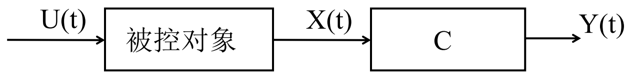
第一章　绪论

§1.1 最优控制问题

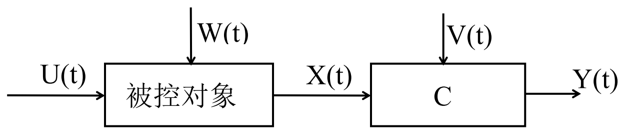
静态最优化问题：输入—输出—代数方程

动态最优化问题：输入—输出—微分方程

确定性最优控制：系统参数确定，无随机输入
随机性最优控制：系统参数确定，有随机输入

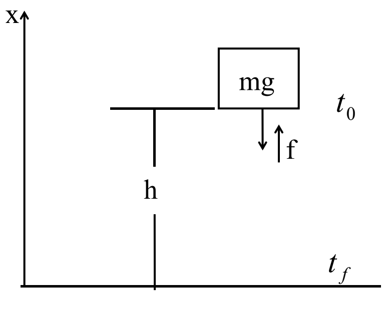


$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ Y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$$

例：飞船的月球软着陆问题



推力　$$f = -k\frac{dm}{dt}$$

运动方程　$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f - mg = -k\frac{dm}{dt} - mg$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [-\frac{dm}{dt}]dt = m(t_0) - m(t_f)$$

初始条件 $$\begin{cases} t = t_0, x = x(t_0) = h \\ t = t_f, x = x(t_f) = 0 \end{cases}$$

约束条件为 $$-\alpha \le \frac{dm}{dt} \le 0$$

求 $J_{\min}$

§1.2 最优控制的数学模型

一 控制系统的数学模型(集中参数系统)

直接法建立：动力学、运动学的基本定律，即解析法.

间接法建立：通过“辩识”的途径确定系统的结构与参数.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t) \cdots, x_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t), u_2(t) \cdots, u_r(t)]^T$, $f = [f_1, f_2, \cdots f_n]$

$x(t)$ 为 n 维状态向量,$u(t)$ 为 r 维控制向量,f 为 n 维函数向量.

二 目标集

通过 $u(t)$ 使 $x(t)$ 由 $x(t_0)$ 到 $x(t_f)$，其中 $x(t_0)$ 为初始状态，并且通常为已知；$x(t_f)$ 为终端状态，即控制所要求达到的目标。一般来说对终端状态的要求可用如下的约束条件表示：$g_1(x(t_f), t_f) = 0, g_2(x(t_f), t_f) \le 0$.

三 容许控制

u_i 具有不同的物理属性，一般有 $|u_i| \le \alpha, i = 1,2,\cdots r$ ，即在控制域 U 内.凡在闭区间 $[t_0, t_f]$ 上有定义，且控制域 U 内取值的每一个控制函数 $u(t)$ 均称为容许控制。

四 性能指标

主要取决于问题所要解决的主要矛盾。

表达式为： $$J[u(\cdot)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

其中 $x(t)$ 是动态系统起始于 $x(t_0) = x_0$，对应于 $u(t)$ 的状态轨线。$x(t_f)$ 是此轨线在终端时刻的值。

五 最优控制的提法

受控系统的状态方程及给定的初态

$$x(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = t_0$$

规定的目标集为

$$M\{x(t_f) : x(t_f) \in R^n, g_1(x(t_f), t_f) = 0, g_1(x(t_f), t_f) \le 0\}$$

求一容许控制$u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$，使指标函数

$$J[u(\cdot)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

为最小。

如果问题有解，记为$u^*(t)$，则称$u^*(t)$为最优控制。相应的曲线$x^*(t)$叫做最优轨线。而性能指标$J^* = J[u^*(\cdot)]$则称为最优性能指标。

§1.3 最优控制在实际问题应用的几个方程

一 时间最优控制

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

二 线性调节的问题

使线性系统的状态保持在平衡位置状态的误差最小，控制能量也最小。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

该问题为线性二次型问题。

三 跟踪问题

系统的状态跟踪某一个确定的状态x_r

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_r)^T Q (x - x_r) + u^T R u] dt$$

四 最少燃料问题

$$u = \frac{dm}{dt}, J = \int_{t_0}^{t_f} |u| dt$$

五 终端控制问题

$$J = Q[x(t_f), t_f]$$

1.4 最优控制的发展

第二章 变分法及其在最优控制的应用

§2.1 变分法的基本概念

一 泛函

对于某一类函数集合中的每一个函数 $y(x)$，均有一个确定的数 J 与之对应，那么就称 J 为依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记作

$$J = J[y(x)]，或简称 J$$

其中 $y(x)$ 称为泛函的宗量(自变量)。

二 容许函数类(空间)

满足一定条件的一类函数称为泛函的容许函数类(空间)。

例：所有在区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体是一函数空间，记 $C[a,b]$。

所有在区间 $[a,b]$ 上连续且一次可微函数的全体是一函数空间，记 $C^1[a,b]$

所有在区间 $[a,b]$ 上连续且二次可微函数的全体是一函数空间，记 $C^2[a,b]$

三 泛函的极值

最简单的一类函数

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y}) dx$$

对任何一条与 $y = y_0(x)$ 接近的曲线上，有

$$J[y(x)] - J[y_0(x)] \geq 0$$

则称 $J[y(x)]$ 在曲线上 $y_0(x)$ 上达到极小值。

1. 接近定义

两个函数具有零阶接近度：

$$\left| y(x) - y_0(x) \right| \leq \varepsilon, (x_1 \leq x \leq_2)$$

两个函数具有一阶接近度：

$$\left| y(x) - y_0(x) \right| \leq \varepsilon, (x_1 \leq x \leq_2)，\quad \left| \dot{y}(x) - \dot{y}_0(x) \right| \leq \varepsilon, (x_1 \leq x \leq_2)$$

当 $y(x)$ 为函数空间的一个点时，接近度可用点距来表示：

零阶距离 $$d_0(y, y_0) = \max_{a \leq x \leq b} \left| y(x) - y_0(x) \right|$$

一阶距离 $$d_1(y,y_0)=\max_{a\le x\le b}\{|y(x)-y_0(x)|,|\dot{y}(x)-\dot{y}_0(x)|\}$$

k 阶距离 $$d_k(y,y_0)=\max_{a\le x\le b}\{|y(x)-y_0(x)|\cdots|y^{(k)}(x)-{y_0}^{(k)}(x)|\}$$

2. 泛函的强相对极小

对于容许函数 $y_0(x)$ 的强领域

$$d_0(y,y_0)\le\varepsilon$$

总有 $J[y_0]\le J[y]$，则称泛函 $J[y]$ 在函数 $y_0(x)$ 上达到强相对极小。

3. 泛函的弱相对极小

对于容许函数 $y_0(x)$ 的弱领域

$$d_1(y,y_0)\le\varepsilon$$

总有 $J[y_0]\le J[y]$，则称泛函 $J[y]$ 在函数 $y_0(x)$ 上达到弱相对极小。

显然，强相对极小必为弱相对极小，反之不成立。

4. 泛函的变分

泛函的连续性：对于任何一个正数 ε，可以找到这样一个 δ

当 $$d(y,y_0)<\delta$$

时，就有

$$J[y(x)]-J[y_0(x)]<\varepsilon$$

那么，则称泛函 $J[y(x)]$ 在点 $y_0(x)$ 处是连续的。当 $d(y,y_0)=d_n(y,y_0)$ 时，称为 n 阶连续。

5. 线性泛函

连续泛函 $J[y(x)]$ 如果满足以下两个条件：

$$J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$$

$$J[cy(x)]=cJ[y(x)]$$

其中 c 是任意常数，则称为线性泛函。

6. 泛函的变分

若连续泛函 $J[y(x)]$ 的增量可以表示为

$$\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]=L[y(x),\delta y(x)]+r[y(x),\delta y(x)]$$

其中 L 是 $\delta(y)$ 的线性连续泛函，r 是关于 $\delta y(x)$ 的高阶无穷小，那么 L 叫做泛函的变分，

记为

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)]$$

也称为泛函的微分。

引理 2.1　　泛函 $J[y(x)]$ 的变化

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}$$

定理 2.1　若可微泛函 $J[y(x)]$ 在 $y_0(x)$ 上达到极小(大)值，则在 $y = y_0(x)$ 上有

$$\delta J = 0$$

例　求泛函

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

的变分。

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F[x, y + a\delta y, \dot{y} + \alpha \delta \dot{y}]\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [\frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}] dx$$

在上例中应用了宗量变分的导数等于导数变分的性质，即 $(\dot{\delta y}) = \delta \dot{y}$ 。

§2.2 欧拉方程

变分法上研究泛函极值的一种方法，为古典变分法。

拉格朗日问题：　求一容许函数 $x(t)$ ，使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

取最小值。

下面利用泛函 $J[x(t)]$ 达到极值的必要条件：$\delta J = 0$ ，导出欧拉方程。

引理：　设连续函数　$x = M(t)$ 对于任一具有下述性质的函数 $\eta(t)$

(1)　　在 $[t_0, t_f]$ 上，$\eta(t)$ 连续

(2)　　$\eta(t_o) = \eta(t_f) = 0$

总有　　$J = \int_{t_0}^{t_f} M(t) \eta(t) dt \equiv 0$

则对于 $t \in [t_0, t_f], M(t) = 0$ 。

定理：若最简单的泛函

$$J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t),\dot{x}(t))dt\text{；}\quad x(t_0)=x_0,x(t_f)=x_f$$

在曲线 $x=x(t)$ 处达到极值，则 $x=x(t)$ 必为欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$$

的解。

证明　因为泛函 $J[x(t)]$ 在 $x=x(t)$ 处达到极值，所以有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}(F_x\delta x+F_{\dot{x}}\delta\dot{x})dt=0$$

其中 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$

而 $$\int_{t_0}^{t_f}F_{\dot{x}}\delta\dot{x}dt=F_{\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\delta x\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})dt=-\int_{t_0}^{t_f}\delta x\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})dt$$

代入得 $$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}})\delta x\,dt=0$$

由引理可得 $$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$$

还可写成

$$F_x-F_{t\dot{x}}-\dot{x}F_{x\dot{x}}-\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}=0$$

欧拉方程是二阶常微分方程。两个积分常数由两个边界条件确定。

例　求泛函 $$J[x(t)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)dt$$

满足边界条件 $x(0)=0,x(\dfrac{\pi}{2})=1$ 的极值曲线。

解 $$F=\dot{x}^2-x^2\text{，}$$

欧拉方程为

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=-2x-2\ddot{x}=0$$

求得 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$，由边界条件可得 $C_1=0,C_1=1$。故得极值曲线为 $x=\sin t$。

含有多个未知函数的变分问题

$$J[X]=\int_{t_0}^{t_f}F(t,X,\dot{X})dt$$

其中　$X(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)]^T$

有相似结论

$$F_X-\frac{d}{dt}F_{\dot{X}}=0$$

边界条件为 $X(t_0)=X_0,X(t_f)=X_f$。

§2.3 条件极值的变分问题

问题： 求泛函 $J=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t),\dot{x}(t))dt$ 在约束条件

$$f(t,x,\dot{x})=0, f=[f_1,f_2,\cdots f_m]^T$$

求满足边界条件 $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$ 的极值。

求解步骤：

Step1:作系统 $J_0=\int_{t_0}^{t_f}[F(t,x(t),\dot{x}(t))+\lambda^T f(t,x(t),\dot{x}(t))]dt$

其中向量算子 $\lambda^T(t)=[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots\lambda_m(t)]$

Step2： 解欧拉方程

$$H_x-\frac{d}{dt}H_{\dot{x}}=0$$

其中 $H=F(t,x(t),\dot{x}(t))+\lambda^T f(t,x(t),\dot{x}(t))$

将欧拉方程与约束方程联合求解，可得 $x(t)$ 和 $\lambda(t)$，积分常数由边界条件确定。

§2.4 在一点处的变分

积分中值定理：

$f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号且可积，则有 ξ 满足

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)dx, a\le\xi\le b$$

下面建立泛涵 $J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x})dt$

在一点 $\bar{t}$ 处的变分概念如下：

设 $x=x(t)$ 与 $x=\bar{x}(t)$ 都属于 $C^1[t_0,t_1]$，且 $\bar{x}(t)=x(t)+\delta x(t)$

其中这样选取 $\delta(x)$ ：

（1） $\delta(x)\in C^1[t_0,t_1]$

（2） $\delta(x)$： 非零值 在 $\bar{t}$ 的零域 $(\bar{t}-\delta,\bar{t}+\delta)$ 之内

0 在 $\bar{t}$ 的零域 $(\bar{t}-\delta,\bar{t}+\delta)$ 之外

且 $\delta(x)$ 保持定号。

并设二曲线 $x = x(t)$ 与 $x = \bar{x}(t)$ 之间的小块面积

$$\sigma = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} [\bar{x}(t) - x(t)] dt = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} \delta x dt$$

设计的泛函增量

$$\Delta J = J[\bar{x}(t)] - J[x(t)] = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} [F(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) - F(t, x, \dot{x})] dt$$

由二元函数泰勒中值定理可得：

$$\Delta J = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} [\bar{F}_x \delta x + \bar{F}_{\dot{x}} \delta \dot{x}] dt = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} [\bar{F}_x - \frac{d}{dt} \bar{F}_{\dot{x}}] \delta x dt = [\bar{F}_x - \frac{d}{dt} \bar{F}_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} \delta x dt$$

$$= [\bar{F}_x - \frac{d}{dt} \bar{F}_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}'} \cdot \sigma$$

令小块 σ 向 $M(\bar{t}, x(\bar{t}))$ 点这样地收缩

（1）$[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$ 收缩到 $\bar{t}$，即 $\delta \to 0$

（2）曲线 $x = x(t)$ 与 $x = \bar{x}(t)$ 的一阶距离 $r[\bar{x}, x] \to 0$

$$[\bar{F}_x - \frac{d}{dt} \bar{F}_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}'} \to [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}}$$

或 $\quad [\bar{F}_x - \frac{d}{dt} \bar{F}_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}'} = [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}} + \varepsilon$，其中 ε 随 $\sigma \to 0$ 趋于零。

$$\Delta J = \left\{ [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}} + \varepsilon \right\} \cdot \sigma = [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}} \cdot \sigma + \varepsilon \sigma$$

称 $[F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}} \cdot \sigma$ 为泛函 J 在点 M 上的变分，

称 $\lim\limits_{\sigma \to 0} \frac{J[\bar{x}(t)] - J[x(t)]}{\sigma} = [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \Big|_{t=\bar{t}}$ 为 M 点导数。

多变量情况：

$\delta N \sum_{i=1}^{n} p_i (F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i}) \Big|_{t=\bar{t}}$ 为泛函在 M 点上的变分，其中 $P = [p_1, p_2 \cdots p_n]$，$\delta N$ 是 σ 的广义坐标。

§2.5 哈米顿原理

本节利用泛函的变分，推导力学中的一个基本变分原理-哈米顿原理。

考虑由 n 个质点组成的力学系：

n 个质点的质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，以 (x_i, y_i, z_i) 表示第 i 个质点的坐标。

以 T 表示这个系统的动能，则

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[\dot{x}_i^{\ 2}(t) + \dot{y}_i^{\ 2}(t) + \dot{z}_i^{\ 2}(t)]$$

以 $G = G(x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n)$ 表示系统的势能，则在第 i 个质点上，作用力的分量为

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}, \frac{\partial G}{\partial y_i}, \frac{\partial G}{\partial z_i}$$

再令第 i 个质点上的惯性力的分量为 ：

$$-m_i\ddot{x}_i(t), -m_i\ddot{y}_i(t), -m_i\ddot{z}_i(t)$$

达朗贝尔原则：

如果点所受的作用力增添惯性力，那么沿任何位移合成的微功等于零。

若设

$$\overline{F}_i = (\frac{\partial G}{\partial x_i} - m_i\ddot{x}_i(t))\vec{i} + (\frac{\partial G}{\partial y_i} - m_i\ddot{y}_i(t))\vec{j} + (\frac{\partial G}{\partial z_i} - m_i\ddot{z}_i(t))\vec{k}$$

$$\delta\vec{n}_i = \delta x_i\vec{i} + \delta y_i\vec{j} + \delta z_i\vec{k}$$

则有 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \cdot \delta\vec{n}_i = 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n}[(\frac{\partial G}{\partial x_i} - m_i\ddot{x}_i(t))\delta x_i + (\frac{\partial G}{\partial y_i} - m_i\ddot{y}_i(t))\delta y_i + (\frac{\partial G}{\partial z_i} - m_i\ddot{z}_i(t))\delta z_i)] = 0$$

记 $\delta n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2 + (\delta z_i)^2]}$， $p_i = \frac{\partial x_i}{\partial n}, q_i = \frac{\partial y_i}{\partial n}, r_i = \frac{\partial z_i}{\partial n}$

则有 $$\sum_{i=1}^{n}[(\frac{\partial G}{\partial x_i} - m_i\ddot{x}_i(t))p_i + (\frac{\partial G}{\partial y_i} - m_i\ddot{y}_i(t))q_i + (\frac{\partial G}{\partial z_i} - m_i\ddot{z}_i(t))r_i)] = 0$$

因为 G 只依赖于 x_i, y_i, z_i，所以

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0, \frac{\partial G}{\partial \dot{y}_i} = 0, \frac{\partial G}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

由于在曲线 $x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t)$ 上任一点，沿着方向 $(p_1, q_1, r_1 \cdots p_n, q_n, r_n)$

上的泛函 $J_1 = \int G dt$ 的微商为：

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial G}{\partial x_i}p_i+\frac{\partial G}{\partial y_i}q_i+\frac{\partial G}{\partial z_i}r_i)]$$

因为$\frac{\partial T}{\partial x_i}=\frac{\partial T}{\partial y_i}=\frac{\partial T}{\partial z_i}=0$，所以泛函$J_2=\int Tdt$的微商为：

$$-\sum_{i=1}^{n}m_i[\ddot{x}_i(t)p_i+\ddot{y}_i(t)q_i+\ddot{z}_i(t)r_i]$$

有$\delta\int(G+T)dt=0$，此即哈米顿原理。

在实际应用中，如果力场是保守场，则存在位势函数G，使：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-G)dt=0$$

§2.5 单元小结

变分的理解：

(1) $\delta J=\int[F_x\delta x+F_{\dot{x}}\delta\dot{x}]dt=\int[F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}]\delta xdt$

(2)

第三章 极大值原理

古典变分法的问题：

1.控制变量 u 没有约束条件，或只常有开集性的约束条件，而在最优控制问题中，都经常带有闭集性的约束条件，如$|u(t)| \le 1$，此时变分法不适用。

2.要求 F 和 f 都有足够的可微性，特别是要求$\dfrac{\partial F}{\partial u}$存在。

$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$这样的性能指标就排除在外了，而实际问题经常存在此情况，为克服上述困难，不少人作了许多努力，较成功的是庞特里雅金的最大值原理。

§3-1 自由末端的极大值原理

考虑定常的末值型性能指标、末态自由的控制问题。

定理 3.1 设$U(t) \in U$是一容许控制，指定末值型性能指标泛函为

$$J[U(\cdot)] = S[X(t_f)]$$

$X(t)$是定常系统

$$\dot{X}(t) = f(X,U), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

相应于$U(t)$的轨线。t_f为未知的末端时刻。

设$U^*(t)$和t_f^*是使性能指标最小的最优解，$X^*(t)$为相应的最优轨线，则必存在非零的 n 维向量函数$\overline{\lambda}(t)$，使得:

(1) $\overline{\lambda}(t)$是方程 $$\dot{\overline{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H(X, \overline{\lambda}, U)}{\partial X}$$

满足边界条件

(2) $$\overline{\lambda}(t_f) = \frac{\partial S(X(t_f))}{\partial X(t_f)}$$

的解。

其中，哈密顿函数为 $$H(X, \overline{\lambda}, U) \overset{\Delta}{=} \overline{\lambda}^T(t) f(X, U)$$

则有

(3) $$H(X^*(t), \overline{\lambda}(t), U^*(t)) = \min_{U(t) \in U} H(X^*(t), \overline{\lambda}(t), U(t)), \qquad t \in [t_0, t_f]$$

(4) $H\left(X^*(t),\overline{\lambda}(t),U^*(t)\right)=H\left(X^*\left(t_f^{\ *}\right),\overline{\lambda}\left(t_f^{\ *}\right),U^*\left(t_f^{\ *}\right)\right)=0$ 当 t_f 自由时

$H\left(X^*(t),\overline{\lambda}(t),U^*(t)\right)=H\left(X^*\left(t_f\right),\overline{\lambda}\left(t_f\right),U^*\left(t_f\right)\right)=const$ 当 t_f 固定时

说明:

1.容许控制条件的放宽 没有要求 $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ 存在

2.H 取全局最小值，而 t 是变分法中的极值

3.最优控制 $U^*(t)$ 使哈密顿函数 H 取最小值——“极小值原理”。

证明过程中，$\overline{H}=-H$ —— 均称“极大值原理”。以下沿用“极大值原理”的习惯叫法，实质上采用的是“极小值原理”。

4.定理 3.1 中的条件(1)、(2)称为协态方程（共轭方程）的横截条件。

先根据(3)、(4)作出 $U^*(t)$ 及 $t_f^{\ *}$，然后求解

$$\begin{cases}\dot{X}=\dfrac{\partial H\left(X,\overline{\lambda},U\right)}{\partial\overline{\lambda}}=f\left(X,U\right),X\left(t_0\right)=X_0\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H\left(X,\overline{\lambda},U\right)}{\partial X},\lambda\left(t_f\right)=\dfrac{\partial S\left[X\left(t_f\right)\right]}{\partial X\left(t_f\right)}\end{cases}$$

