Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Multiple-Choice-Test zu Berechenbarkeit und Komplexität (Wiederholung) (A) TU Berlin, 27.03.2024

(Weller/Froese/Kellerhals/Kunz, Wintersemester 2023/2024)

Arbeitszeit: 45 Minuten, Gesamtpunktzahl: 25

Hinweis: Je Aufgabe ist **mindestens** eine Antwortmöglichkeit korrekt.
Wenn eine **falsche** Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde, so gibt es **Null** Punkte für die betroffene (Teil-)Aufgabe.
Jede Aufgabe ist annotiert mit der Anzahl erreichbarer Punkte.

Wir erinnern an folgende Definitionen aus der Vorlesung:

- Die Null ist eine natürliche Zahl.
- Die Komplementsprache $\overline{A}$ einer Sprache A über Σ ist $\Sigma^* \setminus A$.
- Die Komposition zweier Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to A$ ist definiert als $f \circ g : C \to B$ mit $(f \circ g)(x) = z \iff \exists_y\ g(x) = y \land f(y) = z$ (informell: $f(g(x))$)
- Eine Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ berechnet eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Pi^*$, falls für alle $x \in \Sigma^*$, $y \in \Pi^*$ gilt:
$$f(x) = y \iff \exists_{z \in E}\ z_0 x \vdash_M^* zy.$$
- Die charakteristische Funktion $\chi_L\colon \Sigma^* \to \{0,1\}$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als $\chi_L(w) := \begin{cases} 1, & w \in L \\ 0, & w \notin L \end{cases}$.
- Die halbe charakteristische Funktion $\chi'_L\colon \Sigma^* \to \{1\}$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als $\chi'_L(w) := \begin{cases} 1, & w \in L \\ \perp, & w \notin L \end{cases}$.
- Die Ackermannfunktion ack ist wie folgt definiert: $\mathrm{ack}(0, y) := y + 1$, $\mathrm{ack}(x, 0) := \mathrm{ack}(x - 1, 1)$ und $\mathrm{ack}(x, y) := \mathrm{ack}(x - 1, \mathrm{ack}(x, y - 1))$.

Aufgabe 1: Turing-Maschinen und Sprachen (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [X] Jede Turing-Maschine akzeptiert genau eine Sprache.
- [ ] Jede Sprache wird von irgendeiner Turing-Maschine akzeptiert.
- [ ] Jede entscheidbare Sprache wird von genau einer Turing-Maschine akzeptiert.
- [X] Jede semi-entscheidbare Sprache wird von einer Turing-Maschine akzeptiert.
- [X] Sei M eine Turing-Maschine, die auf jeder Eingabe hält. Dann ist $T(M)$ entscheidbar.

Aufgabe 2: Berechenbarkeit (3 Punkte)

Sei $L_0, L_1, L_2, \dots$ eine Aufzählung aller entscheidbaren Sprachen mit $L_i \subseteq \{0,1\}^*$. Außerdem sei $\mathrm{BIN}(w)$ die natürliche Zahl, die durch $w \in \{0,1\}^*$ binär kodiert wird (wobei $\mathrm{BIN}(\epsilon) := 0$). Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall korrekt?

- [X] Die Funktion $g_1\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ mit $g_1(w) := \begin{cases} 1, & w \in L_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ ist berechenbar.
- [ ] Die Funktion $g_2\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ mit $g_2(w) := \begin{cases} 1, & w \notin L_{\mathrm{BIN}(w)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ ist berechenbar.
- [ ] Die Funktion $g_3\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ mit $g_3(w) := \begin{cases} 1, & w \in L_{\mathrm{BIN}(w)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ ist berechenbar.
- [X] Die Funktion $g_4\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ mit $g_4(w) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid w \in L_i\}$ ist berechenbar.
- [X] Die Sprache $\bigcap_{i=0}^{\infty} L_i$ ist entscheidbar.

Aufgabe 3: **Ackermannfunktion** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über die Ackermannfunktion ack sind korrekt?

- [ ] ack ist GOTO-berechenbar, aber nicht WHILE-berechenbar.
- [ ] ack ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) \coloneqq \max\{0, \mathrm{ack}(0,y) - \mathrm{ack}(x,0)\}$ ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) \coloneqq \mathrm{ack}(1,n)$ ist LOOP-berechenbar.

Aufgabe 4: **LOOP, WHILE und GOTO** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- [ ] Alle totalen Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ sind GOTO-berechenbar.
- [ ] Alle totalen Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind WHILE-berechenbar.
- [ ] Alle totalen Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind LOOP-berechenbar.
- [X] Alle LOOP-berechenbaren Funktionen sind total und GOTO-berechenbar.

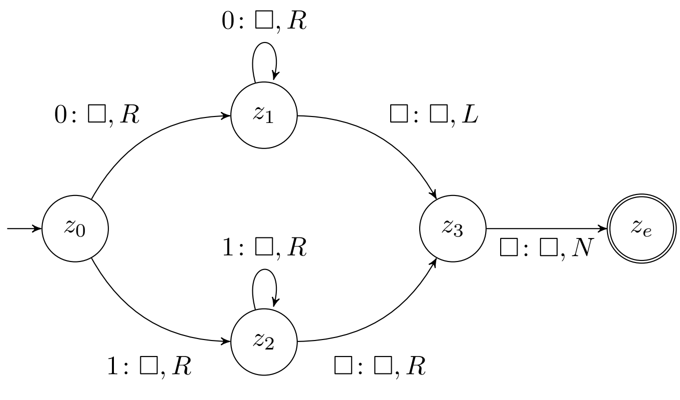
Aufgabe 5: **LOOP-Berechenbarkeit** (4 Punkte)

Sei $f_0, f_1, \ldots$ eine Liste aller LOOP-berechenbaren Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und sei ack die Ackermannfunktion. Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall korrekt?

- [X] Die Funktion $g_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_1(n) \coloneqq 2^{f_1(n)}$ ist LOOP-berechenbar.
- [ ] Die Funktion $g_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_2(n) \coloneqq f_n(n)$ ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $g_3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_3(n) \coloneqq (f_0 \circ f_1)(n)$ ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $g_4\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_4(n) \coloneqq \min\{\mathrm{ack}(n,n), f_0(n)\}$ ist LOOP-berechenbar.
- [ ] Die Funktion $g_5\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_5(n) \coloneqq \max\{f_0(n), f_1(n), \ldots, f_n(n)\}$ ist LOOP-berechenbar.
- [X] Die Funktion $g_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_k(n) \coloneqq \max\{f_0(n), f_1(n), \ldots, f_k(n)\}$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar.

Aufgabe 6: **Turing-Maschinen** (3+4 Punkte)

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



(a) Welche der folgenden Wörter akzeptiert M?

[X] 0000   [ ] 1100   [ ] 01010   [X] 11111   [ ] keins der Wörter wird akzeptiert

(b) Sei $L \coloneqq \{1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Welche Aussagen über M sind korrekt?

- [X] M akzeptiert jedes nicht-leere Wort, das nur aus Nullen besteht.
- [ ] M akzeptiert die Sprache L.
- [ ] M akzeptiert die Sprache $\{0,1\}^* \setminus L$.
- [ ] M berechnet die Funktion χ_L.
- [ ] M berechnet die nirgends definierte Funktion $\Omega\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.
- [X] M hält auf jedem Wort $w \in \{0,1\}^*$ nach höchstens $|w| + 2$ Schritten.