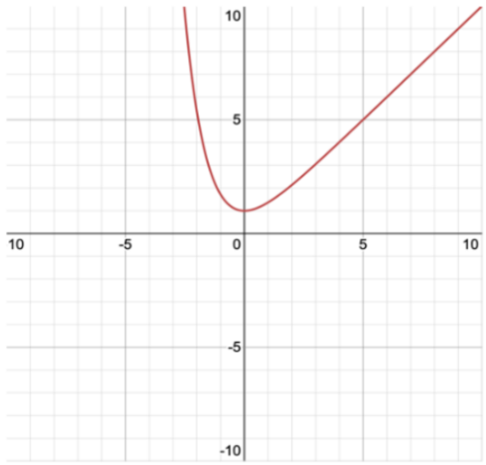
Домашнее задание 7

1.Найти интервалы возрастания и убывания функций:
1)

$f(x) = x + e^{-x}$



$f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 + e^{-x} \cdot (-x)' = 1 + e^{-x} \cdot \left(-1 \cdot x^{1-1}\right) = 1 - e^{-x}$

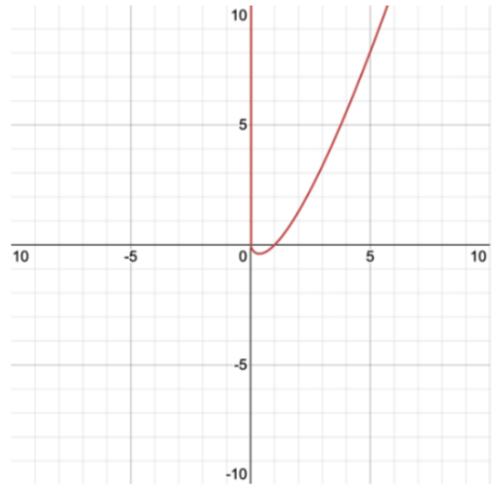
$1 - e^{-x} = 0$

$\frac{e^{x}-1}{e^{x}} = 0$

$e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ $-$ ноль функции

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает

2)
$f(x) = x \ln x$

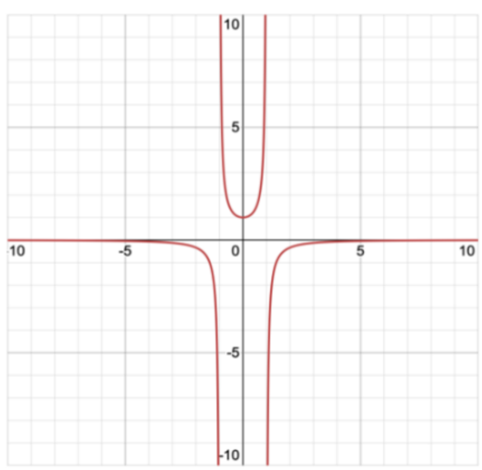


$f'(x) = x' \ln x + x \ln x' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0.36788$ − нуль функции

$(-\infty; 0.36788)$	$(0.36788; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает

3)
$y = \frac{1}{1-x^2}$



$x = \pm 1$ – точки разрыва функции

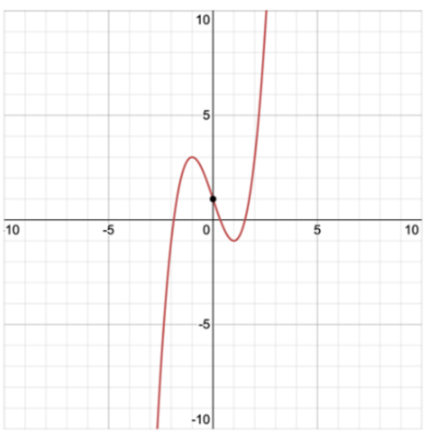
$y' = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{1' \cdot (1-x^2) - 1 \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{-1 \cdot (0-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ – нуль функции

$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция убывает	Функция возрастает	Функция возрастает

2.Найти экстремумы функций:

