Wissenschaftliches Rechnen - Großübung 4.1

Themen: Globale Interpolation

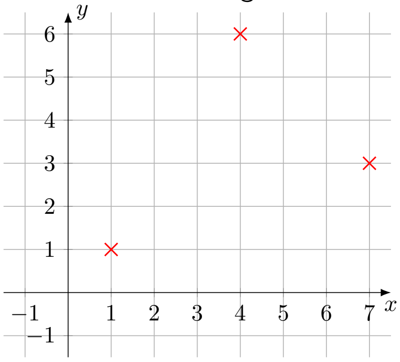
Ugo & Gabriel

13. Dezember 2022

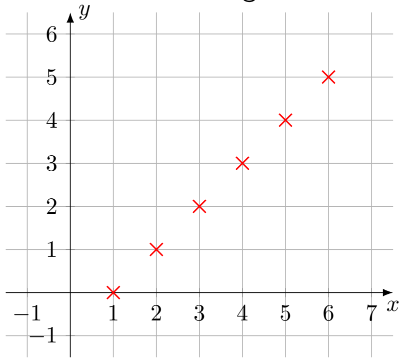
Aufgabe 1: Globale Interpolation

1. Gegeben seien die folgenden zwei Punktemengen $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$:

Punktemenge 1



Punktemenge 2



Welche Menge an (Basis-)Funktionen genügt, um die Punkte mittels einer Regressionsfunktion zu *interpolieren*?

a) $\{x\}$ 1: Nein, 2: Nein
b) $\{1, x\}$ 1: Nein, 2: Ja
c) $\{1, x, x^2\}$ 1: Ja, 2: Ja
d) $\{1, x^3, x^5\}$ 1: Ja, 2: Nein
e) $\{\exp(x), \exp(2x), \exp(3x)\}$ 1: Ja, 2: Nein
f) $\{1, x^2, \exp(x)\}$ 1: Ja, 2: Nein
g) $\{1, \cos^2(x), \sin^2(x)\}$ 1: Nein, 2: Nein
h) $\{1, x, x^2\cos(x), \sin(x), \exp(x)\}$ 1: Ja, 2: Ja

2. Stellen Sie die folgenden Polynome (falls möglich) in der Monombasis dar, welche alle Polynome 3. Grades darstellen kann.

a) $p_1(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 2$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
b) $p_2(x) = -x^2 + 1x + 7$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
c) $p_3(x) = 0$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
d) $p_4(x) = x^3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$

e) $p_5(x) = 3x^4 + 3x - 2$ Nicht möglich

3. Konstruieren Sie die Vandermode-Matrix für die Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1. Aus welcher Basis entspringt diese Matrix?

Lösung

Eine Möglichkeit für die Vandermonde-Matrix (hier von klein nach groß) ist:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 7 & 49 \end{bmatrix}$$

Sie entspringt, da wir drei Datenpunkte haben, aus der Basis $(1, x, x^2)$.

Lösung Ende

4. Berechnen Sie das Polynom 2. Grades, welche alle Punkte aus der Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1 interpoliert.

Lösung

Wir lösen das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 7 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

und erhalten als Lösung ungefähr $(c_0, c_1, c_2) \approx (-2.44, 3.89, -0.44)$. Somit ist die Funktion $f(x) \approx -0.44x^2 + 3.89x - 2.44$.

Lösung Ende

5. Gegeben drei Punkte $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Geben Sie eine polynomielle Funktion $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (also $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, wobei f_1 und f_2 jeweils Polynome darstellen) an, welche die drei Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$ interpoliert. Dabei soll gelten, dass $\mathbf{f}(0) = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{f}(\frac{1}{3}) = \mathbf{p}_2$, $\mathbf{f}(\frac{2}{3}) = \mathbf{p}_3$ und wieder $\mathbf{f}(1) = \mathbf{p}_1$.

