



## Woche 14: Der Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik

Nov.	17	18	19	20	21	22	23	Einführung
	24	25	26	27	28	29	30	Aussagenlogik
	31	1	2	3	4	5	6	Normalformen
		7	8	9	10	11	12	Resolution
Dez.	14	15	16	17	18	19	20	Kompaktheit
	21	22	23	24	25	26	27	DPLL, Satz von Cook
								Strukturen und FO
		5	6	7	8	9	10	Prädikatenlogik
Jan.	12	13	14	15	16	17	18	Komplexität von FO
	19	20	21	22	23	24	25	Weihnachten
	26	27	28	29	30	31	1	Neujahr
		2	3	4	5	6	7	Normalformen
		9	10	11	12	13	14	Definierbarkeit
		16	17	18	19	20	21	EF-Spiele
Feb.	23	24	25	26	27	28	29	EF-Spiele
	30	31	1	2	3	4	5	Sequenzenkalkül AL
		6	7	8	9	10	11	Sequenzenkalkül FO
		13	14	15	16	17	18	Ausblick

## 14.1 Der Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik

## *Erweiterung des Sequenzenkalküls auf FO*

Wir erweitern den Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik.

Dazu können wir alle bisherigen Regeln und Definitionen direkt übernehmen.

Wir brauchen nur noch Regeln für die Quantoren.

Dies erfordert allerdings etwas Vorarbeit.

## *Erweiterung des Sequenzenkalküls auf FO*

Wir erweitern den Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik.

Dazu können wir alle bisherigen Regeln und Definitionen direkt übernehmen.

Wir brauchen nur noch Regeln für die Quantoren.

Dies erfordert allerdings etwas Vorarbeit.

Wir haben gesehen, dass bei Substitutionen die Kombination von freien und gebundenen Variablen Probleme bereiten kann.

Um ähnliche Probleme im Sequenzenkalkül zu vermeiden, werden wir freie Variablen durch Konstantensymbole substituieren und somit nur mit Sätzen arbeiten.

## Elimination von Variablen

**Lemma.** Sei  $\sigma$  eine Signatur.

Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  eine Formel mit  $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Seien  $c_1, \dots, c_k$  Konstantensymbole mit  $c_i \notin \sigma$  für alle  $1 \leq i \leq k$ .

$\varphi$  ist erfüllbar gdw.  $\varphi[x_1/c_1, \dots, x_k/c_k]$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\varphi$  erfüllbar ist, dann gibt es

- eine  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$  und
- eine Belegung  $\beta$  mit  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \text{def}(\beta)$ ,

so dass  $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ .

## Elimination von Variablen

**Lemma.** Sei  $\sigma$  eine Signatur.

Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  eine Formel mit  $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Seien  $c_1, \dots, c_k$  Konstantensymbole mit  $c_i \notin \sigma$  für alle  $1 \leq i \leq k$ .

$\varphi$  ist erfüllbar gdw.  $\varphi[x_1/c_1, \dots, x_k/c_k]$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\varphi$  erfüllbar ist, dann gibt es

- eine  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$  und
- eine Belegung  $\beta$  mit  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \text{def}(\beta)$ ,

so dass  $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ .

Aber dann erfüllt die  $\sigma \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ -Struktur  $\mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}|_\sigma = \mathcal{A}$  und  $c_i^{\mathcal{B}} := \beta(x_i)$  die Formel  $\varphi[x_1/c_1, \dots, x_k/c_k]$ .

## Elimination von Variablen

**Lemma.** Sei  $\sigma$  eine Signatur.

Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  eine Formel mit  $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Seien  $c_1, \dots, c_k$  Konstantensymbole mit  $c_i \notin \sigma$  für alle  $1 \leq i \leq k$ .

$\varphi$  ist erfüllbar gdw.  $\varphi[x_1/c_1, \dots, x_k/c_k]$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\varphi$  erfüllbar ist, dann gibt es

- eine  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$  und
- eine Belegung  $\beta$  mit  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \text{def}(\beta)$ ,

so dass  $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ .

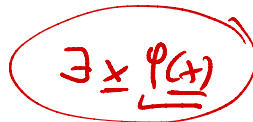
Aber dann erfüllt die  $\sigma \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ -Struktur  $\mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}|_\sigma = \mathcal{A}$  und  $c_i^{\mathcal{B}} := \beta(x_i)$  die Formel  $\varphi[x_1/c_1, \dots, x_k/c_k]$ .

Die Umkehrung ist analog.

## Elimination von Variablen

Das Lemma zeigt, dass Erfüllbarkeit, Gültigkeit, ... von Formeln auf entsprechende Aussagen über Sätzen reduziert werden können.

**Notation.** In der Formulierung des Sequenzenkalküls werden wir ausschließlich mit Sätzen arbeiten.



Das heißt, wann immer wir  $\Phi, \Delta, \varphi, \psi, \dots$  schreiben, meinen wir Sätze bzw. Mengen von Sätzen.

**Ausname.** Wenn wir  $\varphi(x)$  oder  $\psi(x)$  schreiben, dann soll das bedeuten, dass die Formeln eine freie Variable  $x$  haben.

