Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 0

Themen: Lineare Transformationen, Basiswechsel

Ugo & Gabriel

25. Oktober 2022

Aufgabe 1: Lineare Transformationen

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit linearen Transformationen.

1. Was bedeutet es, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist?
2. Lineare Funktionen kann man bekanntlich als Matrix darstellen. Welche der folgenden Abbildungen sind linear und wie sieht die Matrix dazu aus?
   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (2x + 3y, x - y + 2z, 3z - 2y)^\mathsf{T}$
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) = (2x^2 + 4y, 3y - z)^\mathsf{T}$
   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $h(x, y) = (2x - y, x + y, y - x)^\mathsf{T}$
   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $k(x, y) = (x + 3, y - 2)^\mathsf{T}$
3. Welche der folgenden Arten von Transformationen sind im Allgemeinen linear?
   a) Streckungen
   b) Translationen
   c) Rotationen
4. Die Verknüpfung mehrerer linearer Transformationen ist ebenfalls eine lineare Transformation. Dies kann man dadurch begründen, dass, falls die Dimensionen der zugehörigen Matrizen passen, das Produkt der Transformationsmatrizen ebenfalls eine Matrix ist. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ drei lineare Transformationen. Wie sieht die Transformationsmatrix aus, falls
   a) man zuerst $\mathbf{A}$, dann $\mathbf{B}$ und letztendlich $\mathbf{C}$ ausführen will?
   b) man zuerst $\mathbf{C}$, dann $\mathbf{A}$ und letztendlich $\mathbf{B}$ ausführen will?
5. Wie kann man die Multiplikation von Matrix mit Vektor sowie Matrix mit Matrix veranschaulichen? Führen Sie hierzu folgende Rechnungen durch:
   a) $\mathbf{Av}$
   b) $\mathbf{AB}$

   mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Welche Laufzeit (ohne algorithmische Tricks) wird benötigt, um das Produkt $\mathbf{AB}$ zu berechnen?

7. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 100}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{100\times 4}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times 100}$ wollen wir das Produkt $\mathbf{ABC}$ berechnen. Welche der folgenden Reihenfolgen sollten wir zugunsten der Laufzeit präferieren?
   a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$
   b) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$
   c) Die Reihenfolge ist egal

8. Nun möchten wir uns angucken, was lineare Transformationen mit geometrischen Objekten machen. Wir betrachten nicht jeden Punkt einzeln, sondern eine Menge von Punkten auf einmal. Gegeben sind die folgenden Matrizen:
   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
   c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}$

   Wir schauen uns dies exemplarisch für zwei geometrische Objekte an: Den uns wohlbekannten Einheitskreis sowie ein Quadrat, welches dem Einheitskreis bezüglich der ∞-Norm entspricht.

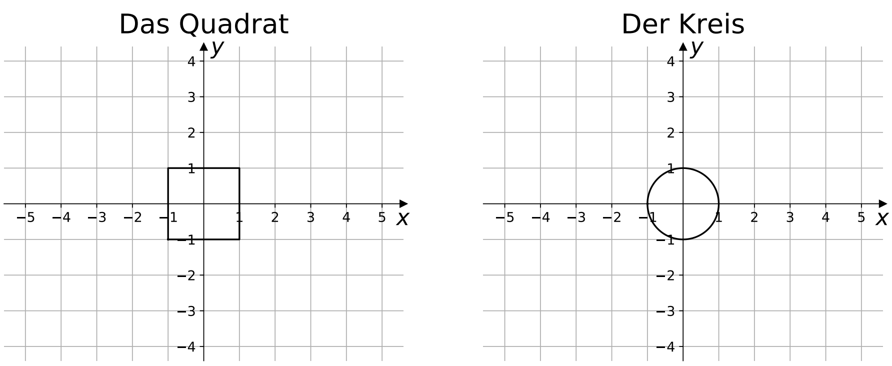

Abbildung 1: Die geometrischen Objekte

a) Welche Transformation des Quadrats gehört zu welcher Matrix?

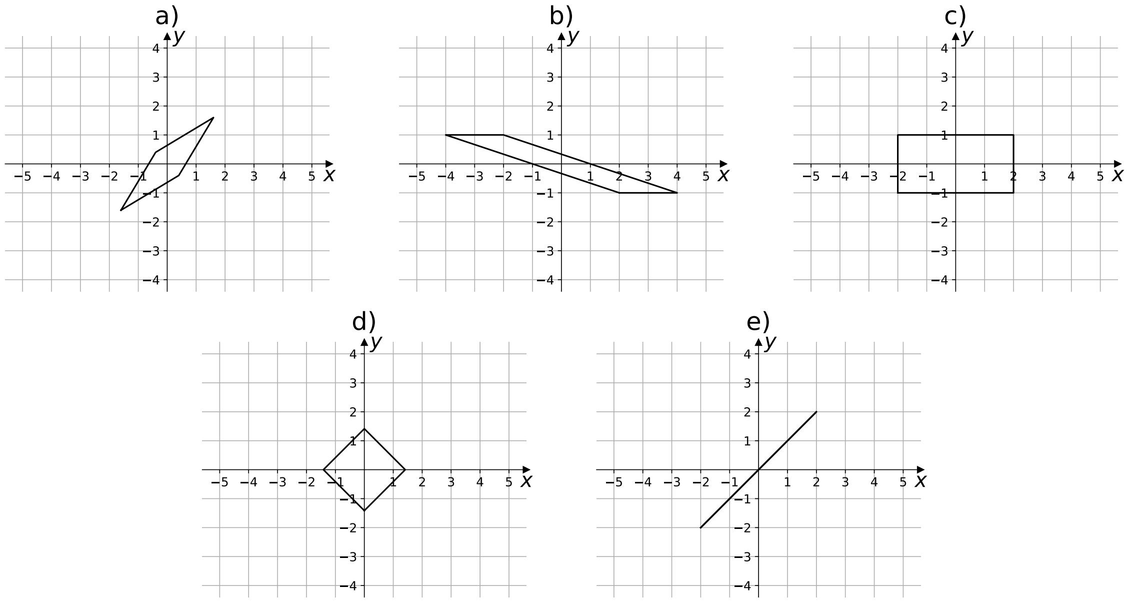

Abbildung 2: Transformationen des Quadrats

b) Welche Transformation des Einheitskreises bzgl. der 2-Norm gehört zu welcher Matrix?

