Schriftlicher Test - Lösungen II

Es existiert eine Sprache, die nicht NP-schwer ist.

$\emptyset$ ist nicht NP-schwer. Keine nichtleere Sprache aus NP kann auf $\emptyset$ reduziert werden, da $\emptyset$ keine JA-Instanzen hat.

Schriftlicher Test - Lösungen II

Es existiert eine Sprache, die nicht NP-schwer ist.

$\emptyset$ ist nicht NP-schwer. Keine nichtleere Sprache aus NP kann auf $\emptyset$ reduziert werden, da $\emptyset$ keine JA-Instanzen hat.

Falls coNP $\subseteq$ NP, so gilt NP $=$ coNP.

Es genügt zu zeigen: NP $\subseteq$ coNP.

Sei $L \in$ NP. Dann gilt $L \leq_m^p$ SAT und damit $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$. Da $\overline{\text{SAT}} \in$ coNP und, nach Vorraussetzung, coNP $\subseteq$ NP, gilt auch $\overline{\text{SAT}} \in$ NP. Da $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$ gilt also auch $\overline{L} \in$ NP also $L \in$ coNP.

Schriftlicher Test - Lösungen II

Es existiert eine Sprache, die nicht NP-schwer ist.

$\emptyset$ ist nicht NP-schwer. Keine nichtleere Sprache aus NP kann auf $\emptyset$ reduziert werden, da $\emptyset$ keine JA-Instanzen hat.

Falls coNP $\subseteq$ NP, so gilt NP = coNP.

Es genügt zu zeigen: NP $\subseteq$ coNP.

Sei $L \in$ NP. Dann gilt $L \leq_m^p$ SAT und damit $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$. Da $\overline{\text{SAT}} \in$ coNP und, nach Vorraussetzung, coNP $\subseteq$ NP, gilt auch $\overline{\text{SAT}} \in$ NP. Da $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$ gilt also auch $\overline{L} \in$ NP also $L \in$ coNP.

Wenn eine coNP-schwere Sprache in NP ist, dann NP = coNP.

Zu zeigen: coNP $\subseteq$ NP (die Aussage folgt dann aus (B))

Sei $A \in$ NP coNP-schwer. Sei $L \in$ coNP.

Dann gilt $L \leq_m^p A$ und, da $A \in$ NP auch $L \in$ NP (nach VL).

Schriftlicher Test - Lösungen II

Es existiert eine Sprache, die nicht NP-schwer ist.

$\emptyset$ ist nicht NP-schwer. Keine nichtleere Sprache aus NP kann auf $\emptyset$ reduziert werden, da $\emptyset$ keine JA-Instanzen hat.

Falls coNP $\subseteq$ NP, so gilt NP = coNP.

Es genügt zu zeigen: NP $\subseteq$ coNP.

Sei $L \in$ NP. Dann gilt $L \leq_m^p$ SAT und damit $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$. Da $\overline{\text{SAT}} \in$ coNP und, nach Vorraussetzung, coNP $\subseteq$ NP, gilt auch $\overline{\text{SAT}} \in$ NP. Da $\overline{L} \leq_m^p \overline{\text{SAT}}$ gilt also auch $\overline{L} \in$ NP also $L \in$ coNP.

Wenn eine coNP-schwere Sprache in NP ist, dann NP = coNP.

Zu zeigen: coNP $\subseteq$ NP (die Aussage folgt dann aus (b))

Sei $A \in$ NP coNP-schwer. Sei $L \in$ coNP.
Dann gilt $L \leq_m^p A$ und, da $A \in$ NP auch $L \in$ NP (nach VL).

NP $\cup$ coNP $\subseteq$ PSPACE.

Zu zeigen: coNP $\subseteq$ PSPACE (NP $\subseteq$ PSPACE bekannt aus VL).

Sei $L \in$ coNP, dann gilt $\overline{L} \in$ NP, also $\overline{L} \in$ PSPACE. Da PSPACE mittels DTMs definiert ist, gilt auch $L \in$ PSPACE (akzeptieren und ablehnen kann bei DTMs vertauscht werden).

Schriftlicher Test - Lösungen II

Das allg. Halteproblem $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$ ist NP-schwer.

Wir zeigen $SAT \leq_m^p H$.

