Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 4.3

Wiederholung der letzten Wochen

08.01.2024 bis 12.01.2024

Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme

1. In diesem Kurs wurden verschiedene Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ vorgestellt. Im Folgenden sollen Sie die effizienteste Methode und deren Laufzeit nennen, um ein lineares Gleichungssystem mit zusätzlichen Eigenschaften der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und des Vektors $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zu lösen.

Eigenschaft $\mathbf{A}$	Eigenschaft $\mathbf{b}$	Lösungsmethode	Laufzeit
regulär	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	Gauß-Elimination und Rückwärtseinsetzen	$\mathcal{O}(n^3)$
obere Dreiecksmatrix	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	Rückwärtseinsetzen	$\mathcal{O}(n^2)$
untere Dreiecksmatrix	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	Vorwärtseinsetzen	$\mathcal{O}(n^2)$
Diagonalmatrix	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	$x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}}$	$\mathcal{O}(n)$
symmetrisch und PD	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	Cholesky-Zerlegung, Vor- und Rückwärtseinsetzen	$\mathcal{O}(n^3)$
orthogonal	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$	$\mathcal{O}(n^2)$
beliebig	$\mathbf{b} = \mathbf{0}$	Singulärwertzerlegung	$\mathcal{O}(n^3)$

Aufgabe 2: Lineare Ausgleichsrechnung

1. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung folgender Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix}$$

Lösung

$$\ell_{1,1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$e_{2,1} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{2,2} = \sqrt{10 - 1^2} = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{3,1} = \frac{1}{2}2 = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{3,2} = \frac{1}{3}(10 - 1 \cdot 1) = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{3,3} = \sqrt{11 - 3^2 - 1^2} = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{4,1} = \frac{1}{2}8 = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{4,2} = \frac{1}{3}(7 - 4 \cdot 1) = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{4,3} = \frac{1}{1}(9 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & ? \end{bmatrix}$$

$$\ell_{4,4} = \sqrt{22 - 4^2 - 1^2 - 2^2} = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 10 & 7 \\ 2 & 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 22 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

2. Im Folgenden möchten wir folgende Punkte $(x, y, f(x, y))$ mittels einer quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ approximieren:

x	0	1	1	2	1	2	3	3
y	1	0	1	1	2	2	2	3
$f(x,y)$	1	2	1	-1	5	3	1	0

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ auf, dessen approximative Lösung mit der Normalengleichung die Koeffizienten des gewünschten Polynoms liefert.

Hinweis: Die Menge der Basisfunktionen ist $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$.

Lösung

Wir wählen $f(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$. Dann ist das LGS:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\
(0,1) \rightarrow \\ (1,0) \rightarrow \\ (1,1) \rightarrow \\ (2,1) \rightarrow \\ (1,2) \rightarrow \\ (2,2) \rightarrow \\ (3,2) \rightarrow \\ (3,3) \rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_iy_i & y_i^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 3 & 2 & 9 & 6 & 4 \\
1 & 3 & 3 & 9 & 9 & 9
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
f(x_i,y_i) \\ \downarrow \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Lösung Ende

Aufgabe 3: Eigenzerlegung

1. Gegeben ist folgende Matrix $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}_\alpha$ indefinit?

Lösung

Da sie symmetrisch ist, ist $\mathbf{A}_\alpha$ genau dann indefinit, wenn sie einen positiven und einen negativen Eigenwert hat. Da sie 2×2 ist, hat sie zwei Eigenwerte. Ihre Determinante ist das Produkt der beiden Eigenwerte: $\det \mathbf{A}_\alpha = 1 - \alpha^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Damit $1 - \alpha^2 < 0$ gilt, muss $\alpha^2 > 1$ gelten. Damit ist die Matrix für $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ indefinit.