5.只给出必要条件

实际问题的解是否存在，如存在极大值原理的解又只有一个，则可以说，此解就是最优控制。

§3.2 极大值原理的证明

假设：

(1)函数 $f\left(X,U\right)$ 和 $S\left(X\right)$ 都是连续函数；

(2)函数 $f\left(X,U\right)$ 和 $S\left(X\right)$ 对 X 是连续可微（并不要求对 U 可微）；

(3)对任意 X_1、X_2，有一常数 a 使 $\left|f\left(X_1,U\right)-f\left(X_2,U\right)\right|\le a\left|X_1-X_2\right|$

1.泛函 J 的增量

令 t_f 固定

$$\begin{aligned}\Delta J&=J\left[U^*(\cdot)+\Delta U(\cdot)\right]-J\left[U^*(\cdot)\right]\\&=S\left[X^*\left(t_f\right)+\Delta X\left(t_f\right)\right]-S\left(X^*\left(t_f\right)\right)\\&=\frac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\Delta X\left(t_f\right)+o\left(\left|\Delta X\left(t_f\right)\right|\right)\end{aligned}\tag{3.2-1}$$

2.$\Delta X(t)$ 的表达式

$$\dot{X}^*(t)=f\left[X^*(t),U^*(t)\right]$$

$$\dot{X}^*(t)+\Delta\dot{X}(t)=f\left[X^*(t)+\Delta X(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{X}(t)&=f\left[X^*(t)+\Delta X(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]\\&=f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]+\frac{\partial f\left[X(t),U(t)\right]}{\partial X^T}\bigg|_{\substack{X=X^*\\U=U^*+\Delta U}}\cdot\Delta X(t)+o\left(\left|\Delta X(t)\right|\right)-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]\\&=\frac{\partial f\left[X^*(t),U^*(t)\right]}{\partial X^T}\cdot\Delta X(t)+\left\{f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]\right\}\\&+\left\{\frac{\partial f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]}{\partial X^T}-\frac{\partial f\left[X^*(t),U^*(t)\right]}{\partial X^T}\right\}\Delta X(t)+o\left(\left|\Delta X(t)\right|\right)\end{aligned}$$

(3.2-2)

令 $\Phi(\mathrm{t},\tau)$ 为线性方程 $$\Delta\dot{X}(t)=\frac{\partial f\left[X^*(t),U^*(t)\right]}{\partial X^T}\Delta X(t) \qquad (3.2\text{-}3)$$

的状态转移矩阵，则有 $$\begin{cases}\dfrac{d\Phi(t,\tau)}{dt}=\dfrac{\partial f\left[X^*(t),U^*(t)\right]}{\partial X^T}\Phi(t,\tau)\\ \Phi(\tau,\tau)=I\end{cases} \qquad (3.2\text{-}4)$$

因为 $\Delta X(t)$=0，故方程(3.2-2)的解为

$$\begin{aligned}\Delta X(t)=&\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\left\{f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)+\Delta U(\tau)\right]-f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau\\&+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\left\{\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(t)+\Delta U(\tau)\right]}{\partial X^T}-\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]}{\partial X^T}\right\}\Delta X(\tau)d\tau\\&+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\cdot o\left(\left|\Delta X(\tau)\right|\right)d\tau\end{aligned} \qquad (3.2\text{-}5)$$

当 $t=t_f$ 时，有

$$\begin{aligned}\Delta X(t_f)=&\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f,\tau)\left\{f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)+\Delta U(\tau)\right]-f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau\\&+\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f,\tau)\left\{\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(t)+\Delta U(\tau)\right]}{\partial X^T}-\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]}{\partial X^T}\right\}\Delta X(\tau)d\tau\\&+\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f,\tau)\cdot o\left(\left|\Delta X(\tau)\right|\right)d\tau\end{aligned} \qquad (3.2\text{-}6)$$

式(3.2-6)代入式(3.2-1)

$$\Delta J=\frac{\partial S\left[X^*(t_f)\right]}{\partial X^T(t_f)}\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f,\tau)\left\{f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)+\Delta U(\tau)\right]-f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$+\frac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\int_{t_0}^{t_f}\Phi\left(t_f,\tau\right)\left\{\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(t)+\Delta U(\tau)\right]}{\partial X^T}-\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]}{\partial X^T}\right\}\Delta X(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\int_{t_0}^{t_f}\Phi\left(t_f,\tau\right)\cdot o\left(\left|\Delta X(\tau)\right|\right)d\tau+o\left(\left|\Delta X\left(t_f\right)\right|\right) \tag{3.2-7}$$

3.对 $\Delta X(t)$ 的估计

由前式可知 $$\Delta\dot{X}(t)=f\left[X^*(t)+\Delta X(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]$$

$$\Delta X(t_0)=0$$

可得出 $$\Delta\dot{X}(t)=f\left[X^*(t)+\Delta X(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]$$

$$+f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]$$

由假设(3)，存在 $a>0$，$b(t)>0$

$$\left|f\left[X^*(t)+\Delta X(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]\right|\le a\left|\Delta X(t)\right|$$

$$\left|f\left[X^*(t),U^*(t)+\Delta U(t)\right]-f\left[X^*(t),U^*(t)\right]\right|\le b(t),t\in\left[t_0,t_f\right]$$

其中， $$b(t)=\begin{cases}0 & \Delta U(t)=0\text{时}\\ b & \Delta U(t)\ne 0\text{时}\end{cases}$$

可得出

$$\left|\Delta\dot{X}(t)\right|\le a\left|\Delta X(t)\right|+b(t) \tag{3.2-8}$$

引理 3.1 $$\frac{d}{dt}\left|\Delta X(t)\right|\le\left|\Delta\dot{X}(t)\right|$$

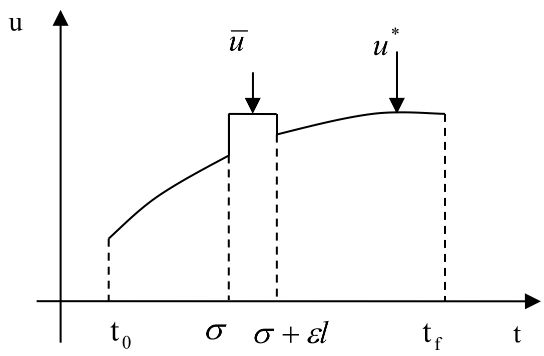
引理 3.2 $b(t)$ 分段连续，且 $b(t)\ge 0$，若 $\frac{d}{dt}x(t)\le ax(t)+b(t)$, 且 $x(t_0)=0$，则有

$$x(t)\le\int_{t_0}^{t}e^{a(t-\tau)}b(\tau)d\tau,\ t\in\left[t_0,t_f\right]$$

由引理 3.1 $$\frac{d}{dt}\left|\Delta X(t)\right|\le a\left|\Delta X(t)\right|+b(t)$$

有引理 3.2 $$\left|\Delta X(t)\right|\le\int_{t_0}^{t}e^{a(t-\tau)}b(\tau)d\tau \tag{3.2-9}$$

下面对 $\Delta U(t)$ 进行限定



$\Delta U(t)$针状变分：

1＞0 的某一确定数；
ε ＞0 是一个充分小的数 ；
σ 任意

$$U^*(t)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(t)=\begin{cases}U^*(t),t_0\le t<\sigma,\sigma+\varepsilon l<t\le t_f\\ \overline{U}(t),\sigma\le t\le\sigma+\varepsilon l\end{cases}$$

对$\mathrm{b}(\mathrm{t})$作变分可得

$$b(t)=\begin{cases}0 & t_0\le t<\sigma,\sigma+\varepsilon l<t\le t_f\\ b & \sigma\le t\le\sigma+\varepsilon l\end{cases}$$

于是(3.2-9)可变为

$$\begin{aligned}|\Delta X(t)|&\le\int_{t_0}^{t}e^{a(t-\tau)}b(\tau)d\tau\le\int_{t_0}^{t_f}e^{a(t_f-\tau)}b(\tau)d\tau\\&\le e^{at_f}\int_{t_0}^{t_f}b(\tau)d\tau=e^{at_f}\cdot bl\varepsilon\end{aligned}\tag{3.2-10}$$

上式表明$|\Delta X(t)|$与ε视同阶小量。

如果控制泛函增量为$\Delta_{\sigma\varepsilon}J$，则

$$\Delta_{\sigma\varepsilon}J=\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l}\frac{\partial S\left[X^*(t_f)\right]}{\partial X^T(t_f)}\Phi(t_f,\tau)\left\{f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]-f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$+\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l}\frac{\partial S\left[X^*(t_f)\right]}{\partial X^T(t_f)}\Phi(t_f,\tau)\left\{\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(t)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]}{\partial X^T}-\frac{\partial f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]}{\partial X^T}\right\}\Delta X(\tau)d\tau$$

$$+\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l}\frac{\partial S\left[X^*(t_f)\right]}{\partial X^T(t_f)}\Phi(t_f,\tau)\cdot o(|\Delta X(\tau)|)d\tau+o(|\Delta X(t_f)|)\tag{3.2-11}$$

式(3.2-11)后三项都是ε的高阶小量，故有

$$\Delta_{\sigma\varepsilon} J = \int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l} \frac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)} \Phi\left(t_f,\tau\right) \left\{f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]-f\left[X^*(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$+o(\varepsilon) \tag{3.2-12}$$

令
$$\overline{\lambda}^T(\tau)=\frac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\Phi\left(t_f,\tau\right) \tag{3.2-13}$$

则$\lambda(t)$必须满足状态方程 $\dot{X}(t)=f(X,U),X(t_0)=X_0,t\in\left[t_0,t_1\right]$

的共轭方程
$$\dot{\overline{\lambda}}(t)=-\frac{\partial f^T\left[X^*(t),U^*(t)\right]}{\partial X}\overline{\lambda}(t) \tag{3.2-14}$$

$$=-\frac{\partial H\left[X^*(t),\overline{\lambda},U^*(t)\right]}{\partial X} \tag{3.2-15}$$

其中
$$\begin{cases} H\left[X(t),\lambda(t),U(t)\right]=\overline{\lambda}^T f(X,U) \\ \overline{\lambda}\left(t_f\right)=\dfrac{\partial S\left[X^*\left(t_f\right)\right]}{\partial X\left(t_f\right)} \end{cases}$$

可得

$$\Delta_{\sigma\varepsilon} J = \int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l} \left\{H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]-H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$+o(\varepsilon) \tag{3.2-16}$$

4.极值条件的推证

因为$U^*(t)$为最优控制，即使 J 为最小值，故有

$$\Delta_{\sigma\varepsilon} J = \int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l} \left\{H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]-H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau+o(\varepsilon)$$

$$\geq 0 \tag{3.2-17}$$

根据中值定理及 H 的连续性，有

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon l} \left\{H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(\tau)\right]-H\left[X^*(\tau),\lambda(\tau),U^*(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$=\varepsilon\, l\left\{H\left[X^*(t_1),\lambda(t_1),U^*(t_1)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(t_1)\right]-H\left[X^*(t_1),\lambda(t_1),U^*(t_1)\right]\right\}d\tau \tag{3.2-18}$$

其中$t_1=\sigma+\theta\varepsilon l$，$0\leq\theta\leq 1$。

由(3.2-17)和(3.2-18)得

$$l\left\{H\left[X^*(t_1),\lambda(t_1),U^*(t_1)+\Delta_{\sigma\varepsilon}U(t_1)\right]-H\left[X^*(t_1),\lambda(t_1),U^*(t_1)\right]\right\}+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\geq 0$$

当$\varepsilon\to 0$时，有

$$H\left[X^*(\sigma),\lambda(\sigma),\overline{U}(\sigma)\right]-H\left[X^*(\sigma),\lambda(\sigma),U^*(\sigma)\right]\geq 0 \tag{3.2-19}$$

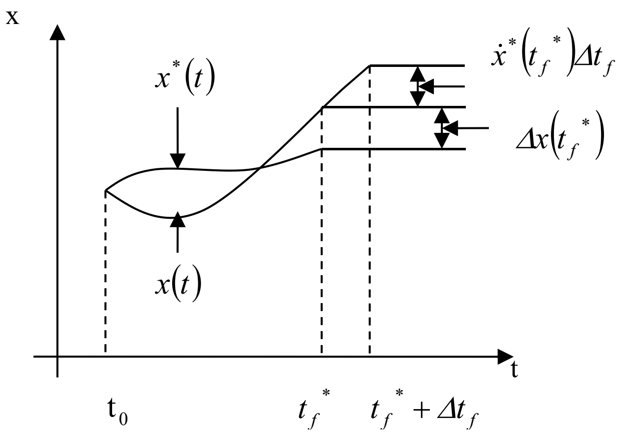
或 $$H\left[X^*(\sigma),\lambda(\sigma),U^*(\sigma)\right]\le H\left[X^*(\sigma),\lambda(\sigma),\overline{U}(\sigma)\right] \tag{3.2-20}$$

考虑到σ，$\overline{U}$ 的任意性，故有

$$H\left[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)\right]=\min_{U(t)\in U} H\left[X^*(t),\lambda(t),U(t)\right] \tag{3.2-21}$$

5. Δt_f 的考虑

以上假设t_f固定，令$t_f = {t_f}^* + \Delta t_f$，$\Delta t_f = \varepsilon T_1$，$T_1$为任意实数.



由式(3.2-1)

$$\Delta J = \frac{\partial S\left[X^*\left({t_f}^*\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\Delta X\left(t_f\right) + o\left(\left|\Delta X\left(t_f\right)\right|\right)$$

$$\Delta X\left(t_f\right) = \Delta X\left({t_f}^*\right) + \dot{X}^*\left({t_f}^*\right)\Delta t_f$$

可得出

$$\Delta J = \frac{\partial S\left[X^*\left({t_f}^*\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}[\,\Delta X\left({t_f}^*\right) + \dot{X}^*\left({t_f}^*\right)\Delta t_f\,] + o(\varepsilon)$$

$$= \frac{\partial S\left[X^*\left({t_f}^*\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)} f\left[X^*\left({t_f}^*\right),U^*\left({t_f}^*\right)\right]\varepsilon T_1$$

$$+ \frac{\partial S\left[X^*\left({t_f}^*\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)}\cdot\Delta X\left({t_f}^*\right) + o(\varepsilon) \ge 0 \tag{3.2-22}$$

考虑到T_1的任意性（可正可负）

$$\frac{\partial S\left[X^*\left({t_f}^*\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)} f\left[X^*\left({t_f}^*\right),U^*\left({t_f}^*\right)\right]$$

$$= \lambda^T\left(t_f^{\,*}\right) f\left[X^*\left(t_f^{\,*}\right), U^*\left(t_f^{\,*}\right)\right]$$

$$= H\left[X^*\left(t_f^{\,*}\right), \lambda^*\left(t_f^{\,*}\right),\ U^*\left(t_f^{\,*}\right)\right] = 0 \tag{3.2-23}$$

式(3.2-22)变为

$$\Delta J = \frac{\partial S\left[X^*\left(t_f^{\,*}\right)\right]}{\partial X^T\left(t_f\right)} \Delta X\left(t_f^{\,*}\right) + o(\varepsilon) \geq 0 \tag{3.2-24}$$

与 1-4 一样，同样可得式(3.2-21)

另外还可以证明

$$H\left[X^*(t), \lambda(t), U^*(t)\right] = const = \begin{cases} 0 & t_f 自由 \\ 常数 & t_f 固定 \end{cases} \tag{3.2-25}$$

§3-3 极大值原理的几种具体形式

一 非定常情况——f、s 等显含时间 t 或 t_f

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U, t), X(t_0) = X_0 \\ J\left[U(\cdot), t_f\right] = S\left[X(t_f), t_f\right] \end{cases}$$

定理 3.2　设 $U(t) \in U$，指定末值性能指标泛函为

$$J\left[U(\cdot)\right] = S\left[X(t_f), t_f\right]$$

$X(t)$是非定常系统

$$\dot{X} = f(X, U, t),\quad X(t_0) = X_0,\quad t \in \left[t_0, t_f\right],\quad t_f 未知$$

对应于$U(t)$的轨线。

则当$U^*(t)$和$t_f^{\,*}$为使性能指标取最小值的最优解，$X^*(t)$是对应的最优轨线，必有在 n 维向量函数$\lambda(t)$，使$U^*(t)$，$X^*(t)$，$t_f^{\,*}$和$\lambda^*(t)$满足如下条件（为简单计，在不致引起混淆的地方“*”号常省略）：

（i） $X(t)$，$\lambda(t)$满足规范方程

$$\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{\partial H(X, \lambda, U, t)}{\partial \lambda} = f(X, U, t), X(t_f) = X_0 \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H(X, \lambda, U, t)}{\partial X} \end{cases}$$

(ii) 在状态轨线的末端满足横截条件，即

$$\lambda\left(t_f\right)=\frac{\partial S\left[X\left(t_f\right),t_f\right]}{\partial X\left(t_f\right)}$$

(iii)　H 作为 $\mathrm{U}(\mathrm{t})\in\mathrm{U}$ 的函数，在 $\mathrm{U}(\mathrm{t})\in\mathrm{U}^*(\mathrm{t})$ 时取绝对值最小，即

$$H\left[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t\right]=\min_{U(t)\in U}H\left[X^*(t),\lambda(t),U(t),t\right],\quad t\in\left[t_0,t_f\right]$$

或 $H\left[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t\right]\le H\left[X^*(t),\lambda(t),U(t),t\right],\quad U(t)\in U$

(iv)　在最优轨线的末端 H 满足

$$H\left[X^*\left(t_f^{\ *}\right),\lambda\left(t_f^{\ *}\right),U^*\left(t_f^{\ *}\right),t_f^{\ *}\right]=-\frac{\partial S\left[X^*\left(t_f^{\ *}\right),t_f^{\ *}\right]}{\partial t_f}$$

(ⅴ)　沿最优轨线 H 满足

$$H\left[X(t),\lambda(t),U(t),t\right]=H\left[X\left(t_f\right),\lambda\left(t_f\right),U\left(t_f\right),t_f\right]+\int_{t_f}^{t}\frac{\partial H\left[X(\tau),\lambda(\tau),U(\tau),\tau\right]}{\partial\tau}d\tau$$

证明：引入一新的辅助变量 $x_{n+1}=t$

$$\dot{x}_{n+1}=1,\quad x_{n+1}\left(t_0\right)=t_0\quad,\quad x_{n+1}\left(t_f\right)=t_f$$

记　$\overline{X}=\begin{bmatrix}X\\X_{n+1}\end{bmatrix}$，$\bar{f}=\begin{bmatrix}f\\1\end{bmatrix}$，$\overline{X}\left(t_0\right)=\begin{bmatrix}X_0\\t_0\end{bmatrix}=\overline{X}_0$

原非定常问题可转化为如下定常问题：

$$\begin{cases}\dot{\overline{X}}=\bar{f}\left(\overline{X},U\right),\overline{X}\left(t_0\right)=X_0\\J=S\left[\overline{X}\left(t_f\right)\right]=S\left[X\left(t_f\right),X_{n+1}\left(t_f\right)\right]\end{cases}$$

令 $\overline{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda_{n+1}\end{bmatrix}$

则上述定常问题的哈密顿函数为:

$$\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)=\overline{X}^T\bar{f}=H\left(X,\lambda,U,t\right)+\lambda_{n+1}$$

其中，　$H\left(X,\lambda,U,t\right)\overset{\Delta}{=}X^Tf\left(X,U,t\right)$

由定理 3.1 中条件(1)得

$$\dot{\overline{\lambda}}=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}\\\dot{\lambda}_{n+1}\end{bmatrix}=-\frac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial\overline{X}}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H\left(X,\lambda,U,t\right)}{\partial X}\\\dfrac{\partial H\left(X,\lambda,U,t\right)}{\partial X_{n+1}}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H\left(X,\lambda,U,t\right)}{\partial X}\\\dfrac{\partial H\left(X,\lambda,U,t\right)}{\partial t}\end{bmatrix}$$

从而得

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H(X,\lambda,U,t)}{\partial X} \qquad (3.2\text{-}1)$$

$$\dot{\lambda}_{n+1}=-\frac{\partial H(X,\lambda,U,t)}{\partial t} \qquad (*)$$

显然有
$$\dot{X}=\frac{\partial H(X,\lambda,U,t)}{\partial \lambda}=f(X,U,t) \qquad (3.2\text{-}3)$$

从而证明了条件（i）。

由定理 3.1 中条件(2)
$$\overline{\lambda}(t_f)=\frac{\partial S[\overline{X}(t_f)]}{\partial \overline{X}(t_f)}$$

可得
$$\begin{bmatrix}\lambda(t_f)\\ \lambda_{n+1}(t_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial S[\overline{X}(t_f)]}{\partial X(t_f)}\\ \dfrac{\partial S[\overline{X}(t_f)]}{\partial X_{n+1}(t_f)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial S[X(t_f),t_f]}{\partial X(t_f)}\\ \dfrac{\partial S[X(t_f),t_f]}{\partial t_f}\end{bmatrix}$$

从而得
$$\lambda(t_f)=\frac{\partial S[X(t_f),t_f]}{\partial X(t_f)} \qquad (3.3\text{-}3)$$

$$\lambda_{n+1}(t_f)=\frac{\partial S[X(t_f),t_f]}{\partial t_f} \qquad (3.3\text{-}4)$$

