Домашняя работа 5

1. Найти переделы

1)

$$\lim_{x\to\infty}[ln(x+3)-lnx] = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\left[ln\frac{x+3}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] =$$

$$ln\left(\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\right) = ln(1+3\cdot 0) = ln(1) = 0$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+2x)}{arcsin\,3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+2x)}{arcsin\,2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[ln(1+2x)]}{\frac{d}{dx}[arcsin\,3x]}$$

а)

$$u = 1+2x$$

$$\frac{d}{dx}[ln(u)]\frac{d}{dx}[1+2x] = \frac{1}{u}\cdot\frac{d}{dx}[1+2x] = \frac{1}{1+dx}\cdot\frac{d}{dx}[1+2x] =$$

$$\frac{1}{1+2x}\left(\frac{d}{dx}[1]+\frac{d}{dx}[2x]\right) = \frac{2}{1+2x}$$

б)

$$a = 3x$$

$$\frac{d}{dx}[arcsin\,3x] = \frac{d}{dx}[arcsin\,(a)]\frac{d}{dx}[3x] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{d}{dx}[3x] = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-9x^2}}{3(1+2x)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-9x^2}}{(1+2x)} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}9x^2}}{\left(\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}2x\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-9\cdot 0^2}}{(1+2\cdot 0)} = \frac{2}{3}$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[7^x-1]}{\frac{d}{dx}[3^x-1]}$$

а)

$$\frac{d}{dx}[7^x-1] = \frac{d}{dx}[7^x]+\frac{d}{dx}[-1] = 7^x ln(7)$$

б)

$$\frac{d}{dx}[3^x - 1] = \frac{d}{dx}[3^x] + \frac{d}{dx}[-1] = 3^x ln(3)$$

в)

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^x ln(7)}{3^x ln(3)} = \frac{ln(7)}{ln(3)} \cdot \frac{\lim_{x\to 0} 7^x}{\lim_{x\to 0} 3^x} = \frac{ln(7)}{ln(3)} \cdot \frac{7 \lim_{x\to 0} x}{3 \lim_{x\to 0} x} = \frac{ln(7)}{ln(3)} \cdot \frac{7^0}{3^0} = \frac{ln(7)}{ln(3)} = 1.77124374...$$

4)

$$\lim_{a\to 0} \frac{(x+a)^3 - x^3}{a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{a\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[(x+a)^3 - x^3\right]}{\frac{d}{dx}[a]}$$

а)

$$\frac{d}{dx}\left[(x+a)^3 - x^3\right] = \frac{d}{dx}\left[(x+3)^3\right] + \frac{d}{dx}[-x^3] = \frac{d}{dx}[(x+a)^3]$$

$u = x + a$

$$\frac{d}{dx}[u^3]\frac{d}{dx}[x+a] = 3u^2\frac{d}{dx}[x+a] = 3(x+a)^2\frac{d}{dx}[x+a] =$$

$$3(x+a)^2\left(\frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[a]\right) = 3(x+a)^2(0+1) = 3(x+a)^2$$

б)

$$\frac{d}{dx}[a] = 1$$

в)

$$\lim_{a\to 0} \frac{3(x+a)^2}{1} = \lim_{a\to 0} (3x+a)^2 = 3\left(\lim_{a\to 0} x + \lim_{a\to 0} a\right)^2 = 3(x+0)^2 = 3x^2$$

5)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{5x^2+1} - \frac{x^2}{5x-3}\right) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[x^3(5x-3) - x^2(5x^2+1)\right]}{\frac{d}{dx}\left[(5x-3)(5x^2+1)\right]}$$

а)

$$\frac{d}{dx}\left[x^3(5x-3) - x^2(5x^2+1)\right] = \frac{d}{dx}[x^3(5x-3)] + \frac{d}{dx}[-x^2(5x^2+1)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^3(5x-3)] = x^3\frac{d}{dx}(5x-3) + (5x-3)\frac{d}{dx}[x^3] =$$

$$x^3\left(\frac{d}{dx}[5x] + \frac{d}{dx}[-3]\right) + (5x-3)\frac{d}{dx}[x^3] =$$