Lösung Ende

Aufgabe 4: Singulärwertzerlegung

1. Geben Sie eine Singulärwertzerlegung sowie die Pseudoinverse folgender Matrizen an:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Lösung

Im Folgenden nutzen wir die volle Form der SVD. Die SVDs der gegebenen Matrizen kann man intuitiv ablesen bzw. raten, jedoch können wir diese auch schematisch berechnen: Zunächst bestimmen wir $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ und eine orthonormale Eigenbasis jener Matrix, welche die rechten Singulärvektoren $\mathbf{V}$ bilden. Die zugehörigen linken Singulärvektoren und Singulärwerte erhalten wir aus dem Ansatz $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, wobei $\sigma_i = \|\mathbf{A}\mathbf{v}_i\|$ (da $\sigma_i \geq 0$) und $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{\sigma_i}$ (für $\sigma_i \neq 0$, sonst muss man einen geeigneten SV durch z.B. Orthogonalisierung bestimmen). Die Pseudoinverse erhält man durch $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T}$.

a) Zunächst bestimmen wir die Gram-Matrix $\mathbf{A}$ und eine orthonormale Eigenbasis:

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörigen linken SV und SW sind gegeben durch

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Somit gilt

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\mathsf{T}} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Wir bestimmen erneut die Gram-Matrix und eine orthonormale Eigenbasis:

$$\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die zugehörigen linken SV und SW erhalten wir durch:

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Den linken Singulärvektor zum Singulärwert $\sigma_2 = 0$ muss man so wählen, dass er orthogonal zum anderen ist. Alternativ hätte man auch $(-1, 0)$ wählen können, was sich nicht auf das Ergebnis ausgewirkt hätte. Nach korrekter Sortierung erhalten wir als Ergebnis:

$$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\mathsf{T}} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

c) Auch hier geht man genauso vor wie in den vorherigen zwei Aufgaben, jedoch erhält man nur zwei linke Singulärvektoren und damit folgende reduzierte SVD:

$$\mathbf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\mathsf{T}} \quad \text{und als Pseudoinverse} \quad \mathbf{C}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für eine volle SVD benötigen wir einen weiteren linken SV, der zu den anderen beiden orthogonal sein muss. Dazu eignen sich $(1, 0, 0)$ bzw. $(-1, 0, 0)$. Daraus ergibt sich folgende volle SVD:

$$\mathbf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\mathsf{T}}.$$

d) Wir berechnen erneut die Gram-Matrix $\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{D}$ und eine orthonormale Eigenbasis $\mathbf{V}$, welche in diesem Fall eine besondere Gestalt haben, da $\mathbf{D}$ ein Spaltenvektor ist:

$$\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{D} = 5 \quad \text{und damit folgt} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Dann als zugehörigen linken Singulärvektor:

$$\mathbf{D}\,[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir folgende reduzierte SVD und Pseudoinverse:

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\top} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^+ = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Eine volle SVD erhält man durch einen weiteren orthogonalen linken Singulärvektor:

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^\top}.$$

Lösung Ende

2. Sei $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ eine Matrix mit $n > k$, die orthonormale Spalten hat. Zeigen Sie, dass $\mathbf{U}^\top$ ihre Pseudoinverse ist.

Lösung

Da $\mathbf{U}$ orthonormale Spalten hat, gilt $\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I}$ (aber nicht unbedingt $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}$). Nun müssen wir die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften der Pseudoinverse überprüfen:

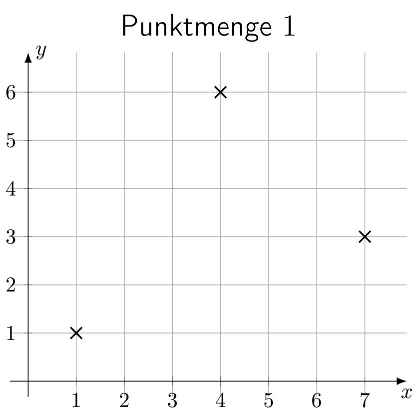
- $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{I} = \mathbf{U}$
- $\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^\top$
- $\mathbf{U}^\top\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top$ sind offensichtlich symmetrisch