1)$f(x) = x^3 - 3x + 1$



$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x \pm 1$ – нули функции

$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция возрастает	Функция убывает	Функция возрастает

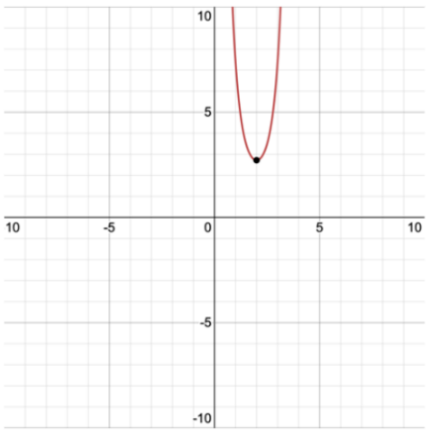
$x = -1$ является локальным максимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $+$ на $-$

$x = 1$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях произво –

дная функции меняет знак на с $-$ на $+$

2)

$y = e^{x^2-4x+5}$



$y' = \left(e^{x^2-4x+5}\right)' = e^{x^2-4x+5} \cdot \left(x^2 - 4x + 5\right)' = e^{x^2-4x+5} \cdot (2x - 4) =$

$= 2(x - 2) \cdot e^{x^2-4x+5}$

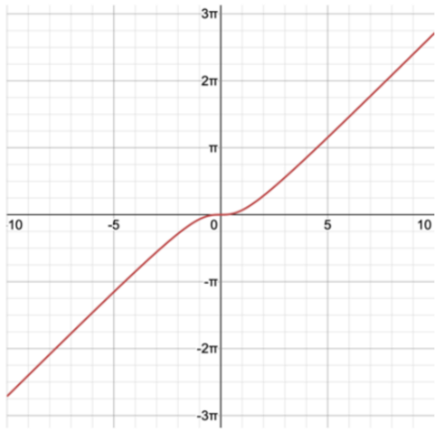
$(x - 2) \cdot e^{x^2-4x+5} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5.428766 -$ нули функции

$(-\ \infty; 2)$	$(2;\ 5.428766)$	$(5.428766;\ +\ \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Функция убывает	Функция возрастает	Функция возрастает

$x = 2$ является локальным минимумом, поскольку в его окрестностях производная функции меняет знак с $-$ на $+$

3)

$y = x - arctg\, x$



$y' \ = \ (x \ - \ arctg\, x)' \ = \ 1 \ - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

$\frac{x^2}{1+x^2} = \ 0 \Rightarrow x^2 \ = \ 0 \ - \$ ноль функции

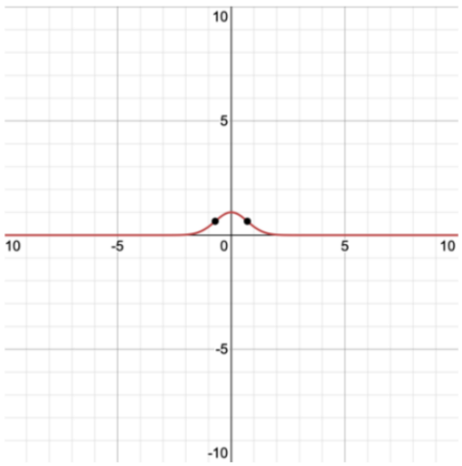
$(- \ \infty; 0)$	$(0, \ \ + \ \infty)$
$f'(x) \ > \ 0$	$f'(x) \ > \ 0$
Функция возрастает	Функция возрастает

Локальный максимум и/или минимум отсутствуют.