Lösung

Die Aufgabe sieht zwar schwierig aus, da wir statt einer normalen reellen Funktion nun eine parametrische Kurve bestimmen wollen. Dieses zweidimensionale Problem lässt sich aber in zwei eindimensionale Probleme zerlegen, d.h. wir können f_1 und f_2 einzeln und unabhängig von einander bestimmen. Wir lösen also zwei LGS $\mathbf{V}\mathbf{c}_1 = \mathbf{y}_1$ und $\mathbf{V}\mathbf{c}_2 = \mathbf{y}_2$ mit gleicher Vandermonde Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und Vektoren mit Funktionswerten $\mathbf{y}_1 = (1, 3, 2, 1)^\mathsf{T}$ sowie $\mathbf{y}_2 = (3, 4, 6, 3)^\mathsf{T}$. Wir erhalten nach Lösen beider LGS die Lösungsvektoren $\mathbf{c}_1 = (1, 13.5, -27, 13.5)^\mathsf{T}$ und $(3, -4.5, 31.5, -27)^\mathsf{T}$ und damit lautet die Abbildungsvorschrift für die parametrische Kurve:

$$\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 13.5x^3 - 27x^2 + 13.5x + 1 \\ -27x^3 + 31.5x^2 - 4.5x + 3 \end{bmatrix}$$

Alternative Lösung: Wir berechnen die vier Lagrange-Basispolynome für die Stützstellen $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{2}{3}$ und $t_4 = 1$. Dann erhalten wir die Kurve durch Linearkombination der Basispolynome mit den Stützpunkten:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{p}_1\ell_1(t) + \mathbf{p}_2\ell_2(t) + \mathbf{p}_3\ell_3(t) + \mathbf{p}_1\ell_4(t)$$

Lösung Ende

Aufgabe 2: Lagrange-Interpolation

1. Gegeben die Stützstellen aus Aufgabe 1.1 Punktmenge 1. Konstruieren Sie die Lagrange-Basispolynome.

Lösung

Es gilt:

$$\ell_1(x) = \frac{x-4}{1-4} \cdot \frac{x-7}{1-7} = \frac{(x-4)(x-7)}{18}$$
$$\ell_2(x) = \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-7}{4-7} = \frac{(x-1)(x-7)}{-9}$$
$$\ell_3(x) = \frac{x-1}{7-1} \cdot \frac{x-4}{7-4} = \frac{(x-1)(x-4)}{18}$$

Lösung Ende

2. Berechnen Sie mithilfe der Lagrange-Interpolation das Polynom 2. Grades, welche alle Punkte aus der Punktmenge 1 aus Aufgabe 1.1 interpoliert. Unterscheiden sich dieses Polynom von dem aus Aufgabe 1.4?

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1\ell_1(x) + 6\ell_2(x) + 3\ell_3(x) \\ &= 1 \cdot \frac{(x-4)(x-7)}{18} + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-7)}{-9} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{18} \\ &= \frac{(x-4)(x-7) - 12(x-1)(x-7) + 3(x-1)(x-4)}{18} \\ &= \frac{-8x^2 + 70x - 44}{18} \\ &\approx -0.44x^2 + 3.89x - 2.44 \end{aligned}$$

Gleiche Lösung wie das Polynom in Aufgabe 1.4.

Lösung Ende

3. Stellen Sie die in Aufgabe 2.1. gefundene Lagrage-Basispolynome in der Monombasis dar.

Lösung

Es gilt:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-4)(x-7)}{18} = \frac{x^2 - 11x + 28}{18} \Longrightarrow \mathbf{l}_1 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 28 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{-9} = \frac{-2x^2 + 16x - 14}{18} \Longrightarrow \mathbf{l}_2 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -14 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{18} = \frac{x^2 - 5x + 4}{18} \Longrightarrow \mathbf{l}_3 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

