

Gliederung

1. Einführung
2. Berechenbarkeitsbegriff
3. LOOP-, WHILE-, und GOTO-Berechenbarkeit
4. Primitive und partielle Rekursion
5. Grenzen der LOOP-Berechenbarkeit
- 6. (Un-)Entscheidbarkeit, Halteproblem**
7. Aufzählbarkeit & (Semi-)Entscheidbarkeit
8. Reduzierbarkeit
9. Das Postsche Korrespondenzproblem
10. Komplexität – Einführung
11. NP-Vollständigkeit
12. PSPACE

Kodierung von Turing-Maschinen

Kodierung von Turing-Maschinen als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n = z_e\} \quad \Sigma = \{0, 1\} \quad \Gamma = \{a_0 = \square, a_1, \dots, a_k\}$$

beschreibe jede Transition $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ als Wort über $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{i,j,i',j',y} := \#\#\text{BIN}(i)\#\text{BIN}(j)\#\text{BIN}(i')\#\text{BIN}(j')\#\text{BIN}(m) \text{ mit } m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N. \end{cases}$$

\leadsto beschreibe M als beliebige Konkatenation aller ihrer “Übergangswörter” $w_{i,j,i',j',y}$.

Kodierung von $\{0, 1, \#\}$ mit $\{0, 1\}$ (zum Beispiel durch $0 \rightarrow 00$, $1 \rightarrow 01$, $\# \rightarrow 11$).

\leadsto Kodierung von M ist $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

\leadsto Kodierung umkehrbar aber nicht alle Wörter über $\{0, 1\}^*$ kodieren eine Turing-Maschine.

$$M_w := \begin{cases} M & \text{falls } w = \langle M \rangle \\ M_\Omega & \text{sonst} \end{cases}$$

$w \in \{0, 1\}^*$ keine valide Kodierung
 \leadsto feste Maschine M_Ω , die die nirgends definierte Funktion berechnet

Spezielles Halteproblem

Definition

Das **spezielle Halteproblem** ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ h\"alt auf Eingabe } w\},$$

Theorem

Das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ h\"alt auf Eingabe } w\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch)

Annahme: K entscheidbar \leadsto charakteristische Funktion χ_K berechenbar durch TM M .

Erweitere M zu M' , sodass M' genau dann h\"alt, wenn M eine 0 ausgibt.

Sei $w' := \langle M' \rangle$, d.h. $M' = M_{w'}$.

$\leadsto M'$ h\"alt bei Eingabe w'

$\Leftrightarrow M$ gibt bei Eingabe w' eine 0 aus

$\Leftrightarrow \chi_K(w') = 0$

$\Leftrightarrow w' \notin K$

$\Leftrightarrow M'$ h\"alt nicht bei Eingabe $\langle M' \rangle = w'$. \nleftrightarrow