Technische Universität Berlin
Fachgebiet Computer Graphics

Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

# Wissenschaftliches Rechnen - Übung 7

Numerische Integration (nicht prüfungsrelevant)

12.02.2024 bis 16.02.2024

## Aufgabe 1: Newton-Cotes Formeln

Im Folgenden möchten wir das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ mit $f(x) = \frac{\exp(x)}{x^2+1}$ berechnen. Da $f$ nicht elementar integrierbar ist, müssen numerische Lösungen in Betracht gezogen werden. Vergleichen Sie stets die berechneten Abschätzungen mit der Annäherung $\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x)}{x^2+1}\,dx \approx 1{,}796$.

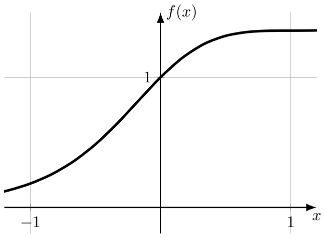
1. Was ist die grundlegende Idee hinter den Newton-Cotes Formeln? Was bedeutet die Unterscheidung in abgeschlossen und offen?

2. Zunächst möchten wir das Integral mit den abgeschlossenen Newton-Cotes Formeln für $n \in \{1, 2, 3\}$ approximieren.

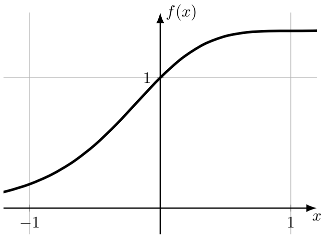
| Name | $n$ | Schrittweite $h$ | Formel |
|---|---|---|---|
| Trapezregel | $1$ | | |
| Simpsons 1/3-Regel | $2$ | | |
| Simpsons 3/8-Regel | $3$ | | |

   a) Ergänzen Sie die Tabelle mit der Schrittweite.
   b) Berechnen Sie alle zugehörigen Gewichte für beliebige Intervallgrenzen $a$ und $b$ in Abhängigkeit der Schrittweite $h$. Ergänzen Sie die Formeln in der Tabelle.
   c) Schätzen Sie das Integral mit den Formeln ab.
   d) Visualisieren Sie die Berechnung des Integrals.

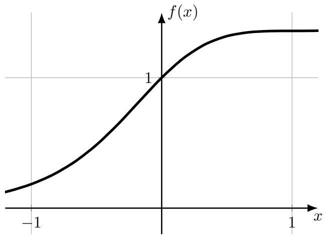
Trapezregel




Simpsons 1/3-Regel




Simpsons 3/8-Regel




3. Warum ist es im Allgemeinen keine gute Idee, die Newton-Cotes Formeln für große $n$ zu verwenden? Welche Möglichkeit gibt es, die Genauigkeit der Approximation zu vergrößern?

# Aufgabe 2: Gauß-Quadratur

Im Kontext der Gauß-Quadratur spricht man von orthogonalen Polynomen. Die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilden einen reellen Vektorraum. Über diesem lassen sich verschiedene Skalarprodukte der Form

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\; dx$$

definieren, wobei $w(x)$ eine nicht-negative Gewichtungsfunktion ist. Zwei Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nennt man dann, wie man es von euklidischen Räumen kennt, orthogonal, falls $\langle f, g \rangle = 0$.

1. Was ist die Idee der Gauss-Quadratur? Was ist der grundlegende Unterschied zu den Newton-Cotes Formeln?

2. Für die Gauß-Legendre Quadratur nutzt man als Gewichtungsfunktion $w(x) = 1$ und die daraus resultierenden Legendre-Polynome. Die ersten beiden sind $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$. Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens alle Polynome zweiten Grades, welche orthogonal zu $P_0$, $P_1$ und ihren Linearkombinationen, also allen Polynomen vom Grad höchstens eins, sind, wobei Sie $x^2$ als Startfunktion verwenden können[1].

3. Das nächste Legendre-Polynom ist $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. Schätzen Sie das Integral aus der vorherigen Aufgabe mit der Gauß-Legendre-Quadratur mit $n = 3$ Stützstellen ab. Berechnen Sie dazu die Nullstellen $x_1, x_2, x_3$ von $P_3$. Die zugehörigen Gewichte sind dabei $w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$ und $w_3 = \frac{5}{9}$.

4. Approximieren Sie das Integral aus der vorherigen Aufgabe nun mithilfe der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur (Gewichtungsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) erneut mit $n = 3$ Stützstellen. Das dritte Tschebyscheff-Polynom ist $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, die zugehörigen Gewichte sind $w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{3}$.

[1] Das Legendre-Polynom $P_2$ ist jenes, für welches zusätzlich $P_2(1) = 1$ gilt.