Домашняя работа 6

1.Найти производные функций

1) $y\ =\ x^3 log_2 x$

$y`\ =\ (x^3 log_2 x)`\ =\ (x^3)`\ \cdot\ log_2 x\ +\ x^3\ \cdot\ (log_2 x)`\ =\ 3x^2\ \cdot\ log_2 x\ +\ \frac{x^2}{ln2}\ =$

$x^2\left(3log_2 x\ +\ \frac{1}{ln2}\right)$

2) $-\ 10arctg\,x\ +\ 7e^x$

$y`\ =-\ 10`\ \cdot\ arctg\,x\ +\ (-\ 10)\ \cdot\ (arctg\,x)`\ +\ 7\ \cdot\ e^{x`}\ =\ \frac{10}{1+x^2}\ +\ 7e^x$

3) $y\ =\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\sqrt{7}\cdot\ x\ =x^{-\frac{2}{3}}\ -\ 2\ \cdot x^{-3}\ +7^{\frac{1}{2}}\ \cdot\ (x)'$

$y`\ =\left(x^{-\frac{2}{3}}\ -\ 2\ \cdot x^{-3}\ +7^{\frac{1}{2}}\ \cdot\ x\right)`\ =\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)-\ 2\ \cdot\left(x^{-3}\right)`\ +7^{\frac{1}{2}}\ \cdot\ (x)`\ =$

$=-\ \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\ -\ 2\ \cdot\ (-\ 3)\ \cdot x^{-3-1}\ +7^{\frac{1}{2}}\ \cdot\ 1\ \cdot x^{1-1}\ =-\ \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\ +\ 6\ \cdot x^{-4}\ +7^{\frac{1}{2}}\ =$

$\frac{6}{x^4}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}+\sqrt{7}$

$x`\ =\ 1\ \cdot x^{1-1}$

4) $y\ =\ cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$y`\ =\left(cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)=-\ sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ \cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)`\ =$

$=-\ sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ \cdot\ \frac{(1-\sqrt{x})`\cdot(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})`}{(1+\sqrt{x})^2}\ =-\ sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ \cdot\ \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{1+2\sqrt{x}+x}\ =$

$-\ sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ \cdot\ \frac{-\sqrt{x}^{-1}}{1+2\sqrt{x}+x}$

5) $y\ =e^{sh^2 5x}$

$y`\ =\left(e^{sh^2 5x}\right)`\ =e^{sh^2 5x}\ \cdot\left(sh^2 5x\right)`\ =e^{sh^2 5x}\ \cdot\ 2sh5x\ \cdot\ ch5x\ \cdot\ 5\ =\ 5sh\,10x\,e^{sh^2 5x}$

6) $y\ =\ ln\frac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^3(x+4)}$

$y = ln\frac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^3(x+4)} = ln(x + 1) + ln(x + 3)^3 - ln(x + 2)^3 - ln(x + 4) =$
$= ln(x + 1) + 3ln(x + 3) - 3ln(x + 2) - ln(x + 4)$
$y` = (ln(x + 1) + 3ln(x + 3) - 3ln(x + 2) - ln(x + 4))` =$
$= \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+4} =$
$\frac{(x+2)(x+3)(x+4)-3(x+1)(x+3)(x+4)+3(x+1)(x+2)(x+4)-(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} =$
$= \frac{9x^2-24x^2+21x^2-6x^2+26x-57x+42x-11x+24-36+24-6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

2.Найти производную данной функции в точке

1)$y = \frac{ln\,x}{x},\ x_0 = e$
$y` = \left(\frac{ln}{x}\right)` = \frac{ln\,x`\cdot x - ln\,x\cdot x`}{x^2} = \frac{1-ln\,x}{x^2}$
2)$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}, x_0 = 9$
$y` = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)` = \frac{\sqrt{x}`\cdot(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)`}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{6\cdot16} =$
$\frac{1}{96}$

3.Используя логарифмическую производную, найти производные функций
1)$y = x^{ln\,x}$
$ln\,y = ln\,x^{ln\,x} = ln\,x \cdot lnx$
$(ln\,y)` = (ln\,x \cdot ln\,x)`$
$\frac{y`}{y} = ln\,x` \cdot ln\,x + ln\,x \cdot ln\,x` = 2\frac{ln\,x}{x}$
$y` = x^{ln\,x} \cdot 2\frac{ln\,x}{x} = 2lnx \cdot x^{ln\,x-1}$
2)$y = \frac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4}$
$ln\,y = ln\frac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4} = ln(x^3 - 2) + \frac{1}{2}ln(x - 1) - 4\,ln(x + 5)$
$(ln\,y)` = \left(ln(x^3 - 2) + \frac{1}{3}ln(x - 1) - 4\,ln(x + 5)\right)`$