从而证明了条件（ii）。
由定理 3.1 中的极小值条件，有
$$\overline{H}[\overline{X}^*(t),\overline{\lambda}(t),U^*(t)]=\min_{U(t)\in U}\overline{H}[\overline{X}^*(t),\overline{\lambda}(t),U(t)]$$

即
$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t]+\lambda_{n+1}(t)=\min_{U(t)\in U}H[X^*(t),\lambda(t),U(t),t]+\lambda_{n+1}(t)$$

可得
$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t]=\min_{U(t)\in U}H[X^*(t),\lambda(t),U(t),t] \qquad (3.3\text{-}5)$$

从而证明了条件(iii)。
再由定理 3.1 中的条件(4)的第一式，可得
$$\overline{H}[\overline{X}^*(t_f^*),\overline{\lambda}(t_f^*),U^*(t_f^*)]=H[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),U^*(t_f^*),t_f^*]+\lambda_{n+1}(t_f^*)=0$$

考虑到式(3.3-4)，故得
$$H[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),U^*(t_f^*),t_f^*]=-\frac{\partial S[X^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f} \qquad (3.3\text{-}6)$$

证明条件(iv)。

再由条件(4)第二式
$$\overline{H}[\overline{X}^*(t),\overline{\lambda}(t),U^*(t)]=\overline{H}[\overline{X}^*(t_f),\overline{\lambda}(t_f),U^*(t_f)]$$

即
$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t]=H[X^*(t_f),\lambda(t_f),U^*(t_f),t_f]+\lambda_{n+1}(t_f)-\lambda_{n+1}(t) \qquad (3.3\text{-}7)$$

将式(*)积分可得

$$\lambda_{n+1}(t_f) - \lambda_{n+1}(t) = -\int_t^{t_f} \frac{\partial H(X,\lambda,U,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

式(3.3-7)可化为

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t] = H[X^*(t_f),\lambda(t_f),U^*(t_f),t_f] + \int_{t_f}^{t} \frac{\partial H(X,\lambda,U,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

证明条件（ｖ）。

结论：

①比较定理３.２与定理３.１，非定常性并没有改变极大值原理中规范方程、横截条件及极值条件；

②不同之处在于

１．在最优轨线末端Ｈ值不同；

２．沿最优轨线Ｈ值不同。

定常情况为常数，非定常系统不是常数。

③条件⑸不是最优控制的最优条件，ｉ～ⅳ才是必要条件。

二 积分型性能指标

定理 ３.３　设$U(t)\in U$是一容许控制，指定积分型性能指标泛函为

$$\mathrm{J}[\mathrm{U}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{L}[\mathrm{X}(t),\mathrm{U}(t)]dt$$

$X(t)$是定常系统　　$\dot{X} = f(X,U)$，$X(t_0) = X_0$，$t\in[t_0,t_f]$，t_f未定

对应于$U(t)$的轨线。

则当$U^*(t)$和t_f^*为使性能指标Ｊ取最小值的最优解，$X^*(t)$是对应的最优轨线。必存在ｎ维向量函数$\lambda(t)$，使$U^*(t)$、t_f^*、$X^*(t)$和$\lambda(t)$满足如下条件：

（ｉ）　$X(t)$、$\lambda(t)$满足规范方程

$$\dot{X} = \frac{\partial H(X,U,\lambda)}{\partial \lambda} f(X,U), \quad X(t_0) = X_0$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H(X,U,\lambda)}{\partial X}$$

其中，　　$\mathrm{H}(\mathrm{X},\lambda,\mathrm{U}) \overset{\Delta}{=} \mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{U}) + \lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{f}(\mathrm{X},\mathrm{U})$

（ⅱ）在最优轨线末端满足横截条件，即$\lambda(t_f) = 0$　　亦称为自然边界条件。

（ⅲ）Ｈ作为$U(t)\in U$的函数，在$U(t) = U^*(t)$时取绝对极小，即

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)] = \min_{U(t)\in U} H[X^*(t),\lambda(t),U(t)]$$

（ⅳ）在最优轨线的末端Ｈ应满足

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)] = H[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),U^*(t_f^*)] = 0，\ t_f \text{未定；}$$

$$H\left[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)\right]=H\left[X^*(t_f),\lambda(t_f),U^*(t_f)\right]=const\text{，}\ t_f\text{固定。}$$

证明： 引入一辅助变量，使满足

$$\dot{x}_0=L\left[X(t),U(t)\right]\text{，}\quad X(t_0)=0$$

$$x_0(t)=\int_{t_0}^{t}L\left[X(t),U(t)\right]dt$$

$$x_0(t_f)=\int_{t_0}^{t_f}L\left[X(t),U(t)\right]dt=J\left[U(\cdot)\right]$$

记
$$\overline{X}=\begin{bmatrix}x_0\\X\end{bmatrix}\text{，}\quad \bar{f}=\begin{bmatrix}L\\f\end{bmatrix}\text{，}\quad \overline{X}(t_0)=\begin{bmatrix}0\\X_0\end{bmatrix}=\overline{X}_0$$

令原积分型性能指标化为如下定常末值型性能指标问题：

$$\begin{cases}\dot{\overline{X}}=\bar{f}\left(\overline{X},U\right),\overline{X}(t_0)=\overline{X}_0\\ J\left[U(\cdot)\right]=x_0(t_f)=S\left[\overline{X}(t_f)\right]\end{cases}$$

令 $\overline{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_0\\\lambda\end{bmatrix}$

定义
$$\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)\overset{\Delta}{=}\overline{\lambda}^T\bar{f}\left(\overline{X},U\right)=\lambda_0L\left(X,U\right)+\lambda^Tf\left(X,U\right)$$

由定理 3.1
$$\dot{\overline{\lambda}}=-\frac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial\overline{X}}$$

即
$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_0\\\dot{\lambda}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial X_0}\\\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial X}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial X}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_0=const \tag{3.3-8}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)}{\partial X} \tag{3.3-9}$$

由定理 3.1 中条件 2/的横截条件可得
$$\overline{\lambda}(t_f)=\frac{\partial S\left[\overline{X}(t_f)\right]}{\partial\overline{X}(t_f)}$$

即
$$\begin{bmatrix}\lambda_0(t_f)\\\lambda(t_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial S\left[\overline{X}(t_f)\right]}{\partial X_0(t_f)}\\\dfrac{\partial S\left[\overline{X}(t_f)\right]}{\partial X(t_f)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

由此可得
$$\lambda_0(t_f)=1 \tag{3.3-10}$$

$$\lambda\left(t_f\right)=0 \tag{3.3-11}$$

条件ⅱ/得证。

由式(3.3-8)及(3.3-10)可得

$$\lambda_0(t)=\lambda_0\left(t_f\right)=1 \tag{3.3-12}$$

相应的哈密顿函数为

$$\overline{H}\left(\overline{X},\overline{\lambda},U\right)=L(X,U)+\lambda^T f(X,U)\overset{\Delta}{=}H(X,\lambda,U) \tag{3.3-13}$$

证明了条件ⅰ/。

由定理 3.1 极值条件

$$\overline{H}\left(\overline{X}^*,\overline{\lambda},U^*\right)=\min_{U(t)\in U}\overline{\mathrm{H}}\left(\overline{\mathrm{X}}^*,\overline{\lambda},\mathrm{U}\right) \tag{3.3-14}$$

$$H\left(X^*,\lambda,U^*\right)=\min_{U(t)\in U}H\left(X^*,\lambda,U\right) \tag{3.3-15}$$

证明了条件ⅲ/。

由式(3.3-13)及定理 3.1 条件 4/，即可得条件ⅳ/。

定理 3.3 得证。

从定理 3.3 中可以看出，积分型性能指标改变了 H，与末值型的 H 不同，若

$$J[U(\cdot)]=S\left[X\left(t_f\right)\right]+\int_{t_0}^{t_f}L[X,U]dt$$

可得 $$H(X,\lambda,U)=L(X,U)+\lambda^T f(X,U)$$

与积分型的一样，不同点 $$\lambda\left(t_f\right)=\frac{\partial S\left[X\left(t_f\right)\right]}{\partial X\left(t_f\right)}$$

§3-4 约束条件的处理

一、末态约束问题

设末态 $X\left(t_f\right)$受如下等式和不等式约束

$$g_1\left[X\left(t_f\right)\right]=0 \tag{3.4-1}$$

$$g_2\left[X\left(t_f\right)\right]\le 0 \tag{3.4-2}$$

其中，

$$g_1=\left[g_{11}\left(X\left(t_f\right)\right),g_{12}\left(X\left(t_f\right)\right),\cdots,g_{1p}\left(X\left(t_f\right)\right)\right]^T$$

$$g_2=\left[g_{21}\left(X\left(t_f\right)\right),g_{22}\left(X\left(t_f\right)\right),\cdots,g_{2q}\left(X\left(t_f\right)\right)\right]^T$$

若性能指标中含有末值项时， $p<n$,否则 $p\le n$，维数 q 不受限制。g_1和g_2对其自变量都是连续可微的。

定理 3.4 设$U(t)\in U$是一容许控制，指定末值型性能指标泛函为

$$J[U(\cdot)]=S[X(t_f)]$$

$X(t)$是定常系统 $\dot{X}=f(X,U)$，$\mathrm{X}(\mathrm{t}_0)=\mathrm{X}_0$，$t\in[t_0,t_f]$

对应于$U(t)$的轨线。t_f是状态轨线$X(t)$与目标集 $M:\begin{array}{l}g_1[X(t_f)]=0\\ g_2[X(t_f)]\le 0\end{array}$

首次相遇的末态时刻。

则当$\mathrm{U}^*(\mathrm{t})$和t_f^*为使性能指标泛函最小的最优解，$X^*(t)$是对应的最优轨线。必存在不同时为零的常向量 u、v 及 n 维向量函数$\lambda(t)$，使得$\mathrm{U}^*(\mathrm{t})$，t_f^*，$X^*(t)$和$\lambda(t)$满足下列必要条件。

(i) $X(t)$，$\lambda(t)$是规范方程

$$\begin{cases}\dot{X}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(X,U),X(t_0)=X_0\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial X}\end{cases}$$

的解，其中，$H(X,\lambda,U)\overset{\Delta}{=}\lambda^T f(X,U)$

（ii） 在最优轨线的末端协态变量$\lambda(\mathrm{t_f})$横截于目标集，即

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial S[X(t_f)]}{\partial X(t_f)}+\frac{\partial g_1{}^T[X(t_f)]}{\partial X(t_f)}u+\frac{\partial g_2{}^T[X(t_f)]}{\partial X(t_f)}v$$

其中，$\mathrm{v_i}\ge 0$，$v_i g_{2i}[X(t_f)]=0$，$i=1,2,\cdots,q$

并且，末态$X(t_f)$要落在目标集上，即满足 $\begin{cases}g_1[X(t_f)]=0\\ g_2[X(t_f)]\le 0\end{cases}$

(iii) H 作为$U(t)\in U$的函数，在$U(t)=U^*(t)$时取绝对极小，即

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)]=\min_{U(t)\in U} H[X^*(t),\lambda(t),U(t)]$$

(iv) 在最优轨线的末端 H 应满足

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)]=H[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),U^*(t_f^*)]=0\text{，}\quad t_f\text{ 未定；}$$

$$H[X^*(t),\lambda(t),U^*(t)]=H[X^*(t_f),\lambda(t_f),U^*(t_f)]=const\text{，}\quad t_f\text{ 固定。}$$

非定常情况。

定理 3.5 设$U(t)\in U$是一容许控制，指定末值型性能指标泛函为 $J[U(\cdot)]=S\left[X(t_f),t_f\right]$

$X(t)$是非定常系统 $\dot{X}=f(X,U,t)$，$X(t_0)=X_0$，$t\in\left[t_0,t_f\right]$

对应于$U(t)$的轨线。t_f是状态轨线$X(t)$与运动目标集 M： $\begin{matrix} g_1\left[X(t_f),t_f\right]=0 \\ g_2\left[X(t_f),t_f\right]\le 0 \end{matrix}$

首次相遇的末态时刻。

则当$U^*(t)$和t_f^*为使性能指标泛函最小的最优解，$X^*(t)$是对应的最优轨线。必存在不同时为零的常向量 u、v 及 n 维向量函数$\lambda(t)$，使得$U^*(t)$，t_f^*，$X^*(t)$和$\lambda(t)$满足下列必要条件：

(ⅰ) $X(t)$，$\lambda(t)$是规范方程 $\begin{cases} \dot{X}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(X,U,t),X(t_0)=X_0 \\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial X} \end{cases}$

的解，其中， $H(X,\lambda,U,t)\overset{\Delta}{=}\lambda^T f(X,U,t)$

(ⅱ)在最优轨线的末端协态变量$\lambda(t_f)$横截于目标集，即

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial S\left[X(t_f),t_f\right]}{\partial X(t_f)}+\frac{\partial g_1{}^T\left[X(t_f),t_f\right]}{\partial X(t_f)}u+\frac{\partial g_2{}^T\left[X(t_f),t_f\right]}{\partial X(t_f)}v$$

其中，$v_i\ge 0$，$v_i g_{2i}\left[X(t_f),t_f\right]=0$，$i=1,2,\cdots,q$

并且，末态$X(t_f)$要落在目标集上，即满足 $\begin{cases} g_1\left[X(t_f),t_f\right]=0 \\ g_2\left[X(t_f),t_f\right]\le 0 \end{cases}$

(ⅲ) H 作为$U(t)\in U$的函数，在$U(t)=U^*(t)$时取绝对极小，即

$$H\left[X^*(t),\lambda(t),U^*(t),t\right]=\min_{U(t)\in U} H\left[X^*(t),\lambda(t),U(t),t\right]$$

(ⅳ) 在最优轨线的末端 H 应满足

$$H\left[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),U^*(t_f^*),t_f^*\right]$$
$$=-\frac{\partial S\left[X^*(t_f^*),t_f^*\right]}{\partial t_f}-u^T\frac{\partial g_1\left[X^*(t_f^*),t_f^*\right]}{\partial t_f}-v^T\frac{\partial g_2\left[X^*(t_f^*),t_f^*\right]}{\partial t_f}$$

(ⅴ) 沿最优轨线 H 满足

$$H\left[X(t),\lambda(t),U(t),t\right]=H\left[X(t_f),\lambda(t_f),U(t_f),t_f\right]+\int_{t_f}^{t}\frac{\partial H(X(\tau),\lambda(\tau),U(\tau),\tau)}{\partial \tau}d\tau$$

二 有积分限制的问题

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X,U), X(t_0) = X_0, t \in [t_0, t_f], U(t) \in U \\ J[U(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} L(X,U)dt, L \in R^l \\ J_1 = \int_{t_0}^{t_f} L_1(X,U)dt = 0, L_1 \in R^k \\ J_2 = \int_{t_0}^{t_f} L_2(X,U)dt = 0, L_2 \in R^l \end{cases}$$

定理 3.6 设$U(t) \in U$是一容许控制，指定积分型性能指标泛函为$J[U(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} L(X,U)dt$

$X(t)$是定常系统 $\dot{X} = f(X,U)$，$\mathrm{X}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{X}_0$，$t \in [t_0, t_f]$

对应于$U(t)$的轨线。t_f是未知的

当$U^*(t)$和t_f^*为使性能指标泛函最小的最优解，且满足积分型约束

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} L_1(X,U)dt = 0$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} L_2(X,U)dt \le 0$$

$X^*(t)$是相应的最优轨线，则必存在不同时为零的常向量λ_1、λ_2及 n 维向量函数$\lambda(t)$，使得$U^*(t)$，t_f^*，$X^*(t)$，λ_1，λ_2和$\lambda(t)$满足：

（i） $\mathrm{X}(\mathrm{t})$，$\lambda(t)$是规范方程 $\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(X,U), X(t_0) = X_0 \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial X} \end{cases}$

的解，其中，$H(X,U,\lambda_1,\lambda_2,\lambda) \overset{\Delta}{=} L(X,U) + \lambda^T f(X,U) + \lambda_1{}^T L_1(X,U) + \lambda_2{}^T L_2(X,U)$

常向量λ_2应满足 $v_{2i} \ge 0$，$\lambda_{2\mathrm{i}}\mathrm{J}_{2\mathrm{i}} = 0$，$i = 1,2,\cdots,l$

（ii） 在最优轨线的末端协态变量$\lambda(t_f)$满足自然边界条件 $\lambda(t_f)$=0

并且满足积分约束$\begin{cases} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} L_1(X,U)dt = 0 \\ J_2 = \int_{t_0}^{t_f} L_2(X,U)dt = 0 \end{cases}$

(iii) 沿最优轨线当$U(t) = U^*(t)$时，H 取最小值

$$H[X^*(t),\lambda(t),\lambda_1,\lambda_2,U^*(t)] = \min_{U(t) \in U} H[X^*(t),\lambda(t),\lambda_1,\lambda_2,U(t)]$$

(iv) 在最优轨线的末端 H 应满足

$H[X^*(t),\lambda(t),\lambda_1,\lambda_2,U^*(t)] = H[X^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),\lambda_1,\lambda_2,U^*(t_f^*)] = 0$，$t_f$未定；

$$H\left[X^*(t),\lambda(t),\lambda_1,\lambda_2,U^*(t)\right]=H\left[X^*(t_f),\lambda(t_f),\lambda_1,\lambda_2,U^*(t_f)\right]=const$$，t_f 固定。

§3.5 有限推力火箭的最大射程控制

P144 自学

例：设给定的系统为 $\begin{cases}\dot{x}_1=u_1\\ \dot{x}_2=x_1+u_2\end{cases}$

边界条件 $\begin{matrix}x_1(0)=x_2(0)=0\\ x_1(1)=x_2(1)=1\end{matrix}$

求最优控制 u_1、u_2 及最优轨线 x_1、x_2，使 $J=\int_0^1\left(x_1+{u_1}^2+{u_2}^2\right)dt$ 取极小值。

解：一种重要的特殊情况：终态 $X(t_f)$ 固定时，$\lambda(t_f)$ 自由；

$X_i(t_f)$ 固定时，$\lambda_i(t_f)$ 自由；

$X_i(t_f)$ 自由时，$\lambda_i(t_f)$ 固定。

应用定理 3.3

$$H=L(X,U)+X^T f(X,U)=x_1+{u_1}^2+{u_2}^2+\lambda_1 u_1+\lambda_2(x_1+u_2)$$

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=-(1+\lambda_2)\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=0\end{cases}$$

可得 $\begin{cases}\lambda_1=-(1+a)t+b\\ \lambda_2=a\end{cases}$

a, b 为待定系数

1．u_1 和 u_2 无约束 $\dfrac{\partial H}{\partial u_1}=\dfrac{\partial H}{\partial u_2}=0$ $\begin{cases}u_1=-\dfrac{\lambda_1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left[-(1+a)t+b\right]\\ u_2=-\dfrac{\lambda_2}{2}=-\dfrac{a}{2}\end{cases}$

代入方程可得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{4}(1+a)t^2-\dfrac{b}{2}t+c\\ x_2=\dfrac{1}{12}(1+a)t^3-\dfrac{b}{4}t^2+\left(c-\dfrac{a}{2}\right)t+d\end{cases}$

代入边界条件 $\Rightarrow a=-1,b=-2,c=d=0$ 即

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

J=1.75

2. u_1无约束$u_2 \le \frac{1}{4}$

对u_2来说，H 的最小值发生在$u_2 = -\frac{a}{2}$处，而 a 未知，由 1 知，$a = -1$，$u_2 = \frac{1}{2}$，依此推断，H 的最小值应发生在$u_2 = \frac{1}{4}$处。

因此，取$u_2 = \frac{1}{4}$

u_1无约束，仍取
$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2}\left[-(1+a)t + b\right] \\ u_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

代入方程得
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}(1+a)t^2 - \dfrac{b}{2}t + c \\ x_2 = \dfrac{1}{12}(1+a)t^3 - \dfrac{b}{4}t^2 + \left(c + \dfrac{1}{4}\right)t + d \end{cases}$$

由边界条件$\Rightarrow a = -7, b = -5, c = d = 0$

由于
$$-\frac{1}{2} = \frac{7}{2} > \frac{1}{4},$$

故取$u_2 = \frac{1}{4}$是正确的。

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}(5 - 6t) \\ u_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(5t - 3t^2\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{5}{4}t^2 - \dfrac{1}{2}t^3 \end{cases}$$