$$x^3(5 \cdot 1 + 0) + (5x-3)3x^2 = 5x^3 + 3(5x-3)x^2$$

$$\frac{d}{dx}[-x^2(5x^2+1)] =- (x^2(10x+0)+2(5x^2+1)x) =$$

$$-(10x^3+2(5x^2+1)x)$$

$$5x^3+3(5x-3)x^2-(10x^3+2(5x^2+1)x) =- 9x^2-2x$$

б)

$$\frac{d}{dx}[(5x-3)(5x^2+1)] = (5x-3)\left(\frac{d}{dx}[5x^2]+\frac{d}{dx}[1]\right)+\left(5x^2+1\right)\cdot$$

$$\left(\frac{d}{dx}[5x]+\frac{d}{dx}[-3]\right)= 75x^2 + 30x + 5$$

в)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2-2x}{75x^2+30x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{9x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{75x^2}{x^2}+\frac{30x}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-9-\frac{2}{x}}{75+\frac{30}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{-\lim\limits_{x\to\infty}9-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}75+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}} =$$

$$-\frac{9}{75} =- \frac{3}{25}$$

6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{2x\cdot tg2x} = \left[\frac{0}{0}\right]= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{(4x)^2}{2}+0\left((4x)^2\right)\right)}{2x\cdot(2x+0(2x))} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2-0((x)^2)}{4x^2+2x\cdot 0(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{0((x)^2)}{4x^2}}{1+\frac{0(x)}{2x}} = 2$$

7)

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot sin\left(\frac{2}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty}\frac{sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 2$$

8)

$$\lim_{x\to 0}(1+tg\,x)^{ctg\,x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{cos^2x}\right)^{-\frac{1}{sin^2x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{sin^2x}\right)^{-\frac{1}{sin^2x}}$$

$$sin^2x = (x+0(x))(x+0(x)) = (x^2+2\cdot x\cdot 0(x)) = x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{-x^{-2}} = 0$$

9)

$$\lim_{x\to 0}(cos\,2x)^{\frac{1}{sin^2x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+0((2x^2))\right)^{(x+0(x))^{-2}} = 1$$

10)

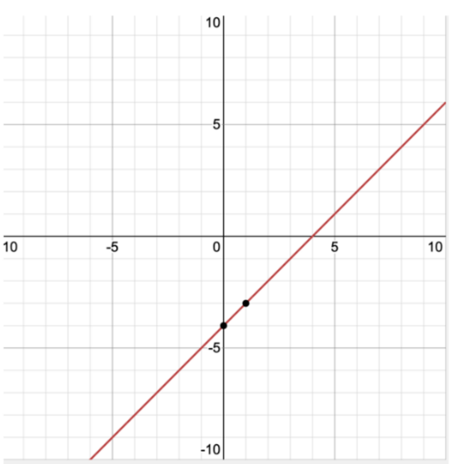
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\,sin\,x}-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x(x+0(x))}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2+x\cdot 0(x)}-1}{x^2} = 0$$

2. Установить характер разрыва функции в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4},\ x_0 = -4$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x^2-16}{x+4} = \frac{x^2-(4)^2}{x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = x-4 = 0$$

Графиком $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ является:



Горизонтальные и вертикальные асимптоты отсутствуют

Наклонная асимптота: $y = x - 4$

При $x_0 =- 4$ данная функция $f(x)$ не определена

$x_0 = - 4$ является точкой устранимого разрыва $f(x)$

б)

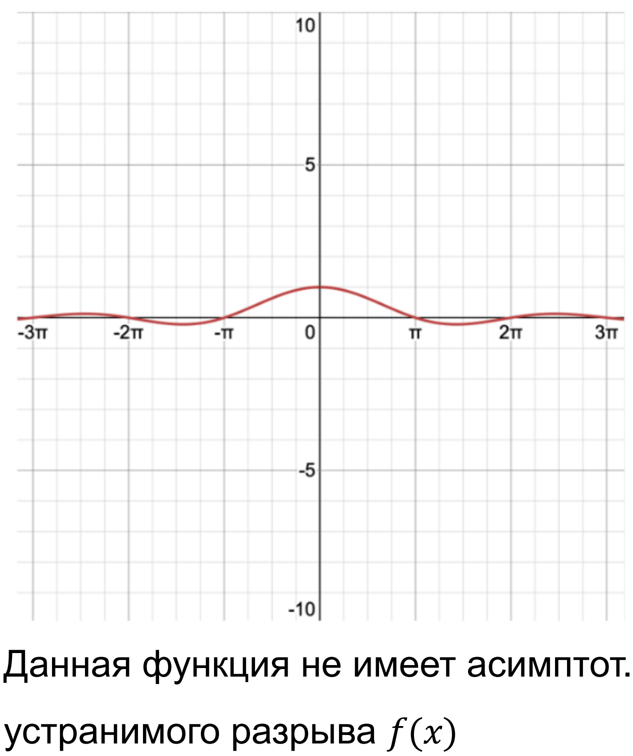
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Из свойств функций, непрерывных в точке, и непрерывности элементарных функций следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиций.

