FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 10. Januar 2023

Öffentliche Lösungsvorschläge zum 9. Tutorium – Logik

Aufgabe 1

Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, wobei $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$.

Beweisen Sie die folgende Äquivalenz: $\varphi \wedge \exists x\, \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Bemerkung: Folgende Äquivalenzen lassen sich analog beweisen:

$$\varphi \vee \forall x\, \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi), \quad \varphi \vee \exists x\, \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi) \quad \text{und} \quad \varphi \wedge \forall x\, \psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi).$$

Lösung zu Aufgabe 1

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \varphi \wedge \exists x\, \psi &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \varphi \text{ und es gibt ein } a \text{ mit } \mathcal{I}[x/a] \models \psi. && (\text{Semantik von } \wedge, \exists)\\
&\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } a \text{ mit } \mathcal{I}[x/a] \models \varphi \wedge \psi. && (x \notin \mathrm{frei}(\varphi))\\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x\, (\varphi \wedge \psi) && (\text{Semantik von } \exists)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei E ein einstelliges Relationssymbol und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie die folgende Formel in Negations- und Pränexnormalform um:

(i) $\varphi_1 := \exists y(E(y) \vee y = y) \rightarrow \forall x f(x,y) = x$

(ii) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion: Die Pränexnormalform ist eine Normalform.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Negationsnormalform eine Normalform ist.

Lösung zu Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists y(E(y) \vee y = y) \rightarrow \forall x f(x,y) = x\\
&\equiv \neg\exists y(E(y) \vee y = y) \vee \forall x f(x,y) = x\\
&\equiv \forall y \neg(E(y) \vee y = y) \vee \forall x f(x,y) = x\\
&\equiv \forall y(\neg E(y) \wedge y \neq y) \vee \forall x f(x,y) = x && (\text{NNF})\\
&\equiv \forall x_1(\neg E(x_1) \wedge x_1 \neq x_1) \vee \forall x f(x,y) = x\\
&\equiv \forall x \forall x_1((\neg E(x_1) \wedge x_1 \neq x_1) \vee f(x,y) = x) && (\text{PNF})
\end{aligned}$$

(ii) Sei σ eine Signatur. Wir zeigen, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ in NNF, ein $\varphi' \in \mathrm{FO}[\sigma]$ existiert, das in Pränexnormalform ist und für das gilt $\varphi \equiv \varphi'$.

Zuerst benennen wir die gebundenen Variablen in φ um, sodass keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt oder mehrfach quantifiziert wird. Diese Eigenschaft haben wir auch als *bereinigt* eingeführt (siehe Skript Definition 5.50). Dann zeigen wir die Aussage per struktureller Induktion über den Formelaufbau von φ.

IA: φ ist atomar

Dann ist φ quantorenfrei, und somit auch in Pränexnormalform.

IV: Seien φ_1, φ_2 in NNF und bereinigt. Dann gibt es φ_1' und φ_2' in Pränexnormalform mit $\varphi_1 \equiv \varphi_1'$ und $\varphi_2 \equiv \varphi_2'$.

IS:
Bereinigte, quantorenfreie Formeln sind bereits in Pränexnormalform und für die gibt es nichts zu zeigen. Insbesondere müssen wir nur den Fall $\neg\varphi_1$ betrachten, wenn φ_1 quantorenfrei und bereinigt, da wir uns auf bereinigte Formeln in NNF beschränken.

Sei $\varphi = \exists x\, \varphi_1$ für eine Variable x, die nicht gebunden in φ_1 vorkommt. Dann ist $\varphi' := \exists x\, \varphi_1'$ in Pränexnormalform mit $\varphi' \equiv \varphi$. Falls $\varphi = \forall x\, \varphi_1$, für eine Variable x, die nicht gebunden in φ_1 vorkommt, können wir analog verfahren.

Sei $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ für $* \in \{\wedge, \vee\}$. Wie am Anfang des Beweises können wir durch einfache Umbenennung der Variablen dafür sorgen, dass φ bereinigt ist. Falls φ_1' und φ_2' keine gebundenen Variablen enthalten, können wir $\varphi' = \varphi_1' * \varphi_2'$ setzen. Anderfalls muss φ_1' oder φ_2' (oder beide) einen Quantor enthalten. Wir nehmen an, dass φ_2' Quantoren enthält. Also gilt $\varphi_2' = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_kx_k\ \psi_2$ für $Q_1, Q_2, \dots Q_k \in \{\exists, \forall\}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$. Wir definieren $\bar{Q} = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_kx_k$, um die Lesbarkeit zu verbessern. Durch wiederholte Anwendung der Äquivalenzen von Aufgabe 1 erhalten wir $\varphi_1' * \bar{Q}\, \psi_2 \equiv \bar{Q}\, (\varphi_1' * \psi_2)$.

Falls φ_1' quantorenfrei ist, dann setzen wir $\varphi' := \bar{Q}\, (\varphi_1' * \psi_2)$ und es gilt $\varphi \equiv \varphi'$, und φ' ist in Pränexnormalform.

Ansonsten können wir alle Quantoren, wie für φ_2', an den Anfang der Formel schieben. Das Resultat wäre dann $\varphi' := \bar{Q}\bar{R}\, (\psi_2 * \psi_1)$, wobei $\varphi_1' = R_1y_1R_2y_2 \dots R_jy_j\, \psi_1$ für $R_1, R_2, \dots R_j \in \{\forall, \exists\}$ und $\bar{R} = R_1y_1R_2y_2 \dots R_jy_j$. Es gilt $\varphi' \equiv \varphi$ und φ' ist in Pränexnormalform.

Aufgabe 3

Karl Kühl glaubt endlich einen Weg gefunden zu haben alle Logikzwerge davon zu überzeugen, dass die Steine nur simpler Schnickschnack sind. Er glaubt eine Methode gefunden zu habe alle funkelnden Steine mit einer einzigen Formel einfangen zu können. Das sollte die Zwerge hoffentlich überzeugen, dass ihre Obsession unberechtigt war.

Doch war er schnell genug um die Zwerge wieder auf die wahren Geschehnisse im unendlichen Tunnel aufmerksam zu machen?

Definition 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *Funkelstein* ist ein Graph G mit $V(G) = \{k, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und $E(G) = \{\{v_i, k\} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein zweistelliges Relationsymbol ist.

(i) Geben Sie eine FO[σ] Formel φ_G an, sodass Mod(φ_G) die Menge aller ungerichteten, schleifenfreien Graphen ist.

(ii) Geben Sie eine FO[σ] Formel φ_S an, sodass Mod(φ_S) die Menge aller Funkelsteine ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Die Formel

$$\varphi \coloneqq \forall x \neg E(x,x) \wedge \forall x \forall y \ \ (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$$

wird genau von den ungerichteten, schleifenfreien Graphen erfüllt, denn die Kantenrelation ist nicht reflexiv, aber symmetrisch.

(ii) Die Formel

$$\psi \coloneqq \varphi \wedge \exists z \, (\forall b \forall b' (b \neq z \wedge b' \neq z \rightarrow E(z,b) \wedge \neg E(b,b')))$$

wird genau von den Funkelsteinen erfüllt, wobei φ die Formel von (i) ist: φ fordert, dass die Struktur ein ungerichteter, schleifenfreier Graph ist; des Weiteren gibt es einen Knoten z, der zu allen anderen Knoten verbunden ist und alle Knoten sind nur mit z verbunden.