J=$2\frac{9}{16}$

第四章 时间、燃料最优

§4.1 Bang—Bang 控制原理

问题 4.1 移动目标集的时间最优问题
已知受控系统的状态方程为

$$\dot{X}(t)=f[X(t),t]+B[X(t),t]U(t) \tag{4.1-1}$$

f ，B 对 x ，t 连续可微，

寻找满足下列不等式约束的 r 维容许控制向量$U(t)$

$$\left|U_j(t)\right|\le 1 \qquad \text{j=1,2……, r} \tag{4.1-2}$$

使系统（4.1-1）从已知初态 $X(t_0)=X_0$ （4.1-3）

出发，在某一个末态时刻$T>t_0$，首次达到目标集$g[X(T),T]=0$ （4.1-4）

g 是 p 维向量函数，g 对 X，T 连续可微，同时使$J[U(.)]=\int_{t_0}^{T}1dt=T-t_0=\min$ （4.1-5）

一般表达式为 $$J[U(.)]=S[X(T),T]+\int_{t_0}^{T}L[X(t),U(t),t]dt$$

对于（4.1-5），S=0，L=1 ，也可取 S=T-t_0, L=0, 由极大值原理得必要条件相同。

① 问题 4.1 的哈密顿函数 $H=1+\lambda^T(t)f[X(t),t]+\lambda^T(t)B[X(t),t]U(t)$ （4.1-6）

② 规范方程、边界及横截条件

$$\dot{X}(t)=\frac{\partial H}{\partial\lambda}f[X(t),t]+B[X(t),t]U(t) \tag{4.1-7}$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial X}=-\frac{\partial f^T[X(t),t]}{\partial X(t)}\lambda(t)-\frac{\partial\{B[X(t),t]U(t)\}^T}{\partial X(t)}\lambda(t) \tag{4.1-8}$$

$$X(t_0)=X_0 \qquad g[X(T),T]=0 \tag{4.1-9}$$

$$\lambda(T)=\frac{\partial g^T[X(T),T]}{\partial X(T)}\mu \tag{4.1-10}$$

③ 极值条件

$$\begin{aligned}&1+\lambda^T(t)f[X^*(t),t]+\lambda^T(t)B[X^*(t),t]U^*(t)\\&=\min_{\left|U_j(t)\right|\le 1}\{1+\lambda^T(t)f[X^*(t),t]+\lambda^T(t)B[X^*(t),t]U^*(t)\}\end{aligned}$$

等价于

$$\lambda^T(t)B[X^*(t),t]U^*(t)=\min_{|U_j(t)|\le 1}\{\lambda^T(t)B[X^*(t),t]U^*(t) \quad （4.1-11）$$

④ 在最有轨线的末端 H 满足：

$$\begin{aligned}&1+\lambda^T(T)f[X(T),T]+\lambda^T(T)B[X(T),T]U(T)\\&=-\mu^T\frac{\partial g[X(T),T]}{\partial T}\end{aligned} \quad （4.1-12）$$

分析③，令 $$q(t)=B^T[X(t),t]\lambda(t) \quad （4.1-13）$$

或 $$q_{\mathrm{j}}(t)=\mathrm{b}_{\mathrm{j}}{}^T[X(t),t]\lambda(t) \quad \mathrm{j}=1,2,\cdots\cdots,\mathrm{r} \quad （4.1-14）$$

其中 b_j 是矩阵 B 的第 j 个列向量。由（4.1-11）表明，当 $U(t\ )=U^*(t)$ 时，标量函数

$\Phi[U(t)]=\lambda^T(t)B[X(t),t]U(t)=\sum_{j=1}^{r}q_j(t)u_j(t)$ 达到绝对极小。所以，可从以下条件

$$\min_{u(t)\in U}\Phi[u(t)]=\min_{|U_j(t)|\le 1}\sum_{j=1}^{r}q_j(t)u_j(t) \qquad \mathrm{j}=1,2,\cdots\cdots,\mathrm{r} \quad （4.1-15）$$

出发，确定最优控制 $U^*(t\ )$。

约束条件（4.1-2）表明，各控制的分量相互独立，故可交换（4.1-14）中求最小和求和的次序，于是（4.1-14）可以化为 $$\min_{u(t)\in U}\Phi[u(t)]=\sum_{j=1}^{r}\min_{|U_j(t)|\le 1}q_j(t)u_j(t) \quad （4.1-16）$$

显然有： $$\min_{|U_j(t)|\le 1}q_j(t)u_j(t)=-|q_j(t)| \quad （4.1-17）$$

其中最优控制 $U^*(t\ )$ 乃是 $q_j(t)$ 的如下函数：

$$\left.\begin{aligned}&U^*(t)=1,\text{当}q_j(t)<0\\&U^*(t)=-1,\ \text{当}q_j(t)>0\\&|U^*(t)|\le 1,\ \text{当}q_j(t)=0\end{aligned}\right\} \quad （4.1-18）$$

或者利用符号函数，将函数（4.1-17）写成：

$$U^*(t)=-\mathrm{sgn}\{q_j(t)\}=-\mathrm{sgn}\{b_j^T(x(t)t)\lambda(t)\} \qquad \mathrm{j}=1,2,\cdots\cdots,\mathrm{r} \quad t\in[t_0,T] \quad （4.1-19）$$

定义 4.1 若在区间 $[t_0,T]$ 内，存在时间的可数集合 $t_{1_j},t_{1_j},\ldots\ldots,$，即：

$$t_{\beta_j}\in[\mathrm{t}_0,\mathrm{T}],\beta=1,2,\ldots\ldots,\mathrm{j}=1,2,\ldots\ldots,\mathrm{r}$$

使得对所有的 j=1,2,⋯⋯，r 均有

$$q_j(t) = b_j^T \lambda(t) = \begin{cases} 0 & 当 t = t_0 \\ 非零 & 当 t \neq t_0 \end{cases}$$

则称时间最优问题是正常的。

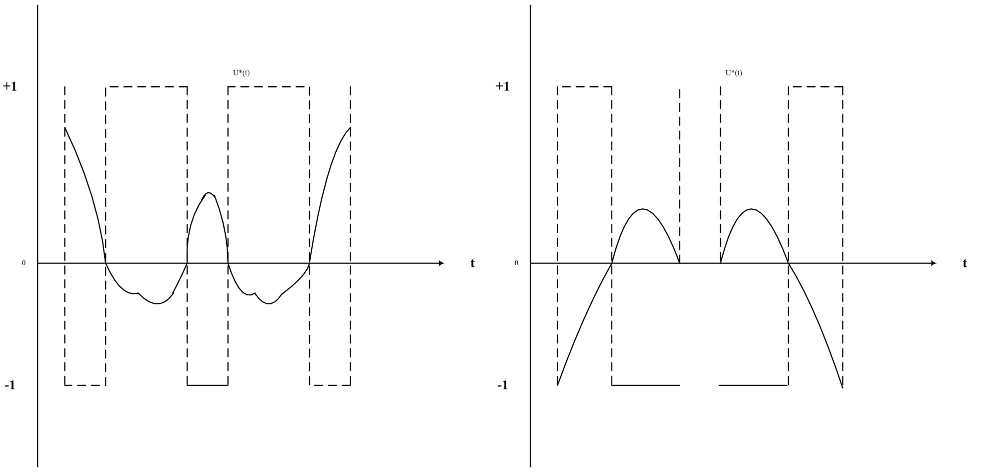


图 4. 1

定义 4.2 若在区间 $[t_0, T]$ 内，存在一个或多个子区间， $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$, 使得对所有 $t \in [t_0, T]$，有：$$q_j(t) = b_j^T(x(t)t)\lambda(t) = 0,$$

则称所论时间最优控制问题是奇异的，区间 $[t_0, T]$ 为奇异区间。

下面我们主要讨论正常问题。

定理 4. 1 Bang—Bang 控制原理

设是问题 4.1 的时间最优控制，和是相应的状态和协态，若问题是正常的，则对几乎所有（除去有限个开关时间），成立：$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{q(t)\} = -\operatorname{sgn}\{B^T(x(t)t)\lambda(t)\}$

或 $u_j^*(t) = -\operatorname{sgn}\{q_j(t)\} = -\operatorname{sgn}\{b_j^T(x(t)t)\lambda(t)\}, j = 1,2,\ldots\ldots$，r 即时间最优控制的各个分量 $u_j^*(t)$ 都是时间 t 的分段常值函数，并在开关时间 t_{β_j} 上发生 $u_j^*(t)$ 由一个恒值到另一个恒值的跳变。

§4. 2 线性时不变系统的时间最优控制器

问题 4.2 已知线性时不变系统 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ （4.2-1）

是完全能控的。求满足下列不等式约束的 r 维容许控制向量 u(t)

$$|u_j(t)| \leq 1, j = 1,2,\ldots\ldots, r \quad （4.2\text{-}2）$$

使系统从已知初态 $x(0) = X_0$ （4.2-3）

出发转移到状态空间原点的时间最短。

根据最大值原理，问题 4.2 最优控制的必要条件如下：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t)$$

$$x(0) = X_0$$

$$x(T) = 0$$

$$U^*(t) = -\operatorname{sgn}\{q(t)\} = -\operatorname{sgn}\{B^T \lambda(t)\}$$

式中 $q(t) = B^T \lambda(t)$

或 $U_j^*(t) = -\operatorname{sgn}\{q_j(t)\} = -\operatorname{sgn}\{b_j^T \lambda(t)\},\ j = 1,2,\ldots\ldots,r$

式中 b_j^T 是矩阵 B 的第 j 列向量。

$$1 + \lambda^T(t)Ax(t) + \lambda^T(t)Bu(t) = 1 + \lambda^T(T)Ax(T) + \lambda^T(T)Bu(T) = 0$$

定理 4.2 当且仅当 r 个矩阵

$\mathrm{G_j} = [\mathrm{b_J}|\mathrm{Ab_J}|\mathrm{A^2b_J}[\ldots\ldots[\mathrm{A^{n-1}b_J}],\ j = 1,2,\ldots\ldots,r$ 中至少有一个奇异矩阵时，则问题 4.2 是奇异的。

定理 4.3 当且仅当 r 个矩阵

$\mathrm{G_j} = [\mathrm{b_J}|\mathrm{Ab_J}|\mathrm{A^2b_J}[\ldots\ldots[\mathrm{A^{n-1}b_J}],\ j = 1,2,\ldots\ldots,r$ 全部是非奇异矩阵，时间最优控制问题 4.2 才是正常的。

定理 4.4 若受控系统（4.2-11）是正常的，且时间最大控制存在，则最优控制必定唯一。

定理 4.5 设线性时不变系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

是正常的，若矩阵 A 的特征值均为实数，假定时间最优控制存在，并另 $U_j^*(t)$，j=1，2，……，r，表示 $U^*(t)$ 的诸分量。用 t_{β_j} 表示分段常值函数 $U_j^*(t)$ 的开关时间，则 A_{β_j} 的最大值至多是 n-1，即切换次数最多不超过 n-1 次。

定理 4.6 对于问题 4.2，若 A 的特征值均具有非正的实部，那么从任意初态转移到坐标原点的时间最优控制存在。

§4.3 双积分模型的时间最优控制

$$\ddot{y}(t) = u(t) \qquad (4.3\text{-}1)$$

令 $x_1(t)=y(t),x_2(t)=\dot{y}(t)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad（4.3-2）$$

问题 4.3 已知受控系统的状态方程为（4.3-2），求一满足如下约束条件的容许控制

$$\left|u_j(t)\right|\le 1,\qquad t\in[0,\mathrm{T}]\quad（4.3-3）$$

使系统（4.3-2）的任意初态 X_0 转移到状态空间原点 $X(T)=0$ 的时间为最短。

问题 4.3 属于线性定常系统最优调节器问题。

由定理 4.3⇒系统（4.3－2）是正常的

由定理 4.6⇒时间最优控制必存在

由定理 4.4⇒唯一

由定理 4.5⇒u*（t）最多切换一次

根据最大值原理，问题 4.3 最优解的必要条件为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\quad（4.3-4）$$

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=0\\ \dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1(t)\end{cases}\quad（4.3-5）$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_{10}\\ \dot{x}_2(t)=x_{20}\end{cases}\quad（4.3-6）$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(T)=0\\ \dot{x}_2(T)=0\end{cases}\quad（4.3-7）$$

$$u(t)=-\mathrm{sgn}\{\lambda_2(t)\}\quad（4.3-8）$$

$$1+\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)=1+\lambda_1(T)x_2(T)+\lambda_2(T)u(T)=0\quad（4.3-9）$$

哈密顿函数 H 为

$$H=1+\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)\quad（4.3-10）$$

求解（4.3-4）

$$\lambda_1 = c_i, \lambda_2 = -c_i t + c_2$$
$$\lambda_2 \neq 0$$

3　$\lambda_2(t)$与$u(t)$的变化规律

$\lambda_2(t) = -c_i t + c_2$　，　故有以下四种情况

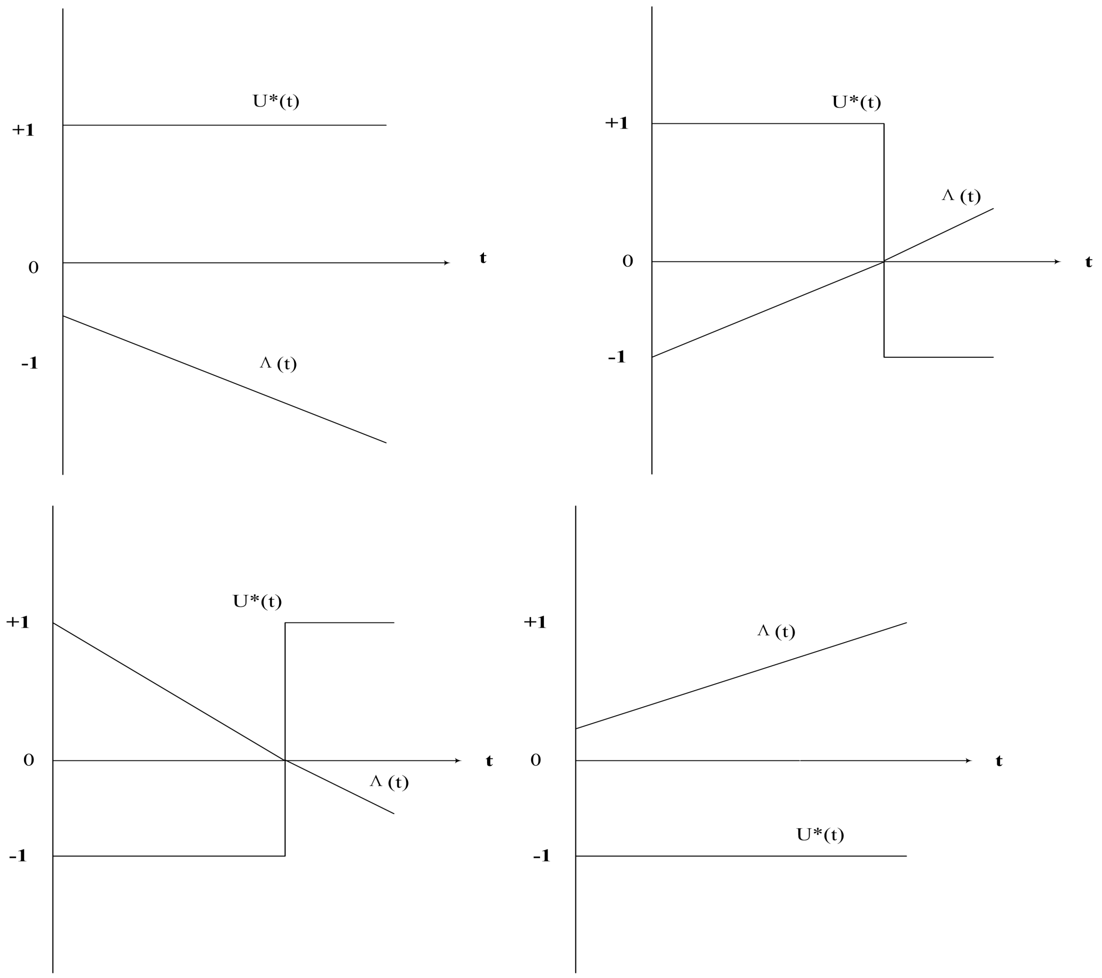


图 4.2

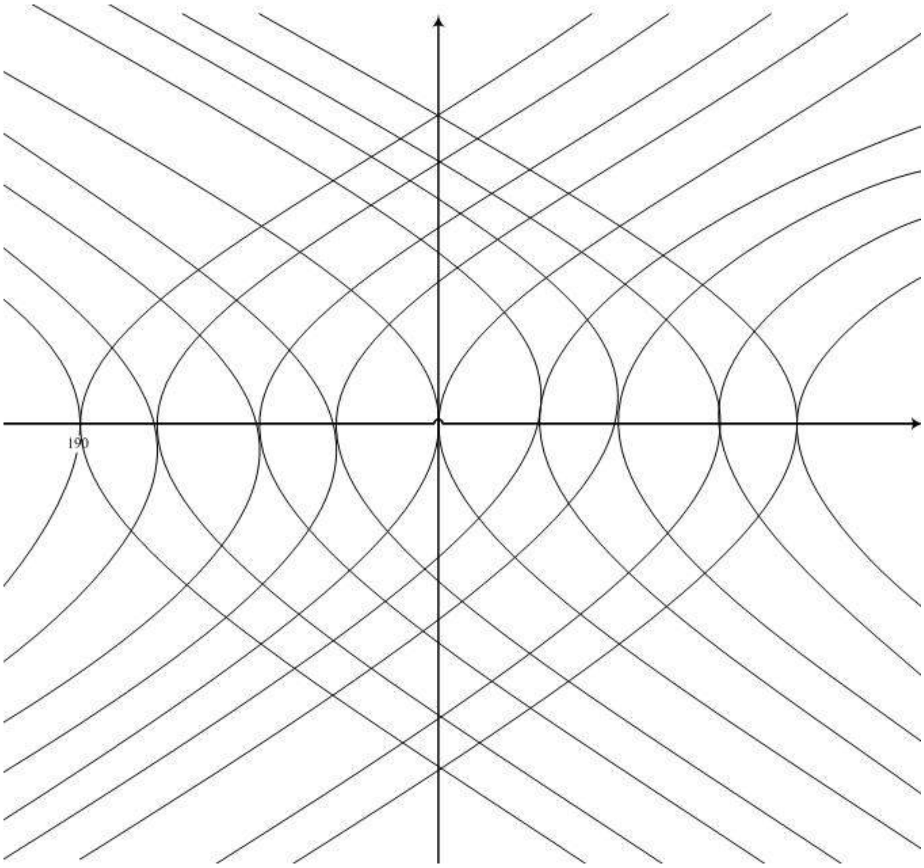


图 4.3 相轨迹图

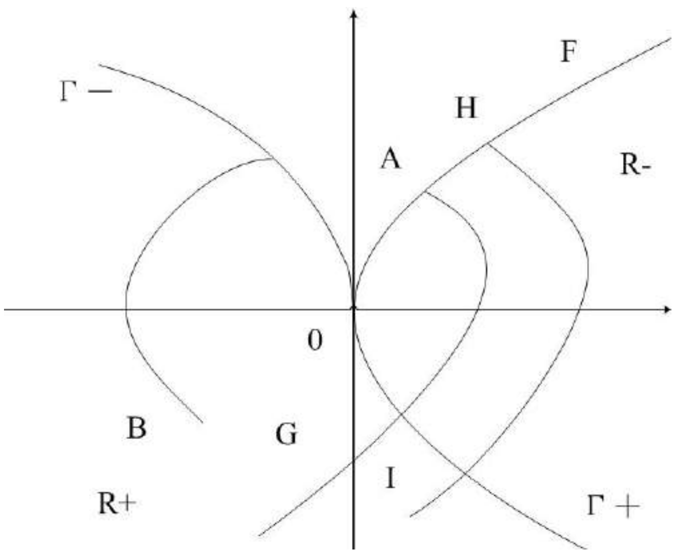


图 4.4

状态轨迹

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_2}{u} \end{cases}$$

1）$u(t)=+1$

$$\begin{cases} x_1(t)=x_{10}+x_{20}t+\frac{1}{2}t^2 \\ x_2(t)=x_{20}+t \end{cases}$$

消去 t,相轨迹为：$x_1=(x_{10}-\frac{1}{2}x_{20}t)^2+\frac{1}{2}x_2^2$

2）$u(t)=-1$

$$\begin{cases} x_1(t)=x_{10}+x_{20}t-\frac{1}{2}t^2 \\ x_2(t)=x_{20}-t \end{cases}$$

消去 t,相轨迹为：$x_1=(x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}t)^2-\frac{1}{2}x_2^2$

终端 $$X(T):\begin{cases} \dot{x}_1(T)=0 \\ \dot{x}_2(T)=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} r_{+,}x_1=\frac{1}{2}x_2^2, x_2\le 0 \\ r_{-,}x_1=-\frac{1}{2}x_2^2, x_2\ge 0 \end{cases}$$ （开关线，切换线）

定义　R＋平面：r 域以下的平面（包括 r＋线）

　　　R－平面：r 域以下的平面（包括 r－线）

最优控制规律

$$(x_{10},x_{20})\in \mathrm{r}_+, u^*(t)=+1$$
$$(x_{10},x_{20})\in \mathrm{r}_-, u^*(t)=-1$$
$$(x_{10},x_{20})\in R_{-,}\notin \mathrm{r}_-, u^*(t)=-1\Rightarrow u^*(t)=+1$$
$$(x_{10},x_{20})\in R_{+,}\notin \mathrm{r}_+, u^*(t)=+1\Rightarrow u^*(t)=-1$$

工程实现：

$$r_-^+: x_1=-\frac{1}{2}x_2|x_2|$$

令 $$F(X_2)=-\frac{1}{2}x_2|x_2|\Rightarrow X_1=F(X_2)$$

$$\sigma(x_1,x_2)=X_1-F(X_2)$$

$$\begin{cases}\sigma(x_1,x_2)=0,x_2\le 0,\text{即在}\mathrm{r}_+\\ \sigma(x_1,x_2)=0,\ \ x_2\ge 0,\text{即在}\mathrm{r}_-\\ \sigma(x_1,x_2)>0,x_2\le 0,\text{即在}R_{-,}\\ \sigma(x_1,x_2)<0,x_2\le 0,\text{即在}R_{+,}\end{cases}$$

$$\sigma(x_1,x_2)<0，\ \text{及}\sigma(x_1,x_2)=0，\ x_2\le 0\text{时}，\ \mathrm{u}^*(\mathrm{t})=+1$$

$$\sigma(x_1,x_2)>0，\ \text{及}\sigma(x_1,x_2)=0，\ x_2\ge 0\text{时}，\ \mathrm{u}^*(\mathrm{t})=-1$$

