Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

Wissenschaftliches Rechnen - Übung 6.2

Optimierung

05.02.2024 bis 09.02.2024

Aufgabe 1: Iterative Optimierung

1. Wie lautet der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens zum Finden von Optima einer mehrdimensionalen skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

2. Erklären Sie, warum der Iterationsschritt aus numerischen Gründen ungeeignet ist. Schreiben Sie den Iterationsschritt um, sodass dieser numerisch stabiler wird.

3. Welche geometrische Bedeutung hat ein Iterationsschritt des Newton-Verfahrens?

4. Wie wirkt sich die Definitheit der Hesse-Matrix auf den Iterationsschritt des Verfahrens aus?

5. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = -3x^2 + 2xy + y^2 + 3x - y + 1$. Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt). Wie viele Iterationsschritte benötigt das Newton-Verfahren mit Startpunkt $(13, 3)^\mathsf{T}$, um zu einem kritischen Punkt zu konvergieren?

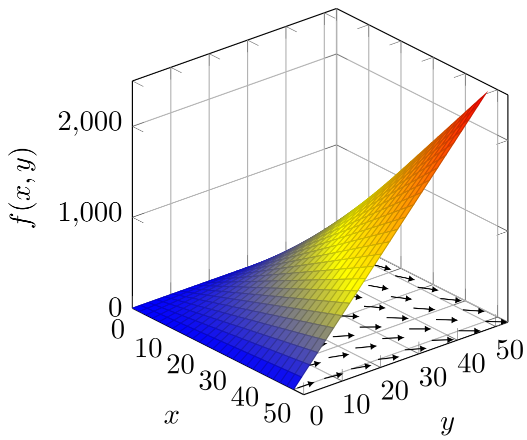
6. Wie lautet der Iterationsschritt des Gradientenabstiegsverfahrens (Gradient Descent)? Worin unterscheidet es sich vom Newton-Verfahren? Welche wichtige Funktion erfüllt die Schrittweite?

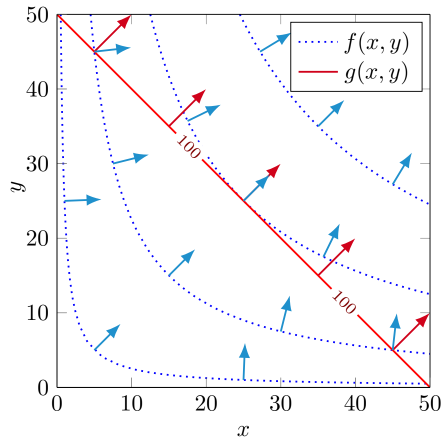
Aufgabe 2: Optimierung mit Nebenbedingungen

1. Bauer Herrmann hat einen 100 m langen Metalldraht, welchen er zu einem rechteckigen Zaun, mit Seitenlängen x und y, spannen möchte. Da er ein BIO-Bauer ist, möchte er seinen 300 Rindern den größtmöglichen Platz zur Verfügung stellen, sodass der Flächeninhalt des Zauns maximiert werden soll. Das kann man als folgendes Optimierungsproblem schreiben:

$$\max_{x,y} \quad xy \quad \text{s.t.} \quad 2x + 2y = 100.$$

Die Funktion $f(x, y) = xy$ beschreibt die Fläche und die Funktion $g(x, y) = 2x + 2x$ beschreibt den Umfang des rechteckigen Stallzauns. Da wir negative Seitenlängen ausschließen, also $x, y \geq 0$ annehmen, lässt sich das Optimierungsproblem wie folgt visualisieren.





a) Lösen Sie das Problem ohne die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren. Stellen Sie dafür die Nebenbedingung nach y um und setzen Sie das in die Zielfunktion ein.

b) Lösen Sie das Problem mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren. Stellen Sie dazu eine mögliche Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ auf und leiten Sie die notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt unter der Nebenbedingung her. Berechnen Sie dann ihre kritischen Punkte. Wodurch kann man den gesuchten Punkt in der Visualisierung erkennen?

2. Gegeben ist die Gerade g in Parameterform

$$g(t) = \mathbf{c} + t\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

welche als Schnitt von zwei Ebenen $y = 1$ und $x - z = 0$ dargestellt werden kann.

a) Bestimmen Sie den Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3$ auf der Geraden g, der am nächsten zum Punkt $(-1, -1, -1)^\mathsf{T}$ ist, mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

b) Nennen Sie einen alternativen Lösungsansatz, um das Problem zu lösen.