**Hinweis.** Für den Rest des Abschnitts fixieren wir eine Signatur  $\sigma$  und eine abzählbar unendliche Menge  $c_0, c_1, \dots$  von Konstantensymbolen  $c_i \notin \sigma$ , für alle  $i \geq 0$ .

Das heißt, formal arbeiten wir in der Signatur  $\tau := \sigma \cup \{c_0, c_1, \dots\}$ .



# Sequenzen

## Definition.

1. Eine **Sequenz** ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

für Multimengen  $\Phi, \Delta \subseteq \text{FO}$ .

Wir nennen  $\Phi$  die **Voraussetzungen** und  $\Delta$  die **Konklusionen**.

## Sequenzen.

$$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$$

$$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x, y)), \neg E(s, t)\} \Rightarrow \{s = t\}$$

# Sequenzen

## Definition.

1. Eine **Sequenz** ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

für Multimengen  $\Phi, \Delta \subseteq \text{FO}$ .

Wir nennen  $\Phi$  die **Voraussetzungen** und  $\Delta$  die **Konklusionen**.

2. Eine Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$  ist **gültig**, wenn jede  $\sigma$ -Interpretation  $\mathcal{I}$ , die alle Formeln in  $\Phi$  erfüllt, mindestens eine Formel in  $\Delta$  erfüllt.

## Sequenzen.

$$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$$

$$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x, y)), \neg E(s, t)\} \Rightarrow \{s = t\}$$

## Gültige Sequenzen.

$$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x, y)), \neg E(s, t)\} \Rightarrow \{s = t\}$$

$$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$$

$$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists y R(y)\}$$

# Sequenzen

## Definition.

1. Eine **Sequenz** ist eine Aussage der Form

$$\Phi \Rightarrow \Delta$$

für Multimengen  $\Phi, \Delta \subseteq \text{FO}$ .

Wir nennen  $\Phi$  die **Voraussetzungen** und  $\Delta$  die **Konklusionen**.

2. Eine Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$  ist **gültig**, wenn jede  $\sigma$ -Interpretation  $\mathcal{I}$ , die alle Formeln in  $\Phi$  erfüllt, mindestens eine Formel in  $\Delta$  erfüllt.
3. Ist  $\Phi \Rightarrow \Delta$  nicht gültig, dann gibt es eine  $\sigma$ -Interpretation  $\mathcal{I}$ , die alle  $\varphi \in \Phi$  erfüllt, aber kein  $\delta \in \Delta$ .

Wir sagen:  $\mathcal{I}$  **falsifiziert die Sequenz**.

## Sequenzen.

$$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$$

$$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x, y)), \neg E(s, t)\} \Rightarrow \{s = t\}$$

## Gültige Sequenzen.

$$\{\forall x \forall y (x = y \vee E(x, y)), \neg E(s, t)\} \Rightarrow \{s = t\}$$

$$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$$

$$\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists y R(y)\}$$

## Nicht gültige Sequenzen.

$$\{\forall x R(x)\} \Rightarrow \{\exists y Q(y)\}$$

# Axiome und Regeln

**Definition.** Ein **Axiom** des Sequenzenkalküls ist eine Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$ ,  
so dass  $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$ .

**Beispiel für ein Axiom.**  
 $\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$

# Axiome und Regeln

**Definition.** Ein **Axiom** des Sequenzenkalküls ist eine Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$ , so dass  $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$ .

**Beispiel für ein Axiom.**  
 $\{\exists x R(x), \forall y Q(y)\} \Rightarrow \{\exists x R(x)\}$

**Die Regeln des Sequenzenkalküls.** Die Regeln des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik bestehen aus

- den Regeln des aussagenlogischen Kalküls erweitert um
- die **Gleichheitsregel**,
- die **Substitutionsregel** und
- die **Quantorenregeln**.

# Die Regeln für Gleichheit und Substitution

Die Regel für Gleichheit.

$$(==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

Die Regeln der Substitution.

$$(S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$t \doteq t'$ : steht für  $t = t'$  oder  $t' = t$ .

$t, t'$ : Terme ohne freie Variablen

$\psi(x)$ : Formel mit  $\text{frei}(\psi) = \{x\}$ .

**Beispiel.** Sei  $\sigma := \{R, f, c\}$ , wobei  $R$  ein Relationssymbol,  $f$  ein Funktionssymbol und  $c$  ein Konstantensymbol ist.

$$(\Rightarrow S) \frac{\frac{Rfc \Rightarrow Rfc}{Rfc, tc = c \Rightarrow Rffc}}{\text{---}}$$

(setze  $\psi(x) := Rfx$  und wende  $(\Rightarrow S)$  an)

$$t := c$$

$$\psi(x) = Rfx$$

$$\psi(t) = Rfc$$

$$t' = fc$$

$$\psi(t') = Rffc$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y \exists x Rxy$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}{\text{}} \quad \underbrace{\exists x \exists y R(x, y)}_{\psi(c)}$$



# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{c} (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists y R(c, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \end{array}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{l}
 (\Rightarrow \exists) \frac{R(c, d) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}{\exists y R(c, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\exists y R(c, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}{\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}
 \end{array}$$

*Handwritten red annotations: A squiggle under the first fraction and the text "404" above it.*

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{l} (\Rightarrow \exists) \frac{}{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)} \\ (\Rightarrow \exists) \frac{}{R(c, d) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists y R(c, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \end{array}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Existenzquantor.

