Stochastik für Informatik TU Berlin SoSe 23

–Probeklausur –

1. Bitte füllen Sie die folgenden Felder aus

Name:		(bitte Druckbuchstaben
Vorname:		verwenden)
Matrikelnummer:		
Fach:		

2. Bitte nehmen Sie die folgenden Regeln für den Wissensteil zur Kenntnis

- Jede richtige Aufgabe ergibt 2 Punkte
- Wird die Aufgabe unvollständig oder in Teilen fehlerhaft gelöst, so erhalten Sie für die korrekt gelösten Teile anteilig Punkte
- Nicht gelöste Aufgaben geben weder einen Punkt noch einen Punktabzug

3. Ihre Klausurnummer

Merken Sie sich Ihre Nummer

Aus Datenschutzgründen dürfen wir die Klausurergebnisse nicht in Verbindung mit Ihrer Matrikelnummer im Internet veröffentlichen. Bitte notieren Sie sich daher Ihre **Klausurnummer**, mit deren Hilfe Sie Ihr Klausurergebnis auf ISIS erfahren können.

Das Vorlesungsteam wünscht Ihnen eine erfolgreiche Klausur!

Platz für Notizen und Nebenrechnungen

A. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsräume *(20 Punkte)*

A.a. Wissensteil 5×2 *=10 Punkte*

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 12 Spieler*innen 2 gleich große Teams - Team A und Team B - zu bilden? Hier kommt es auch auf den Namen des Teams an, d.h. wenn alle Spieler*innen aus Team A in Team B gehen und umgekehrt zählt das als eine extra Möglichkeit. Geben Sie den mathematischen Ausdruck dafür an (Berechnung ist nicht notwendig).

2. In einem Spiel wird zwei Mal mit einer fairen Münze geworfen. Geben Sie den Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie die W.-keit, dass insgesamt ein Mal Kopf und ein Mal Zahl geworfen wird. Hierbei kommt es nicht darauf an, ob erst Kopf und dann Zahl kommt, oder umgekehrt.

3. Ein schusseliger Dozent möchte zu jeder Vorlesungsstunde einen Übungszettel herausbringen und aus seinem Skript vortragen. Wenn der Dozent sein Skript vergisst, vergisst er in zwei Drittel der Fälle auch die Übungszettel mit in die Vorlesung zu nehmen. In 30% der Vorlesungsstunden kommt der Dozent ohne Skript und in 50% der Vorlesungsstunden fehlen die Übungszettel. Wie groß ist die W.-keit, dass der Dozent mit Skript und mit Übungszettel in der Vorlesung erscheint?

4. Die folgende Angabe von Wahrscheinlichkeiten ist inkonsistent. Finden Sie den Widerspruch!

$$P(A) = P(B) = 0.5 \quad P(A \cap B) = 0.25 \quad P(A \cup B) = 0.8.$$

5. Nennen Sie die beiden Eigenschaften, welche ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum erfüllen muss. Setzen Sie hierbei voraus, dass Wahrscheinlichkeiten stets Werte zwischen 0 und 1 sind.

A.b.: Textaufgabe $4 \times 2.5 = 10$ *Punkte*

Die Panzerknacker starten eine Attacke auf Onkel Dagoberts Geldspeicher. Doch Onkel Dagobert hat vorgesorgt:

1) 60% der Eindringlinge werden durch seine Alarmanlagen, die den Vorplatz übewachen, entdeckt und festgenommen. Nach Personalienfeststellung werden sie dann wieder laufen gelassen.

2) Von denen, die über den Vorplatz kommen, schaffen es nur 30% die vordere Stahltür des Geldspeichers zu knacken. Die anderen werden beim Versuch ertappt und landen im Gefängnis.

3) Wenn die Eindringlinge erstmal im Geldspeicher sind, haben sie zwei Möglichkeiten, weiterzukommen. 50% gehen über die Treppe und 50% kriechen durch den Lüftungsschacht.

   3.a) Wenn sie über die Treppe gehen, fallen die Panzerknacker zu 80% in eine der geheimen Falltüren, die über eine Rutsche direkt ins Gefängnis führen.

   3.b) Klettern sie durch den Lüftungsschacht, dann bleiben sie zu 50% darin hängen, wo sie Dagoberts Neffe Donald am nächsten Morgen beim Geldspreicher Putzen findet, befreit und einfach draußen laufen lässt.

   Wer die Treppe oder den Lüftungsschacht überwindet, erbeutet das Geld von Onkel Dagobert.

Bitte lösen Sie die folgenden Aufgaben:

a) Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum für die Attacke der Panzerknacker auf den Geldspeicher.

b) Wie groß ist die W.-keit, dass die Panzerknacker das Geld erbeuten?

c) Wie groß ist die W.-keit, dass die Panzerknacker im Gefängnis landen?

d) Die Panzerknacker haben das Geld geklaut - mit welcher Wahrscheinlichkeit kamen sie über die Treppe?

