Technische Universität Berlin, 19.02.2024

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Schriftlicher Test: Berechenbarkeit und Komplexität

(Weller/Froese/Kellerhals/Kunz, Wintersemester 2023/2024)

Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktzahl:	50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	**Summe**
Punktzahl:	0	0	0	0
Davon erreicht:				

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Aussagen **und Mitteilungen** aus den Vorlesungsfolien als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert.

Erinnerung an Erkenntnisse der Vorlesung:

- Q ist in NP, falls Ja-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind, d.h. es existiert eine deterministische, polynomzeitbeschränkte TM M, sodass für alle x gilt
$$x \in Q \iff \exists_{u \in \Sigma^{\mathrm{poly}(|x|)}} \langle x, u \rangle \in T(M).$$
Q ist in coNP, falls Nein-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind (analog zu oben).
- Für alle $\mathcal{X} \in \{\mathrm{NP}, \mathrm{coNP}, \mathrm{PSPACE}\}$ ist Q $\mathcal{X}$-schwer (-vollständig), falls $\forall_{L \in \mathcal{X}}\ L \leq_m^p Q$ (und $Q \in \mathcal{X}$).
- Die Menge TQBF aller wahren quantifizierten aussagenlogischen Formeln ist PSPACE-vollständig und entscheidbar.
- $\leq_m^p$ ist transitiv.
- $\mathrm{coNP} = \{L \mid \overline{L} \in \mathrm{NP}\}$
- $\mathrm{PSPACE} = \{L \mid L \leq_m^p \mathrm{TQBF}\}$
- 2-SAT $\in$ P
- $\overline{\mathrm{SAT}}$ und TAUT sind coNP-vollständig.
- SAT, Vertex Cover und Clique sind NP-vollständig.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Vermischtes** (0 Punkte)

Beweisen Sie die Gültigkeit von 3 der folgenden Aussagen (Sie brauchen für die Anderen nichts beweisen).

- PSPACE = coPSPACE
- PSPACE $\subseteq$ NP $\cup$ coNP
- SAT $\in$ PSPACE $\implies$ NP = PSPACE
- TQBF $\leq_m^p$ SAT $\implies$ NP = PSPACE
- 2-SAT $\in$ NP $\implies$ P = NP
- wenn P = NP, dann ist jede Sprache über Σ, außer $\emptyset$ und Σ^*, NP-schwer

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 2: (0 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $A \in \mathrm{P}$ und $B \in \mathrm{NP}$. Welche der folgenden Sprachen sind dann *auf jeden Fall* in P? (Für nicht ausgewählte Sprachen brauchen Sie nichts begründen).

(a) $A \cap B$

(b) $A \setminus B$

(c) $\Sigma^* \setminus A$

(d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 3: (0 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}$, sei $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Betrachten Sie die folgenden Probleme

3-Set Splitting
Eingabe: m Mengen $C_j \subseteq [n]$ mit $|C_j| = 3$ für alle $1 \leq j \leq m$
Frage: Gibt es disjunkte Mengen $P, Q \subseteq [n]$ mit $P \uplus Q = [n]$ und $C_j \nsubseteq P$ und $C_j \nsubseteq Q$ für alle j?

3-COLORING
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Lassen sich die Knoten aus V so mit 3 Farben färben, dass keine zwei Knoten derselben Farbe mit einer Kante verbunden sind?

Betrachten Sie die Funktion f, die bei Eingabe von m Mengen $C_1, \ldots, C_m \subseteq [n]$, einen Graphen (V, E) wie folgt erzeugt:

(1) für alle $i \in [n]$, füge den Knoten i hinzu

(2) für jede Menge C_j, füge einen Kreis (c_j^1, c_j^2, c_j^3) hinzu und verbinde jeden Knoten c_j^i mit dem i'ten Element von C_j (z.B. für die Menge $C_1 := \{1, 12, 47\}$ fügen wir die Knoten c_1^1, c_1^2 und c_1^3 sowie die Kanten in $\{\{c_1^1, c_1^2\}, \{c_1^2, c_1^3\}, \{c_1^3, c_1^1\}\}$ und $\{\{1, c_1^1\}, \{12, c_1^2\}, \{47, c_1^3\}\}$ hinzu)

das heißt,

$$V := [n] \ \cup \ \bigcup_{j=1}^{m} \{c_j^1, c_j^2, c_j^3\}$$
$$E := \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{3} \{\{x_j^i, c_j^i\}, \{c_j^i, c_j^{(i \bmod 3)+1}\} \mid x_j^i \text{ ist das } i\text{'te Element in } C_j\}$$

1. Zeichnen Sie den Graphen $f(\{C_1, C_2, C_3\})$, der aus der folgenden Eingabe zu 3-Set Splitting entsteht und geben Sie eine 3-Färbung an (ohne Begründung):

   $C_1 = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $C_2 = \{1, 3, 4\}$ $\qquad$ $C_3 = \{2, 3, 4\}$

2. Sei $(\{i, j, k\})_{1 \leq i < j < k \leq 5}$ eine Liste aller 3-elementigen Teilmengen von $[5]$. Zeigen Sie anhand dieses Gegenbeispiels, dass f keine Reduktion von 3-Set Splitting auf 3-Coloring ist.

3. Zeigen Sie, dass f durch Hinzufügen eines einzigen Knoten mit einigen Kanten zu einer korrekten Reduktion von 3-Set Splitting auf 3-Coloring modifiziert werden kann.