Домашняя работа №3

1) Доказать, что последовательность:

а) неограниченная:

$x_n =$
$\left\{\infty;\ \dots;\ \ -\frac{1}{7};\ \ -6;\ \ -\frac{1}{5};\ \ -4;\ \ -\frac{1}{3};\ \ -2;\ \ -1;\ 1;\ 1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ 6;\ \frac{1}{7};\ \dots;\ \infty\right\}$
$x_1 < x_2;\ x_2 > x_3 \dots .$

Последовательность не является ни монотонной, ни строго монотонной

б) не является бесконечно большой

Ни один из элементов последовательности $\left\{x_n\right\}$ не равен 0. Условие для бесконечно малой последовательности ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ = 0) не выполнено.

Каждое нечетное значение n в итоге дает элемент в виде $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$
Каждое четное значение n в результате дает целое значение (Z)
Таким образом, последовательность $\left\{x_n\right\}$ не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой.

2. Доказать, что последовательность $\{sin\ x\}$ расходится

Обязательным условием сходимости является $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)$ = $\lim\limits_{n\to\infty} (sin\ n\ )$ = 0

Однако предела последовательности $\{sin\ x\}$ не существует, поскольку $sin\ n$ все время меняет своё значение [-1; 1]

Это значит, что функция ограничена, но не монотонная и, соответственно, расходится.

По Коши модуль должен стремится к 0 при n → ∞. Это невозможно, поскольку равен произведению немонотонных функций sin и cos

3. Найти предел

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1} = \frac{\frac{10n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$ – бесконечно малая последовательность

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = 1$ – ограниченная последовательность

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5*3^n}{3^n-2} = \frac{\frac{5*3^n}{3^n}}{\frac{3^n-2}{3^n}} = \frac{5}{1-\frac{2}{3^n}} = 5$ – ограниченная последовательность

4. Найти предел

$$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$\frac{n^2+n^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n^2}+\frac{n}{n^2}} =$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n^2}+\frac{1}{n}} = \infty$$ – бесконечно большая последовательность

5. Вычислить

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}\cos n}{\sqrt{n}}}{\frac{n+1}{\sqrt{n}}} = \frac{\cos n}{\frac{n+1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\cos n}{\cos n}}{\frac{\cos n\,(n+1)}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\frac{\cos n\,(n+1)}{\sqrt{n}}} = \infty$$ – бесконечно большая последовательность