Таким образом, данная функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0

Графиком $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ является:



Данная функция не имеет асимптот. $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва $f(x)$

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0 :

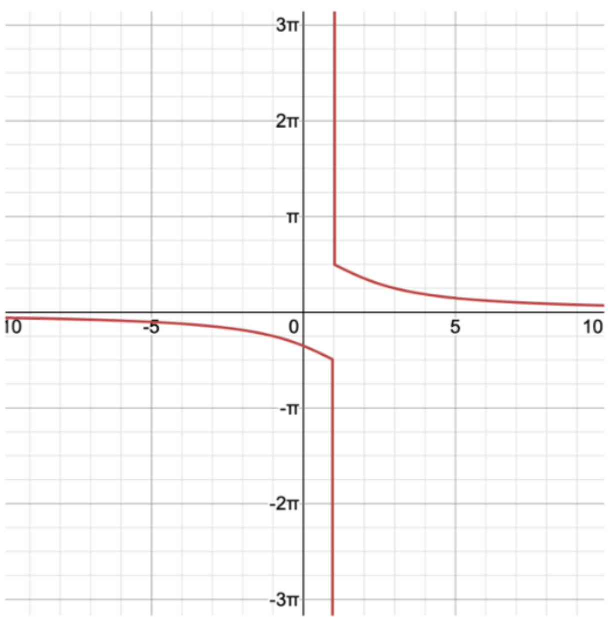
$f(x) = arctg\frac{2}{x-1}$, $x_0 = 1$

$arctg\frac{2}{x-1} = arccos\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}}$, при $x > 0$

Функция $y = arctg\frac{2}{x-1}$ непрерывна на всей числовой прямой, поскольку получена из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиций.

При $x_0 = 1$ функция $y = arctg\frac{2}{1-1} = arctg\left(\frac{2}{0}\right)$ не определена.

Графиком $f(x) = arctg\frac{2}{x-1}$ является:



Данная функция непрерывна слева при $x < 1$. И непрерывна справа при $x > 1$.

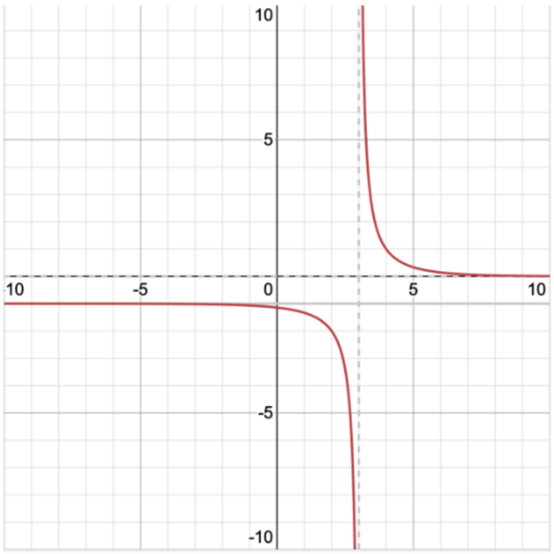
Горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

В точке $x_0 = 1$ разрыв 2-го рода.

2)

$f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0 = 3$

Графиком $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}$ является:



В точке $x_0 = 3$ (вертикальная асимптота) функция $y = \frac{1}{2^{3-3}-1} = \left(\frac{1}{0}\right)$ не определена. Данная функция элементарная и непрерывна слева при $x < 3$ и справа $x > 3$

Поскольку числитель стремится к вещественному числу, а знаменатель бесконечен, дробь $\frac{1}{2^{3-3}-1}$ стремится к 0.

Горизонтальные асимптоты: $y = 0, \ -1$

Наклонных асимптот нет, поскольку степень числителя меньше либо равна степени знаменателя.

В точке $x_0 = 3$ разрыв 2-го рода.