最优控制框图

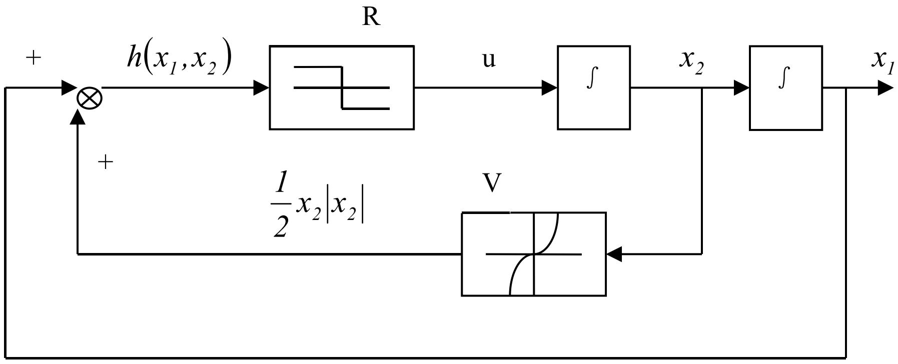


图 4.5 双积分模型最速控制的工程实现

沿最优轨线运动到原点的时间

$$T\begin{cases}x_{20}+\sqrt{4x_{10}+2x_{20}{}^2}, & x_{10}>-\frac{1}{2}x_{20}|x_{20}|,R_-\\ x_{20}+\sqrt{4x_{10}+2x_{20}{}^2}, & x_{10}<-\frac{1}{2}x_{20}|x_{20}|,R_+\\ |x_{20}|, & x_{10}=-\frac{1}{2}x_{20}|x_{20}|,r\end{cases}$$

由上式可知，用相同的最小转移时间到达坐标原点的状态(x_1,x_2)不是一点，而是一个集合。

将上式下标略去可得该集合的表达式：

$$x_1=\begin{cases}-\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{4}(T-x_2)^2,\text{当}x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|>0\\ -\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{4}(T-x_2)^2,\text{当}x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|<0\\ -\frac{1}{2}x_2T,\text{当}x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|=0\end{cases}$$

问题 4.4 已知受控系统（4.3-2）及规定的目标集

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u\end{cases}$$

$$M=\{(x_1(T),x_2(T)):x_2(T)=0;-\infty\le x_1(T)\le+\infty\}$$

求一个满足约束条件$\left|u_j(t)\right|\le 1,$的容许控制，使系统（4.3-2）最短时间内任意初态到达目标集M 。

问题 4.4 的目标集可写成如下等式的约束形式

$$g_1[X(T)]=X_2(T)=0\text{，}$$

此时，横截条件为：

$$\lambda(T)=\frac{\partial(\mu g_1[X(T)])}{\partial X(T)}=\frac{\partial\mu X(T)}{\partial X(T)}=\begin{bmatrix}0\\ \mu\end{bmatrix}\qquad(4.3\text{-}11)$$

与问题 4.3 不同之处，式（4.3-7）由（4.3-11）来代替。来提求解式（4.3-5）可知

$$\lambda_1(t)=0,$$
$$\lambda_2(t)=e,$$

故，u*（t）只能为+1 或-1，中间不会发生切换。

相平面的 x 轴就是目标集，由相平面图可知，最优控制为：

$u^*(t)=-\operatorname{sgn}\{x_2\}$

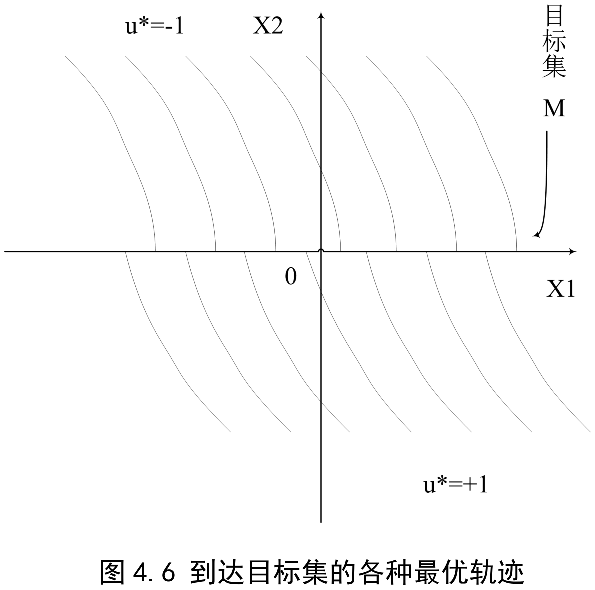


图 4.6 到达目标集的各种最优轨迹

问题 4.5 已知受控系统的目标集

$$M_a=\{(x_1(T),x_2(T)):x_2(T)=0;-a\le x_1(T)\le+a\}\qquad(4.3\text{-}12)$$

求一个满足约束条件$\left|u(t)\right|\le 1$的容许控制，使系统（4.3-2）最短时间由任意初态到达目标集M_a。

将目标集 M_a 表示成如下末态约束形式 $\begin{cases} g_1[X(T)] = X_2{}^2(T) = 0 \\ g_2[X(T)] = X_1{}^2(T) - a^2 \le 0 \end{cases}$ （4.3-13）

横截条件 $\lambda(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1(T) \\ \lambda_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_1\nu \\ 0 \end{bmatrix}$ （4.3-14）

其中 $\nu \ge 0, \nu[X_1{}^2(T) - a^2] = 0$ （4.3-15）

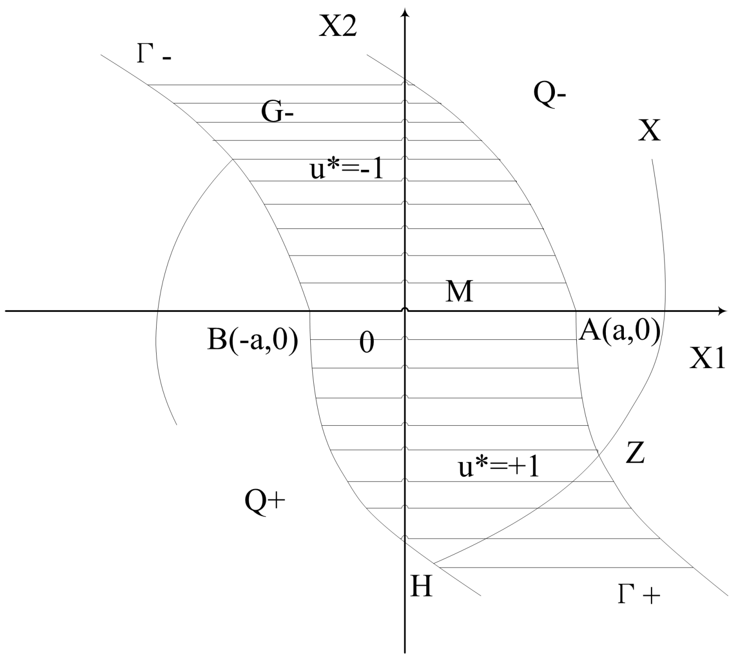


图 4.7 目标集为 M_a 时，相平面区域划分和最优轨线

除去两个边界点（-a, 0），（a, 0），外，目标集 M_a 的其余部分是一开集，可用 $i(M_a)$ 表示。如果最优轨线的末端落在 $i(M_a)$ 上，约束（4.1-13）取严格不等式，则由（4.3-15）N=0，此时与问题 4.4 有相同结论。

凡初态在 G_- 范围内，$u^*(t) = -1$

凡初态在 G_+ 范围内，$u^*(t) = +1$

可转移到 $i(M_a)$。

若点（-a, 0）或（a, 0）为最优轨线的末端落时，（4.3-13）取等号，$\nu \ge 0,$ 与问题 4.3 一样，

易见最优控制律为： $u^*(t) = +1,$ 对所有（ x_1，x_2）$\in Q_+ \cup G_+ \cup \Gamma_+$

$u^*(t) = -1,$ 对所有（ x_1，x_2）$\in Q_- \cup G_- \cup \Gamma_-$

§4.4 简谐振荡型受控系统的最速控制

特征值为实数的其他二阶系统，其最优控制的分析与综合，与上节相似，以下研究特征值为复数情况。

问题 4.6 已知受控系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \omega x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\omega x_1(t) + u(t)\end{aligned} \qquad (4.4\text{-}1)$$

求一满足如下约束条件的容许控制 $u(t)$

$$|u(t)| \le 1, \qquad \forall t \in [0, \mathrm{T}], \qquad (4.4\text{-}2)$$

使系统（4.4-1）的任意初态 X_0，转移到原点的时间最小。（4.4-1）的特征值为 $\mu_1 = j\omega$，$\mu_2 = -j\omega$。

1 哈密顿函数 H

$$H = 1 + \lambda_1 \omega x_2 - \lambda_2 \omega x_1 + \lambda_2 u \qquad u^* = -\operatorname{sgn} \lambda_2$$

2

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \varpi \\ \lambda_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1 \varpi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_2(t) = -\pi_1 \sin\omega t + \pi_2 \cos\omega t = D\sin(\varpi t + \alpha_0)$$

其中 $D > 0,\ \alpha_0$ 是和 $\lambda_1(0)\ \lambda_2(0)$ 有关的常数。

3 最优控制

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{D\sin(\varpi t + \alpha_0)\}$$

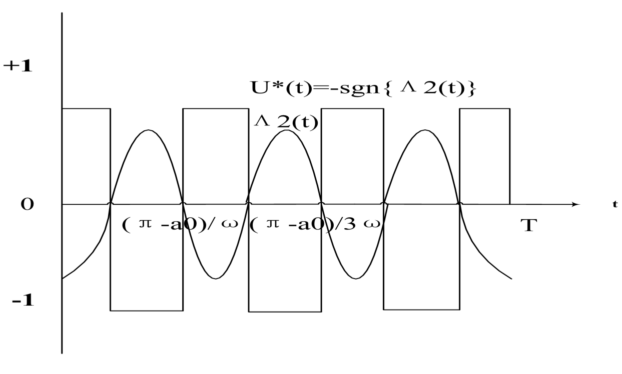


图 4.8 $\lambda_2(t)$ 及 $u^*(t)$ 曲线

特点：1）Bang—Bang 控制

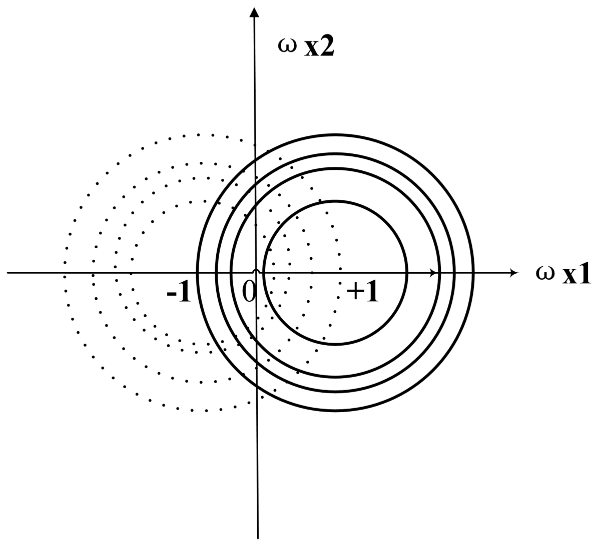
2）多次切换，没有上界

3）每次切换时间是 $\frac{\pi}{\varpi}$ （首尾除外，小于等于 $\frac{\pi}{\varpi}$ ），周期 $\frac{2\pi}{\varpi}$

4 最优轨线

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \omega x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega x_1 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{\omega x_2}{-\omega x_1 \pm 1} \right. \Rightarrow (-\omega x_1 \mp 1)^2 + (\omega x_2)^2 = e$$

构成了两族同心圆。



$u = +1$,圆心位于（$+1,0$）

$u = -1$，圆心位于（$-1,0$）

图 4.9 $u = \pm 1$ 的轨线

1） 半径由初态 X_0 决定，相点沿圆周等速运动，转一周的时间为 $\frac{2\pi}{\varpi}$

2） 只有 Γ_+ 和 Γ_- 两个圆通过原点

$$\Gamma_+ = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\}$$
$$\Gamma_- = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\}$$

最后一次开关线

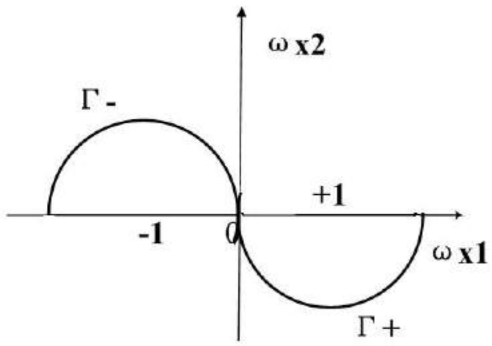


图 4.10

推广到一般情况为：

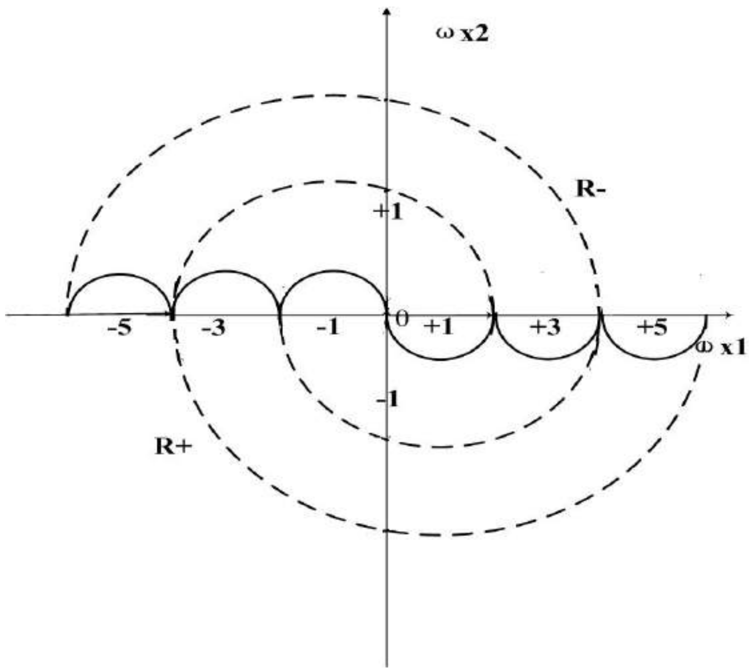


图 4.11 开关曲线

5 工程实现。

§4.5 燃料最优控制

一 二阶积分模型的燃料最优控制

问题 4.3 已知双积分受控系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \tag{4.5-1}$$

求一满足如下约束条件的容许控制 u(t)

$$\left| u_j(t) \right| \le 1, \qquad \forall t \in [0, \mathrm{T}] \tag{4.5-2}$$

使系统（4.5-1）的任意初态 X_0 转移到状态空间原点（0，0），且使性能指标达到

$J=\int_0^T |u(t)|dt=\min$， 假设 T 未定。

1 哈密顿函数 H 为：

$$H=|u(t)|+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

使 $R(u)=|u|+x_2 u$，取最小值

u 应该满足 $$\begin{cases} u^*(t)=0, & 当|\lambda_2（t）|<1 \\ u^*(t)=-\operatorname{sgn}\{\lambda_2(t)\}, & 当|\lambda_2（t）|>1 \\ 0\le u^*(t)\le 1 & 当|\lambda_2（t）|=-1 \\ -1\le u^*(t)\le 0 & 当|\lambda_2（t）|=+1 \end{cases} \tag{4.5-3}$$

正常情况，在时间区间 $[0,\mathrm{T}]$ 内，只有有限个点当 $|\lambda_2（t）|=1\Rightarrow$ 三位控制，开关控制。

奇异情况，在时间区间 $[0,\mathrm{T}]$ 内，至少存在一段时间 $[t_1,\mathrm{t}_2]\subset[0,\mathrm{T}]$，满足当 $|\lambda_2（t）|=1$

2 协态方程

$$\begin{cases} \lambda_1(t)=0 \\ \lambda_2(t)=-\lambda_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(t)=\lambda_1(0) \\ \lambda_2(t)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t \end{cases}$$

3 最优控制

1）当 $\lambda_1(0)=0$，为满足 H=0，应有 $\lambda_2(0)=\pm 1$，这是一种奇异情况。

此时， $$u(t)=-\operatorname{sgn}\{\lambda_2(0)\} \tag{4.5-4}$$

$0\le u(t)\le 1$， $\forall t\in[0,\mathrm{T}]$，为不恒等于零的非负过程连续函数。

2）$\lambda_1(0)\ne 0$，$\Rightarrow \lambda_2(t)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t$，为线性函数，最多有两点满足 $|\lambda_2|=1$，属于正常情况。t_0 九种控制序列：$\{0\},\{+1\},\{-1\},\{+1,0\},\{-1,0\},\{0,+1\},\{0,-1\},\{+1,0,-1\},\{-1,0,+1\}$，以 u=0 结尾的三种控制序列不可能是最优控制，剩六种：

$$\{+1\},\{-1\},\{0,+1\},\{0,-1\},\{+1,0,-1\},\{-1,0,+1\} \tag{4.5-5}$$

1)，2）给出了两种可能的最优控制。

4 相轨迹

$r_{+,}$， $r_{-,}$ 是在 u=1，u=-1 作用下能够到达坐标原点的两条轨线

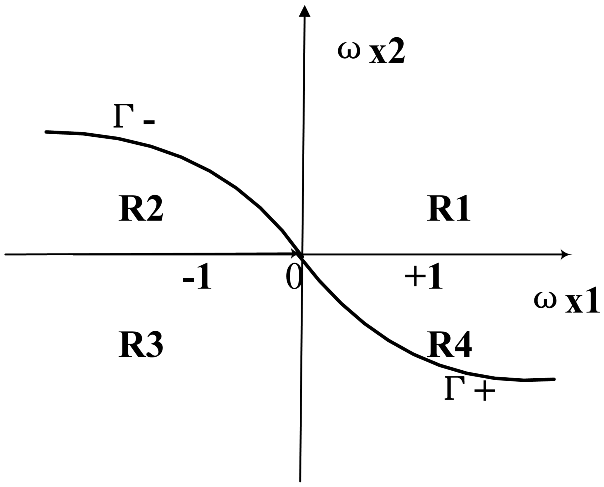


图 4.12

$$r_{+,}=\{(x_1,x_2):x_1=\frac{1}{2}x_2^2\},x_2\leq 0$$

$$r_{-,}=\{(x_1,x_2):x_1=-\frac{1}{2}x_2^2\},x_2\geq 0$$

$$r=r_{+,}\cup r_{-,}=\{(x_1,x_2):x_1=-\frac{1}{2}x_2[x_2[\},$$

曲线r及坐标轴x_1将相平面分成以下四个区域

$$R_1=\{(x_1,x_2):x_1>-\frac{1}{2}x_2^2,x_2\geq 0\}$$

$$R_2=\{(x_1,x_2):x_1<-\frac{1}{2}x_2^2,x_2>0\}$$

$$R_3=\{(x_1,x_2):x_1<\frac{1}{2}x_2^2,x_2\leq 0\}$$

$$R_4=\{(x_1,x_2):x_1>\frac{1}{2}x_2^2,x_2<0\}$$

初态位于$r_{+,}$上，u=+1 是唯一的燃料最优控制因为此时（4.5-5）中只有$\{+1\}$能使系统的状态轨迹达到坐标原点，满足末态条件，若采用（4.5-4），即奇异情况，有

$$\begin{cases} x_1(t)=x_1(0)+x_2(0)t+\int_0^t d\tau\int_0^\tau[-\mathrm{sgn}\{\lambda_2(0)\}\nu(\sigma)]d\sigma \\ x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t[-\mathrm{sgn}\{\lambda_2(0)\}\nu(\tau)]d\tau \end{cases} \qquad (4.5\text{-}6)$$

一般情况（4.5-6）不通过原点，因而不是最优轨迹，同理，初态位于$r_{-,}$上，u=-1 是唯一燃料最优控制。

初态位于R_2、R_4内

设 $x_0 \in R_4$，则（4.5-5）只有 $u^{(1)} = \{0,+1\}, u^{(2)} = \{-1,0,+1\}$ 两种可能为最优控制。

求出燃料消耗量的下限。

对（4.5-1）积分 $\Rightarrow x_{20} = \int_0^T u(t)dt$ 即：

$$|x_{20}| = \left|\int_0^T u(t)dt\right| \le \int_0^T |u(t)|dt = J \tag{4.5-7}$$

J 的下限为 x_{20}，$u^{(1)} = \{0,+1\}$, 对应轨线是弧 ABO。

$$J^{(1)} = \int_0^T |u(t)|dt = \int_{t_A}^{t_B} |u(t)|dt + \int_{t_B}^T |u(t)|dt = 0 + \int_{t_B}^T dt = -x_{20} = |x_{20}|$$

