

1 Rozwiązanie równania Burgersa

Rozważamy cztery równania różniczkowe cząstkowe.

Równanie transportu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 \leq x \leq 10, t \geq 0. \quad (1)$$

Nielepkie równanie Burgersa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 \leq x \leq 10, t \geq 0. \quad (2)$$

Równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq 10, t \geq 0, \beta > 0. \quad (3)$$

Równanie Burgersa (nieliniowe, paraboliczne)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq 10, t \geq 0, \beta > 0. \quad (4)$$

Dla wszystkich czterech równań:

- t - zmienna niezależna interpretowana jako czas,
- x - zmienna niezależna interpretowana jako położenie,
- $u(x, t)$ - zmienna zależna interpretowana jako prędkość płynu,
- β - stały parametr interpretowany jako lepkość płynu.

Naszym celem jest wykorzystanie metod różnic skończonych w celu znalezienia przybliżonych wartości $u(x, t)$ rozwiązania wszystkich równań.

Najpierw określmy krok przestrzenny h oraz krok czasowy k . Niech

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u(x_i, t_j) = u(i \cdot h, j \cdot k), \\ h &= 0.1, k = 0.005, i \in [0, M-1], j \in [0, N-1], M, N \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wtedy niech warunek początkowy wszystkich równań (funkcja Gaussa)

$$u_{i,0} = e^{-(x_i - x_{mid})^2}, x_{mid} = \frac{(M-1) \cdot h}{2} = 5. \quad (6)$$

Oraz niech warunki brzegowe wszystkich równań

$$u_{0,j} = u_{M-1,j} = 0. \quad (7)$$

Niech

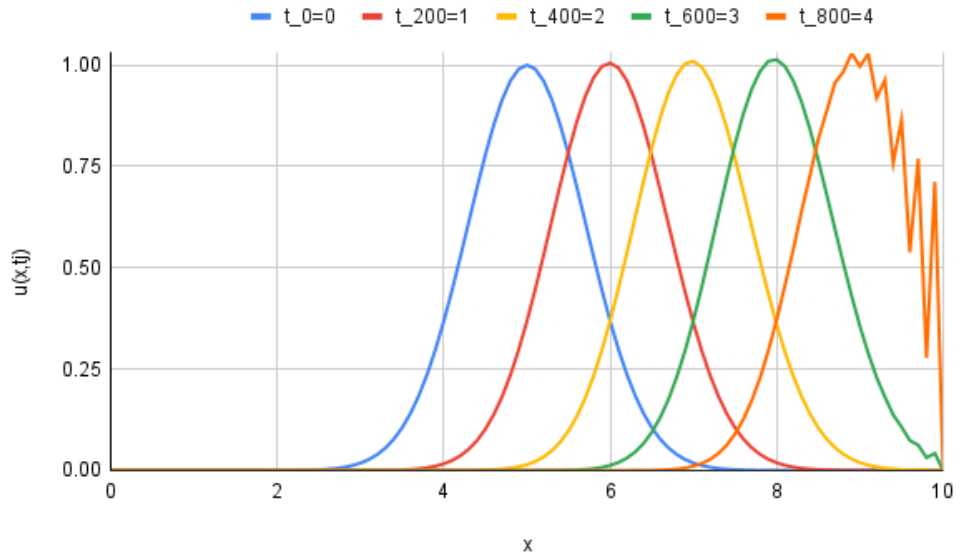
$$\beta < \frac{h^2}{2k} \wedge \beta = 0.99, \quad (8)$$

w celu uzyskania stabilności rozwiązań.

