlagen dieser wiederholt. Sie werden im Laufe des Semesters nochmals aufgegriffen und intensiver behandelt.

1. Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren? Welche geometrische Bedeutung obliegt diesen? Welche Eigenschaft muss eine Matrix erfüllen, um Eigenwerte zu besitzen?

Lösung

Eigenvektoren sind Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, welche lediglich von $\mathbf{A}$ gestreckt werden: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Der zugehörige Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist der Skalierungsfaktor.

Anmerkung: Zwar ist der Nullvektor per Definition kein Eigenvektor, jedoch kann 0 ein Eigenwert sein. Die zugehörigen Eigenvektoren bilden den Kern jener Matrix.

Lösung Ende

2. Gegeben ist die folgende Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 8 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Welches der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$? Was ist der zugehörige Eigenwert?

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Lösung

a) $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, Eigenvektor zum Eigenwert 1

b) Der Nullvektor ist per Definition kein Eigenvektor.

c) $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, Eigenvektor zum Eigenwert 2

d) $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$, kein Eigenvektor

e) $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$, Eigenvektor zum Eigenwert -2

Lösung Ende