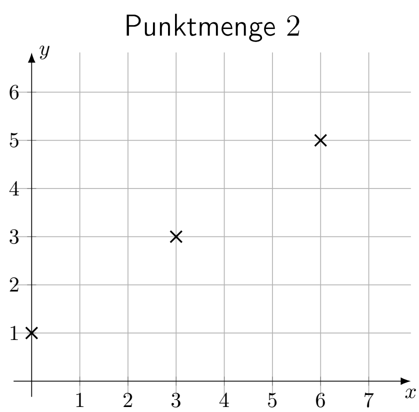
Damit gilt $\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^\top$.

Lösung Ende

Aufgabe 5: Interpolation

1. Gegeben seien die folgenden zwei Punktmengen $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$:





Welche Menge an (Basis-)Funktionen genügt, um die Punkte mittels einer Linearkombination dieser zu interpolieren?

a) $\{x\}$ 1: Nein, 2: Nein

b) $\{1, x\}$ 1: Nein, 2: Ja

c) $\{x, x^2, x^3\}$ 1: Ja, 2: Nein
d) $\{1, x^3, x^5\}$ 1: Ja, 2: Ja
e) $\{\exp(x), \exp(2x), \exp(3x)\}$ 1: Ja, 2: Ja
f) $\{1, x^2, \exp(x)\}$ 1: Ja, 2: Ja
g) $\{1, \cos^2(x), \sin^2(x)\}$ 1: Nein, 2: Nein
h) $\{1, x, x^2 \cos(x), \sin(x), \exp(x)\}$ 1: Ja, 2: Ja

2. Gegeben die folgenden zwei Polynome 2. Grades: $p_1(x) = -x^2+3x-2$ und $p_2(x) = 3x^2-2x+4$.

   a) Stellen Sie die Polynome in der Monombasis dar, welche alle Polynome 4. Grades darstellen kann.
   b) Stellen Sie die Polynome in der Lagrange-Basis zu den Stützstellen $0, 1, 2, 3, 4$ dar.
   c) Berechnen Sie das Produktpolynom $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$. Welche Basisrepräsentation eignet sich besser?
   d) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Monombasis in die Lagrange-Basis durchführt.
   e) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Lagrange-Basis in die Monombasis durchführt.

Lösung

a) Wir wählen die Monombasis $M = (1, x, x^2, x^3, x^4)$. Dann ist:

$$\mathbf{p}_1 = (-2, 3, -1, 0, 0)^\mathsf{T}, \quad \mathbf{p}_2 = (4, -2, 3, 0, 0)^\mathsf{T}$$

b) Um die Repräsentation der Polynome bezüglich der Lagrange-Basis zu berechnen, müssen wir die Lagrange-Basispolynome gar nicht berechnen. Es reicht den Funktionswert der Polynome an jeder Stützstelle zu bestimmen:

$$\mathbf{p}_1' = \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \\ p_1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2' = \begin{bmatrix} p_2(0) \\ p_2(1) \\ p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \\ 25 \\ 44 \end{bmatrix},$$

c) Die Lagrange-Basis eignet sich besser zum Multiplizieren von Polynomen, da man in der Monombasis jeden Koeffizienten des einen Polynoms mit jedem Koeffizienten des anderen Polynoms multiplizieren muss, wohingegen in der Lagrange-Basis die elementweise Multiplikation der Vektoren genügt, d.h.

$$(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)' = \mathbf{p}_1' \circ \mathbf{p}_2' = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ -264 \end{bmatrix}$$

d) Die Matrix für den Basiswechsel von Monombasis zu Lagrange-Basis ist die Vandermonde-Matrix:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$$

e) Die Inverse der Matrix aus der Aufgabe zuvor führt besagten Basiswechsel durch.

Lösung Ende