同理可以得出：$J^{(2)} > J^{(1)} = |x_{20}|$

即：$u^{(1)} = \{0,+1\}$, 是满足必要条件且消耗燃料最少的最优控制。

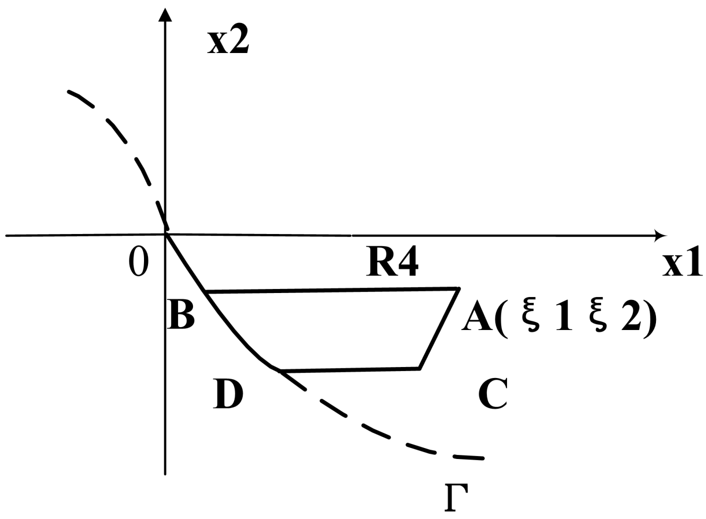


图 4.13

考虑（4.5-4）

若 $u(t) = \nu(t)$，代入（4.5-1） $\int_0^T \nu(\sigma)d\sigma = -x_{20}$ （4.5-8）

$$\int_0^T d\tau \int_0^\tau \nu(\sigma)d\sigma = -x_{20} - x_{20}T$$ （4.5-9）

由于 T 自由，故可以找出许多非负分段连续函数 $\nu(t)$，使之适合式（4.5-8）和式（4.5-9）。

满足上式条件的 $u(t) = \nu(t)$，既能使系统转移到原点[由（4.5-1）代入边界条件 $\Rightarrow$（4.5-8，9）] 燃料又能消耗最少[见（4.5-8）]

结论：$x_0 \in R_4$，最优控制有无穷多解，T 各不相同，$u^{(1)} = \{0,+1\}$, 所需要时间 T 最少。

$$T=\int_0^T dt=\int_0^T \frac{dx_1}{dx_1}dt=\int_{x_{10}}^0 \frac{dx_1}{x_1}=\int_0^{x_{10}} \frac{1}{|x_2|}dx_1$$

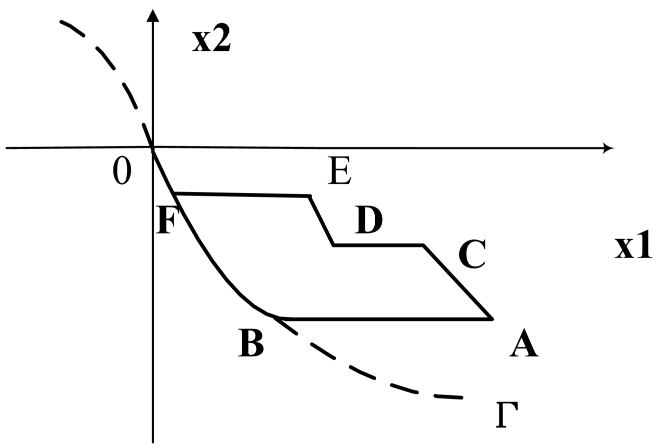


图 4. 14

$\dfrac{1}{|x_2|}$ 包络的面积。

当 $x_0 \in R_2$ 也有类似的结论。

初态位于 R_1、 R_3 内

设 $x_0 \in R_1$，燃料最优控制如果存在，必有 $J^*=|x_{20}|$，对于式（4. 5-5）只有 $u=\{-1,0,+1\}$, 能将系统转移到原点。

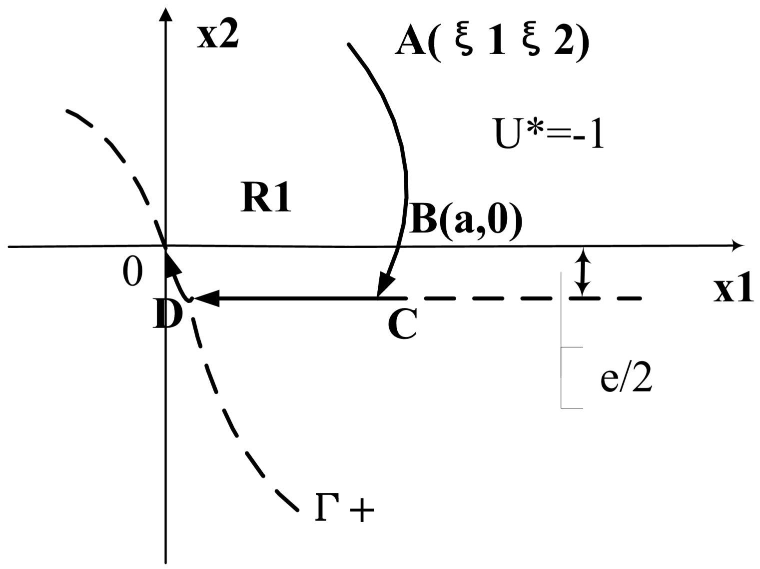


图 4. 15

$$J=J_{AB}+J_{BC}+J_{CD}+J_{DO}=x_{20}+\varepsilon>|x_{20}|$$

不是燃料最优控制。还可以验证（4.5-4）（4.5-5）任何控制，皆不是最优控制。

结论：初态 x_0 位于 R_1、 R_3 内，燃料最优控制无解。

综上所述，问题 4.7 的燃料最优控制为：

$$\begin{aligned} u^* = u^*(x_1, x_2) = +1 \qquad & \forall (x_1, x_2) \in \gamma_+ \\ u^* = u^*(x_1, x_2) = -1 \qquad & \forall (x_1, x_2) \in \gamma_- \\ u^* = u^*(x_1, x_2) = 0 \qquad & \forall (x_1, x_2) \in R_2 \cup R_4 \end{aligned}$$

若 $(x_1, x_2) \in R_2 \cup R_4$，则不存在最优控制。

二 线性定常系统燃料最优的一般情况

问题 4.8 已知线性定常系统 $\dot{x}(t) = Ax + Bu$ （4.5-10）

其容许控制为 $|u_j(t)| \le 1, j = 1,2,\ldots\ldots, r$ （4.5-11）

求 $u^*(t)$ 使系统（4.5-10）的任意状态 X(0)=X_0,转移到目标集：

$$M = \{(x(T)) : g_i(x_2(T)) = 0; i = 1,2,\ldots\ldots \text{p}\} \tag{4.5-12}$$

且使性能指标 $\mathrm{J} = \mathrm{F} = \int_0^{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}} \mathrm{c}_{\mathrm{j}} |\mathrm{u}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})| \mathrm{d}t, \mathrm{c}_{\mathrm{j}} > 0$ （4.5-13）

为最小的，其中 T 为未知的。

§4.6 时间—燃料最优控制

上节问题往往导致控制过程过长（如 ε —燃料最优控制），或出现奇异情况，以致得出无穷多解。

加上时间项可以改善。

问题 4.9 已知受控系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \tag{4.6-1}$$

求一满足如下约束条件的容许控制 u(t) $|u_j(t)| \le 1, \quad \forall t \in [0, \mathrm{T}]$ （4.6-2）

使系统得任意初态 X_0 转移到坐标原点 X=（0，0） ，且使性能指标

$$J = \int_0^T [\rho + |u(t)|] dt = \min \tag{4.6-3}$$

T 未定， ρ 为加权系数。

1 哈密顿函数 $H = \rho + |u(t)| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$ （4.6-4）

与上节相同，$u^*(t) = -dez\{\lambda_2(t)\}$ （4.6-5）

2 协态方程 $\begin{cases}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1(t) = \lambda_1(0) \\ \lambda_2(t) = \lambda_2(0) - \lambda_1(0)t\end{cases}$

H 不显含 t,T 自由 $\Rightarrow$ TH=0

若假定出现奇异情况，则必有 $\lambda_1 = \lambda_1(0) = 0; \lambda_2 = \lambda_2(0) = \pm 1;$

由（4.6-5）$\Rightarrow u^*(t) = -|u^*(t)|\operatorname{sgn}\{\lambda_2\}$

代入（4.6-4）$\Rightarrow H = \rho + |u^*(t)| - |u^*(t)| = \rho > 0$ 与条件矛盾。

因此，问题 4.9 不可能出现奇异情况，最优控制必是三位控制。与上节分析类似，有如下控制序列是可能的最优控制。

$$\{+1\}, \{-1\}, \{0, +1\}, \{0, -1\}, \{+1, 0, -1\}, \{-1, 0, +1\}$$

用相平面法分析序列 $\{-1, 0, +1\}$ 的开关曲线问题。

此时，$u^*(t)$ 与 λ_2 的关系，及状态轨线如下图：

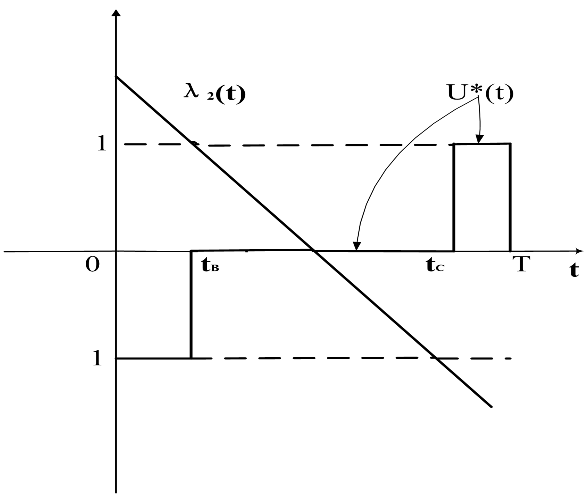


图 4.16

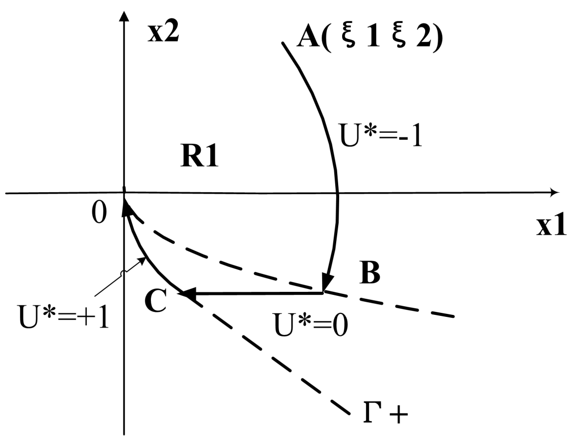


图 4.17

由上节讨论知，系统一段必与r_+重合，即：r_+为第二次转换的开关曲线，下面确定$u^*(t)$由 0 到 1 的转换条件。

第二段中，$u^*=0$，由（4.6-1） $x_{1c}-x_{1b}=x_{2c}(t_C-t_B)$ （4.6-6）

另有 $\lambda_2(t)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t$

$$\begin{cases}\lambda_2(t_B)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t_B=1\\ \lambda_2(t_C)=\lambda_2(0)-\lambda_1(0)t_C=-1\end{cases}\Rightarrow t_C-t_B=\frac{2}{\lambda_1(0)} \tag{4.6-7}$$

由（4.6-4）条件，当$u^*=0$时应有 $H=\rho+\lambda_1 x_{2C}=0$

即：
$$\lambda_1(0)=\lambda_1=-\frac{\rho}{x_{2C}} \tag{4.6-8}$$

将（4.6-7）（4.6-8）代入（4.6-6）得
$$x_{1B}=x_{1C}+\frac{2x_{2C}{}^2}{\rho} \tag{4.6-9}$$

已知 $x_{1C}=\frac{1}{2}x_{2C}{}^2$

即：
$$x_{1B}=\frac{1}{2}x_{2C}{}^2+\frac{2x_{2C}{}^2}{\rho} \tag{4.6-10}$$

由（4.6-10）可见，第一个开关点只形成一条曲线，改为β_{-0}（表示由 1 到 0 的开关线），易知β_{-0}也是一条通过原点的抛物线。

即：$\beta_{-0}=\{(x_1,x_2):x_1=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{2}{\rho}x_2^2,x_2\le 0\}$

或：$\beta_{-0}=\{(x_1,x_2):x_1=\frac{1}{2}\frac{\rho+4}{\rho}x_2^2,x_2\le 0\}$

对于控制序列$\{+1,0,-1\}$，同理可得β_{+0}

$$\beta_{+0}=\{(x_1,x_2):x_1=-\frac{1}{2}\frac{\rho+4}{\rho}x_2^2,x_2\ge 0\}$$

这样，两类开关线将平面分成 4 个区域，$R_1\ R_2\ R_3\ R_4$

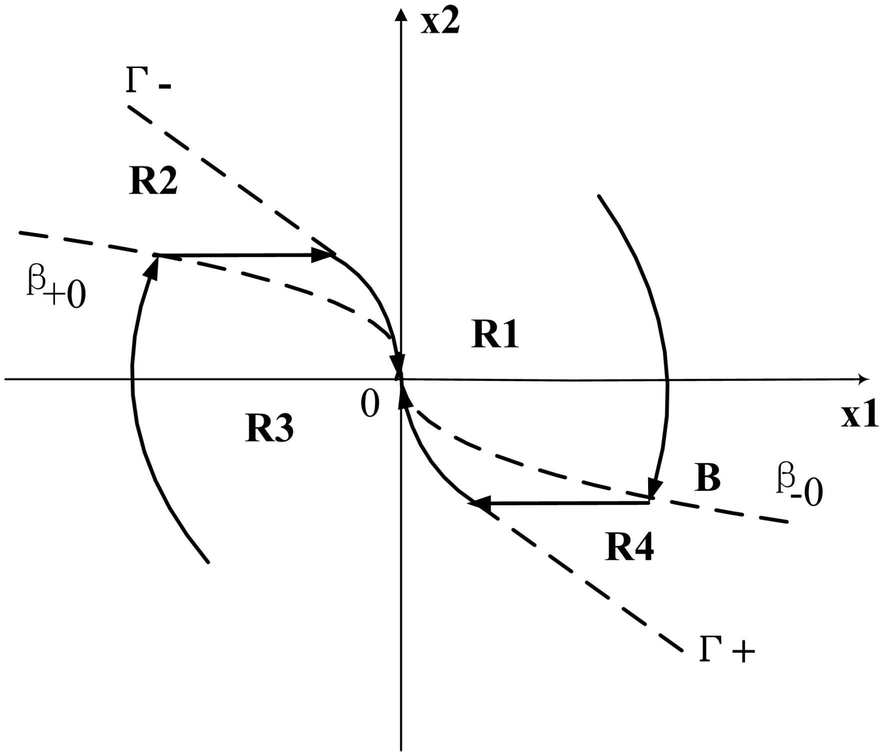


图 4. 18

$$R_1=\{(x_1,x_2):x_1\geq -\frac{1}{2}x_2|x_2|,x_1>-\frac{\rho+4}{2\rho}x_2|x_2|\}$$

$$R_2=\{(x_1,x_2):x_1<-\frac{1}{2}x_2|x_2|,x_1\geq -\frac{\rho+4}{2\rho}x_2|x_2|\}$$

$$R_3=\{(x_1,x_2):x_1\leq -\frac{1}{2}x_2|x_2|,x_1<-\frac{\rho+4}{2\rho}x_2|x_2|\}$$

$$R_4=\{(x_1,x_2):x_1>-\frac{1}{2}x_2|x_2|,x_1\leq -\frac{\rho+4}{2\rho}x_2|x_2|\}$$

综上所述，问题 4.9 的时间—燃料最优控制规律

$u^*(t)=+1$ 当 $(x_1,x_2)\in R_3$

$u^*(t)=-1$ 当 $(x_1,x_2)\in R_1$

$u^*(t)=0$ 当 $(x_1,x_2)\in R_2\cup R_4$

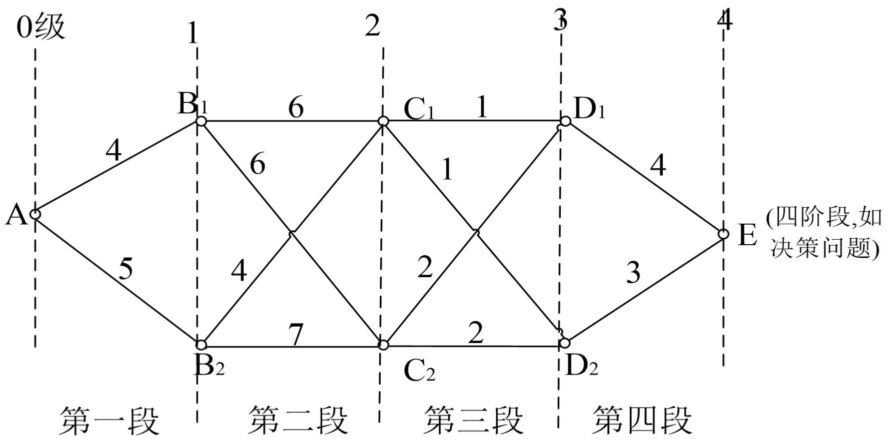
讨论：当 $\rho\to\infty$ 时，β_{-0} 与 γ_+ 重合 $\Rightarrow$ 时间最优控制

当 $\rho=0$ 时，β_{+0} 与 γ_- 重合 $\Rightarrow$ 燃料最优控制

第五章 动态规划

§5.1 多阶段决策问题

例：最优路线问题



始点为 A 点，终点为 E 点，求最优路线，即 A—E 时间最短

1． 穷举法

计算所有的路线：　　　　共有 $2^{(n-1)}=8$ 线路$(n=4)$

需做加法 $3*2^{(n-1)}=24$

如有 N 段　　　　　　　则加法次数 $=(N-1)*2^{(n-1)}$

2． 动态规划

从末端 E 点开始逐段向前推算

第四段　　　　$D_1 \to E$　　代价 J=4

$D_2 \to E$　　J=3

第三段

$$C_1 \to E \left.\begin{matrix} C_1D_1E, J=5 \\ C_1D_1E, J=5 \end{matrix}\right\} C_1D_2E((J=4)$$

$$C_2 \to E \left.\begin{matrix} C_2D_2E, J=5 \\ C_2D_1E, J=6 \end{matrix}\right\} C_2D_2E(J=5)$$

第二段

$$B_1 \to E \left.\begin{matrix} B_1C_1D_2E, J=10 \\ B_1C_2D_2E, J=11 \end{matrix}\right\} B_2C_1D_2E(J=8)$$

$$B_2 \to E \quad \left.\begin{matrix} B_2C_2D_2E, J=12 \\ B_2C_1D_2E, J=8 \end{matrix}\right\} B_2C_1D_2E(J=8)$$

第一段 $$A \to E \quad \left.\begin{matrix} AB_1C_1D_2E, J=14 \\ AB_2C_1D_2E, J=13 \end{matrix}\right\} AB_2C_1D_2E(J=13)$$

（需 $4(N-2)+2$ 次加法，$N=4$ 需 10 次加法。$(N-2)$，共有 $(N-2)$ 段，需 4 次加法，2.前后一段需 2 次加法（实现第一段）第一段不计算（第一次））

优点：⑴减少计算量，如 $N-10$，则 1 方法需 4608 次加法，2 方法则需 34 次。

⑵丰富计算结果。

⑶考虑到局部（单级，2 考虑全局最优。不变嵌入原理：把原来的多级最优问题转化为一系列单级决策过程的问题）

§5.2 最优性原理与递推方程

定义起始段为 0 级（即第一段）第二段为第一级，余此类推，如图。

最优性原理：一个多级决策问题的最优决策具有选择的性质，不管状态和初始决策如何，其余的决策对于由初始决策所形成的状态来说，必定是一个最优策略。

问题 5.1　　考查代价函数（或性能指标）

$$J=\sum_{k=0}^{N} L(x(k),u(k),k) \tag{5.2-1}$$

其中过程的起始状态

$$x(0)=x_0 \tag{5.2-2}$$

给定。

过程的动态方程为

$$x(k+1)=f(x(k),u(k),k) \tag{5.2-3}$$

求容许决策（或控制）序列{u(0), u(1), …, u(N)}

$$u(k)\in U\subset R^{\tau},\ k=0,1,\cdots,N$$

使代价函数（5.2-1）为最小。

由（5.2-1）可知，代价函数 J 不仅是控制 u 的函数，也是初始状态 x(0)的函数，

→代价函数可表示为 J=J[x(0), u]

始自任意状态 x(k)的代价函数可记为

J[x(k),u]　　其中 u={u(k), u(k+1), …, u(N)}

最优代价　　$J^*[x(k)]=J[x(k),u^*]$　　　u^*为最优策略

对于给定问题，当 x(k) 固定是，$u*$是确定的

→最优代价J^*仅是起始状态的函数。$J*[x(k),k]$

下面求解问题 5.1：$J*[x(0),0]$

应用不变嵌入原理$\Rightarrow J[x(k),k]=\sum_{j=k}^{N}L[x(j),u(j),j]$

其中，x(k) 认为是固定。

$$x(k+1)=f[x(j),u(j),j]$$，j=k, k+1, …, j=N-1.

$$J^*[x(k),k]=\min_{u(k),u(k+1)...,u(N)}\{\sum_{j=k}^{N}L[x(j),u(j),j]\}$$

$$=\min_{u(k),u(k+1),...u(N)}\{L[x(k),u(k),k]+\sum_{j=k+1}^{N}L[x(j),u(j),j]\}$$

$$=\min_{u(k)}\min_{u(k+1),...,u(N)}\{L([x(k),u(k),k]+\sum_{j=k+1}^{N}L[x(j),u(j),j]\}$$

第一项 只取决于 u(k).

