Berechenbarkeit & Komplexität Modulkonferenz 12.12.23

$A \leq B \iff A$ lässt sich auf B reduzieren

$A < B \iff A \leq B \wedge \neg (A \geq B)$

multiplizieren $\leq$ addieren

$\ldots \overset{?}{<} \ldots < H_0 < H_0^1 \ldots \overset{?}{<}$

① $H_0 \leq Eq$

$$\frac{Eq \nleq H_0}{\overline{Eq} \leq \overline{H_0}}$$

② $\overline{H_0} \leq Eq$

$$Eq = \{ w\#q \mid T(M_w) = T(M_q) \}$$

$$\overline{Eq} = \{ w\#q \mid T(M_w) \neq T(M_q) \}$$

Frage: alle unentscheidbaren Sprachen aufeinander reduzierbar? → nein

Frage: innerhalb eines Turing-Grades alle unentscheidbaren aufeinander reduzierbar?

nicht alle wahren Aussagen sind beweisbar

„Wissen": verifyer-Funktion berechenbar

Annahme: alle Wahrheiten sind beweisbar

zeigen: ~~...~~ $\overline{H_0}$ semi-entscheidbar

Strategie:

1. zähle alle Beweise B auf
2. falls B beweist, dass M_ω nicht hält, gib ja aus

Falls alle wahre Aussagen beweisbar existiert Beweis B^* dafür dass M_ω nicht hält

→ finden B^* nach endlicher Zeit

$\Rightarrow \overline{H_0}$ semi-entscheidbar

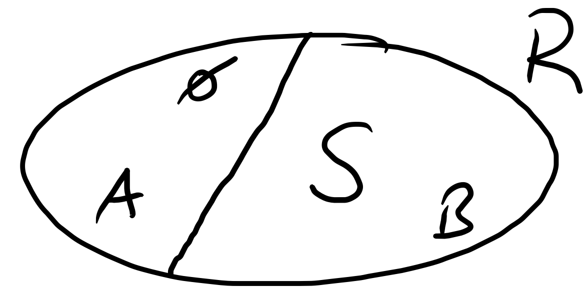
Im Widerspruch zu unserem Wissen, dass $\overline{H_0}$ nicht semi-entscheidbar ist (weil sonst das Halteproblem entscheidbar wäre)

Also war die Annahme falsch. Es muss also Wahrheiten geben, die nicht beweisbar sind.

Satz v. Rice für Sprachen

$R = \{ L \mid L \text{ ist semi-entscheidbar} \}$

S = nichttriviale Teilmenge v. R, also $S \subseteq R$, $S \neq R$, $S \neq \emptyset$



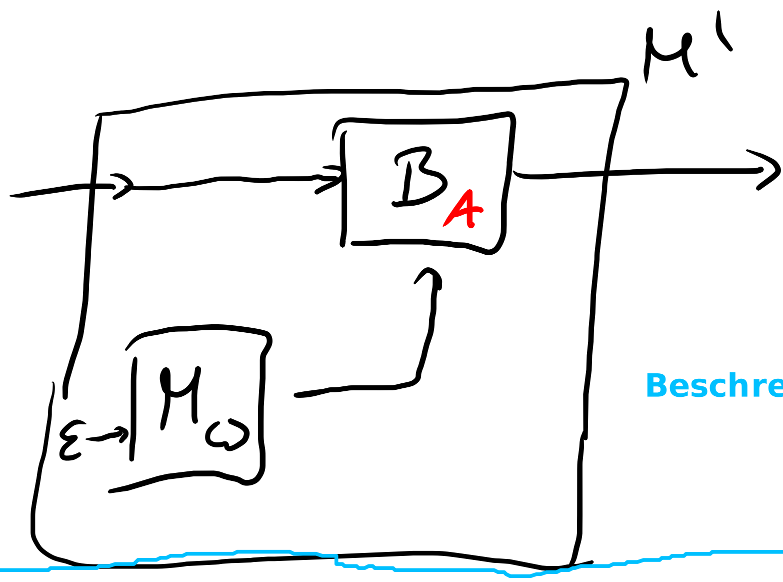
Thm: $C(S) = \{ \omega \mid T(M_\omega) \in S \}$ unentscheidbar!