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Phi, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad t \text{ Term}$$

Beispiel. Das folgende ist ein Beweis für  $\exists x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x,y)$

$$\begin{array}{l}
 (\Rightarrow \exists) \frac{R(c, d) \Rightarrow R(c, d)}{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)}{R(c, d) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\exists y R(c, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}{\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x R(x, y)}
 \end{array}$$

Handwritten red annotations: A large checkmark and a red arrow pointing to the final line. To the right, a red line with the text  $\exists x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)$  is written.

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{(\exists \Rightarrow) \overline{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}}{\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{l} (\forall \Rightarrow) \frac{}{\forall y R(c, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)} \\ (\Rightarrow \forall) \frac{}{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)} \end{array}$$



# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{l}
 (\Rightarrow \exists) \frac{}{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)}{\forall y R(c, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\forall y R(c, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)}{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}{\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}
 \end{array}$$

# Die Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Phi, \Delta$  und  $\psi(x)$  vorkommt

**Beispiel.** Das folgende ist ein Beweis für  $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$

$$\begin{array}{l} (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{R(c, d) \Rightarrow R(c, d)}}{\overline{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)}} \\ (\forall \Rightarrow) \frac{\overline{R(c, d) \Rightarrow \exists x R(x, d)}}{\overline{\forall y R(c, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)}} \\ (\Rightarrow \forall) \frac{\overline{\forall y R(c, y) \Rightarrow \exists x R(x, d)}}{\overline{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{\overline{\forall y R(c, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}}{\overline{\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)}} \end{array}$$

# Die Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n. i. } \Phi, \Delta, \psi$$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n. i. } \Phi, \Delta, \psi$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$$(\Rightarrow =) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

## 14.2 Beispiele für Sequenzenkalkülbeweise

# Erinnerung: Einige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x, y \in \text{Var}$ .

1.  $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi, \quad \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$

2. Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann

$$\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x (\varphi \vee \psi), \quad \varphi \wedge \forall x \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

$$\varphi \wedge \exists x \psi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi), \quad \varphi \vee \forall x \psi \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$$

3. Wenn  $y$  nicht in  $\varphi$  vorkommt, dann gilt

$$\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi[x/y], \quad \forall x \varphi \equiv \forall y \varphi[x/y]$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi, \quad \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.

$$(\neg \Rightarrow) \frac{}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (=\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi, \quad \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.

$$\begin{array}{l} (\Rightarrow \forall) \frac{}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) \frac{}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{array}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l} \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{(\neg \Rightarrow) \frac{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}} \\ (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi}{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (=\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \exists) & \frac{}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \end{aligned}$$



# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \neg) & \frac{}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} (\neg \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ (\wedge \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \wedge) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ (\vee \Rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \vee) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (=\Rightarrow) & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow S) & \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

**Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.**

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \neg) & \frac{\overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \end{aligned}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

**Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.**

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \neg) & \frac{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\exists \Rightarrow) & \frac{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi} \end{aligned}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \wedge) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \vee) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (==\Rightarrow) & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t)} \\ (\Rightarrow S) & \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)} \end{aligned}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

**Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.**

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \neg) & \frac{\overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall \Rightarrow) & \frac{\overline{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow}}{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi} \end{aligned}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\wedge \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \wedge) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ (\vee \Rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \vee) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (==\Rightarrow) & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow S) & \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)} \end{aligned}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

**Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.**

$$\begin{aligned} (\Rightarrow \neg) & \frac{\overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\neg \Rightarrow) & \frac{\overline{\neg \varphi(c), \varphi(c) \Rightarrow}}{\neg \varphi(c), \varphi(c) \Rightarrow} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi} \end{aligned}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\neg \Rightarrow) & \frac{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\wedge \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ (\Rightarrow \wedge) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\vee \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\Rightarrow \vee) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\Rightarrow \rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ (==\Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \\ (\Rightarrow S) & \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \end{aligned}$$

# Sequenzenkalkülbeweis von Teil 1 des Lemmas

**Lemma.** Sei  $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$  und  $x \in \text{Var}$ .

$$1. \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

**Beweis mit Hilfe des Sequenzenkalküls.**

$$\begin{array}{l} (\Rightarrow \neg) \frac{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}{\neg \varphi(c), \varphi(c)} \\ (\Rightarrow \exists) \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi} \\ (\Rightarrow \forall) \frac{\Rightarrow \neg \varphi(c), \exists x \varphi}{\Rightarrow \forall x \neg \varphi, \exists x \varphi} \\ (\neg \Rightarrow) \frac{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi}{\neg \exists x \varphi \Rightarrow \forall x \neg \varphi} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\neg \Rightarrow) \frac{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}{\neg \varphi(c), \varphi(c) \Rightarrow} \\ (\forall \Rightarrow) \frac{\neg \varphi(c), \varphi(c) \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow} \\ (\exists \Rightarrow) \frac{\forall x \neg \varphi, \varphi(c) \Rightarrow}{\forall x \neg \varphi, \exists x \varphi \Rightarrow} \\ (\Rightarrow \neg) \frac{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi}{\forall x \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists x \varphi} \end{array}$$

## SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l} \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{(\neg \Rightarrow) \Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{(\Rightarrow \neg) \Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{(\wedge \Rightarrow) \Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{(\Rightarrow \wedge) \Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{(\vee \Rightarrow) \Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{(\Rightarrow \vee) \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{(\rightarrow \Rightarrow) \Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{(\Rightarrow \rightarrow) \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{(\exists \Rightarrow) \Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{(\Rightarrow \exists) \Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{(\forall \Rightarrow) \Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{(\Rightarrow \forall) \Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{(S \Rightarrow) \Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$(\vee \Rightarrow) \frac{}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad c \text{ n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad c \text{ n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\frac{(\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x)} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{aligned} (\neg \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \neg) & \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\ (\wedge \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \wedge) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\ (\vee \Rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \vee) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\ (\rightarrow \Rightarrow) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \rightarrow) & \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\ (\exists \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad c \text{ n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (\Rightarrow \exists) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\ (\forall \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow \forall) & \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad c \text{ n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\ (==\Rightarrow) & \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\ (S \Rightarrow) & \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\ (\Rightarrow S) & \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, \psi(t') \Rightarrow \Delta} \end{aligned}$$



## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{\overline{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{\overline{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow =) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\exists \Rightarrow) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}}{\exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

Der Sequenzenkalkülbeweis von  $\exists x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi \vee \exists x \psi(x)$  ist ähnlich.

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$

## Beweis des Lemmas Teil 2

**Lemma.** Wenn  $x \notin \text{frei}(\varphi)$  dann  $\varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ .

**Beweis.** Sequenzenkalkülbeweis von  $\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))$ .

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \quad (\Rightarrow \vee) \frac{\overline{\psi(c) \Rightarrow \varphi, \psi(c)}}{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \quad (\Rightarrow \exists) \frac{\psi(c) \Rightarrow \varphi \vee \psi(c)}{\psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\varphi \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \quad \psi(c) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}{\varphi \vee \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

Der Sequenzenkalkülbeweis von  $\exists x(\varphi \vee \psi(x)) \Rightarrow \varphi \vee \exists x \psi(x)$  ist ähnlich.

**Anmerkung.** Die Annahme, dass  $x$  nicht in  $\varphi$  vorkommt, wird im linken Zweig benutzt, da wir sonst folgenden nicht-Beweis erhielten.

$$\begin{array}{c}
 (\Rightarrow \vee) \frac{\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c), \psi(c)}{\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c) \vee \psi(c)} \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c) \vee \psi(c)}{\varphi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}
 \end{array}$$

### SK-Regeln FO.

$$\begin{array}{l}
 (\neg \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg \psi} \\
 (\wedge \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi} \\
 (\vee \Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \\
 (\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \\
 (\exists \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (\Rightarrow \exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \text{ c n.i. } \Phi, \Delta, \psi(x) \\
 (==\Rightarrow) \frac{\Phi, t = t' \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta} \\
 (S \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \\
 (\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}
 \end{array}$$



## 14.3 Korrektheit und Vollständigkeit

## Korrektheit der Regeln

Wir definieren die Korrektheit der prädikatenlogischen Regeln genauso wie für die Aussagenlogik.

**Definition.** Eine Regel

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi' \Rightarrow \Delta'}$$

ist **korrekt**, wenn aus der Gültigkeit von  $\Phi \Rightarrow \Delta$  die Gültigkeit von  $\Phi' \Rightarrow \Delta'$  folgt.

# Korrektheit der Quantorenregeln

Die Regeln für den Allquantor.

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

wenn  $c$  nicht in  $\Gamma, \Delta$  and  $\psi(x)$  vorkommt

**Lemma.** Die Regeln für den Allquantor sind korrekt.

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

Behauptung. Die  $(\forall \Rightarrow)$  Regel ist korrekt.

Beweis.

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\sigma$ -Interpretation, so dass  $\mathcal{I} \models \Phi$  und  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{I} \models \delta$  für ein  $\delta \in \Delta$ .

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

Behauptung. Die  $(\forall \Rightarrow)$  Regel ist korrekt.

Beweis.

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\sigma$ -Interpretation, so dass  $\mathcal{I} \models \Phi$  und  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{I} \models \delta$  für ein  $\delta \in \Delta$ .

Sei  $a := \llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}}$ . Da  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ , gilt insbesondere  $\mathcal{I} \models \psi[a]$ .

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

Behauptung. Die  $(\forall \Rightarrow)$  Regel ist korrekt.

Beweis.

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\sigma$ -Interpretation, so dass  $\mathcal{I} \models \Phi$  und  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{I} \models \delta$  für ein  $\delta \in \Delta$ .