Schreiben Sie Ihre Lösung auf die Seiten 5 und 6.

Teil A–Aufgabe	1	2	3	4	5	Textaufgabe	$\sum$
Punkte							

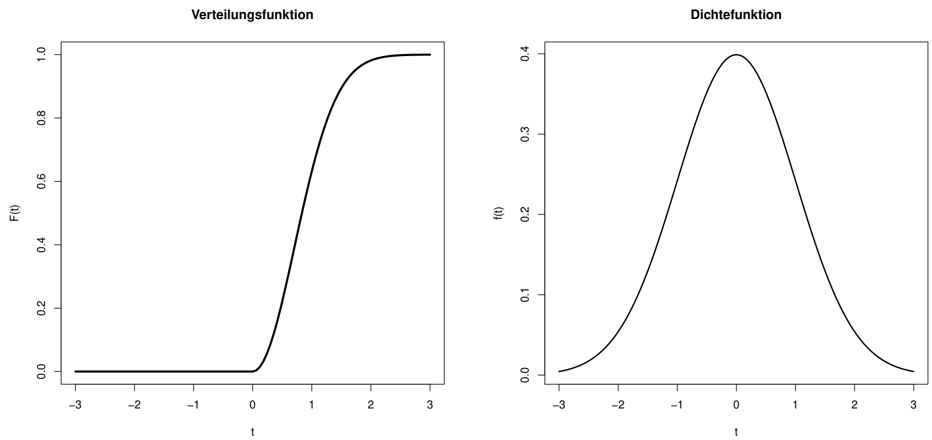
Lösung zu Aufgabe A.b.1

B. Zufallsvariablen, Verteilungen und Grenzwertsätze *(20 Punkte)*

B.a. Wissensteil 5×2 *=10 Punkte*

1. Nennen Sie je zwei diskrete und kontinuierliche Verteilungsfamilien!

2. Die untenstehende Grafik zeigt eine Verteilungsfunktion und eine kontinuierliche Dichte.



   Können beide von derselben Verteilung stammen? Begründen Sie kurz!

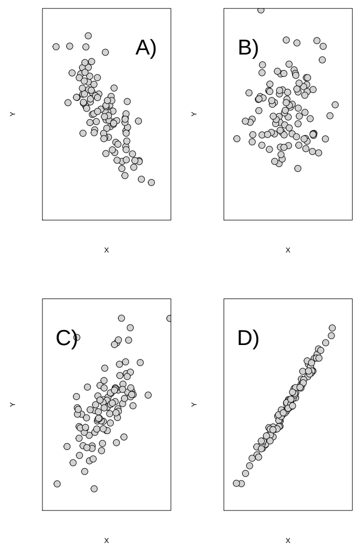
3. Sie spielen in einem Spiel mit Gewinnchance 50% neun Runden.

   a) Welcher Verteilung folgt die Zufallsvariable X=Gesamtzahl der gewonnenen Runden?

   b) Wie groß ist die W.-keit, dass die Anzahl der von Ihnen gewonnenen Spiele 3, 4 oder 5 beträgt, $P(3 \leq X \leq 5) =?$

   Die Verläufe der einzelnen Runden seien als unabhängig vorausgesetzt!

4. Ordnen Sie die folgenden Diagramme von Streuplots nach aufsteigendem Korrelationskoeffizienten (vom kleinsten Wert bis zum größten).



5. Was besagt das schwache Gesetz der großen Zahlen?

B.b.: Textaufgabe *10 Punkte*

1. Eine Bank hält Aktien eines DAX-Unternehmens und möchte sie in einem Jahr verkaufen. Die Risikoabteilung der Bank modelliert die Rendite X dieser Papiere für diesen Zeitraum als normalverteilt $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit μ, der erwarteten Rendite, gleich 5% und σ, der Standardabweichung bzw. Volatilität auf ein Jahr, gleich 3%. (Alle Zinssätze seien effektiv, d.h. schon korrekt aufs Jahr bezogen).

   a) Skizzieren Sie die Dichtefunktion der Renditenverteilung X und zeichnen Sie die einfache, zweifache und dreifache σ- Umgebung um die erwartete Rendite ein.

   b) Wie groß ist die W.-keit, dass die Rendite für das Papier zwischen 2% und 8% liegt?

   c) Wie groß ist die W.-keit, dass die Rendite aus dem Aktienpapier den Referenzzinssatz EURIBOR übertrifft? Der EURIBOR betrage 2% pro Jahr.

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bank mit dem Papier Verlust macht, d.h. dass die Rendite X negativ wird?

   e) Im Bonusprogramm der Bank wird ein/e Händler/in für ihr/sein Investment dann belohnt, wenn die tatsächliche Jahresrendite x ihrer/seiner Investition im oberen 10%-Band der Vorhersage der Risikoabteilung liegt, d.h. $0.1 = P(X > x)$. Welchen Renditewert x muss die Investition nach einem Jahr übertreffen, damit die/der Händler/in einen Bonus bekommt?

