FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 16. Januar 2023

2. Hausarbeit – Logik

Abgabe: 09.02.2023 im ISIS-Kurs [WiSe 2022/23] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 09. Februar 2023, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 12 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 80 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Jeder Punkt in der Hausarbeit entspricht dabei $\frac{1}{4}$ Portfoliopunkten. Es sind also bis zu 20 Portfoliopunkte zu erreichen.

Sie dürfen Aussagen aus der Vorlesung, aus dem Skript, aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Alle Antworten sind zu begründen.

Hausaufgabe 1

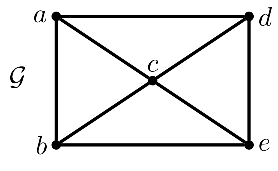
2+2+3+2+3+4+4+4+4 = 28 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ τ-Strukturen mit den Universen A und B. Wir nennen $\mathcal{A}$ eine *Teilstruktur* von $\mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $\overline{a} \in A^k$, gilt

$$\text{wenn } \overline{a} \in R^{\mathcal{A}}, \text{ dann } \overline{a} \in R^{\mathcal{B}}.$$

Lesen Sie zum Vergleich die Definition 4.21 im Vorlesungsskript auf Seite 61.

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E und sei $\mathcal{U}$ eine beliebige endliche σ-Struktur mit Universum U. Die Struktur $\mathcal{G}$ ist durch die folgende Abbildung gegeben.



Sollten Sie in dieser Aufgabe Gegenbeispiele für Aussagen angeben, so dürfen diese maximal fünf Elemente in ihren Universen besitzen.

(i) Geben Sie eine Teilstruktur von $\mathcal{G}$ an, welche keine Substruktur von $\mathcal{G}$ ist, und begründen Sie warum dies der Fall ist.

(ii) Zeigen Sie: $\mathcal{U}$ besitzt genau $2^{|U|} - 1$ paarweise verschiedene Substrukturen.

Anmerkung: Zwei Strukturen $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ sind verschieden, wenn $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$. Zwei verschiedene Strukturen dürfen isomorph sein.

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{U}$ besitzt genau $2^{|U|} - 1$ paarweise verschiedene Teilstrukturen.

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ σ-Strukturen, mit den Universen A, S und T, sodass $\mathcal{T}$ eine Teilstruktur von $\mathcal{A}$ ist und $\mathcal{S}$ eine Substruktur von $\mathcal{A}$ ist.

(iv) Zeigen Sie: Wenn $S = T$, dann existiert ein Homomorphismus von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{S}$.

(v) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $S = T$, dann existiert ein Homomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{T}$.

Sei $r \in \mathbb{N}$ eine positive Zahl, sei $\psi'(y_1, \ldots, y_r) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine quantorenfreie Formel und sei $\beta : \textsc{Var} \to S$ eine Belegung.

(vi) Zeigen Sie per struktureller Induktion: $(\mathcal{S}, \beta) \models \psi'$ genau dann, wenn $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi'$.

Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\varphi = \exists x_1 \ \ldots \exists x_k \ \varphi'(x_1, \ldots, x_k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, wobei $\varphi'(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine quantorenfreie Formel ist, wird $\exists\mathrm{FO}[\sigma]$-*Satz* genannt. Sei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ein $\exists\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz.

(vii) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{S} \models \psi$, dann gilt $\mathcal{A} \models \psi$.

(viii) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathcal{T} \models \psi$, dann gilt $\mathcal{A} \models \psi$.

(ix) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathcal{A} \models \psi$, dann gilt $\mathcal{S} \models \psi$.

Hausaufgabe 2

4+4+6+8+8 = 30 Punkte

Sei $\sigma = \{f, \oplus, c\}$ eine Signatur, welche ein einstelliges Funktionssymbol f, ein zweistelliges Funktionssymbol $\oplus$ und ein Konstantensymbol c enthält. Wir definieren folgende $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x \exists y (x \neq c \land x \neq y \land f(x) = y)\\
\varphi_2 &:= \forall u \forall v \ f(u \oplus v) = f(u) \oplus f(v) \land f(c) = c\\
\varphi_3 &:= \exists x_1 \exists x_2 \exists y_1 \exists y_2 (f(x_1) = y_1 \land f(x_2) = y_2 \land y_1 \neq y_2)\\
\varphi_4 &:= \exists z (z \neq c \land f(z) = c \land \forall z' (z' \neq c \land z' \neq z \to f(z') \neq c))
\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie: Es existiert ein unendliches Modell für $\varphi_1 \land \varphi_2$, welches φ_3 nicht erfüllt.

(ii) Zeigen Sie: Es existiert ein unendliches Modell für $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3$, welches φ_4 nicht erfüllt.

(iii) Zeigen Sie: Es gibt kein unendliches Modell $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, \oplus^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ für $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4$, sodass $c^{\mathcal{A}} = 0$ und $\oplus^{\mathcal{A}}$ ist die übliche Addition über den natürlichen Zahlen.

(iv) Zeigen Sie: Es existiert ein unendliches Modell für $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_3 \land \varphi_4$.

Sei $\tau = \{\odot\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Funktionssymbol $\odot$. Wir definieren die τ-Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \odot^{\mathcal{Q}})$, wobei $\odot^{\mathcal{Q}}$ die übliche Multiplikation über den rationalen Zahlen ist.

(v) Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert eine Formel $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\tau]$, sodass $\psi(\mathcal{Q}) = \{\frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Hausaufgabe 3

2+4+2+4+10 = 22 Punkte

Ein *hamiltonscher* Graph ist ein ungerichteter Graph der einen Kreis enthält, welcher alle Knoten des Graphen beinhaltet.

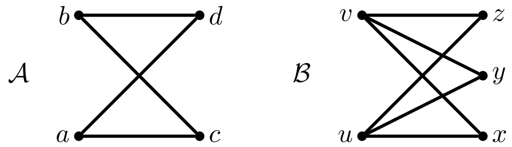
Sei $\sigma = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist.

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\varphi_k \in \mathrm{FO}[\sigma]$, welches die Klasse der hamiltonschen Graphen mit genau k Knoten definiert.

Hinweis: Aufgabe 2 aus Tutorium 10 sollte Ihnen hierbei helfen.

(ii) Zeigen Sie: Die Klasse der endlichen, nicht-hamiltonschen Graphen ist durch ein Axiomensystem Φ_H, in der Klasse der endlichen Graphen, $\mathrm{FO}[\sigma]$-axiomatisierbar.

Wir definieren die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über die folgenden Abbildungen.



(iii) Zeigen Sie: Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(iv) Zeigen Sie: Der Herausforderer gewinnt das Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(v) Zeigen Sie: Die Klasse der hamiltonschen Graphen ist in der Klasse der endlichen, zusammenhängenden Graphen nicht $\mathrm{FO}[\sigma]$-definierbar.

Hinweis: Die Struktur $\mathcal{A}$ entspricht dem Graphen $K_{2,2}$ und $\mathcal{B}$ entspricht dem Graphen $K_{2,3}$.