Fall 2: $\emptyset \in S$ zeige $\overline{H_0} \leq C(S)$

Fall 1: $\emptyset \notin S$ zeige $H_0 \leq C(S)$

Brauche: Reduktionsfunktion $f: \omega \mapsto f(\omega)$

$\omega \in H_0 \Leftrightarrow f(\omega) \in C(S)$



Beschreibung von f

Beweis der Reduktionseigenschaft

① $\omega \notin H_0 \Rightarrow T(M') = \emptyset \notin S$

$\Updownarrow$

$f(\omega) \notin C(S)$

② $\omega \in H_0 \Rightarrow T(M') = B \in S$

$\omega \in H_0 \Leftrightarrow f(\omega) \in C(S)$

$\omega \notin \overline{H_0} \Rightarrow \omega \in H_0 \Rightarrow M_\omega$ hält auf ε

$\Rightarrow T(M') = A \notin S \Rightarrow f(\omega) \notin C(S)$

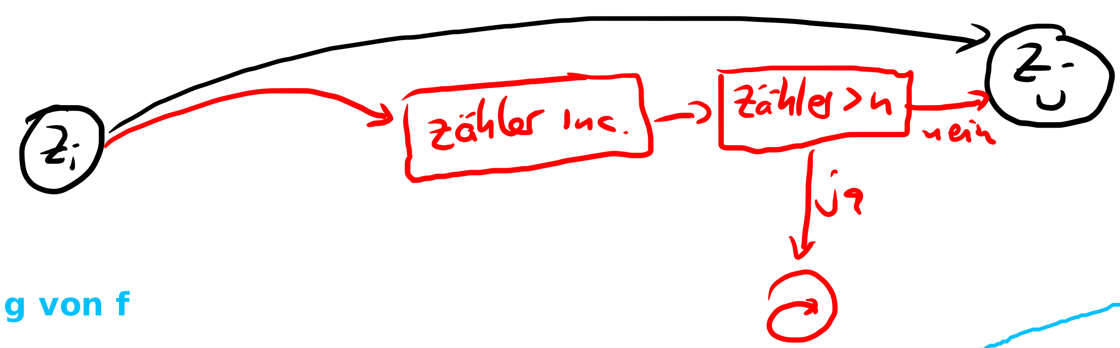
$\omega \in \overline{H_0} \Rightarrow M_\omega$ hält nicht auf $\varepsilon \Rightarrow T(M') = \emptyset \in S \Rightarrow f(\omega) \in C(S)$

$Z = \{ \omega\#n \mid M_\omega$ hält nach $\le n$ Schritten auf $\varepsilon \} \le H_0$

$f: \omega\#n \longrightarrow \underline{f(\omega) = \omega'}$

$\omega\#n \in Z \Leftrightarrow \omega' \in H_0$

<u>Idee</u>: neue Maschine hat Schritt-Zähler i; falls $i > n$ gehe in Endlosschleife



Beschreibung von f

$\omega\#n \in Z \overset{\text{Def } Z}{\Rightarrow} M_\omega$ hält auf ε nach $\le n$ S.

$\overset{\text{Konst.}}{\Rightarrow} M_{\omega'}$ hält auf ε

$\Rightarrow \omega' \in H_0$

$\omega\#n \notin Z \overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} M_\omega$ hält auf ε nicht in $\le n$ Schr.

