FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2022/23
Stand: 20. Januar 2023

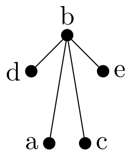
11. Tutorium – Logik
Besprochen in der Woche vom 23.01.2023.

Aufgabe 1

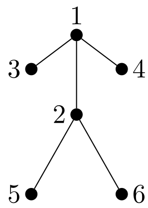
Falsum erklimmt in erstaunlicher Geschwindigkeit den unendlichen Tunnel und ist bald schon in unmittelbarer Nähe der Logikzwergenhauptstadt Ehrentrocken. Zufällig ist die erste Person die Falsum über den Weg läuft der Zwerg der mit dem König diskutiert hat. «Halt!», ruft der Logikzwerg. «Bist du nicht Falsum? In den Geschichten heißt es immer, dass du ein Zwerg bist der zu gierig und zu tief gegraben hat. Aber du siehst gar nicht wie ein Zwerg aus!»

«Ha ha! Ja, das ist wahr. Aber inzwischen bin ich gar kein Zwerg mehr! Inzwischen bin ich nämlich falsch! Und du, mein zwergiger Freund, kannst mich nicht aufhalten, denn ich weiß wie man Zwerge wie dich dominieren kann!»

Sei $\sigma := \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Seien $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{F}$ zwei σ-Strukturen, die wie folgt definiert werden.



$\mathcal{Z}$



$\mathcal{F}$

(i) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{F}$.

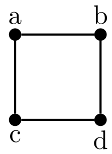
(ii) Geben Sie einen partiellen Isomorphismus h von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{F}$ an, wobei $|\operatorname{def}(h)|$ maximal ist.

(iii) Geben Sie eine unterscheidende Formel für $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{F}$ an.

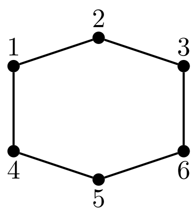
Aufgabe 2

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie folgende σ-Strukturen.

$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$



(i) Finden Sie die größte Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt. Geben Sie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin an.

(ii) Finden Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die der Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt. Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer an.

Aufgabe 3

Sei $\tau = \{R\}$ eine Signatur, wobei R ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei endliche τ-Strukturen, mit den Universen A und B, die m-äquivalent sind.

(i) Zeigen Sie: Falls $m > \min\{|A|, |B|\}$, dann gilt $|A| = |B|$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Wir übernehmen die Formel $\varphi_{\mathcal{A}}$ aus Tutorium 10 Aufgabe 3*(ii)* mit $\mathrm{Mod}(\varphi_{\mathcal{A}}) = \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \text{ ist eine } \tau\text{-Struktur und } \mathcal{E} \cong \mathcal{A}\}$, wobei

$$\psi_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \coloneqq \forall y(\bigwedge_{1 \le i < j \le k} x_i \neq x_j \wedge \bigvee_{i=1}^{k} y = x_i \wedge \bigwedge_{a_i \in R^{\mathcal{A}}} R(x_i) \wedge \bigwedge_{a_i \in A \setminus R^{\mathcal{A}}} \neg R(x_i)) \text{ und}$$
$$\varphi_{\mathcal{A}} \coloneqq \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k \psi_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots x_k).$$

(ii) Zeigen Sie: Falls $m > \max\{|A|, |B|\}$, dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(iii) Zeigen Sie: Falls $m = \max\{|A|, |B|\}$, dann gilt ebenfalls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.