Wtedy stosując metodę Eulera:
dla równania transportu

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) &= 0, \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),\end{aligned}\tag{9}$$

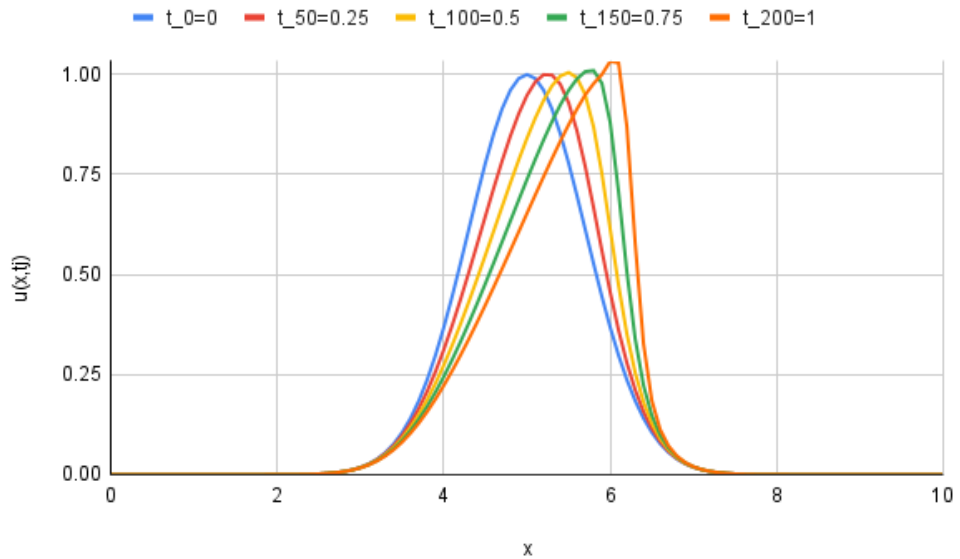
Rysunek 1: Równanie transportu, metoda Eulera



dla nieleckiego równania Burgersa

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) &= 0, \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2),\end{aligned}\tag{10}$$

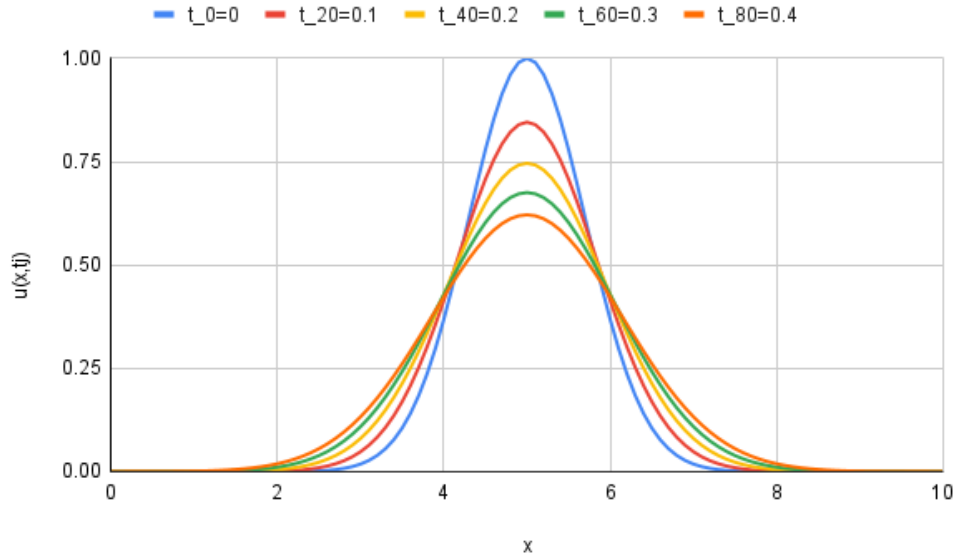
Rysunek 2: Nielepkie równanie Burgersa, metoda Eulera



dla równania ciepła

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) &= 0, \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\beta k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}),\end{aligned}\tag{11}$$