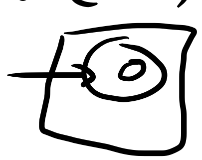
$\overset{\text{Konst.}}{\Rightarrow} M_{\omega'}$ hält nicht auf ε

$\Rightarrow \omega' \notin H_0$

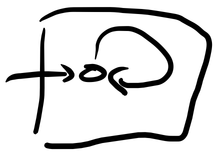
Beweis der Reduktionseigenschaft

einfacher: ① entscheide ob $\omega\#n \in Z$

② falls $\omega\#n \in Z$ gib triviale haltende TM aus



③ falls $\omega\#n \notin Z$ gib triviale <u>nicht</u> haltende TM aus



alles ist Beschreibung von f

die Reduktionseigenschaft folgt direkt aus der Konstruktion

Eq nicht semi-entscheidbar

$\overline{H_0} \le Eq$

$\overline{K} \le Eq$

($Eq = \{ w\#q \mid T(M_w) = T(M_q) \}$)

($K = \{ w \mid M_w$ hält auf $w \}$)

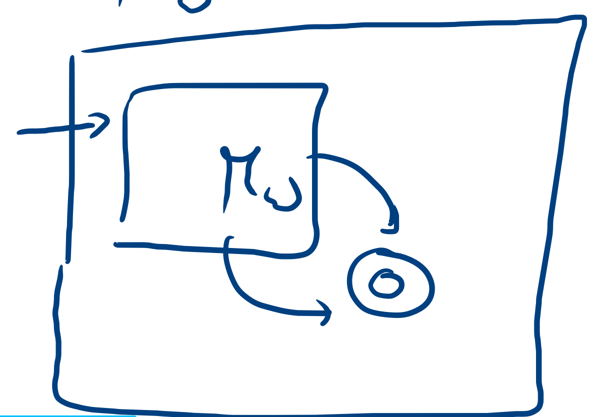
Idee: konstruiere $M_{w'}$ & M_q sodass die sich gleich verhalten falls $w \in \overline{K}$ und sonst unterschiedlich

brauche: $f: w \to w'\#q$

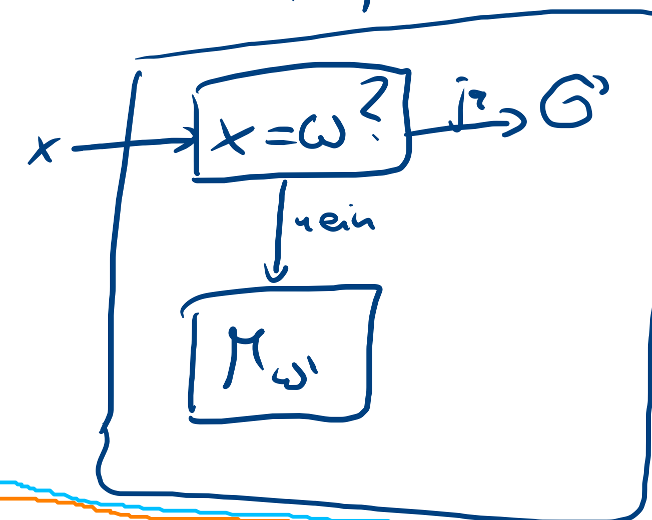
sd. $w \in \overline{K} \Leftrightarrow w'\#q \in Eq$

Beschreibung von f

$M_{w'}$



M_q



$w \in \overline{K} \overset{\text{Df. }\overline{K}}{\Leftrightarrow} M_w$ hält nicht auf w

$\overset{1}{\Leftrightarrow} M_{w'}$ akzeptiert w nicht (1) $\boxed{M_{w'} \text{ akzeptiert} \Leftrightarrow M_w \text{ hält}}$

$\overset{2}{\Leftrightarrow} T(M_{w'}) = T(M_q)$

$\overset{\text{Df. Eq}}{\Leftrightarrow} f(w) \in Eq$

(2) $\boxed{T(M_{w'}) = T(M_q) \Leftrightarrow M_{w'} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht!}}$

Beweis der Reduktionseigenschaft

TODO: mehr Übungen für Reduktionen ins ISIS