Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 6.2

Themen: Newton-Verfahren, Lagrange-Multiplikatoren

Ugo & Gabriel

7. Februar 2023

Aufgabe 1: Newton-Verfahren

1. Wie lautet der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens zum finden von Optima einer mehrdimensionalen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
2. Welche geometrische Bedeutung hat ein Iterationsschritt des Newton-Verfahrens?
3. Der Iterationsschritt hängt von der Hessematrix des aktuellen Zustandes ab. Wie verhält sich das Verfahren, wenn die Hessematrix
   a) positiv definit ist?
   b) negativ definit ist?
   c) indefinit, aber regulär ist?
4. Wie lautet der Iterationsschritt des Gradientenabstiegsverfahrens (Gradient Descent)?
5. Unter welchen Umständen verhält sich das Gradientenverfahren wie das Newton-Verfahren?

6. Nun möchten wir untersuchen, wie sich das Newton-Verfahren sowie das Gradientenabstiegsverfahren bei einer affinen[1] Koordinatentransformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ verhalten, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär ist und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren invariant bezüglich besagter Transformation ist, das Gradientenverfahren hingegen nicht.

   Hinweis: Sie sollen untersuchen, ob $T(\mathbf{y}_{t+1}) = \mathbf{x}_{t+1}$, falls $T(\mathbf{y}_t) = \mathbf{x}_t$.

[1] Eine affine Transformation entspricht einer linearen Transformation gefolgt von einer Translation.

Aufgabe 2: Lagrange-Multiplikatoren

1. Wir haben einen 100 m langen Metalldraht, welchen wir zu einem rechteckigen Zaun mit den Seitenlängen x und y und maximaler Fläche spannen wollen. Das kann man als folgendes Optimierungsproblem schreiben:

$$\max \quad xy \quad \text{s.t.} \quad 2x + 2y = 100$$

Die Funktion $f(x, y) = xy$ beschreibt die Fläche und die Funktion $g(x, y) = 2x + 2x$ beschreibt den Umfang.

   a) Lösen Sie das Problem ohne Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren.

   b) Lösen Sie das Problem mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

2. Wie kann man das folgende Optimierungsproblem mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren lösen, obwohl die Nebenbedingung keine Gleichung ist?

$$\min \quad x^2 - xy + y \quad \text{s.t.} \quad x^2 + y^2 \leq 9$$

3. Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem:

$$\max \quad \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Dabei ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix und $\|\cdot\|$ die ℓ^2-Norm.

   a) Um welches Ihnen wohlbekannte Problem handelt es sich hierbei?

   b) Schreiben Sie die Nebenbedingung um, sodass sie keine Wurzel mehr enthält. Warum ist dies nützlich?

   c) Geben Sie eine Lagrange-Funktion zum Problem an.

   d) Geben Sie die notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt unter der Nebenbedingung an.

   e) Warum befindet sich das globale Minimum sowie das globale Maximum garantiert unter den kritischen Punkten?

   f) Welcher Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ löst das Optimierungsproblem? Was ist der zugehörige Funktionswert?