Sei  $a := \llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}}$ . Da  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ , gilt insbesondere  $\mathcal{I} \models \psi[a]$ .

Es folgt, dass  $\mathcal{I} \models \psi(t)$  und, da nach Voraussetzung „ $\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta$ “ gültig ist, gibt es ein  $\delta \in \Delta$  mit  $\mathcal{I} \models \delta$ .  $\square$

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

Behauptung. Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .



## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

1. Wenn  $\mathcal{I} \models \delta$ , für ein  $\delta \in \Delta$ , dann sind wir fertig.

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

1. Wenn  $\mathcal{I} \models \delta$ , für ein  $\delta \in \Delta$ , dann sind wir fertig.
2. Anderenfalls, gilt  $\mathcal{I} \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Z.z.  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

1. Wenn  $\mathcal{I} \models \delta$ , für ein  $\delta \in \Delta$ , dann sind wir fertig.
2. Anderenfalls, gilt  $\mathcal{I} \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Z.z.  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$

Für  $a \in A$  sei  $\mathcal{I}_a$  die  $\tau \cup \{c\}$ -Expansion von  $\mathcal{I}$  mit  $c^{\mathcal{I}_a} := a$ .

**Beispiel.**

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ . mit  
 $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}})$   
 $\beta(x) := 3$

Für  $a = 5$  ist dann  
 $\mathcal{I}_5 := ((\mathbb{N}, +^{\mathcal{I}_5}), \beta)$   
 mit  
 $+^{\mathcal{I}_5} := +^{\mathcal{A}}$  und  
 $c^{\mathcal{I}_5} = 5$

## Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

1. Wenn  $\mathcal{I} \models \delta$ , für ein  $\delta \in \Delta$ , dann sind wir fertig.
2. Anderenfalls, gilt  $\mathcal{I} \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Z.z.  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$

Für  $a \in A$  sei  $\mathcal{I}_a$  die  $\tau \cup \{c\}$ -Expansion von  $\mathcal{I}$  mit  $c^{\mathcal{I}_a} := a$ .

Da  $c$  nur in  $\psi$  vorkommt, folgt aus dem Koinzidenzlemma, dass  $\mathcal{I}_a \models \Phi$  aber  $\mathcal{I}_a \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Also gilt  $\mathcal{I}_a \models \psi(c)$ .

**Beispiel.**

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ . mit  
 $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}})$   
 $\beta(x) := 3$

Für  $a = 5$  ist dann  
 $\mathcal{I}_5 := ((\mathbb{N}, +^{\mathcal{I}_5}), \beta)$   
 mit  
 $+^{\mathcal{I}_5} := +^{\mathcal{A}}$  und  
 $c^{\mathcal{I}_5} = 5$

# Korrektheit der $(\Rightarrow \forall)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \\ \text{vorkommt}$$

**Behauptung.** Die  $(\Rightarrow \forall)$  Regel ist korrekt.

**Beweis.** Sei  $\tau$  die Signatur, die alle (Funktions-, Relations- und Konstanten-) Symbole enthält, die in  $\Phi, \Delta, \psi(x)$  vorkommen, außer  $c$ .

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$  eine  $\tau$ -Interpretation mit  $\mathcal{I} \models \Phi$ .

1. Wenn  $\mathcal{I} \models \delta$ , für ein  $\delta \in \Delta$ , dann sind wir fertig.
2. Anderenfalls, gilt  $\mathcal{I} \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Z.z.  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$

Für  $a \in A$  sei  $\mathcal{I}_a$  die  $\tau \cup \{c\}$ -Expansion von  $\mathcal{I}$  mit  $c^{\mathcal{I}_a} := a$ .

Da  $c$  nur in  $\psi$  vorkommt, folgt aus dem Koinzidenzlemma, dass  $\mathcal{I}_a \models \Phi$  aber  $\mathcal{I}_a \not\models \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Also gilt  $\mathcal{I}_a \models \psi(c)$ .

Es folgt, dass  $\mathcal{I}_a \models \psi(c)$  für alle  $a \in A$  und somit  $\mathcal{I} \models \forall x \psi(x)$ .  $\square$

## Beispiel.

Sei  $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ . mit  
 $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}})$   
 $\beta(x) := 3$

Für  $a = 5$  ist dann  
 $\mathcal{I}_5 := ((\mathbb{N}, +^{\mathcal{I}_5}), \beta)$ ,  
 mit  
 $+^{\mathcal{I}_5} := +^{\mathcal{A}}$  und  
 $c^{\mathcal{I}_5} = 5$

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

Die Voraussetzung “ $c$  kommt nicht in  $\Gamma, \Delta$  und  $\psi(x)$  vor” ist notwendig.

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

Die Voraussetzung “ $c$  kommt nicht in  $\Gamma, \Delta$  und  $\psi(x)$  vor” ist notwendig.

Beispiel.

Sei  $\Delta := \emptyset$  und  $\Phi := R(c)$  und  $\psi(x) := R(x)$ .



## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

Die Voraussetzung “ $c$  kommt nicht in  $\Gamma, \Delta$  und  $\psi(x)$  vor” ist notwendig.

Beispiel.