第二项 x(k+1) 固定时，却决于 x(k+1), …, x(N) 与 u(k) 不直接相关。

但 u(k) 通过（5.2-3）影响 x(k+1).

故⇒

$$J^*[x9k),k]=\min_{u(k)}\{L[x(k),u(k),k]+J^*[x(k+1),k+1]\}$$

$$=\min_{u(k)}\{L[x(k),ux(k),k]+J^*[f[x(k),u(k),k,k+1]$$

→递推方程

$$J^*[x(N),N]=\min_{u(0)\in U}\{L[x(N),u(N),N]\}$$　　（对其他形式的 J 同理可推）

例 1：
$$\begin{cases}J=\psi[x(0)]+\sum_{k=1}^{N-1}L[x(k),u(k),k]+\varphi[x(N)]\\ x(k+1)=f(x(k),u(k),k] \qquad \mathrm{k=0,1,...,N-1}\end{cases}$$

与问题 5.1 有两点不同：⑴没给初始条件，改用了取决于初态的始端代价$\psi[x(0)]$

⑵以末端代价 x(N) 代替$L[x(N),u(N),N]$

最后一级决策 u(N) 不影响末端代价，可设

① $J^*[x(N),N]=\varphi[x(N)]$

② $J^*[x(k),k]=\min\limits_{u(0)\in U}\{L[x(k),u(k),k]+J^*[x(k+1),k+1]\} \quad k=1,2,...,N-1$

③
$$\begin{aligned}J^*[x(0),0]&=\min_{u(0)\in U}\{\psi[x(0)]+J^*[x(1),1]\}\\&=\psi[\mathrm{x}(0)]+\min_{u(0)\in U}\{J^*[f(x(0),u(0),0),1]\end{aligned}$$

$J^*[x(0),0]$ 取决于 $x(0)$

例 2：
$$\begin{cases}J=\sum\limits_{k=0}^{2}(x^2(k)+u^2(k))+x^2(3)\\x(k+1)=x(k)+u(k)\end{cases}$$

x, u 无约束。试写出递推过程，并求出显式解。

递推方程：
$$\begin{cases}J^*[x(k)]=\min\limits_{u(k)}\{x^2(k)+u^2(k)+J^*[x(k+1)]\}\\ \qquad\mathrm{k}=0,1,2\\J^*[x(3)]=x^2(3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow J^*[x(2)]=\min_{u(2)}\{x^2(2)+u^2(2)+J^*[x(2)]\}$$
$$=\min_{u(2)}\{x^2(2)+u^2(2)+(x(2)+u(2))^2\}$$
$$\Rightarrow u(2)=-\frac{1}{2}x(2)$$
$$\mathrm{J}^*[x(2)]=\frac{3}{2}x^2(2)$$
$$J^*[x(1)]=\min_{u(1)}\{x^2(1)+u^2(1)+\frac{3}{2}(x(1)+u(1))^2\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{u}(1)=-\frac{3}{5}x(1)$$
$$J^*[x(1)]=\frac{8}{5}x^2(1)$$

同理可求 $\qquad u(0)=-\frac{8}{13}x(0) \qquad J^*[x(0)]=\frac{21}{13}x^2(0)$

对给定的 x(0), 如 x(0)=1

$$\Rightarrow\begin{cases}u(0)=-\frac{8}{13}x(0)=-\frac{8}{13}\\x(1)=x(0)+u(0)=1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}\end{cases} \qquad \Rightarrow\begin{cases}\mathrm{u}(1)=-\frac{3}{5}x(1)=-\frac{3}{13}\\x(2)=x(1)+u(1)=\frac{5}{13}-\frac{3}{13}=\frac{2}{13}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u(2)=-\frac{1}{2}x(2)=-\frac{1}{13}\\x(3)=x(2)+u(2)=\frac{2}{13}-\frac{1}{13}=\frac{1}{13}\end{cases}$$

结论：动态规划解题需两次搜索。

第一次　逆向进行：即利用递推公式由 $J^*[x(k+1),k+1]$求$J^*[x(k),k]$ 。

第二次　正向进行：即利用动态方程求最优决策序列及最优轨线。

§5.3 线性离散系统、二次型性能指标的最优控制

动态规划的具体应用

问题 5.2　已知线性离散系统

$$x(\mathrm{k}+1)=Fx(\mathrm{k})+Gu(\mathrm{k})$$（其中 F，G 为 k 的函数阵）　（5.3-1）

指定二次型代价函数或性能指标

$$J=x^T(N)Q_0x(N)+\sum_{k=0}^{N-1}\{x^T(k)Q_1x(k)+u^T(k)Q_2u(k)\} \qquad (5.3\text{-}2)$$

其中 k=0,1,…,N-1, Q_0,Q_1为非负定对称矩阵，Q_2为正定对称矩阵，u(k)无约束。

寻求一组控制序列 $\{u^*(0),u^*(1),...,u^*(N-1)\}$，使(5.3-2)为最小。

⑴计算最后一级的最优控制 $u^*(N-1)$

$$J^*[x(N-1)]=\min_{U(N-1)}\{x^T(N)Q_0x(N)+x^T(N-1)Q_1x(N-1)+u^T(N-1)Q_2u(N-1)\}$$

(5.3-1)代入整理 $\to =\min_{U(N-1)}\{x^T(N-1)[F^TQ_0F+Q_1]x(N-1)+u^T(N-1)[G^TQ_0G+Q_2]u(N-1)$

$$2\mathrm{u}^T(N-1)G^TQ_0F\,x(N-1)\}$$

对 $u(N-1)$ 求导解得 $\Rightarrow u^*(N-1)=-[G^TQ_0G+Q_2]^{-1}G^TQ_0F\,x(N-1)$

令 $L(N-1)=[G^TQ_0G+Q_2]^{-1}G^TQ_0F$

则有 $u^*(N-1)=-L(N-1)X(N-1).$

$$\Rightarrow J^*[x(N-1)]=x^T(N-1)\{F^TQ_0F+Q_1+L^T(N-1)[G^TQ_0G+Q_2]L(N-1)$$
$$-2L^T(N-1)\,G^TQ_0F\}x(N-1)$$

定义：

$$S(N)=Q_0$$
$$S(N-1)=F^TQ_0F+Q_1+L^T(N-1)[G^TQ_0G+Q_2]L(N-1)-2L^T(N-1)G^TQ_0F$$
$$=[F-GL(N-1)]^TS(N)[F-GL(N-1)]+L^T(N-1)Q_2L(N-1)+Q_1 \qquad (*)$$

则有
$$\Rightarrow L(N-1)=[G^TS(N)G+Q_2]^{-1}G^TS(N)F$$
$$J^*[x(N-1)=x^T(N-1)S(N-1)x(N-1)$$

⑵递推公式

仿照⑴，可得倒数第二，三…级的最优控制 $u^*(N-j)$, 及$\mathrm{J}^*[x(N-j)]$

$$L(N-j)=[G^T S[N-j+1]G+Q_2]^{-1}G^T S[N-j+1]F$$
$$S(N-j)=[F-GL(N-j)]^T S(N-j+1)[F-GL(N-j)]+L^T(N-j)Q_2L(N-j)+Q_1$$
$$u^*(N-j)=-L(N-j)x(N-j)$$
$$J^*[x(N-j)]=x^T(N-j)S(N-j)x(N-j)$$

用数学归纳法可证。

⑶讨论：① 最优控制 $u^*(k)$ 是状态变量 $x(k)$ 的线性反馈（负反馈）

② L(k)只取决于 F，G，Q_0 及 Q_1 与初始状态无关。因此，可先离线计算。

③ （*）常称为离散 Riccati（黎卡提）方程。

例 已知系统为

$$x(k+1)=fx(k)+eu(k)$$

求 u(0),u(1),u(2),使性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{2}[x^2(k)+eu^2(k)] \quad \text{为最小}$$

解：

$$Q_0=0,Q_1=1,Q_2=c,F=j,G=e$$
$$S(N)=s(3)=G_0=0$$

$$L(2)=[e\,s(3)e+c]^{-1}e\,s(3)f=0$$
$$s(2)=[f-e\,L(2)]^T s(3)[f-eL(2)]+L(2)Q_2L(2)+\;=1$$

$$L(1)=[e\,s(2)e+c]^{-1}e\,\mathrm{s}(2)f=\frac{fe}{e^2+c}$$
$$s(1)=[f-eL(1)]^T s(2)[f-eL(1)]+L(1)cL(1)+1=1+f^2-\frac{f^2e^2}{e^2+c}$$

$$L(0)=e(1+f^2-\frac{f^2e^2}{e^2+c})f\Big/[e^2(1+f^2-\frac{f^2e^2}{e^2+c})+c]$$
$$=\frac{fe(c+e^2+ef^2)}{(c+e^2)+cf^2e^2}$$

$$\Rightarrow u^*(0)=-L(0)x(0)=-\frac{fe(c+e^2+cf^2)}{(c+e^2)^2+cf^2e^2}x(0)$$
$$u^*(1)=-L(1)x(1)=-\frac{fe}{e^2+c}x(1)$$
$$u^*(0)=-L(2)x(2)=0$$

由例可知，尽管系统是定常的，各加取加权也是定常的，即 f，e，c 为常数，但反馈增益 L(k)还是随 k 变化的。

对于定常线性系统

$$x(k+1) = F\,x(k) + G\,u(k)$$

和二次型性能指标

$$J = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}[x^T(k)Q_1x(k) + u^T(k)Q_2u(k)]$$

其中 Q_1 为非负定对称阵，Q_2 为正定对称阵

可以证明，如果（F，G）是完全能控的，S（k）收敛于一常数矩阵 S。

此时

$$\begin{aligned}
&L = [G^TSG + Q_2]^{-1}G^TSF \\
&S = Q_1 + F^TSF - F^TSG[G^TSG + Q_2]^{-1}G^TSF \\
&u^*(k) = -Lx(k)
\end{aligned}$$

§5.4 连续动态规划、哈密顿-雅可比方程

问题 5.3 求一控制 $u(t)\in U, t\in[t_0, t_f]$ 使连续方程

$$x(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad (5.4-1)$$

由已知初态 $x(t_0)$ 出发，导致代价函数（或性能指标）

$$J = S[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt \qquad （5.4-2）$$

为最小。

离散化，时间间隔为 h, 足够小

$$\Rightarrow x(t+h) = x(t) + hf[x(t), u(t), t] + o(h) \qquad (5.4-3)$$

$$J = S[x(t_f), t_f] + h\sum_{k=0}^{N-1} L[x(t), u(t), t] + o(h) \qquad (5.4-4)$$

其中 $t = t_0 + kh, Nh = t_f - t_0$

根据基本的递推公式，始自时刻 t 和状态 x(t)的最优代价为 $J^*[x(t), t]$ 应为

$$J^*[x(t), t] = \min_{\substack{u(t)\in U \\ t\in(t, t+h)}}\{hL(x(t), u(t), t) + J^*[x(t+h), t+h] + o(h)\}$$

假定最优代价 $J^*[x(t), t]$ 对其自项

$$J^*[x(t+h),t+h]=J^*[x(t),t]+\frac{\partial J^*}{\partial t}h+\left(\frac{\partial J^*}{\partial t}\right)^T[x(t+h)-x(t)]+o(h) \qquad (5.4\text{-}6)$$

将（5.4-3）,(5.4-6)代入(5.4-5)整理得

$$J^*[x(t),t]=\min_{\substack{u(t)\in U\\ t\in(t,t+h)}}\left\{J^*[x(t),t]+\left\{L[x(t),u(t),t]+\frac{\partial J^*}{\partial t}+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f[x(t),u(t),t]\right\}h+o(h)\right\}$$

另有 $J^*[x(t),t]$ 与 u(t)无关，故有

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}h=\min_{\substack{u(t)\in U\\ t\in(t,t+h)}}\left\{L[x(t),u(t),t]h+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f[x(t),u(t),t]h+o(h)\right\}$$

两端除 h，且 h→0 有

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=\min_{u(t)\in U}\left\{L[x(t),u(t),t]+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f[x(t),u(t),t]\right\} \qquad (5.4\text{-}7)$$

一般说 $u^*(t)=u\left[x(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right]$ （5.4-8）

代入（5.4-7）得

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=L\left[x(t),u^*\left(x(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right),t\right]+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)f\left[x(t),u^*\left(x(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right),t\right] \qquad (5.4\text{-}9)$$

(5.4-9)→哈密顿-雅可比方程。

另知 $J^*[x(t_f),t_f]=s[x(t_f),t_f]$ （5.4-10）

→为 H-J 方程的边界条件

(5.4-9)和（5.4-10）是问题 5.3 最优控制与最优代价的充分条件。

H 函数 $H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$ （5.4-11）

令其中 $\lambda(t)=\frac{\partial J^*}{\partial x}$ （5.4-12）

则方程（5.4-7）可改写为 $-\frac{\partial J^*}{\partial t}=H^*\left[x(t),u(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right]$ （5.4-13）

其中 $H^*\left[x(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right]=\min_{u(t)\in U}H\left[x(t),u(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right]$ （5.4-14）

求解步骤：

Step1.　　选　$H[x(t),u(t),t]=fL[x(t),u(t),t]+\left(\frac{\partial J^*}{\partial X}\right)^T f[x(t),u(t),t]$

求极小值 ,对 u 无约束，求 $\frac{\partial H}{\partial u}$

u 有约束，求 MinH

$\Rightarrow u^*=u^*\left[x(t),\frac{\partial J^*}{\partial x},t\right]$

Step2.　　解 H-J 方程(5.4-9),边界条件（5.4-10）

$\Rightarrow J^*[x(t),t]$

Step3.　　将 J^* 代入 u^*, u^* 是 x 的函数

Step4.　　将 u^* 代入状态方程(5.4-1)，$\Rightarrow x^*(t)$

Step5　　将 $x^*(t)$ 代到 u^* 中，得 $u^*=u^*(t)$

例 1.　　已知方程线性定常系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\qquad x(0)=x_0, A_{n\times n}, B_{n\times n}, u(t)\text{不受约束}$$

求一控制 u(x(t)),使

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[x^TQx+\gamma u^2\right]dt=\min$$ Q 为非负定对称常数矩阵，γ 是一正数。

⑴ H 函数→ $H(x,u,\lambda,t)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}\gamma u^2+\lambda^TAx+\lambda^TBu$

H 的最小值 $\rightarrow\frac{\partial H}{\partial u}=\gamma u+B^T\lambda=0$

$\rightarrow u^*=-r^{-1}B^T\lambda$

代入 H 中，$H^*(x,\lambda,t)=\frac{1}{2}x^TQx+\lambda^TAx-\frac{1}{2}\lambda^TBB^T\lambda\gamma^{-1}$

因受控是定常的，Q，γ 是常数阵及常数，切积分时间为无穷大。

→故知 J^* 只依赖于初态，与 t 无关 $\Rightarrow\frac{\partial J^*}{\partial t}=0$

⑵ H-J 方程为　$\frac{1}{2}x^TQx+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^TAx-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^TB\right]^2\gamma^{-1}=0$

令上式解为　$J^*[x(t)]=\frac{1}{2}x^TPx\quad\rightarrow\frac{\partial J^*}{\partial x}=Px$

代入上式⇒ $$\frac{1}{2}x^T\left[Q+P^TA+A^TP-P^TBB^TP\gamma^{-1}\right]x=0$$

对于非零 x，矩阵 P 应满足如下 Riccati 矩阵代数方程

$$P^TA+A^TP-P^TBB^TP\gamma^{-1}+Q=0$$

易证 $P=P^T$，即 P 为对称矩阵，因此，上面方程写成

$$PA+A^TP-PBB^TP\gamma^{-1}+Q=0$$

⑶ 由 Riccati 矩阵代数方程解得 P，则最优控制为

$$u^*(t)=-\gamma^{-1}B^T\frac{\partial J^*}{\partial x}=-\gamma^{-1}B^TPx(t)\qquad \rightarrow 状态x(t)的线性反馈$$

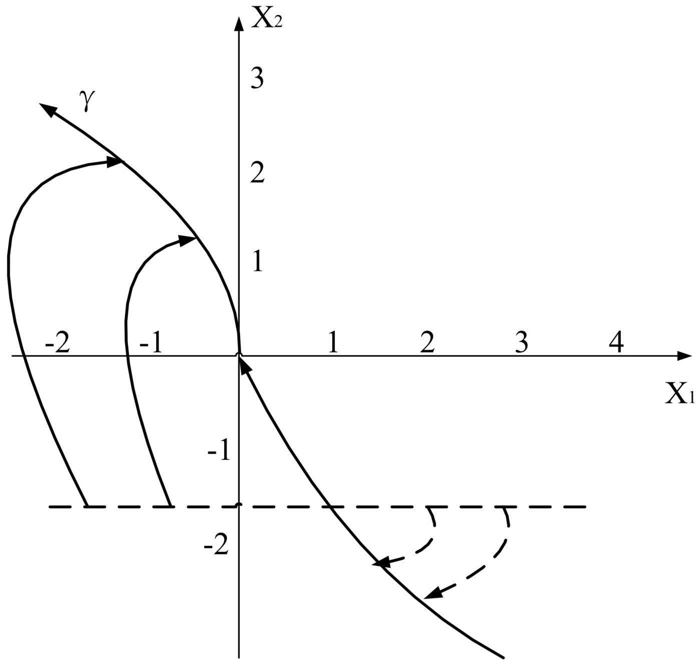
例 2. 考查一个双积分模型的最速控制问题：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2 & x_1(0)=x_{10}\\ \dot{x}_2=u & x_2(0)=x_{20}\end{cases}$$

选择满足 $|u(t)|\le 1$ 的控制，使性能指标 $J=\int_0^T dt$ 为最小。

对于这样一个既使比较简单的问题，整个问题不能用 H-J 方程求解。

原因： 回顾用极大值原理解此题的一些结果



开关曲线 γ： $x_1=-\frac{1}{2}x_2|x_2|$

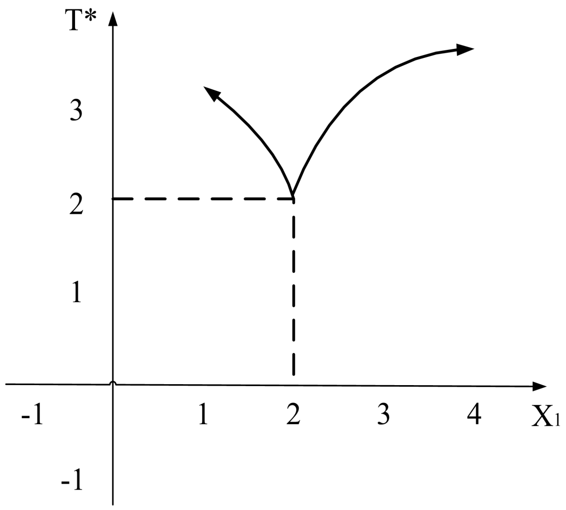
最优控制

$$
u^* = \begin{cases} -1 & 当 x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ +1 & 当 \mathrm{x}_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ -\operatorname{sgn}\{x_2\} & 当 \mathrm{x}_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \end{cases}
$$

最短转移时间$T^* = (x_{1,} x_2)$

$$
T^* = (x_{1,} x_2) = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2} & x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2} & x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ \left| x_2 \right| & x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \end{cases}
$$

由上式可知，最短时间T^*(即J^*)是初始状态x_1, x_2的连续函数，但不是处处可微的。如$x_2 = -2$的直线为初始点集，T^*与x_1的关系为



可见 T^*是x_1的连续函数，但在$x_1 = 2$时，$\dfrac{\partial J^*}{\partial x_1}$发生跳变。

说明不满足T^*的可微性条件，因此不能用 H-J 方程求解。

如果考查的点集都在γ^*的右边，即满足

$$
x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|
$$

则T^*是x_1, x_2的连续可微函数，可解（用 H-J 方程）

此时有 $$H^*\left[x,\frac{\partial T^*}{\partial x},t\right]=1+\frac{\partial T^*}{\partial x_1}x_2-\frac{\partial T^*}{\partial x_2}$$ （$u=-1$代入）

H-J 方程为 $$\frac{\partial T^*}{\partial t}+1+\frac{\partial T^*}{\partial x_1}x_2-\frac{\partial T^*}{\partial x_2}=0$$

由前面可求 $$\frac{\partial T^*}{\partial x_1}=\frac{2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}},\qquad \frac{\partial T^*}{\partial x_2}=1+\frac{2x_2}{\sqrt{4x_1+2x_2^2}}\to 满足H-J方程$$

结论： 工程很多最优问题并 不满足J^*的可解性条件。有很大的局限性。

第六章 线性二次型最优控制调节器

§6.1 概述

前面一些概述自学

问题 6.1 设线性时变系统为
$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ y(t)=C(t)x(t)\end{cases}\tag{6.1-1}$$

$x(t)$—n 维状态向量；$u(t)$—r 维控制向量；$y(t)$—m 维输出向量。

$A(t),B(t),C(t)$为相应维中心矩阵。

假定 $0<m\le r\le n,u(t)$不受约束。

定义误差向量，即 $e(t)=y_r(t)-y(t)$ $y_r(t)$— 理想输出

寻找最优控制$u(t)$使如下二次型性能指标为最小。

$$J[u(\bullet)]=\frac{1}{2}e^T(T)e(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[e^T(t)Q_1(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt\tag{6.1-2}$$