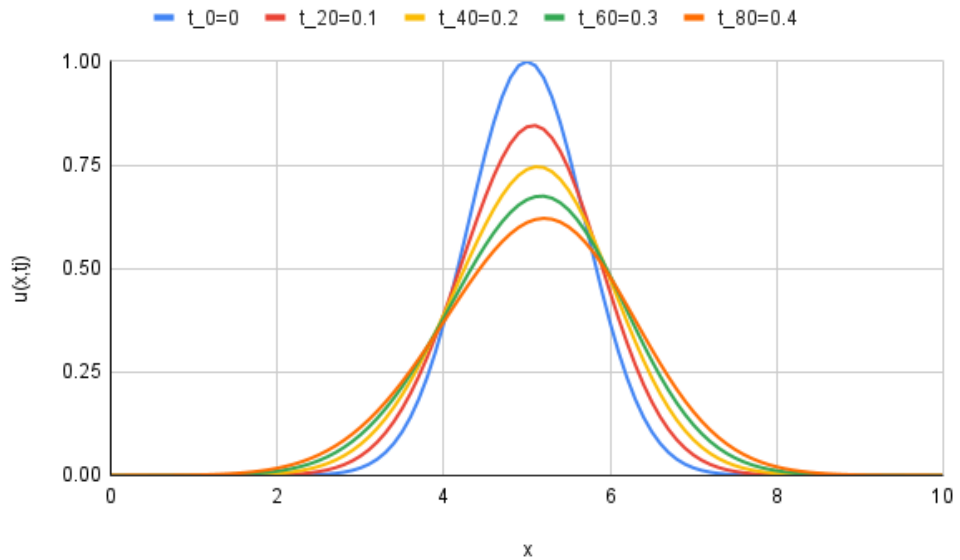
Rysunek 3: Równanie ciepła, metoda Eulera



dla równania Burgersa

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) &= 0, \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + \frac{\beta k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).\end{aligned}\tag{12}$$

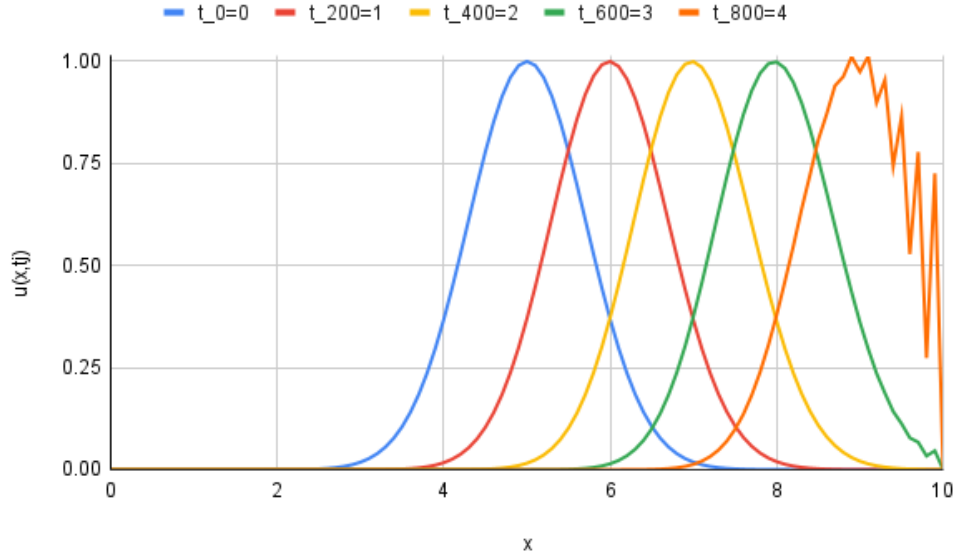
Rysunek 4: Równanie Burgersa, metoda Eulera



Stosując metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu:
dla równania transportu

$$\begin{aligned}v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \\u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{2h}(v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}),\end{aligned}\tag{13}$$