Sei  $\Delta := \emptyset$  und  $\Phi := R(c)$  und  $\psi(x) := R(x)$ .

Dann ist  $\Phi \Rightarrow \psi(c)$  sicherlich gültig.

## Korrektheit der $(\forall \Rightarrow)$ Regel

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad \text{wenn } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ vorkommt}$$

Die Voraussetzung “ $c$  kommt nicht in  $\Gamma, \Delta$  und  $\psi(x)$  vor” ist notwendig.

Beispiel.

Sei  $\Delta := \emptyset$  und  $\Phi := R(c)$  und  $\psi(x) := R(x)$ .

Dann ist  $\Phi \Rightarrow \psi(c)$  sicherlich gültig.

Aber  $\Phi \Rightarrow \forall x R(x)$  ist nicht gültig, wie die Struktur  $\mathcal{A} := (\{0, 1\}, c^{\mathcal{A}} := 0, R^{\mathcal{A}} := \{0\})$  zeigt.

## *Beweise im Sequenzenkalkül*

**Definition.** Ein **Beweis** im Sequenzenkalkül ist ein Baum, dessen Knoten wie folgt mit Sequenzen beschriftet sind:

- Die Blätter sind mit Axiomen beschriftet.
- Jeder innere Knoten ist mit der Konsequenz einer Regel beschriftet und dessen Kinder mit deren Prämissen. Jeder innere Knoten hat also entweder ein oder zwei Kinder.

## Beweise im Sequenzenkalkül

**Definition.** Ein **Beweis** im Sequenzenkalkül ist ein Baum, dessen Knoten wie folgt mit Sequenzen beschriftet sind:

- Die Blätter sind mit Axiomen beschriftet.
- Jeder innere Knoten ist mit der Konsequenz einer Regel beschriftet und dessen Kinder mit deren Prämissen. Jeder innere Knoten hat also entweder ein oder zwei Kinder.

**Definition.**

1.  $\Phi \Rightarrow \Delta$  ist im Sequenzenkalkül **beweisbar**, oder **ableitbar**, wenn es als Beschriftung eines Knotens in einem Beweis vorkommt.
2.  $\psi \in FO$  ist aus  $\Phi \subseteq FO$  **ableitbar** oder **beweisbar**, geschrieben  $\Phi \vdash_S \psi$ , wenn  $\Phi \Rightarrow \psi$  beweisbar ist.
3. Eine Menge  $\Phi \subseteq FO[\sigma]$  von Formeln ist **inkonsistent**, wenn es eine Formel  $\varphi \in FO[\sigma]$  gibt, so dass  $\Phi \vdash_S \varphi$  und  $\Phi \vdash_S \neg\varphi$ .
4. Ansonsten ist  $\Phi$  **konsistent**.

## *Beweise im Sequenzenkalkül*

**Bemerkung.** Die Klasse der ableitbaren Sequenzen ist also die kleinste Klasse, die alle Axiome enthält und wann immer sie die Prämissen einer Regel enthält, dann auch deren Konsequenz.

## *Korrektheit des Sequenzenkalküls*

### Theorem (Korrektheitssatz).

Die Regeln des Sequenzenkalküls sind korrekt, d.h. jede beweisbare Sequenz ist gültig.

**Beweis.** Der Satz folgt sofort aus der Korrektheit der einzelnen Regeln.

Wir haben die Korrektheit der aussagenlogischen Regeln sowie der Regeln für den Allquantor bewiesen,

Die anderen Regeln sind zur Übung empfohlen.

# Vollständigkeit und Korrektheit

## Theorem.

1. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Menge von Formeln und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .  
 $\Phi \models \psi$  genau dann, wenn  $\Phi \Rightarrow \psi$  beweisbar ist.
2. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Menge von Formeln.  
 $\Phi$  ist erfüllbar genau dann, wenn  $\Phi$  konsistent ist.

# Vollständigkeit und Korrektheit

## Theorem.

1. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Menge von Formeln und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .  
 $\Phi \models \psi$  genau dann, wenn  $\Phi \Rightarrow \psi$  beweisbar ist.
2. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Menge von Formeln.  
 $\Phi$  ist erfüllbar genau dann, wenn  $\Phi$  konsistent ist.

**Beweis.** Die Richtung von „rechts nach links“ ist im wesentlichen der Korrektheitssatz.

Die andere Richtung ist erheblich schwieriger und ist als **Gödel's Vollständigkeitssatz** bekannt.

(Nicht zu verwechseln mit **Gödel's Unvollständigkeitssatz**.)



# Ableitbarkeit vs. Semantische Folgerung

Sequenzenkalkül	Semantische Konzepte
Sequenz $\Phi \Rightarrow \psi$ ist gültig	Aus $\Phi$ folgt logisch $\psi$
$\vdash_S$	$\models$
$\Phi$ ist konsistent	$\Phi$ ist erfüllbar
$\emptyset \Rightarrow \psi$ gültig	$\psi$ allgemeingültig
$\psi \Rightarrow \emptyset$ gültig	$\psi$ unerfüllbar

## *Entscheidbarkeit der Aussagenlogik*

Wir haben gesehen, dass es einen Algorithmus gibt, der als Eingabe eine aussagenlogische Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$  bekommt und entscheidet, ob  $\Phi \Rightarrow \Delta$  im aussagenlogischen Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Eingabe.