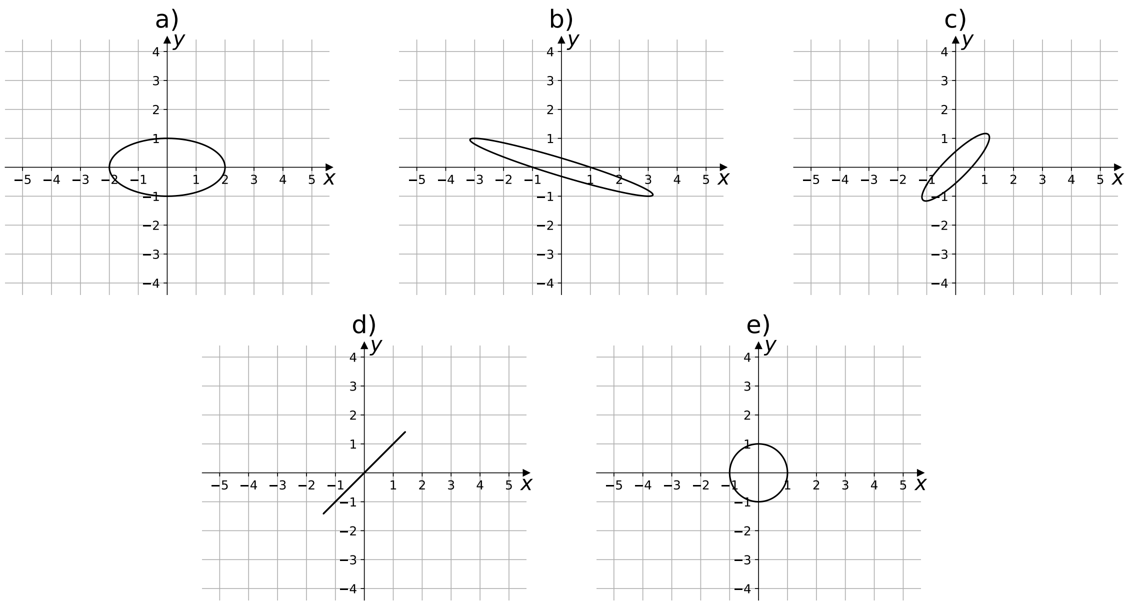

Abbildung 3: Transformationen des Kreises

c) Bonusfrage: Um welche Art von Abbildungen handelt es sich bei den Matrizen $\mathbf{A}$ bis $\mathbf{E}$?

d) Bonusfrage: Was kann man ahnand der Bilder in a) und b) über die Determinante der Transformationsmatrix sagen?

   i. Welche geometrische Bedeutung hat die Determinante?

   ii. Welche Matrix hat eine Determinante mit einem Betrag größer als Eins, kleiner als Eins bzw. gleich Eins?

   iii. Welche Matrix hat eine positive und welche eine negative Determinante?

Aufgabe 2: Basiswechsel

In dieser Aufgabe möchten wir das Thema Basiswechsel anhand von Autos veranschaulichen. Wir nehmen vereinfachend[1] an, dass die Menge aller Autos ein vierdimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen ist. Dazu schauen wir den Steckbrief zweier Autos an:

Auto A:	Auto B:
• Gewicht: 2 Tonnen	• Gewicht: 2000 kg
• Höhe: 1,5 m	• Höhe: 150 cm
• 4 Räder	• Zwei vom Motor betriebene Achsen
• Allrad-Antrieb	• Keine nicht vom Motor betriebene Achse

1. Was ist eine Basis?
2. Welche der folgenden Tupel stellen für welchen Raum eine Basis dar?
   a) $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$
   b) $(1, \sin^2(x), \exp(x), \cos^2(x))$
   c) $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&3\\5&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\-2&0\end{bmatrix}\right)$
   d) $(x, x^2, 1)$
3. Worin unterscheiden sich die zwei beschriebenen Autos A und B?
4. Aus den Beschreibungen der Autos kann man zwei verschiedene Basen herleiten. Welche wären das? Wie sieht die Darstellung der Autos (als Vektor) bezüglich diesen Basen aus?
5. Gegeben ein 1,7 Tonnen schweres Auto mit 1,6 m Höhe mit 4 Rädern und einer Achse (à 2 Rädern), welche vom Motor betrieben wird. Wie sieht die Representation dieses Autos in den jeweiligen Basen aus?
6. Die Representationen lassen sich ineinadner überführen. Beschreiben Sie die Abbildung von der einen Basis in die andere sowie die Rücktransformation mithilfe einer Matrix.
7. Gegeben zwei beliebige Basen A, B des $\mathbb{R}^n$, wie sieht die Transformationsmatrix
   a) von A in die Standardbasis,
   b) von der Standardbasis nach A,
   c) von A nach B und
   d) von B nach A aus?

[1] Autos haben deutlich mehr als vier Parameter und natürlich beschreibt nicht jeder vierelementige Vektor ein physikalisch mögliches Auto.