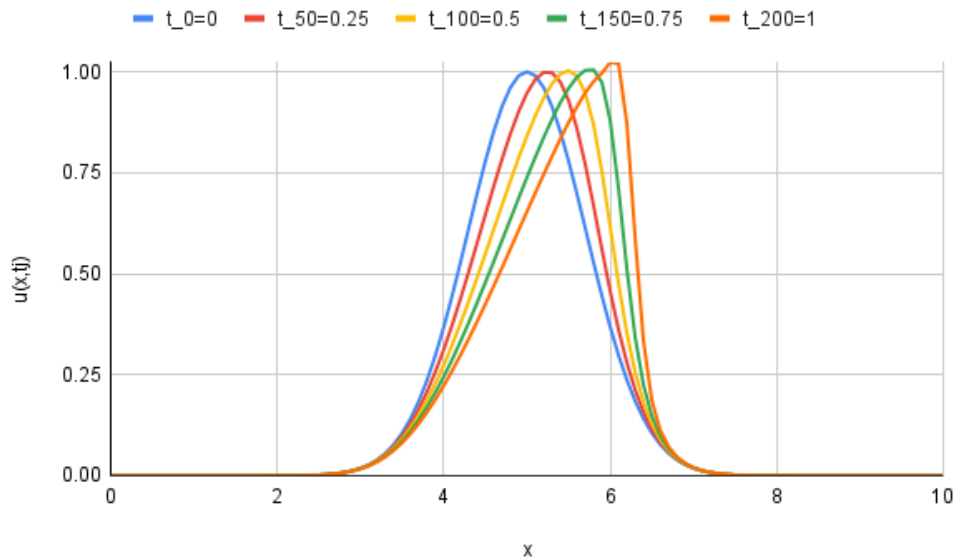
Rysunek 5: Równanie transportu, metoda RK2



dla nieleckiego równania Burgersa

$$\begin{aligned}v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{8h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2), \\u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i-1,j+1}^2),\end{aligned}\tag{14}$$

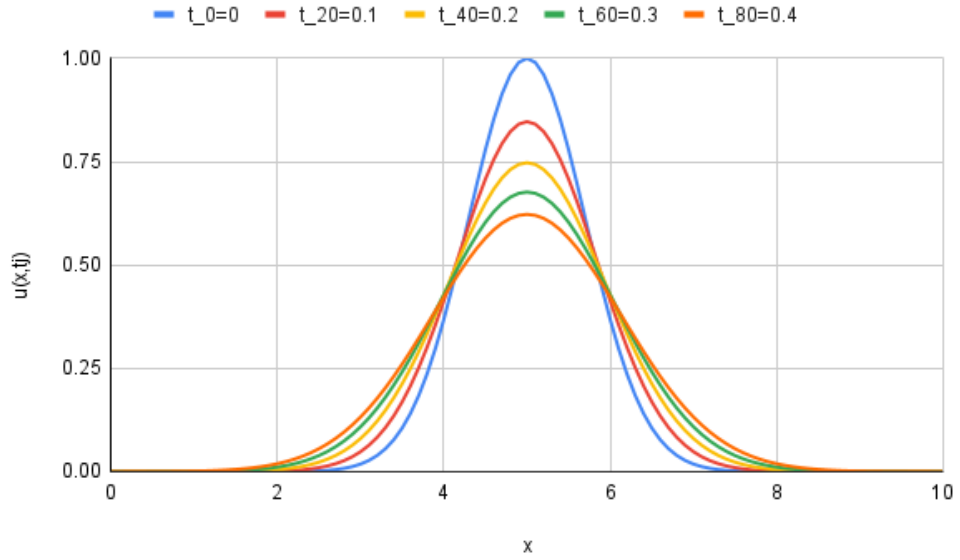
Rysunek 6: Nieleckie równanie Burgersa, metoda RK2



dla równania ciepła

$$\begin{aligned}v_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\beta k}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}), \\u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\beta k}{h^2}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}),\end{aligned}\tag{15}$$