其中： F—相应维的非负定对称常数阵。

$Q_1(t)$—相应维的非负定时变矩阵。

$R(t)$—相应维的正定对称时变矩阵。

T—终端时间，固定的。

本章假定：

假定 6.1-1 $A(t),B(t),C(t),Q(t),R(t)$的元是 t 的连续可微函数，并且所有矩阵函数及

$R^{-1}(t)$ 都是有界的。

若令 $y_r(t)=0, C(t)=I$ 则 $x(t)=y(t)=-e(t)$—问题 6.1 的一种特例。

即状态调节器问题—非常重要，现定义如下：

问题 6.2 设线性时变系统及其初始条件为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{6.1-3}$$

$x(t)$—n 维状态向量　　　　$A(t), B(t)$ 为相应维中心矩阵，$u(t)$ 不受约束，

$u(t)$—r 维控制向量。

寻找最优控制 $u(t)$，使如下二次型性能指标函数为最小。

$$J=\frac{1}{2}x^T(T)Fx(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \tag{6.1-4}$$

问题 6.2 要求末态时刻 $X(T)$ 趋于零—状态调节器问题。

§6. 2 有限时间状态调节器 $(T\neq\infty)$

问题 6.2 的目标 要求使 J 为最小的最优控制　$u^*(t), t\in[t_0,T]$

以及最优性能指标 $J^*[x(t_0),t_0], (J[x(t_0),u(\bullet),t_0])$

为解决此问题，给出如下结果。

一　如果 $J^*[x(t_0),t_0]$ 存在，则必为 $x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$ 的形式，即 $P(t_0)$ 为一对对称阵

$J^*[x(t_0),t_0]$ 为二次型的充分必要条件是：

$$⑴\ J^*[x(t_0),t_0]=\lambda^2 J^*[x(t_0),t_0] \quad \text{其中 } \lambda \text{ 为任意实数} \tag{6.2-1}$$

$$⑵\ J^*[x_1(t_0),t_0]+J^*[x_2(t_0),t_0]+\frac{1}{2}\left\{J^*[x_1(t_0)+x_2(t_0),t_0]+J^*[x_1(t_0)-x_2(t_0),t_0]\right\} \tag{6.2-2}$$

证明：　必要性显然成立。

充分性：　$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$　　　$t\in[t_0,T]$

$$J^*[x(t_0),u(t),t_0]=\frac{1}{2}x^T(T)Fx(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt$$

$$J^*[x(t_0),t_0]=J[x_1(t_0),t_0]$$

条件⑴ $J^*[\lambda x(t_0),t_0]\le J[x(t_0),\lambda u^*(t_0),t_0]=\lambda^2 J^*[x(t_0),t_0]$

最优控制性质

由(6.1-4)

$$\lambda^2 J^*[x(t_0),t_0]\le \lambda^2 J[x(t_0),\lambda^{-1}u^*(t),t_0]=J^*[\lambda x(t_0),t_0]$$

显然，条件⑴得证。

条件⑵ 令

$$J^*[x_1(t_0),t_0]=J[x_1(t_0),u_1^*(t),t_0]=\frac{1}{2}x_1^T(T)Fx_1(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[x_1^T(t)Q(t)x_1(t)+u_1^{*T}(t)R(t)u_1^*(t)\right]dt$$

$$J^*[x_2(t_0),t_0]=J[x_2(t_0),u_2^*(t),t_0]=\frac{1}{2}x_2^T(T)Fx_2(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[x_2^T(t)Q(t)x_2(t)+u_2^{*T}(t)R(t)u_2^*(t)\right]dt$$

状态方程变量也做相应的变化

$J^*[x_1(t_0),t_0]+J^*[x_2(t_0),\ t_0]\Leftarrow\frac{1}{4}\left\{J^*[2x_1(t_0),\ t_0]+J^*[2x_2(t_0),\ t_0]\right\}$ 由 条 件 ⑴

(6.2-3)

$$J^*[2x_1(t_0),t_0]\le J[2x_1(t_0),u_1^*(t)+u_2^*(t),t_0]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{4x_1^T(T)Fx_1(T)+\int_{t_0}^{T}\left[4x_1^T(t)Q(t)x_1(t)+\left(u_1^{*T}(t)+u_1^{*T}(t)\right)R(t)\left(u_2^*(t)+u_2^*(t)\right)\right]dt\right\}$$

（令 $x(t)=2x_1(t)$）

$$J^*[2x_2(t_0),t_0]\le J[2x_2(t_0),u_1^*(t)-u_2^*(t),t_0]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{4x_2^T(T)Fx_2(T)+\int_{t_0}^{T}\left[4x_2^T(t)Q(t)x_2(t)+\left(u_1^{*T}(t)-u_1^{*T}(t)\right)R(t)\left(u_2^*(t)-u_2^*(t)\right)\right]dt\right\}$$

(令 $x(t)=2x_1(t)$)

上两式相加

$$\begin{aligned}J^*[2x_1(t_0),t_0]+J^*[2x_2(t_0),t_0]\le{}& 2x_1^T(T)Fx_1(T)+2x_2^T(T)Fx_2(T)\\&+2\int_{t_0}^{T}\left[x_1^T(t)Q(t)x_1(t)+\frac{1}{2}u_1^{*T}(t)R(t)u_1^*(t)\right]dt\\&+2\int_{t_0}^{T}\left[x_2^T(t)Q(t)x_2(t)+\frac{1}{2}u_2^{*T}(t)R(t)u_2^*(t)\right]dt\\&=\left[x_1^T(T)+x_2^T(T)\right]F[\mathrm{X}_1(T)+x_2(T)]\\&+\int_{t_0}^{T}\left[\left(x_1^T(T)+x_2^T(T)\right)Q(t)\left(x_1(T)+x_2(T)\right)+u_1^{*T}(t)R(t)u_1^*(t)\right]dt\\&+\left[x_1^T(T)-x_2^T(T)\right]F[x_1(T)-x_2(T)]\\&+\int_{t_0}^{T}\left[\left(x_1^T(T)-x_2^T(T)\right)Q(t)\left(x_1(T)-x_2(T)\right)+u_2^{*T}(t)R(t)u_2^*(t)\right]dt\\&=2J^*[x_1(t_0)+x_2(t_0),t_0]+2J^*[x_1(t_0)-x_2(t_0),t_0]\end{aligned}$$

代入原式(6.2-3)

$$J^*[x_1(t_0),t_0]+J^*[x_2(t_0),t_0]\le\frac{1}{2}\{J^*[x_1(t_0)+x_2(t_0),t_0]+J^*[x_1(t_0)-x_2(t_0),t_0]\}$$

同理可证

$$\frac{1}{2}\{J^*[x_1(t_0)+x_2(t_0),t_0]+J^*[x_1(t_0)-x_2(t_0),t_0]\}\le J^*[x_1(t_0),t_0]+J^*[x_2(t_0),t_0]$$

故条件⑵得证。

综上所述：$J^*[x(t_0),t_0]$具体形式

$$J^*[x(t_0),t_0]=x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \tag{6.2-4}$$

以任意时刻 t 为初始时刻，则有 $J^*[x(t),t]=x^T(t)P(t)x(t)$

二　$P(t)$为 Riccati 方程的解

用 H—J 方程证明

状态方程　　$\dot{x}(t)=[x(t),u(t),t]$

性能指标　　$J=S[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]dt$

则 H—J 方程为

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial J^*[x(t),t]}{\partial t}=H^*\left[x(t),\dfrac{\partial J^*}{\partial x},t\right]\\ H^*\left[x(t),\dfrac{\partial J^*}{\partial x},t\right]=\min\limits_{u(t)\in u}H\left[x(t),x(t),\dfrac{\partial J^*}{\partial x},t\right]\end{cases}$$

其中 $H[x(t),u(t),\lambda,t]=L[x(t),u(t),t]+\lambda^T f(x,u,t)$　　$\left(\lambda=\dfrac{\partial \mathrm{J}^*}{\partial x}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\partial J^*[x(t),t]}{\partial t}=-\min_{u(t)\in U}\left\{L[x(t),u(t),t]+\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f[x(t),u(t),t]\right\} \tag{6.2-5}$$

本章具体问题

$$\begin{cases}L[x(t),u(t),t]=x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\\ f[x(t),u(t),t]=A(t)x(t)+B(t)u(t)\end{cases}$$

$$\because J^*[x(t),t]=x^T(t)P(t)x(t)$$

故有 $\dfrac{\partial J^*[x(t),t]}{\partial t}=x^T(t)\dot{P}(t)x(t)$，$\dfrac{\partial J^*[x(t),t]}{\partial t}=2P(t)x(t)$

代入式(6.2-5)得

$$x^T(t)\dot{P}(t)x(t)=-\min_{u(t)\in U}\left\{x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)+2x^T(t)P(t)A(t)x(t)+2x^T(t)P(t)B(t)u(t)\right\}$$
$$=-\min_{u(t)\in U}\left\{\begin{array}{l}\left[u(t)+R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)\right]^T R(t)\left[u(t)+R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)\right]\\ +x^T\left[Q(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t)\right]x(t)\end{array}\right\}$$

（6.2-6）

R(t)正定，为满足（6.2-6）式

显然有

$$u(t)+R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)=0$$
$$\text{即}u^*=-R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \qquad (6.2\text{-}7)$$

将(6.2-7)代入（6.2-6）

$$x^T(t)\dot{P}(t)x(t)=-x^T(t)\left[Q(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t)\right]x(t)$$

由 $x(t)$ 为任意时刻可得

$$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+Q(t) \qquad (6.2\text{-}8)$$

即为 Riccati 方程

边界条件：由 H—J 方程的边界条件

$$J^*[x(T),T]=S[x(T),T]$$

在本章

$$S[x(T),T]=x^T(T)Fx(T)$$

$$\Rightarrow P(T)=F \qquad （6.2\text{-}9）$$

三　最优控制指标 $J^*[x(t),t]$ 的存在性

方程(6.2-8)和（6.2-9）式对所有 $t\le T$ 确定了 $P(t)$,且最优指标 $J^*[x(t),t]=x^T(t)P(t)x(t)$ 对所有 $t\le T$ 存在。

四　最优控制

$$u^*=-R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \qquad (6.2\text{-}10)$$

是一线性反馈控制规律。

五　调节器问题的解

初始时间 t 和初始状态 $x(t)$ 的调节器问题，其最优性能指标是 $J^*[x(t),t]=x^T(t)P(t)x(t)$，最优控制为(6.2-10)。 其中 $P(t)$ 为满足(6.2-8)和(6.2-9)的解，且对所有 $t\le T$ 存在。

六　举例

$$\begin{cases}\text{设状态方程为}\quad \dot{x}=\dfrac{1}{2}x+\mathrm{u}\\ \text{性能指标为}\quad J^*=\displaystyle\int_{t_0}^{T}\left(2e^{-t}u^2+\frac{1}{2}e^{-t}x^2\right)dt\end{cases}$$

解：Riccati 方程为：
$$\begin{cases} -\dot{P} = P - \frac{1}{2}e^t P^2 + \frac{1}{2}e^{-t}, \\ P(T) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(t) = \left(1 - e^t e^{-T}\right)\left(e^t + e^{2t}e^{-T}\right)^{-1}$$
$$U^*(t) = -\frac{1}{2}\left(1 - e^t e^{-T}\right)\left(1 + e^t e^{-T}\right)^{-1} x(t)$$
$$J^*[x(t_0), t_0] = x(t_0)\left(1 - e^{-t_0}e^{-T}\right)\left(e^{t_0} + e^{2t_0}e^{-T}\right)^{-1} x(t_0)$$

§6. 3 无限时间状态调节器 ($T \to \infty$)

一　无限时间调节器问题

考虑系统　$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$　　$x(t_0) = x_0$ 给定　(6.3-1)

定义性能指标为

$$J[x(t_0), u(t), t_0] = \int_{t_0}^{T}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \qquad (6.3\text{-}2)$$

求最优控制 $u^*(t), t \ge t_0$, 使 J 最小，并且求 $J^*[x(t_0), t_0]$.

其中 $\begin{cases} A(t), B(t) \text{的元素是连续函数.} \\ Q(t),\ R(t) \end{cases}$　　且 $Q(t)$ 为非负定对称矩阵，$R(t)$ 为正定对称矩阵

考查系统　$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$　　$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$R = 1,\ \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易得　$J[x(t_0), u(t), t_0] = \int_{t_0}^{\infty}\left(u^2 + e^{2t}\right)dt$　　无论 $u(t)$ 取何值，$J \to \infty$

结论：对有限时间问题，最优的 J 总是有限的，但对无限时间问题未必如此。

$J \to \infty$ 原因：

1．状态 x_1 是不可控的。

2．系统轨线的不可控部分是不稳定的。$\left(x_1(t) = e^t\right)$

3．系统轨线的不稳定部分被反映在 J 中。

如上述原因之一不存在，则不会产生 J 为无穷大的难题。

为保证问题分解，需作如下假定

假定 6.3.1　　系统(6.3-1)对每一时间 t 是完全能控的。

一　无限时间调节器问题的求解

设 $P(t,T)$ 为方程

$$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+Q(t) \quad (6.3\text{-}3)$$

以 $P(T,T)=0$ 为边界条件的解，则 $\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T)=\overline{P}(t)$ 对所有的 t 存在，

且为(6.3-3)式的一个解，另外有

$$J^*[x(t_0),t_0]=x^T(t)\overline{P}x(t) \quad (6.3\text{-}4)$$

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\overline{P}(t)x(t) \quad (6.3\text{-}5)$$

证明：

1．$\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T)=\overline{P}(t)$ 的存在性。

由假定 6.3.1 系统(6.3-1)对每一时间 t 是完全能控的，即对 t 时刻的每一个状态 $x(t)$ 存在一个控制 $\tilde{u}(\bullet)$ 和时间 t_2.这样的控制 $\tilde{u}(\bullet)$ 将在 t_2 时刻使 $x(t)$ 转变为零状态。

$\tilde{u}(\bullet)$ 定义在区间 $[t,t_2]$ 上，$\Rightarrow$ 区间延拓 $[t,\infty]$，其中在 $[t_{2,}\infty]$, $\tilde{u}(\bullet)=0$

这样可在 $[t_2,\infty]$ 使系统保持零状态。

设 $J[x(t),u(\bullet),t,T]$ 表示 t 时刻的初态 $x(t)$，控制 $u(\bullet)$ 和终点 T 所产生的性能指标。此时，T 是假定有限的。

对所有的 T 和 $t\le T$ 有

$$\begin{aligned}J[x(t),t,T]&=x^T(t)P(t)x(t)\\&\le J\left[x(t),\tilde{u}_{[t,T]},t,T\right]\\&\le J\left[x(t),\tilde{u}_{[t,\infty]},t,\infty\right]\\&=J\left[x(t),\tilde{u}_{[t,t_2]},t,t_2\right] \qquad (\text{由}\tilde{u}(\bullet)\text{定义为式}(6.3\text{-}3)\\&<\infty\end{aligned}$$

式(6.3-6)说明 $x(t)P(t,T)x(t)$ 在 $T\to\infty$ 时，是有界的，且上界与 T 无关。

另外，由于 $Q(t)$ 为非负定，$R(t)$ 为正定，由式(6.3-2)易得

$$x^T(t)P(t,T)x(t)\le x^T(t)P(t,T)x(t)$$

式(6.3-7)说明 $x(t)P(t,T)x(t)$ 是 T 具有单调性，（即单调递增）

由 $X(t)$ 的任意性，有 $x(t)=e_i$ $\qquad e_i\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\0\end{bmatrix}$ 第i个节点为1其余为0

则 $x(t)P(t,T)x(t)=P_{ii}(t,T)$

$\Rightarrow$ 得$P_{ii}(t,T)$存在极限，即所有$P(t,T)$的对角元素存在极限

另外， 对 $x(t)=e_i+e_j \qquad (i\neq j)$

$$2P_{ij}(t,T)=(e_i+e_j)^T P(t,T)(e_i+e_j)-P_{ii}(t,T)-P_{ij}(t,T)$$

因上式右边对 $T\to\infty$ 都存在极限。

故 $P_{ij}(t,T)$ 也存在极限。

结论：$P(t,T)$ 存在极限，且 $\overline{P}(t)=\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T)$

2. $\overline{P}(t)$ 为 Riccati 方程(6.3-7)的一个解：

记 $P(t,T,F)$ 为满足 $P(T)=F$ 的方程(6.3-7)的解

令 $P(t,T)$ 表示的是 $P(T,T)=0$ 的解，即 $P(t,T)=P(t,T,0)$

由式(6.3-2)得

$$\begin{aligned}J^*[x(t),t]&=\int_t^T\left[x^T(z)Q(z)x(z)+J(z)R(z)u(z)\right]dz(u(\bullet)=u^*(\bullet)\\&=x^T(t)P(t,T,0)x(t)\\&=\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T_1}}\left[x^{\mathrm{T}}(\tau)Q(\tau)x[\tau]+u^T(\tau)R(\tau)u[\tau]\right]d\tau\\&+\int_{T_1}^{T}\left[x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau)+u^T(\tau)R(\tau)u(\tau)\right]d\tau(u(\bullet)=u^*(\bullet)\\&=\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T_1}}\left[x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau)+u^T(\tau)R(\tau)u(\tau)\right]d\tau+x^T(T_1)P(T_{1,}T,0)x(T_1)\\&=x^T(t)P(t,T_{1,}P(T_1,T,0))x(t)\end{aligned} \tag{6.3-8}$$

因此有：$x^T(t)P(t_,T,0)x(t)=x^T(t)P(t,T_{1,}P(T_1,T,0))x(t)$

由 $X(t)$ 的任意性$\Rightarrow$ $$P(t,T,0)=P(t,T_1,P(T_1,T,0)) \tag{6.3-9}$$

对 $t\le T_1\le T$,上式成立，故有 $\overline{P}(t)=\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T,0)=\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T_{1,}P(T_1,T,0))$

上式表明：对于固定的时间 T_1，式(6.3-3)的解 $P(t,T_1,F)$ 连续地依赖于 F，因此有

$$\begin{aligned}\overline{P}(t)&=P(t,T_1,\lim_{T\leftarrow\infty}P(T_1,T,0))\\&=P(t,T_1,\overline{P}(T_1))\end{aligned}$$

即证明了，$\overline{P}(t)$ 是对所有 t 定义的方程(6.3-3)的一个解

3.最优性能指标和最优控制方式

令$u(\tau)=-R^{-1}(\tau)B^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)x(\tau)$ （并没有令其为最优控制）

因：$\frac{d}{d\tau}\left[x^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)x(\tau)\right]$ （（6.3-1）代入）→
$=\dot{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\overline{P}(\tau)x(\tau)+x^{T}(\tau)\dot{\overline{P}}(\tau)x(\tau)+x^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)\dot{x}(\tau)$

$=x^{T}(\tau)\left[\overline{P}(\tau)+A^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)+\overline{P}(\tau)A(\tau)-2\overline{P}(\tau)R^{-1}(\tau)B^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)\right]x(\tau)$（6.3-10）

将$u(\tau)=-R^{-1}(\tau)B^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)x(\tau)$及式(6.3-10)代入式(6.3-2)，及考虑式(6.3-3)

$J[x(t),u(\bullet),t,T]=\int_{t}^{T}\left[x^{T}(\tau)Q(\tau)x(\tau)+u^{T}(\tau)R(\tau)u(\tau)\right]d\tau$ （只考虑$\tau\in[t,T]$）

$$
\begin{aligned}
&=\int_{t}^{T}-\frac{d}{d\tau}\left[x^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)x(\tau)\right]d\tau\\
&=x^{T}(t)\overline{P}(t)x(t)-x^{T}(T)\overline{P}(T)x(T) \qquad (6.3\text{-}11)\\
&=x^{T}(t)\overline{P}(t)x(t)
\end{aligned}
$$

因此有：$\lim_{T\to\infty}J[x(t),u(t),t,T]\le x^{T}(t)\overline{P}(t)x(t)$ (6.3-12)

另有：
$$
\begin{aligned}
x^{T}(t)P(t,T)x(t)&=J^{*}[x(t),t,T]\\
&\le J[x(t),u(\bullet),t,T]
\end{aligned}
$$

因此有：$\lim_{T\to\infty}J[x(t),u(\bullet),t,T]\ge x^{T}(t)\overline{P}(t)\dot{x}(t)$ (6.3-13)

由式(6.3-10)及式(6.3-10)有 $\lim_{T\to\infty}J[x(t),u(\bullet),t,T]=x^{T}(t)\overline{P}(t)x(t)$ (6.3-14)

因为尚未证明$U(\tau)=-R^{-1}(\tau)B^{T}(\tau)\overline{P}(\tau)X(\tau)$为最优控制

故有 $J^{*}[x(t),t,\infty]\le J[x(t),u(\bullet),t,\infty]$ (6.3-15)

假定式（6.3-15）中严格不等于成立，即 $J^{*}[x(t),t,\infty]<J[x(t),u(\bullet),t,\infty]$ (6.3-16)

则存在一个不同于$u(\tau)$的$u_{1}(\tau)$使 $\lim_{T\to\infty}J[x(t),u_{1}(\tau),t,T]=J^{*}[x(t),t,\infty]$ (6.3-17)

又由式(6.3-14)有 $\lim_{T\to\infty}J^{*}[x(t),t,T]=J[x(t),u(\bullet),t,\infty]$ (6.3-18)

故由(6.3-16),(6.3-17)有 $\lim_{T\to\infty}J[x(t),u_{1}(\bullet),t,T]<\lim_{T\to\infty}J^{*}[x(t),t,T]$ (6.3-19)

即对相当大的 T 的要求 $J[x(t),u_{1}(\bullet),t,T]<J^{*}[x(t),t,T]$ (6.3-20)

成立