Insbesondere kann der Algorithmus benutzt werden, um für eine Formel  $\psi \in \text{AL}$  zu entscheiden, ob  $\Rightarrow \psi$  beweisbar und somit  $\psi$  eine Tautologie ist.

# Entscheidbarkeit der Aussagenlogik

Wir haben gesehen, dass es einen Algorithmus gibt, der als Eingabe eine aussagenlogische Sequenz  $\Phi \Rightarrow \Delta$  bekommt und entscheidet, ob  $\Phi \Rightarrow \Delta$  im aussagenlogischen Sequenzenkalkül beweisbar ist.

Der Algorithmus terminiert auf jeder endlichen Eingabe.

Insbesondere kann der Algorithmus benutzt werden, um für eine Formel  $\psi \in AL$  zu entscheiden, ob  $\Rightarrow \psi$  beweisbar und somit  $\psi$  eine Tautologie ist.

## Theorem.

1. Das Allgemeingültigkeitsproblem der Aussagenlogik ist entscheidbar.
2. Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist entscheidbar.

## *Das klassische “Entscheidungsproblem”*

Die Frage, ob es einen solchen Algorithmus auch für die Prädikatenlogik gibt, war eines der wichtigsten Probleme der mathematischen Logik.

Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt. (...) Das Entscheidungsproblem muss als das Hauptproblem der mathematischen Logik betrachtet werden.

(D. Hilbert, W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Vol. 1, Berlin 1928, p.73ff.

## *Das klassische Entscheidungsproblem*

Eine positive Antwort auf das Entscheidungsproblem, also ein Algorithmus, der Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln entscheiden könnte, hätte weitreichende Folgen für die Mathematik.

Wir könnten dann zum Beispiel die Gruppentheorie entscheiden, d.h. für jede Formel in der Signatur der Gruppen entscheiden, ob sie in allen Gruppen gilt.

## *Das klassische Entscheidungsproblem*

Eine positive Antwort auf das Entscheidungsproblem, also ein Algorithmus, der Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln entscheiden könnte, hätte weitreichende Folgen für die Mathematik.

Wir könnten dann zum Beispiel die Gruppentheorie entscheiden, d.h. für jede Formel in der Signatur der Gruppen entscheiden, ob sie in allen Gruppen gilt.

Für die Prädikatenlogik kann ein solcher Algorithmus nicht existieren.

**Theorem.** (Church, Turing 1936, 1937)

Das Allgemeingültigkeits- und somit das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Das heißt, es gibt keinen Algorithmus, der auf Eingabe  $\psi \in \text{FO}$ , korrekt entscheidet, ob  $\psi$  gültig ist.

## 14.4 Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik

## *Der Kompaktheitssatz*

**Theorem.** (Kompaktheit der Prädikatenlogik)

1. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Formelmenge.

$\Phi$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge  $\Phi' \subseteq \Phi$  erfüllbar ist.

2. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  mit  $\Phi_0 \models \psi$  gibt.



## *Beweis des Kompaktheitssatzes*

**Behauptung 1.** Eine Menge  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\Phi$  erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

## *Beweis des Kompaktheitssatzes*

**Behauptung 1.** Eine Menge  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\Phi$  erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

Sei also jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar.

Angenommen,  $\Phi$  ist nicht erfüllbar.

## *Beweis des Kompaktheitssatzes*

**Behauptung 1.** Eine Menge  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\Phi$  erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

Sei also jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar.

Angenommen,  $\Phi$  ist nicht erfüllbar.

Dann gibt es also ein  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ , so dass  $\Phi \models \psi$  und  $\Phi \models \neg\psi$ .

## *Beweis des Kompaktheitssatzes*

**Behauptung 1.** Eine Menge  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\Phi$  erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

Sei also jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar.

Angenommen,  $\Phi$  ist nicht erfüllbar.

Dann gibt es also ein  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ , so dass  $\Phi \models \psi$  und  $\Phi \models \neg\psi$ .

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt nun, dass  $\Phi \vdash_S \psi$  und  $\Phi \vdash_S \neg\psi$ .

## *Beweis des Kompaktheitssatzes*

**Behauptung 1.** Eine Menge  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar ist.

**Beweis.** Wenn  $\Phi$  erfüllbar ist, so natürlich auch jede endliche Teilmenge.

Sei also jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar.

Angenommen,  $\Phi$  ist nicht erfüllbar.

Dann gibt es also ein  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ , so dass  $\Phi \models \psi$  und  $\Phi \models \neg\psi$ .

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt nun, dass  $\Phi \vdash_S \psi$  und  $\Phi \vdash_S \neg\psi$ .

Seien  $\Phi_1, \Phi_2$  die dabei benutzen Formeln aus  $\Phi$ . Da Sequenzenkalkülbeweise endlich sind, ist auch  $\Phi_1 \cup \Phi_2$  endlich.

