11. Vorlesung: Zufallsvariablen mit Dichte

Nikolas Tapia

27. Mai 2024, Stochastik für Informatik(er)

Erinnerung

Definition 11.1

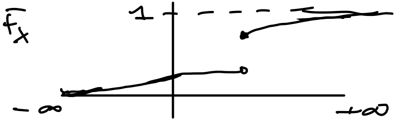
Sei X eine Zufallsvariable. Die **Verteilungsfunktion** von X ist die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \mathbb{P}(X \le x). \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$

Aussage 11.1

Die Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X hat folgende Eigenschaften:

1. F_X ist monoton wachsend.
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$,
3. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

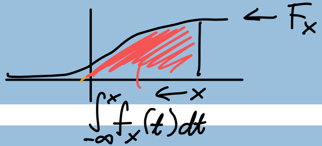


Dichte

Definition 11.2

Eine Zufallsvariable X hat eine **Dichte** falls es eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$



Anmerkung 1

Aus der Analysis ist es bekannt, dass F_X differenzierbar ist und $f_X = F_X'$.

Anmerkung 2

Falls X eine Dichte hat, dann ist $\mathbb{P}(X = x) = 0$ für alle $x \in X(\Omega)$.

$$\mathbb{P}(X \in [x, x+h]) = \mathbb{P}(X \le x+h) - \mathbb{P}(X < x) = \int_x^{x+h} f_X(t)\,dt \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$$\downarrow$$

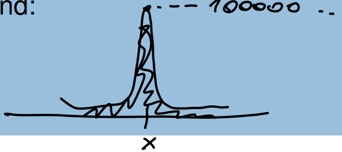
$$P_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \qquad \boxed{\mathbb{P}(X \in [x, x+h]) > 0}$$

Eigenschaften von Dichten

Aussage 11.2

Eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Dichte einer Zufallsvariable X, wenn folgende Eigenchaften erfüllt sind:

1. $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.



<u>Beweis</u>: 1. $F_X \geq 0$.

2. $1 = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt$.

Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t^3 , & t \in [0,2] \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^2 \frac{1}{4} t^3\,dt = \frac{1}{4}\int_0^2 t^3\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 1.$$

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad X(\Omega) = [0,2].$$

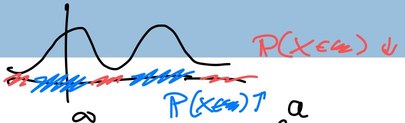
$$= \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt , & x \in [0,2] \\ 0 , & x < 0 \\ 1 , & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^4}{16} , & x \in [0,2] \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Rechenregeln für Dichte

Aussage 11.3

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

1. $\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$ ← da $\mathbb{P}(X=b)=0.$
2. $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X > a) = \int_{a}^{\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$
3. $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$



1. ⇒ Nach der Def.

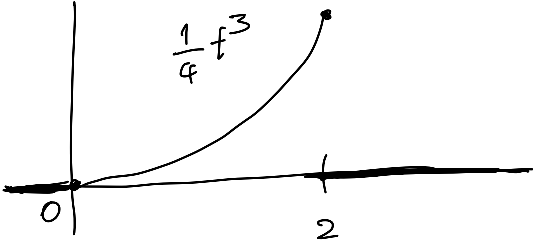
2. ⇒ $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \le a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt = \int_{a}^{\infty} f_X(t)dt$

3. ⇒ Ähnlich.

Beispiel

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^\infty f(t)\,dt = \int_1^2 \frac{1}{4} t^3\,dt = \frac{1}{16} t^4 \Big|_1^2 = \frac{16-1}{16}$$

$$= \frac{15}{16}$$



Erwartungswert einer Funktion

Aussage 11.4

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) \, \mathrm{d}t,$$

falls das Integral an der rechten Seite existiert.

(diskret:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x)$$
)

Gewichteter Mittelwert.

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Bem:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 f_X(t) \, dt.$$

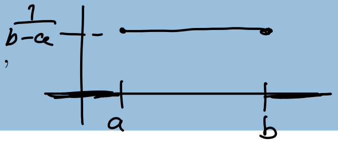
Gleichverteilung

Definition 11.4

Eine Zufallsvariable X hat eine **Gleichverteilung** auf dem Intervall $[a, b]$ falls die Dichte von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

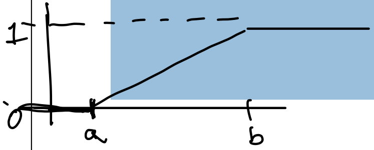
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



Aussage 11.5

Sei X eine Zufallsvariable mit Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



Beweis

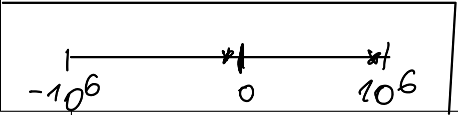
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_a^b \frac{t}{b-a}\, dt$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}\, t^2 \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\, dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t^2\, dt$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(b^3-a^3\right) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$



Exponentialverteilung

Definition 11.5

Eine Zufallsvariable X hat eine **Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda > 0$, falls die Dichte von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aussage 11.6

Sei X eine Zufallsvariable mit Exponentialverteilung mit Parameter λ. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)_0^x$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t}\,dt$$

$$u = t$$
$$dv = e^{-\lambda t} \quad = \underbrace{\left[-t e^{-\lambda t}\right]_0^\infty}_{\longrightarrow 0} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}\,dt = \ldots$$

Beweis

Beweis

Gedächtnislosigkeit:

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > s)}$$

$$= \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)} \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = 1 - F_X(t)$$

$$= \mathbb{P}(X > t).$$

Leibniz Gemeinschaft

Normalverteilung

Definition 11.6

Eine Zufallsvariable X hat eine **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, falls die Dichte von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aussage 11.7

Sei X eine Zufallsvariable mit Normalverteilung mit Parametern μ und σ. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathbb{V}[X] = \sigma^2.$$