3.Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

1)

$f(x) = e^{-x^2}$



$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right)' = (-2x)' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' =$

$-2e^{-x^2} - 2x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0$

$2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 0$

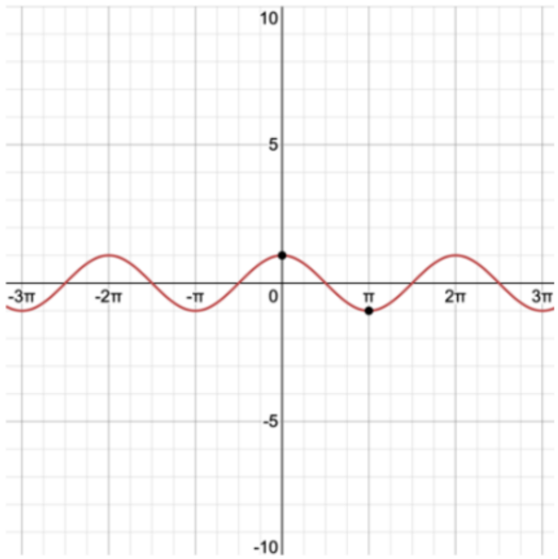
$2e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2} = 0 \Rightarrow ln\,0 \Rightarrow$ содержит неопределенность

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} -$ точки перегиба функции

$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция вогнута	Функция выпукла	Функция вогнута

2)

$y = cos\, x$



$y' = cos\, x' = -\ sin\, x$

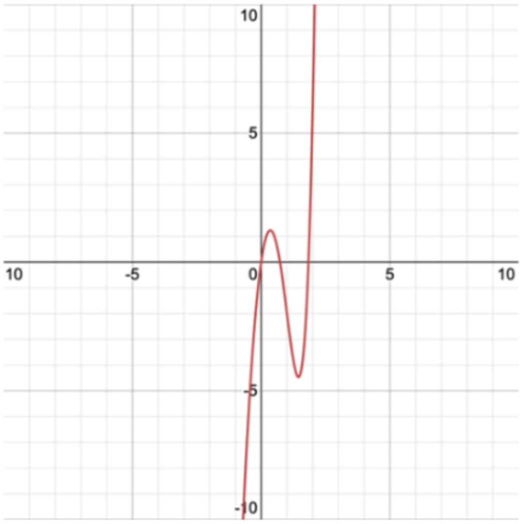
$y'' = -\ sin\, x' = -\ cos\, x$

$-\ cos\, x = 0 \Rightarrow x_1 = 7.8539816,\ x_2 = 10.995574$ − точки перегибы функции

$(-\ \infty;\ 7.853981)$	$(7.853981; 10.995574)$	$(10.995574; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
Функция выпукла	Функция вогнута	Функция выпукла

3)

$y = x^5 - 10x^2 + 7x$



$y' = \left(x^5 - 10x^2 + 7x\right)' = 5x^4 - 20x + 7$

$y'' = (5x^4 - 20x + 7)' = 20x^3 - 20$

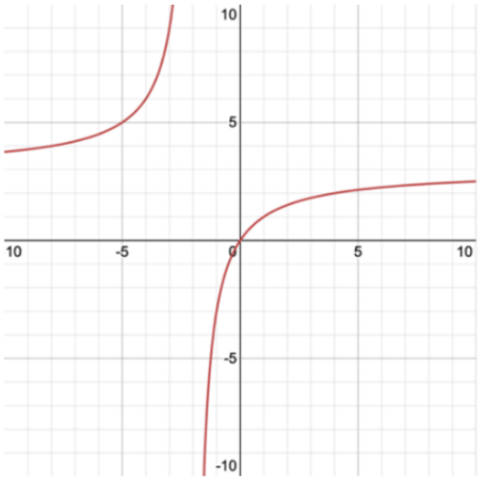
$20x^3 - 20 = 0 \Rightarrow x = 1 -$ точка перегиба функции

$(-\infty; 1)$	$(1; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Функция выпукла	Функция вогнута

4.Найти асимптоты графиков функции:

1)

$y = \frac{3x}{x+2}$



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (kx + b - f(x)) -$ определение асимптоты

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3x}{x+2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+2} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x+2} = 3$

$y = 3 -$ горизонтальная асимптота

$x_1 =- 2 -$ вертикальная асимптота

$\lim\limits_{x \to -2\pm0} \frac{3x}{x+2} =\pm \infty -$ пределы в точке $x_1 =- 2$(точка разрыва $2 -$ го рода)