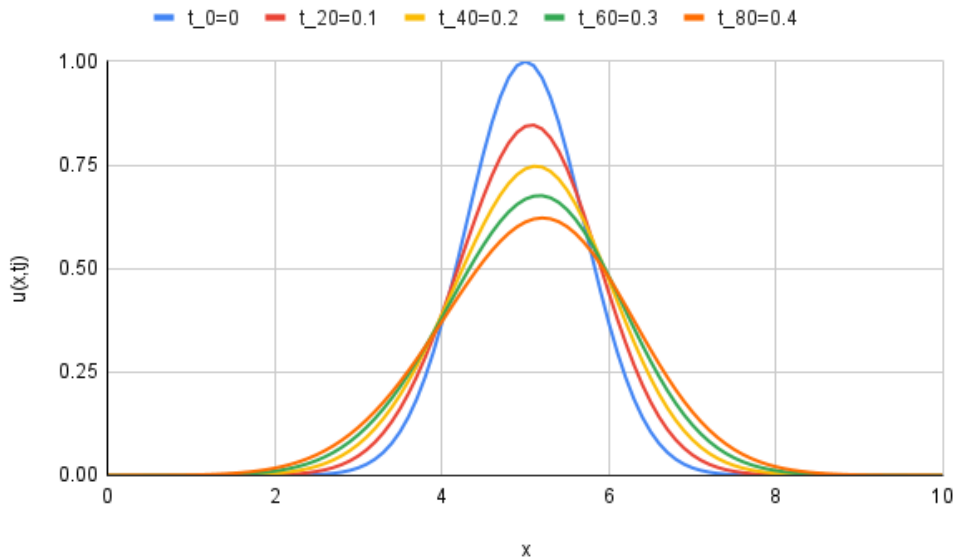
Rysunek 7: Równanie ciepła, metoda RK2



dla równania Burgersa

$$\begin{aligned}v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{8h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + \frac{\beta k}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}), \\u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i-1,j+1}^2) + \frac{\beta k}{h^2}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}).\end{aligned}\tag{16}$$

Rysunek 8: Równanie Burgersa, metoda RK2



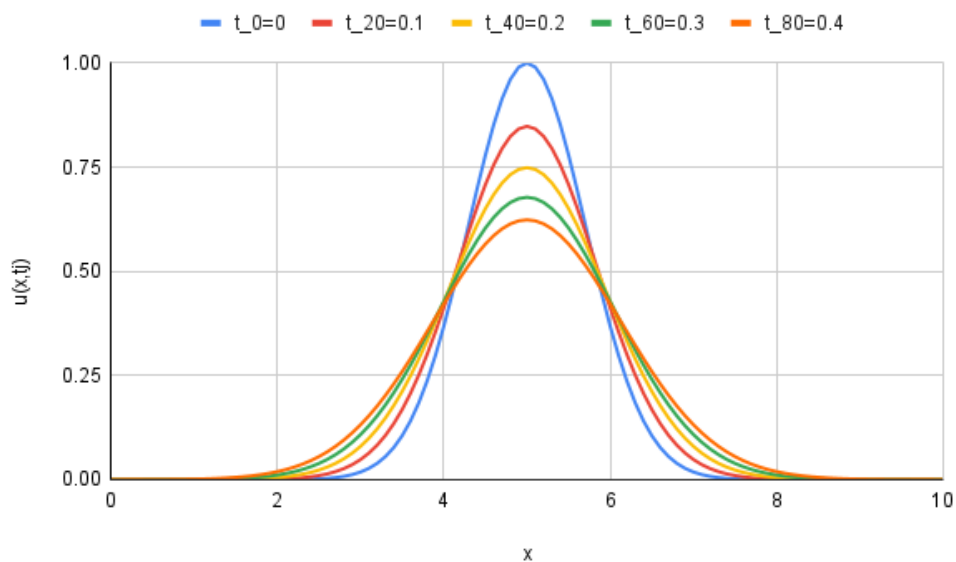
Stosując metodę niejawną:
dla równania ciepła