4. Wie kann man mithilfe der Vandermonde-Matrix überprüfen, ob die gefundene Basis korrekt ist?

Lösung

Wir schreiben die Basisvektoren (bzgl. der Monombasis) in eine Matrix $\mathbf{L}$ und überprüfen, ob $\mathbf{L}$ die Inverse von $\mathbf{V}$ ist, also ob $\mathbf{LV} = \mathbf{VL} = \mathbf{I}$. Dabei ist:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 28 & -14 & 4 \\ -11 & 16 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung Ende

5. Gegeben die folgenden zwei Polynome 2. Grades: $p_1(x) = -x^2 + 3x - 2$ und $p_2(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
   a) Stellen Sie die Polynome in der Monombasis dar, welche alle Polynome 4. Grades darstellen kann.
   b) Stellen Sie die Polynome in der Lagrange-Basis dar, mit den Stützstellen $[0, 1, 2, 3, 4]$.
   c) Berechnen Sie das Produktpolynom $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$. Welche Basisrepräsentation eignet sich besser?
   d) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Monombasis zu der Lagrange-Basis durchführt.
   e) Berechnen Sie die Matrix, welche einen Basiswechsel von der Lagrange-Basis zu der Monombasis durchführt.

Lösung

a) Wir wählen die Monombasis $M = (1, x, x^2, x^3, x^4)$. Dann ist:

$$\mathbf{p}_1 = (-2, 3, -1, 0, 0)^\mathsf{T}, \quad \mathbf{p}_2 = (4, -2, 3, 0, 0)^\mathsf{T}$$

b) Um die Repräsentation der Polynome bezüglich der Lagrange-Basis zu berechnen, müssen wir die Lagrange-Basispolynome gar nicht berechnen. Es reicht den Funktionswert der Polynome an jeder Stützstelle zu bestimmen:

$$\mathbf{p}_1' = \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \\ p_1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2' = \begin{bmatrix} p_2(0) \\ p_2(1) \\ p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \\ 25 \\ 44 \end{bmatrix},$$

c) Die Lagrange-Basis eignet sich besser zum Multiplizieren von Polynomen, da man in der Monombasis jeden Koeffizienten des einen Polynoms mit jedem Koeffizienten des anderen Polynoms multiplizieren muss, wohingegen in der Lagrange-Basis die elementweise Multiplikation der Vektoren genügt, d.h.

$$(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)' = \mathbf{p}_1' \circ \mathbf{p}_2' = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ -264 \end{bmatrix}$$

d) Die Matrix für den Basiswechsel von Monombasis zu Lagrange-Basis ist die Vandermonde-Matrix:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$$

e) Die Inverse der Matrix aus der Aufgabe zuvor führt besagten Basiswechsel durch.

Lösung Ende

6. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige Stützstellen mit $x_1 < \ldots < x_n$. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Basispolynome ℓ_i, $i \in [1, n]$ eine Zerlegung der Eins bilden, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung

Wir definieren $L(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x)$.

a) Für die erste Beweisvariante nutzen wir folgenden Satz: Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ Punktepaare mit $x_i \neq x_j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann gibt es genau ein Polynom vom Grad $n-1$ oder geringer mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in [1, n]$.

Für ein Basispolynom ℓ_i und eine Stützstelle x_j gilt, dass $\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Damit gilt $L(x_i) = 1$ für alle Stützstellen x_i. Die Lagrange-Basispolynome haben Grad $n-1$ und damit hat L den Grad $L-1$ oder kleiner. Eine offensichtliche Möglichkeit wie L aussehen könnte ist $L(x) = 1$. Nach dem obigen Satz kann L kein anderes Polynom sein, da n Paare aus Stützstelle und Funktionswert ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$ eindeutig bestimmt.

b) Alternative Beweisvariante: Erneut wissen wir, dass L höchstens Grad $n-1$ hat und an den Stützstellen den Wert 1 annimmt. Wir versuchen seine Koeffizienten über ein LGS zu ermitteln:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da die Stützstellen paarweise verschieden sind, ist die Vandermonde-Matrix regulär und das LGS besitzt genau eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $\mathbf{c} = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$. Somit ist $L(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung Ende