Da SAT entscheidbar ist ($SAT \in PSPACE$), existiert eine DTM M mit $SAT = T(M)$. Sei M' eine DTM, die sich wie M verhält und in eine Endlosschleife geht, falls M die Eingabe ablehnt.

Schriftlicher Test - Lösungen II

Das allg. Halteproblem $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$ ist NP-schwer.

Wir zeigen $SAT \leq_m^p H$.

Da SAT entscheidbar ist ($SAT \in PSPACE$), existiert eine DTM M mit $SAT = T(M)$. Sei M' eine DTM, die sich wie M verhält und in eine Endlosschleife geht, falls M die Eingabe ablehnt.

Die Reduktionsfunktion f ist definiert als $\langle F\rangle \mapsto \langle M'\rangle\#\langle F\rangle$. Die Funktion ist total und polynomzeitberechenbar, da $|\langle M'\rangle|$ konstant ist (hängt nicht von Eingabe $|\langle F\rangle|$ ab).

Schriftlicher Test - Lösungen II

Das allg. Halteproblem $H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$ ist NP-schwer.

Wir zeigen $SAT \leq_m^p H$.

Da SAT entscheidbar ist ($SAT \in PSPACE$), existiert eine DTM M mit $SAT = T(M)$. Sei M' eine DTM, die sich wie M verhält und in eine Endlosschleife geht, falls M die Eingabe ablehnt.

Die Reduktionsfunktion f ist definiert als $\langle F \rangle \mapsto \langle M' \rangle \# \langle F \rangle$. Die Funktion ist total und polynomzeitberechenbar, da $|\langle M' \rangle|$ konstant ist (hängt nicht von Eingabe $|\langle F \rangle|$ ab).

Korrektheit:

$\langle F \rangle \in SAT \implies M$ akzeptiert $\implies M'$ hält.

$\langle F \rangle \notin SAT \implies M$ lehnt ab $\implies M'$ hält nicht.

Schriftlicher Test - Lösungen III

NP-LIN = Klasse aller Sprachen, deren Ja-Instanzen lineare Zertifikate haben, die in Polynomzeit verifiziert werden können. Das heißt,

$$L \in \text{NP-LIN} \Leftrightarrow \exists_{\text{DTM } M}\ \text{time}_M(n) \in O(\text{poly}(n)) \wedge$$
$$\exists_{c \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \Sigma^*}\ x \in L \Leftrightarrow \exists_{u \in \Sigma^{c|x|}}\ \langle x, u \rangle \in T(M).$$

Zeigen Sie P=NP $\Leftrightarrow$ P=NP-LIN.

Schriftlicher Test - Lösungen III

NP-LIN = Klasse aller Sprachen, deren Ja-Instanzen lineare Zertifikate haben, die in Polynomzeit verifiziert werden können. Das heißt,

$$L \in \text{NP-LIN} \Leftrightarrow \exists_{\text{DTM } M}\ \text{time}_M(n) \in O(\text{poly}(n)) \wedge$$
$$\exists_{c \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \Sigma^*}\ x \in L \Leftrightarrow \exists_{u \in \Sigma^{c|x|}}\ \langle x, u \rangle \in T(M).$$

Zeigen Sie P=NP $\Leftrightarrow$ P=NP-LIN.

"$\Rightarrow$": Es gilt P $\subseteq$ NP-LIN, da jedes $L \in$ P das leere Zertifikat hat. NP-LIN $\subseteq$ NP=P, da lineare Zertifikate polynomielle Länge haben.

Schriftlicher Test - Lösungen III

NP-LIN = Klasse aller Sprachen, deren Ja-Instanzen lineare Zertifikate haben, die in Polynomzeit verifiziert werden können. Das heißt,

$$L \in \text{NP-LIN} \Leftrightarrow \exists_{\text{DTM } M}\ \text{time}_M(n) \in O(\text{poly}(n)) \wedge$$
$$\exists_{c \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \Sigma^*}\ x \in L \Leftrightarrow \exists_{u \in \Sigma^{c|x|}}\ \langle x, u\rangle \in T(M).$$

Zeigen Sie P=NP $\Leftrightarrow$ P=NP-LIN.

"$\Rightarrow$": Es gilt P $\subseteq$ NP-LIN, da jedes $L \in$ P das leere Zertifikat hat. NP-LIN $\subseteq$ NP=P, da lineare Zertifikate polynomielle Länge haben.

