Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 5.1

Themen: Komplexe Zahlen, Diskrete Fourier-Transformation

Ugo & Gabriel

17. Januar 2023

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

1. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $z^3 = -27$ in den reellen sowie in den komplexen Zahlen? Welche sind dies?
2. Geben Sie die Lösungen aus Aufgabe 1.1 in kartesischer Parametrisierung, in Polarkoordinaten sowie als Matrix an.
3. Geben Sie die Vorteile und Nachteile der jeweiligen Darstellungen an.
4. Zeigen Sie, dass das Standard-Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ nicht durch $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ definiert werden kann. Wie ist es stattdessen definiert?
5. Zeigen Sie, dass Polynome mit reellen Koeffizienten nur eine gerade Anzahl an komplexen Nullstellen (imaginärer Anteil ungleich 0) besitzen können (Tipp: Zeige, dass wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch die komplex konjugierte $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p).
6. Geben Sie alle 5. Einheitswurzeln, also die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$, an.
7. Geben Sie jeweils eine Funktion $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ an, die sich in der gaußschen Zahlenebene mit konstanter Geschwindigkeit entlang des Einheitskreises um den Ursprung dreht, wobei $f(0) = 1$ sowie $f(1) = 1$ und
   a) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ einmal mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht.
   b) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ einmal mal im Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht.
   c) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ vier mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht.
   d) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ zwei mal gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht.
   e) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ zwei mal im Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht.
   f) die Funktion sich im Intervall $[0, 1]$ kein mal um den Ursprung dreht.

Aufgabe 2: Diskrete Fourier-Transformation

1. Diskretisieren Sie die Funktionen aus Aufgabe 1.7, indem Sie 5 äquidistante Samples an den Stellen $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ wählen, und stellen Sie diese als Vektor dar.

2. Konstruieren Sie, mit den aus der letzten Aufgabe gefundenen Vektoren, die DFT Matrix $\mathbf{\Omega}_5$, indem sie die Vektor sortieren und normieren.

3. Zeigen Sie, dass man die Spalten der Inversen der DFT-Matrix, also $\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T} = \overline{\mathbf{\Omega}_n}$, durch umsortieren der Spalten von $\mathbf{\Omega}_n$ erhalten kann.

4. Im Skipt wird gezeigt, dass die DFT-Matrix unitär (komplexe Analogie zu orthogonal) ist, indem gezeigt wird, dass $\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T}\mathbf{\Omega}_n = \mathbf{I}$. Warum reicht es im Komplexen nicht $\mathbf{\Omega}_n$ nur zu transponieren um Unitarität zu zeigen, sondern muss zusätzlich noch komplex konjugiert werden ($\overline{\mathbf{\Omega}_n}^\mathsf{T}$)?

5. Zeigen Sie, dass $\mathbf{\Omega}_n$ und $\overline{\mathbf{\Omega}_n}$ symmetrisch sind.

6. Gegeben ein reeles Signal $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ sowie seine Fourier-Transformierte $\mathbf{\Omega}_n\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^n$, interpretiert als diskrete Funktion an den Stützstellen $(0, \ldots, n-1)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{s}}$ achsensymetrisch im Realteil, sowie punktsymetrisch im Imaginärteil ist, wenn man den ersten Eintrag ignoriert und als Ursprung $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ wählt.

7. Zeigen Sie, dass auch die Rückrichtung der Aussage der letzten Aufgabe gilt, wenn der erste Eintrag des transformierten Signals reell ist. Das bedeutet, wenn das transformierte Signal $\hat{\mathbf{s}}$ achsensymetrisch im Realteil sowie punktsymetrisch im Imaginärteil ist, dann ist das Ursprungssignal reell.

8. Gegeben die komplexen Stützstellen 1, $e^{\frac{1}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{2}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{3}{6}2\pi i}$, $e^{\frac{4}{6}2\pi i}$ und $e^{\frac{5}{6}2\pi i}$. Konstruieren Sie die zugehörige Vandermonde-Matrix sowie die zugehörigen Lagrange-Basispolynome.