$\frac{y`}{y} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{x+5}$

$y` = y \cdot \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{x+5}\right) = \frac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4} \cdot \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{x+5}\right)$

3) $y = (tg\ x)^{cos\ x}$

$ln\ y = ln(tg\ x)^{cos\ x} = cos\ x \cdot ln\ tg\ x$

$(kn\ y)` = (cos\ x \cdot ln\ tg\ x)`$

$\frac{y`}{y} = cos\ x` \cdot ln\ tg\ x + cos\ x \cdot ln\ tg\ x` =- sin\ x \cdot ln\ tg\ x + cos\ x \cdot \frac{1}{tg\ x} \cdot \frac{1}{cos^2 x} =$

$- sin\ x \cdot ln\ tg\ x + \frac{1}{sin\ x}$

$y` = y \cdot \left(\frac{1}{sin\ x} - sin\ x \cdot ln\ tg\ x\right) = (tg\ x)^{cos\ x} \cdot \left(\frac{1}{sin\ x} - sin\ x \cdot ln\ tg\ x\right)$

4.Найдите производную неявно заданной функции

1)$e^{xy} - cos(x^2 + y^2) = 0$

$e^{xy} \cdot (xy)` + sin(x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2)` = 0$

$e^{xy} \cdot (y + xy`) + sin(x^2 + y^2) \cdot (2x + 2yy`) = 0$

$ye^{xy} + xe^{xy}y` + 2x\, sin(x^2 + y^2) + 2y\, sin(x^2 + y^2)y` = 0$

$y`(xe^{xy} + 2y\, sin(x^2 + y^2)) =- (ye^{xy} + 2x\, sin(x^2 + y^2))$

$y` =- \frac{ye^{xy}+2x\, sin(x^2+y^2)}{xe^{xy}+2y\, sin(x^2+y^2)}$

2)$x\, sin\ y + y\, sin\ x = 0$

$sin\ y + x\, cos\ y \cdot y` + y`\, sin\ x + y\, cos\ x = 0$

$y`(sin\ x + x\, cos\ y) =- (sin\ y + y\, cos\ x)$

$y` = - \frac{(sin\ y+y\, cos\ x)}{(sin\ x+x\, cos\ y)}$

5.Найти производную для заданных параметрических функций

1)$x = t^3 + t,\ y = t^2 + t + 1$

$y`(x) = \frac{y`(t)}{x`(t)} = \frac{(t^2+t+1)`}{(t^3+t)`} = \frac{2\cdot t^{2-1}+1\cdot t^{1-1}+0}{3\cdot t^{3-1}+1\cdot t^{1-1}} = \frac{2t+1}{3t^2+1}$

2)$x = e^t sin\ t,\ y = e^t\ cos\ t$

$y`(x) = \frac{y`(t)}{x`(t)} = \frac{(e^t cos\ t)`}{(e^t\ sin\ t)`} = \frac{e^{t`}\ cos\ t+e^t\ cos\ t`}{e^{t`}\ sin\ t + e^t\ sin\ t`} = \frac{e^t\ cos\ t+e^t(-sin\ t)}{e^t\ sin\ t+e^t\ cos\ t} = \frac{cos\ t-sin\ t}{cos\ t+sin\ t}$

6.Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

$y\ = e^{x},\ x_0 =\ 0$

$y`\ = e^{x}$

$y`(x_0)\ =\ y`(e^{x})\ =\ 1$

$y\ -\ 1\ =\ x \Rightarrow y\ =\ x\ +\ 1\ -$ касательная

$y\ -\ 1\ =-\ x \Rightarrow y\ =\ 1\ -\ x\ -$ нормаль

7.Найти производные указанных порядков для следующих функций

1)$y\ =\ \ -\ x\ \cdot\ cos\, x,\ y"\ =\ ?$

$y`\ =\ (-\ x\ \cdot\ cos\, x)`\ =-\ x`\ \cdot\ cos\, x\ -\ x\ \cdot\ cos\, x`\ =-\ cos\, x\ +\ x\ \cdot\ sin\, x$

$y``\ =\ (-\ cos\, x\ +\ x\ \cdot\ sin\, x)`\ =-\ cos\, x`\ +\ x`\ \cdot\ sin\, x\ +\ x\ \cdot\ sin\, x`\ =$

$=\ sin\, x\ +\ sin\, x\ +\ x\ \cdot\ cos\, x\ =\ 2\, sin\, x\ +\ x\, cos\, x$