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) &= 0, \\ u_{i,j-1} &= -\frac{\beta k}{h^2}u_{i-1,j} + (1 + 2\frac{\beta k}{h^2})u_{i,j} - \frac{\beta k}{h^2}u_{i+1,j}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2s \end{bmatrix}, s = \frac{\beta k}{h^2},$$

$$u_{i,j} = A^{-1}u_{i,j-1}, \quad (18)$$

Rysunek 9: Równanie ciepła, metoda niejawna



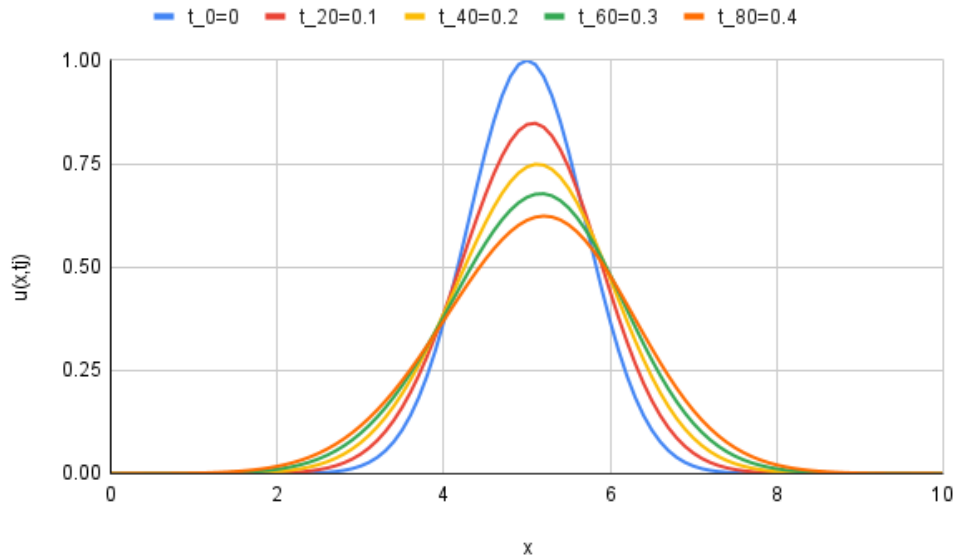
dla równania Burgersa

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) + \frac{1}{4h}(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) &= 0, \\ u_{i,j-1} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2) &= -\frac{\beta k}{h^2}u_{i-1,j} + (1 + 2\frac{\beta k}{h^2})u_{i,j} - \frac{\beta k}{h^2}u_{i+1,j}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2s \end{bmatrix}, s = \frac{\beta k}{h^2},$$

$$u_{i,j} = A^{-1}(u_{i,j-1} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)). \quad (20)$$

Rysunek 10: Równanie Burgersa, metoda niejawna



Algorytm, który realizuje opisaną metodę niejawną korzysta z procedury tri rozwiązującej układ równań o macierzy trójkątnej. Metoda tri korzysta ze szczególnego przypadku eliminacji Gaussa w czasie $O(n)$, zamiast czasu $O(n^3)$ dla normalnego przypadku, co ogromnie przyspiesza znajdowanie rozwiązań. Mogliśmy zasotosować tę metodę ponieważ stałe wartości na głównej przekątnej były dodatnie oraz większe od wartości na górnej oraz dolnej przekątnej.

Uzyskaliśmy prawie identyczne wyniki za pomocą użycia metody Eulera, RK2 i niejawnej. Nie mogliśmy skorzystać z metody niejawnej dla równania transportu, ani dla nielepkiego równania Burgersa, ponieważ wymaga ona użycia macierzy kwadratowej ($M=N$), a dla tych równań ta równość nie zachodziła, ponieważ nie chcieliśmy ograniczać t aż tak bardzo.

Dla równania transportu oraz nielepkiego równania Burgersa, jeśli t przekroczy odpowiednią wartość, to przybliżone wartości u zaczynają bardzo mocno odbiegać od rzeczywistych (dla równania transportu $t > 3$, dla nielepkiego równania Burgersa, $t > 1$).

