

5. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 20.11.2023–24.11.2023)

Aufgabe 1. Die Sudan-Funktion

Die Sudan-Funktion $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$f(n, x, y) := \begin{cases} x + y, & n = 0 \\ x, & n > 0 \wedge y = 0 \\ f(n-1, f(n, x, y-1), f(n, x, y-1) + y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Ist f total?
2. Berechnen Sie $f(1, 1, 1)$ und $f(2, 1, 1)$.
3. Zeigen Sie, dass $f(1, x, y) = f(1, 0, y) + 2^y \cdot x$.
4. Diskutieren Sie (ohne formalen Beweis), ob f μ -rekursiv ist.

Aufgabe 2. Nicht primitiv-rekursive Funktionen

Betrachten Sie folgende Funktion:

$$h: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N},$$

$$h(x, y, z) := \begin{cases} z + 1, & x = y = 0 \\ h(0, y - 1, 1), & x = z = 0 \neq y \\ h(0, y - 1, h(0, y - 1, z - 1)), & x = 0 \wedge y \neq 0 \neq z \\ h(x - 1, 1, 1), & x \neq 0 = y = z \\ h(x, z, 0) + 1, & x \neq 0 \neq z \wedge y = 0 \\ h(x, y - 1, z + 1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diskutieren Sie, warum h nicht primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 3. Ackermannfunktion und geschlossene Formeln

Sei ack die Ackermannfunktion (in der Variante von Rózsa Péter)

$$\begin{aligned} \text{ack}(0, y) &:= y + 1, \\ \text{ack}(x, 0) &:= \text{ack}(x - 1, 1), \text{ und} \\ \text{ack}(x, y) &:= \text{ack}(x - 1, \text{ack}(x, y - 1)). \end{aligned}$$

1. Leiten Sie eine geschlossene Formel für $\text{ack}(2, y)$ her, die nur Addition und Multiplikation enthält. (Hinweis: Sie können verwenden, dass $\text{ack}(2, y)$ eine lineare Funktion in y ist, d.h., dass $\text{ack}(2, y) = b \cdot y + c$ für gewisse Konstanten b und c gilt.)
2. Beweisen Sie, dass $\text{ack}(3, y) = 2^{y+3} - 3$.
3. Beweisen Sie, dass $\text{ack}(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} - 3$, wobei der Turm (inkl. der Basis) genau $y + 3$ mal die 2 enthält.