   Bei der Beantwortung der Fragen setzen Sie bitte voraus, dass die Risikoabteilung ihre Aufgabe korrekt gelöst und die Renditenverteilung zutreffend spezifiziert hat.

Hinweis: Die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sowie deren Quantile entnehmen Sie bitte der Tabelle am Ende der Klausur.

Das 90%-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt $z_{0.9} = 1.282$ (für Aufgabeteil e)).
Schreiben Sie Ihre Lösung auf die Seiten 9–11.

Teil B–Aufgabe	1	2	3	4	5	Textaufgabe	$\sum$
Punkte							

Lösung zu Aufgabe B.b.1

Lösung zu Aufgabe B.b.1

C. Statistik (nur für 9LP-Modul) *(20 Punkte)*

C.a. Wissensteil 5×2 *=10 Punkte*

1. Warum beträgt der Vorfaktor bei der Definition der empirischen Varianz

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2$$

$\frac{1}{n-1}$ und nicht $\frac{1}{n}$? Hier ist $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ das arithmetische Mittel. Welche Eigenschaft wird dadurch erreicht?

2. Welche Aussagen über Parameterschätzer sind korrekt? Antworten Sie durch Ankreuzen von Ja oder Nein!

Nr.	Aussage	Ja	Nein
1.a)	Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ ist ein Schätzer für den Erwartungswert μ	○	○
1.b)	Die empirische Standardabweichung $\hat{\sigma}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ	○	○
1.c)	Der Anteilswert $\bar{x}$ der Elemente aus einer Stichprobe mit einer besonderen Eigenschaft ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Anteilswert p der Grundgesamtheit	○	○
1.d)	Maximum Likelihood Schätzer sind stets erwartungstreu	○	○

3. Gegeben sei eine Dichte mit Skalenparameter $\eta > 0$,

$$f(x|\eta) = \eta^{-1} g\left(\frac{x}{\eta}\right) \text{ wobei } g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stellen Sie die Maximum-Likelihood-Gleichungen für η und die Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf und lösen sie diese!

4. Was ist der Grund, dass die Quantile t_p für die t-Verteilungen für kleine oder große p dem Betrage nach größer sind and die entsprechenden Quantile z_p der Standardnormalverteilung?

C.b.: Textaufgabe *10 Punkte (a) + b) je 4 Punkte, c) 2 Punkte)*

1. Ein neuer Computertomograph wird entwickelt. Dazu muss die Strahlendosis bei Ganzkörpertomographie gemessen werden. Hier ist die Strahlendosis μ unter genormten Bedingungen genau reproduzierbar, die Messung jedoch ungenau. Die Messmethode ist kalibriert in dem Sinne, dass der Erwartungswert der Messung mit dem wahren Wert der Strahlenbelastung μ übereinstimmt.

   Die Messung wird neun Mal unabhängig durchgeführt. Die Messwerte in Millisievert (mSv) seien als normalverteilt (und i.i.d.) vorausgesetzt, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Messung-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Strahlendosis (mSv)	19.68	17.91	19.13	19.18	20.51	18.54	19.97	17.80	19.21

   Beantworten Sie die folgenden Fragen:

   a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung der Strahlendosis.

   b) Geben Sie einen Bereich an, in dem die mittlere Strahlenbelastung μ zu 95% liegt.

   c) Für die Zulassung des Computertomographen muß zu 99% nachgewiesen werden, dass die Strahlenbelastung μ unter 19.5 mSv liegt. Sind die erhobenen Daten aussagekräftig genug, um diesen Nachweis zu führen?

   Hinweis: Die für die Lösung der Aufgaben benötigten Quantile entnehmen Sie bitte den Tabellen am Ende der Klausur.

   Schreiben Sie Ihre Lösung auf die Seiten 14–16.

Teil C–Aufgabe	1	2	3	4	5	Textaufgabe	$\sum$
Punkte							

Lösung zu Aufgabe C.b.1

Lösung zu Aufgabe C.b.1

Teil	A	B	C	$\sum$	Note
Punkte					

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0, 6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0, 7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0, 9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

$\tilde{x}_p$-Quantile der Student-t_n-Verteilung							
	p						
n	**0,90**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**	**0,9995**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
∞	1,282	1,645	1,960	2,327	2,577	3,092	3,293
Die Letzte Zeile "∞" enthält die Quantile der Standard-Normalverteilung und gilt in guter Näherung für die t_n-Verteilung mit $n \geq 30$							

Beispiel: Das $p = 99\%$-Quantil der t-Verteilung mit $n = 5$ Freiheitsgraden beträgt

$$t_{0.99}(5) = 3.365$$

Teil	A	B	C	$\sum$	Note
Punkte					