Prof. Marc Alexa, Ugo Finnendahl,
Dimitrios Bogiokas, Gabriel Dogadov

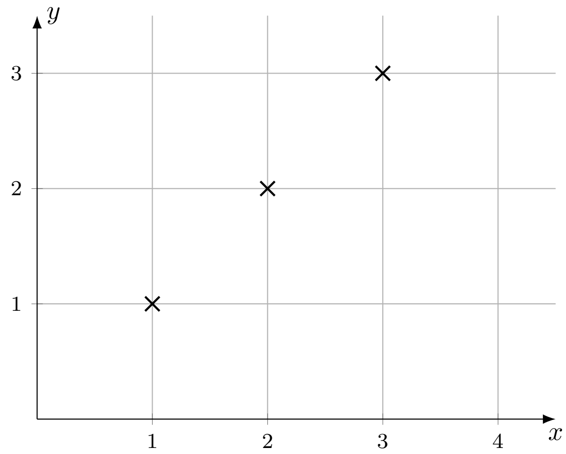
Wissenschaftliches Rechnen - Übung 4.2

Lokale Interpolation

18.12.2023 bis 22.12.2023

Aufgabe 1: Hermite-Interpolation

Gegeben sind drei Paare (x_i, y_i) aus Stützstelle x_i und Funktionswert y_i mit den Werten $(1, 1)$, $(2, 2)$ und $(3, 3)$, welche nochmal in dieser Abbildung dargestellt sind.



1. Konstruieren Sie die linearen Gleichungssysteme (LGS), welche sich ergeben, wenn man die Punkte mithilfe eines Splines $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, das aus zwei kubischen Polynomen p_1 und p_2 besteht, interpolieren will und der Spline an allen Stützstellen eine Ableitung von null haben sollen.
2. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme aus der vorherigen Aufgabe und zeichnen Sie den Spline in die obere Abbildung hinein.
3. Das Ergebnis der letzten Aufgabe sieht (abhängig vom Anwendungsfall) unpassend aus. Wie kann man das Plateau entfernen?
4. Wie viele LGS muss man lösen, wenn man n Punkte mit gegebenen Ableitungen an den Punkten mit stückweise definierten kubischen Polynomen naiv interpolieren will?
5. Wie hoch ist der Rechenaufwand, falls sich eine Stützstelle oder deren Funktionswert/Ableitung ändert?
6. Gesucht ist nun ein (globales) Polynom, welches an den Stützstellen den entsprechenden Funktionswert sowie die gegebene Ableitung hat. Welche Monombasis muss man wählen? Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösung die Koeffizienten des gesuchten Polynoms in Monombasis liefert.

Aufgabe 2: Kubische Spline-Interpolation

Gegeben sind n Paare (x_i, y_i) aus Stützstelle und Funktionswert. Bei der kubischen Spline-Interpolation wird zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten $(x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1})$ ein kubisches Polynom $p_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j$ bestimmt, sodass die zusammengesetzte Funktion (genannt Spline) C^2-stetig ist, d.h. es ist an jeder Stelle zweimal stetig differenzierbar.

1. Wie viele Freiheitsgrade stehen insgesamt zur Verfügung, falls man n Datenpunkte mithilfe eines kubischen Splines interpolieren möchte?

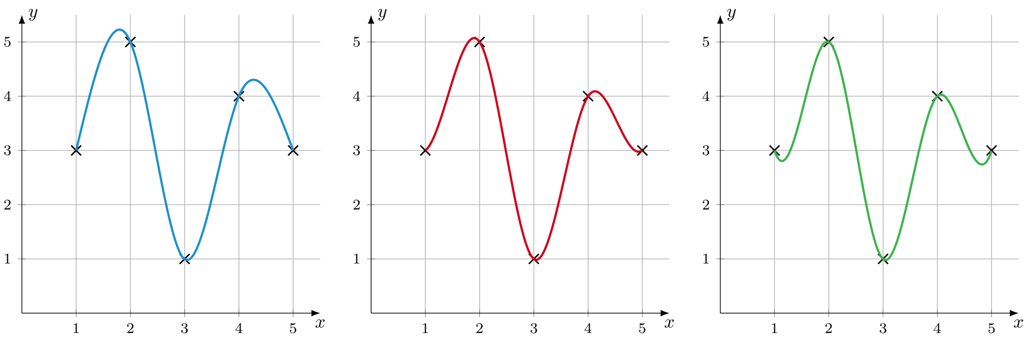
2. Gegeben ein Stützpunkt (x_{j+1}, y_{j+1}) und die beiden angrenzenden kubischen Polynome $p_j(x)$ und $p_{j+1}(x)$. Wie kann man als lineare Gleichung formulieren, dass die ersten und zweiten Ableitungen von p_j und p_{j+1} an der Stelle x_{j+1} übereinstimmen sollen?

3. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise auf, welches die Bedingungen aus der vorherigen Teilaufgabe für alle $n-1$ kubischen Polynome formuliert.

4. Erläutern Sie, warum dem Gleichungssystem noch Randbedingungen hinzugefügt werden müssen. Was bedeuten die folgenden Randbedingungen und wie sehen sie als zusätzliche lineare Gleichungen aus?

   a) Natürliche Randbedingungen
   b) Periodische Randbedingungen
   c) Vorgabe ersten Ableitung y'_1 und y'_n an den Randpunkten

5. Gegeben sind fünf Stützpunkte, die dreimal mit einem kubischen Spline unter verschiedenen Randbedingungen interpoliert wurden.



   Dabei wurden folgende Randbedingungen verwendet:

   a) Natürliche Randbedingungen
   b) Periodische Randbedingungen
   c) Vorgabe der Steigung $f'(x_1) = -3$ und $f'(x_5) = 3$

   Ordnen Sie die Funktion den zugehörigen Randbedingungen zu.

6. Können wir, falls wir quadratische statt kubische Polynome verwenden, ebenfalls stetige erste Ableitungen garantieren? Können wir sowohl stetige erste als auch zweite Ableitungen erhalten?

7. Welchen Rechenaufwand hat die Spline-Interpolation, im Vergleich zur stückweisen Hermite-Interpolation, wenn sich der Wert einer Stützstelle ändert?