12. Vorlesung: Normalverteilung und Grenzwertsätze

Nikolas Tapia Gauß (1809)

30. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

Normalverteilung

Definition 11.1

Eine Zufallsvariable X hat eine **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, falls die Dichte von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

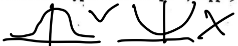
Aussage 11.1

Sei X eine Zufallsvariable mit Normalverteilung mit Parametern μ und σ. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathbb{V}[X] = \sigma^2.$$

Hinc itaque per eliminationem problematis solutio plene determinata deriuari poterit, quamprimum functionis φ' indoles innotuit. Quae quoniam a priori definiri nequit, rem ab altera parte aggredientes inquiremus, cuinam functioni, tacite quasi pro basi acceptae, proprie innixum sit principium triuium, cuius praestantia generaliter agnoscitur. Axiomatis scilicet loco haberi solet hypothesis, si quae quantitas per plures obseruationes immediatas, sub aequalibus circumstantiis aequalique cura institutas, determinata fuerit, medium arithmeticum inter omnes valores obseruatos exhibere valorem maxime probabilem, si non absoluto rigore, tamen proxime saltem, ita vt semper tutissimum sit illi inhaerere. Statuendo itaque $V = V' = V''$ etc. $= p$, generaliter esse debebit $\varphi'(M-p) + \varphi'(M'-p) + \varphi'(M''-p) +$ etc. $= 0$, si pro p substituitur valor $\frac{1}{\mu}(M + M' + M'' +$ etc.$)$, quemcunque integrum positiuum exprimat μ. Supponendo itaque $M' = M'' =$ etc. $= M - \mu N$, erit generaliter, i. e. pro quouis valore integro positiuo ipsius μ, $\varphi'(\mu - 1)N = (1-\mu)\varphi'(-N)$, vnde facile colligitur, generaliter esse debere $\frac{\varphi'\Delta}{\Delta}$ quantitatem constantem, quam per k designabimus. Hinc fit $\log\varphi\Delta = \frac{1}{2}k\Delta\Delta +$ Const., siue designando basin logarithmorum hyperbolicorum per e, supponendoque Const. $= \log x$,

$$\Delta\varphi = xe^{\frac{1}{2}k\Delta\Delta}$$ $xe^{\frac{1}{2}k\Delta^2}$



Porro facile perspicitur, k necessario negatiuam esse debere, quo Ω reuera fieri possit maximum, quamobrem statuemus $\frac{1}{2}k = -hh$; et quum per theorema elegans primo ab ill. Laplace inuentum, integrale $\int e^{-hh\Delta\Delta}d\Delta$, a $\Delta = -\infty$ vsque ad $\Delta = +\infty$, fiat $= \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, (denotando per π semicircumferentiam circuli cuius radius 1), functio nostra fiet

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-hh\Delta\Delta}$$

$h \sim \sigma$

$\Omega = \varphi(M-p)\varphi(M'-p) \times$
$\times \cdots \times \varphi(M'''-p)$ etc

Beweis

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y^2/2}\,dy}_{=0} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \mu$$

Aussage 11.2

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann ist

$$\frac{X-\mu}{\sigma^{\cancel{2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Standardnormalverteilung.

Aussage 11.3

Seien $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$Z = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Hinweis:

$$F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy$$

Beweis

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightsquigarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right) = \mathbb{P}(X \le \mu + \sigma x)$$

$$= F_X(\mu + \sigma x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt$$

$u = \frac{t-\mu}{\sigma}$

$du = \frac{dt}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\cancel{\sigma^2}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cancel{\sigma} \, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = F_Z(x), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Standard Normalverteilung

Definition 11.2

Eine Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ heißt **standarnormalverteilt**. Ihre Vertelungsfunktion ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t. = F_X(x)$$

Anmerkung 1

Für alle $x \geq 0$ gilt

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = 1/2$$

TABLE 5.1 AREA $\Phi(x)$ UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE TO THE LEFT OF x

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

$x = 2{,}10$ $2{,}11$ →

$$\mathbb{P}(X \le 2{,}25) = \phi(2{,}25) \approx 0{,}9875$$

$$\mathbb{P}(X \le -1{,}43) = \Phi(-1{,}43) = 1 - \Phi(1{,}43) \approx 0{,}0764.$$

$$\mathrm{Std}(X) = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Beispiel

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{P}(X \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma]) = \mathbb{P}(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma)$$