Dla równania transportu, kolejne przesunięcia w czasie t_j powodują uzyskanie maksimum $u = 1$ w kolejnych przesunięciach w przestrzeni x_i . Funkcja Gaussa zostaje jedynie przesunięta w prawo. Zobrazowana zostaje liniowość.

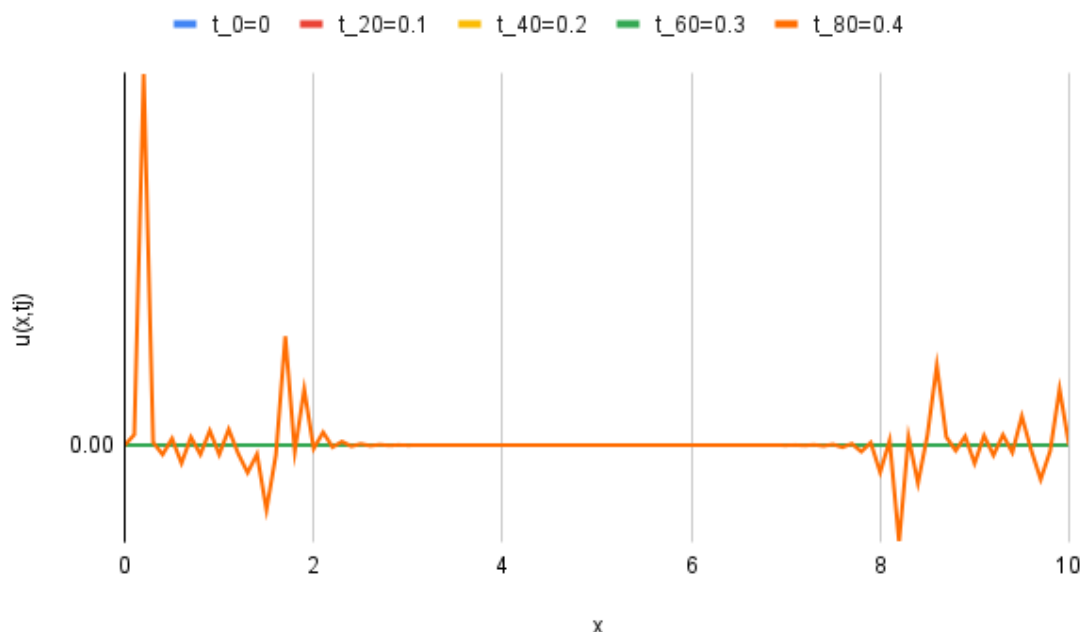
Dla nielepkiego równania Burgera, kolejne przesunięcia w czasie t_j powodują uzyskanie maksimum $u = 1$ w kolejnych przesunięciach w przestrzeni x_i . Funkcja Gaussa nie zostaje jedynie przesunięta w prawo, tylko wolniej rośnie przed osiągnięciem maksimum i szybciej maleje po osiągnięciu maksimum. Zobrazowana zostaje nieliniowość i pokazany zostaje efekt "fali uderzeniowej".

Dla równania ciepła, kolejne przesunięcia w czasie t_j powodują zmniejszenie maksimum funkcji Gaussa. Maksimum $u < 1$ jedynie maleje w tym samym punkcie w przestrzeni $x_{mid} = 5$ dla kolejnych czasów t_j .

Dla równania Burgersa, kolejne przesunięcia w czasie t_j powodują zmniejszenie maksimum funkcji Gaussa oraz powodują efekt "fali uderzeniowej". Maksimum $u < 1$ maleje i przesuwa się w przestrzeni x_i dla kolejnych czasów t_j .

Zwiększanie współczynnika β powoduje zmniejszenie maksimum $u(x, t)$ dla kolejnych czasów t_j . Dzieje się tak do około $\beta \leq 1.2$, po czym dla $\beta > 1.2$ rozwiązanie staje się całkowicie niepoprawne.

Rysunek 11: Równanie Burgersa, metoda Eulera, $\beta=1.3$



Program komputerowy w języku C++ wyznaczający powyższe rozwiązania został dołączony w Dodatku A.