# Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 2.1

**Themen: Lineare Gleichungssysteme, LR-Zerlegung**

Ugo & Gabriel

15. November 2022

## Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Gx} = \mathbf{b}$ mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivotisierung:
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Gx} = \mathbf{b}$ aus der vorherigen Teilaufgabe mithilfe der Gauß-Elimination mit Pivotisierung.

3. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:
$$\begin{bmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems.
   b) Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivoting im dezimalen Gleitkommazahlenformat $\mathbb{G}(10, 2)$ mit zwei Stellen.
   c) Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Gauß-Elimination mit Pivoting im dezimalen Gleitkommazahlenformat $\mathbb{G}(10, 2)$ mit zwei Stellen.
   d) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Lösungen für $x_1$.
   e) Was sagen die jeweiligen relativen Fehler aus?

4. Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen folgender Ebene und Gerade in Parameterform:
$$\text{Ebene:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$\text{Gerade:} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt folgender drei Ebenen gegeben in Parameterform:
$$\text{Ebene 1:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 2:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Ebene 3:} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tipp: Repräsentieren Sie die Ebenen in Normalform.

# Aufgabe 2: LR-Zerlegung

1. Wie kann man, mithilfe einer (modifizierten) Gauß-Elimination, die Inverse einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnen? Welche Laufzeit hat der Ansatz?

2. Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Wie kann man die Inverse dazu nutzen lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen? Welche Voraussetzungen müssen für $\mathbf{A}$ erfüllt sein und welche Laufzeit ergibt sich, angenommen die Inverse sei bereits berechnet?

4. Warum ist es keine gute Idee die Inverse zum Lösen von linearen Gleichungssystemen zu berechnen?

5. Stellen Sie, am Beispiel der Aufgabe 1.1, alle Rechenschritte der Gauß-Elimination durch Matrixmultiplikationen dar. Lässt sich in jedem Schritt auch der inverse Schritt darstellen? Falls ja, wie sehen diese aus?

6. Wie lassen sich mithilfe einer Matrixmultiplikation zwei Zeilen einer Matrix vertauschen?

Eine **LR-Zerlegung** ist eine Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$. Bei der Gauß-Elimination wird implizit eine LR-Zerlegung berechnet:

i) $\mathbf{R}$ ist die obere Dreiecksmatrix nach der Elimination.

ii) $\mathbf{L}$ enthält die additiv inversen Faktoren $\ell_{i,j}$, sodass bei der Elimination von $a_{i,j}$ die $i$-te Zeile $-\ell_{i,j}$ mal zur $j$-ten Zeile addiert wurde (also die aufmultiplizierten inversen Rechenschritte aus der letzten Aufgabe).

7. Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der obigen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mithilfe der Gauß-Elimination ohne Pivoting.

8. Wie kann man eine LR-Zerlegung dazu nutzen ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen? Tun Sie dies explizit für die obige Matrix $\mathbf{A}$ und folgenden Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Welche Laufzeit benötigt das Lösen linearer Gleichungssysteme mit einer LR-Zerlegung? Was ist der Vorteil über der Inversen und der gewöhnlichen Gauß-Elimination gefolgt vom Rückwärtseinsetzen?

10. Wie kann man mithilfe einer LR-Zerlegung die Determinante einer Matrix effizient berechnen? Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.