Nach Konstruktion sind  $\psi$  und  $\neg\psi$  bereits aus  $\Phi_1 \cup \Phi_2$  ableitbar und somit ist  $\Phi_1 \cup \Phi_2$  inkonsistent und somit unerfüllbar, im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

## *Der Kompaktheitssatz*

**Behauptung 2.** Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  gibt mit  $\Phi_0 \models \psi$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil.

Denn:

$$\Phi \models \psi$$

## *Der Kompaktheitssatz*

**Behauptung 2.** Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  gibt mit  $\Phi_0 \models \psi$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil.

Denn:

$\Phi \models \psi$  gdw.  $\Phi \cup \{\neg\psi\}$  unerfüllbar ist

## *Der Kompaktheitssatz*

**Behauptung 2.** Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  gibt mit  $\Phi_0 \models \psi$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil.

Denn:

$\Phi \models \psi$  gdw.  $\Phi \cup \{\neg\psi\}$  unerfüllbar ist

gdw. es ex. unerfüllbare endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\neg\psi\}$



## Der Kompaktheitssatz

**Behauptung 2.** Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  gibt mit  $\Phi_0 \models \psi$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil.

Denn:

$\Phi \models \psi$  gdw.  $\Phi \cup \{\neg\psi\}$  unerfüllbar ist

gdw. es ex. unerfüllbare endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\neg\psi\}$

gdw.  $\Phi_0 \setminus \{\neg\psi\} \models \psi$ .  $\square$

# Der Kompaktheitssatz

**Theorem.** (Kompaktheit der Prädikatenlogik)

1. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  eine Formelmenge.

$\Phi$  ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge  $\Phi' \subseteq \Phi$  erfüllbar ist.

2. Sei  $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$  und  $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ .

$\Phi \models \psi$  gdw. es eine endliche Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  mit  $\Phi_0 \models \psi$  gibt.

## *Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes*

Sei  $\sigma := \{E, s, t\}$ , wobei  $s, t$  Konstantensymbole sind.

$\sigma$ -Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten  $s, t$ .

## *Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes*

Sei  $\sigma := \{E, s, t\}$ , wobei  $s, t$  Konstantensymbole sind.

$\sigma$ -Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten  $s, t$ .

**Ziel.** Wir wollen zeigen, dass die Klasse **REACH** der  $\sigma$ -Strukturen, in denen es einen Weg von  $s$  nach  $t$  gibt, nicht in **FO** definierbar ist.

## *Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes*

Sei  $\sigma := \{E, s, t\}$ , wobei  $s, t$  Konstantensymbole sind.

$\sigma$ -Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten  $s, t$ .

**Ziel.** Wir wollen zeigen, dass die Klasse **REACH** der  $\sigma$ -Strukturen, in denen es einen Weg von  $s$  nach  $t$  gibt, nicht in **FO** definierbar ist.

**Beweis.** Angenommen, **REACH** wäre durch  $\psi$  definiert.

Sei  $\varphi_k := \exists x_0 \dots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} E(x_i, x_{i+1}) \wedge x_0 = s \wedge x_k = t$ .

## Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes

Sei  $\sigma := \{E, s, t\}$ , wobei  $s, t$  Konstantensymbole sind.

$\sigma$ -Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten  $s, t$ .

**Ziel.** Wir wollen zeigen, dass die Klasse **REACH** der  $\sigma$ -Strukturen, in denen es einen Weg von  $s$  nach  $t$  gibt, nicht in **FO** definierbar ist.

**Beweis.** Angenommen, **REACH** wäre durch  $\psi$  definiert.

Sei  $\varphi_k := \exists x_0 \dots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} E(x_i, x_{i+1}) \wedge x_0 = s \wedge x_k = t$ .

Es gilt offenbar  $\mathcal{A} \models \varphi_k$ , wenn es einen Pfad in  $\mathcal{A}$  von  $s$  nach  $t$  der Länge  $k$  gibt.

## Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes

Sei  $\sigma := \{E, s, t\}$ , wobei  $s, t$  Konstantensymbole sind.

$\sigma$ -Strukturen sind also Graphen mit ausgezeichneten Knoten  $s, t$ .

**Ziel.** Wir wollen zeigen, dass die Klasse **REACH** der  $\sigma$ -Strukturen, in denen es einen Weg von  $s$  nach  $t$  gibt, nicht in **FO** definierbar ist.

**Beweis.** Angenommen, **REACH** wäre durch  $\psi$  definiert.

Sei  $\varphi_k := \exists x_0 \dots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} E(x_i, x_{i+1}) \wedge x_0 = s \wedge x_k = t$ .

Es gilt offenbar  $\mathcal{A} \models \varphi_k$ , wenn es einen Pfad in  $\mathcal{A}$  von  $s$  nach  $t$  der Länge  $k$  gibt.

Nun sei  $\Phi := \{\neg \varphi_k : k \geq 1\} \cup \{\psi\}$ . Dann ist jede endliche Teilmenge von  $\Phi$  erfüllbar,  $\Phi$  jedoch nicht, ein Widerspruch zum Kompaktheitssatz.