Benotete Hausaufgaben zur Vorlesung **WiSe 2023/2024**
Berechenbarkeit und Komplexität **TU Berlin**
Weller/Froese/Kellerhals/Kunz **11.03.2024**

Hausaufgabenblatt (Wiederholung)

Hinweise:

- Die Hausaufgabe kann ab dem **25.03.2024, 12:00 Uhr** bis zum **02.04.2024, 23:59 Uhr** auf ISIS hochgeladen werden.
- Die Hausaufgabe sollte möglichst in Dreiergruppen bearbeitet werden. Bitte tragen Sie sich in ISIS bis zum **25.03.2024, 11:00 Uhr** in der Gruppenwahl ein. Die Hausaufgabe kann nur von eingetragenen Gruppen abgegeben werden.
- Bitte verwenden Sie die LaTeX-Vorlage auf ISIS für Ihre Abgabe.
- Plagiate werden nicht toleriert und werden scharf geahndet.
- Es können bis zu **25 Portfoliopunkte** erreicht werden.
- Alle Antworten sind zu begründen. Antworten ohne Begründung erhalten **0 Punkte**. Einzige Einschränkungen:
  - Um zu zeigen, dass eine Funktion (Sprache) von einer Turing-Maschine berechnet (akzeptiert) werden kann, reicht es aus, das Verhalten der Maschine algorithmisch zu beschreiben. Das Gleiche gilt für WHILE- und GOTO-Programme.
  - Sätze, die in der Vorlesung oder Modulkonferenz *bewiesen* wurden (auch skizzenhaft) dürfen verwendet werden, aber unbewiesene Mitteilungen und Lösungen zu Tutoriumsaufgaben dürfen nicht verwendet werden (bzw. Beweis muss erbracht werden).
  - Sie können die Existenz einer universellen Turing-Maschine (eine Maschine, die bei Eingabe $w\#x$ die Maschine M_w auf Eingabe x simuliert) annehmen.
  - Sie können verwenden, dass das allgemeine Halteproblem H (Definition siehe unten) semi-entscheidbar ist.
- Wir behalten uns vor, pro Aufgabe mit x erreichbaren Punkten nicht mehr als $x/2$ Seiten zu lesen.

Erinnerungen:

- Alle in den Aufgaben vorkommenden Turing-Maschinen sind deterministisch.
- Σ ist ein beliebiges, endliches Alphabet. Das Symbol $\#$ ist ein Trennzeichen.
- Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement.
- Das allgemeine Halteproblem ist $H := \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ hält bei Eingabe } x\}$.
- Das spezielle Halteproblem ist $K := \{w \in \{0,1\}^* \mid w\#w \in H\}$.
- Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid w\# \in H\}$.

Aufgabe 1. *(Semi-)Entscheidbarkeit von Sprachen* 10 P.

Zeigen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Sprachen jeweils Semi-Entscheidbarkeit und Entscheidbarkeit.

- $A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ hält auf genau einem Eingabewort nicht$\}$
- $B \coloneqq \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^*$ und bei Eingabe x besucht M_w den Startzustand mehrmals$\}$
- $C \coloneqq \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^*$ und bei Eingabe x besucht M_w jeden ihrer Zustände genau einmal, bevor sie einen Zustand zum zweiten Mal besucht$\}$

Hinweis: Eine Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ *besucht* einen Zustand $z \in Z$ bei Eingabe x, falls es $k \in \mathbb{N}$, sowie $a, b \in \Gamma^*$ gibt, sodass $z_0 x \vdash_M^k azb$.

Aufgabe 2. *Berechenbarkeit* 9 P.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Sprache unentscheidbar ist.

$$L \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid T(M_w) = \emptyset \text{ oder } T(M_w) = \{0,1\}^*\}$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die Berechenbarkeit der Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ mit

$$f(w) \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es existiert eine Turing-Maschine } M \text{ mit } n \text{ Zuständen, sodass } T(M) = T(M_w)\}.$$

Hinweis: Sie dürfen hierfür (a) verwenden.

Aufgabe 3. *Postsches Korrespondenzproblem* 6 P.

Zeigen oder widerlegen Sie die Entscheidbarkeit der beiden folgenden Sprachen:

$$\begin{aligned} P_{\geq} \coloneqq \{\langle((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))\rangle \mid\ & k \geq 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{und es existieren } n \geq k \text{ und } i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\leq} \coloneqq \{\langle((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))\rangle \mid\ & k \geq 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{und es existieren } n \leq \operatorname{ack}(k, k) \text{ und } i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}, \\ & \text{sodass } x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}\} \end{aligned}$$

Hinweis: ack bezeichnet hierbei die Ackermannfunktion (siehe Vorlesung).