"$\Leftarrow$": Es gilt SAT $\in$ NP-LIN, da SAT ein lineares Zertifikat, nämlich eine erfüllende Variablenbelegung hat. Wir haben also ein NP-schweres Problem in NP-LIN=P also gilt P=NP.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Gibt es eine Clique mit mindestens k Knoten in G?

Exact Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Hat die größte Clique in G genau k Knoten?

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Gibt es eine Clique mit **mindestens** k Knoten in G?

Exact Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Hat die **größte** Clique in G **genau** k Knoten?

Reduktion f

Eingabe: Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: Graph $G' = (V', E')$ und Zahl $k' = k$ mit

$$V' := V^1 \cup V^2 \cup \ldots V^k \quad \text{mit } V^\ell := \{u_1^\ell, u_2^\ell, \ldots, u_n^\ell\} \text{ für alle } 1 \leq \ell \leq k,$$

$$E' := \{\{u_i^\ell, u_j^h\} \mid \{u_i, u_j\} \in E \wedge 1 \leq \ell, h \leq k \wedge \ell \neq h\}.$$

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Gibt es eine Clique mit **mindestens** k Knoten in G?

Exact Clique

Input: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Question: Hat die **größte** Clique in G **genau** k Knoten?

Reduktion f

Eingabe: Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: Graph $G' = (V', E')$ und Zahl $k' = k$ mit

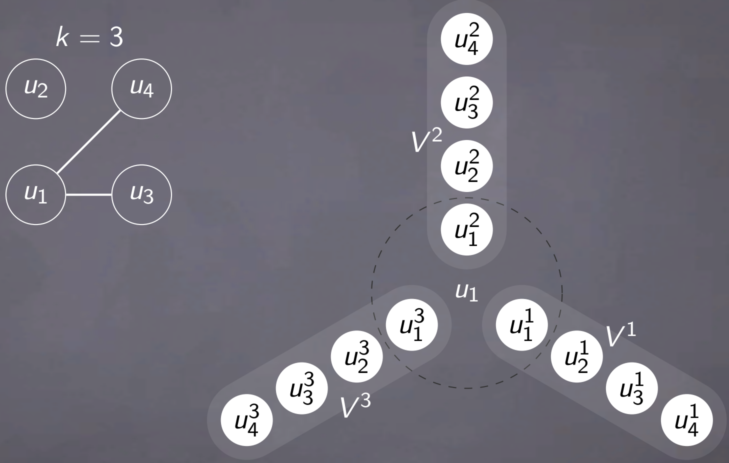
$V' := V^1 \cup V^2 \cup \dots V^k$ mit $V^\ell := \{u_1^\ell, u_2^\ell, \dots, u_n^\ell\}$ für alle $1 \leq \ell \leq k$,

$$E' := \{\{u_i^\ell, u_j^h\} \mid \{u_i, u_j\} \in E \wedge 1 \leq \ell, h \leq k \wedge \ell \neq h\}.$$

Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u_i^1, \dots, u_i^k$ erzeugt.
Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u_i^\ell, u_j^h\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

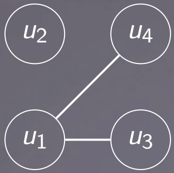


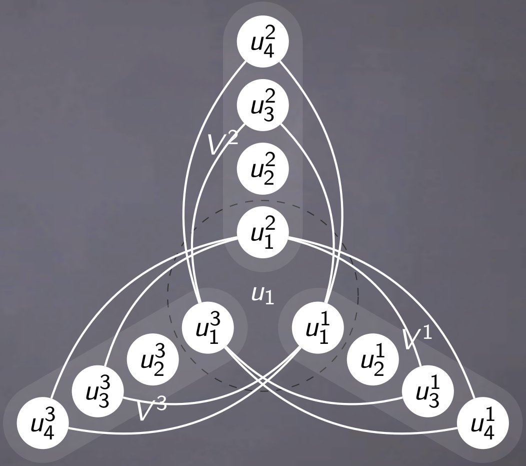
Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u_i^1, \ldots, u_i^k$ erzeugt. Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u_i^\ell, u_j^h\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

$k = 3$



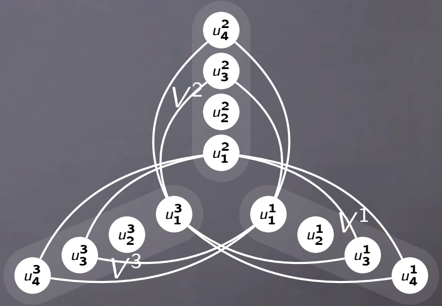


Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u_i^1, \ldots, u_i^k$ erzeugt. Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u_i^\ell, u_j^h\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Zeigen Sie $(G, k) \in$ Clique $\Rightarrow (G', k) \in$ Exact Clique.



Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u_i^1, \ldots, u_i^k$ erzeugt.
Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u_i^\ell, u_j^h\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

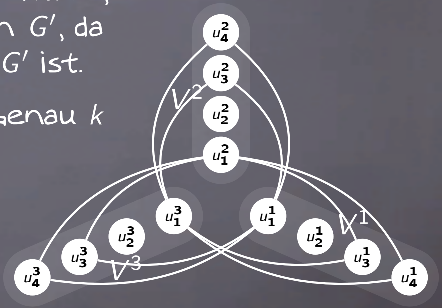
Zeigen Sie $(G, k) \in$ Clique $\Rightarrow (G', k) \in$ Exact Clique.

Angenommen G hat eine Clique $C = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$.

$\rightsquigarrow$ Knoten $\{u^j_{i_j} \mid 1 \leq j \leq k\}$ bilden Clique in G',
denn für alle $\ell \neq h$ gilt $\{u_{i_\ell}, u_{i_h}\} \in E \Rightarrow \{u^\ell_{i_\ell}, u^h_{i_h}\} \in E'$.

Außerdem gibt es, per Konstruktion, keine Clique mit $k+1$ Knoten in G', da jedes V^ℓ ein independent set in G' ist.

$\rightsquigarrow$ die größte Clique in G' hat genau k Knoten.

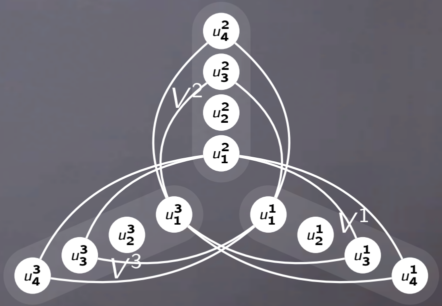


Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u^1_i, \dots, u^k_i$ erzeugt.
Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u^\ell_i, u^h_j\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Zeigen Sie $(G, k) \in$ Clique $\Leftarrow (G', k) \in$ Exact Clique.



Hinweis

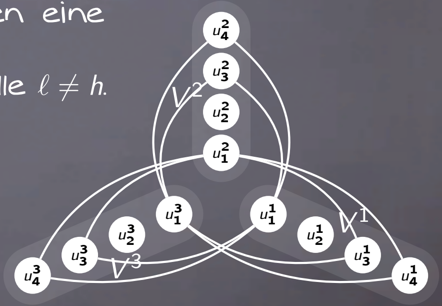
Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u_i^1, \ldots, u_i^k$ erzeugt. Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u_i^\ell, u_j^h\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.

Schriftlicher Test - Lösungen IV

Zeigen Sie $(G, k) \in$ Clique $\Leftarrow (G', k) \in$ Exact Clique.

Angenommen G' enthält eine Clique C der Größe k.
$\rightsquigarrow$ C hat die Form $\{u^j_{i_j} \mid 1 \leq j \leq k\}$, da alle V^j independent sets sind. Außerdem gilt $i_j \neq i_\ell$ für alle $j \neq \ell$, denn per Konstruktion gibt es kein i mit $\{u^\ell_i, u^h_i\} \in E'$ für $\ell \neq h$.

$\rightsquigarrow$ die Knoten $\{u_{i_j}, \ldots, u_{i_k}\}$ bilden eine Clique der Größe k in G, denn
$\{u^\ell_{i_\ell}, u^h_{i_h}\} \in E' \Rightarrow \{u_{i_\ell}, u_{i_h}\} \in E$ für alle $\ell \neq h$.



Hinweis

Für jeden Knoten $u_i \in V$ werden k Kopien $u^1_i, \ldots, u^k_i$ erzeugt.
Für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$, werden $k^2 - k$ Kanten $\{u^\ell_i, u^h_j\}$ mit $1 \leq \ell, h \leq k$ und $\ell \neq h$ erzeugt.