$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\longrightarrow = \mathbb{P}(-1 \le Z \le 1)$

$$= \Phi(1) - \underbrace{\Phi(-1)}_{} \leftarrow 1 - \Phi(1)$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$

$$\approx 2 \times 0.8413 - 1$$

aus der Tabelle

$$\approx 0{,}6827 \approx 2/3$$

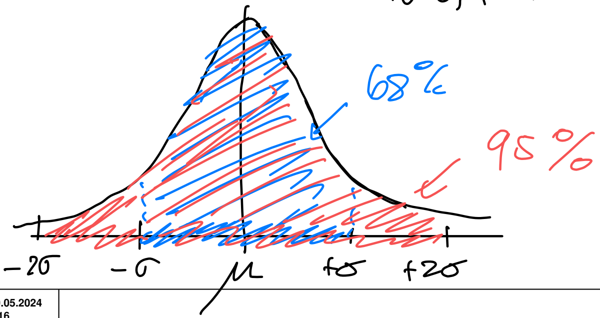
$Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$\mathbb{P}(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) = \mathbb{P}(-2 \le Z \le 2)$$

$$= 2\Phi(2) - 1$$

$$\approx 2 \times 0{,}9772 - 1$$

$$\approx 0{,}9545$$



$$\mathbb{P}(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma])$$

$$\approx 0{,}9973$$

Beispiel

Mehrdimensionale Verteilung

Definition 11.3

Seien $X_1, \dots, X_n$ mit $X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Die **gemeinsame Verteilungsfunktion** ist die Funktion $F_{X_1,\dots,X_n} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definiert durch

$$\mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\})$$

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ besitzen eine **gemeinsame Dichte** $f_{X_1,\dots,X_n}$, falls

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\dots,X_n}(t_1, \dots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

Dichte

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Randdichten

Aussage 11.4

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$. Dann ist die gemeinsame Dichte von $X_1, \dots, X_n$ gegeben durch

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

$$\Rightarrow F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \cdots f_{X_n}(t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1)\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n)\right)$$

$$= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Definition 11.4

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{X_1,\dots,X_n}$. Dann ist die **Randdichte** von X_i gegeben durch

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\, \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Entsprechend gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}(x_i)\, dx_i$$

Leibniz Gemeinschaft

Kovarianz

Definition 11.5

Die **Kovarianz** zwei Zufallsvariablen X und Y ist definiert durch

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) f_{X,Y}(x,y)$$

Definition 11.6

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte. Der Vektor $(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]) \in \mathbb{R}^n$ heißt **Erwartungswertvektor** und die Matrix

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) := \left(\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]\right)_{i,j=1}^{n} = \Big(\underbrace{\operatorname{Cov}(X_1, X_1)}_{= V(X_1)} \quad \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \dots \operatorname{Cov}($$

heißt **Kovarianzmatrix**.

Mehrdimensionale Normalverteilung

Definition 11.7

Sei $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^n$ hat eine **multivariate Normalverteilung** mit Parametern μ und Σ, falls die Dichte von X gegeben ist durch

$e^{-1/2\,(x-\mu)/2\sigma^2}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2}}$$

Aussage 11.5

Ist die Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^n$ mehrdimensional normalverteilt, so sind seine Komponenten $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn die Kovarianzmatrix Σ diagonal ist.

<u>Hinweis:</u> $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$

Satz der großen Zahlen

Theorem 1

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu,$$

in dem Sinne, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx n\,\mathbb{E}[X] \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathbb{E}[X]$$

Monte-Carlo-Verfahren

Beispiel

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

N = # Realisierung

$$\vec{U} = (U_1, \dots, U_N), \quad U_i \sim \mathrm{Unif}([a,b]), \quad f_{U_i}(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_N), \quad X_i := f(U_i), \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{I}{b-a}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Zentraler Grenzwertsatz

Theorem 2

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \le x\right) = \Phi(x),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \approx n\,\mathbb{E}[X]}_{\text{Satz der großen Zahlen}} + \underbrace{\sqrt{n} \times \sigma \times Z}_{\text{Zentraler Grenzwertsatz}}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$