Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy metody różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka

12 czerwca 2024

1 Wprowadzenie

W tej pracy przybliżę równanie Burgersa oraz jego zastosowania, jego rozwiązanie analityczne i metody, które użyliśmy podczas pisania programu, który numerycznie wyznacza rozwiązania przytoczonego równania.

2 Równanie Burgersa

Równanie Burgersa w ogólnej postaci jest fundamentalnym, nieliniowym, parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu występującym w przeróżnych obszarach zastosowań matematyki, takich jak mechanika płynów, dynamika gazów oraz płynność ruchu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie:
t - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako czas,
x - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako położenie,
u(x,t) - zmienna zależna zwykle interpretowana jako prędkość płynu,
v - stały parametr, zwykle interpretowany jako lepkość płynu

3 Transformacja Hopf-Cole'a

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

$$u = -2v\frac{\theta_x}{\theta}$$

$$u_x = -2v\frac{\theta_{xx}\theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad u_t = -2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2}$$

$$u_{xx} = -2v\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

$$-2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4v^2\frac{\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3}{\theta^3} = -2v^2\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$-2v\theta(\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t) + 4v^2(\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3) = -2v^2(\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3)$$
$$\theta^2\theta_{xt} - \theta\theta_x\theta_t - 2v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3 = v\theta_{xxx}\theta^2 - 3v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3$$
$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t - 2v\theta_x\theta_{xx} = v\theta\theta_{xxx} - 3v\theta_x\theta_{xx}$$
$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t = v(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx})$$
$$\theta\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t} = v(\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2})$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}) = v\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x})$$
$$\theta\theta_x - \theta_x \neq 0$$
$$\theta_t = v\theta_{xx}$$

Po podstawieniu transformacji Hopf-Cole'a do równania Burgersa otrzymaliśmy równanie ciepła.

4 Rozwiązanie analityczne przy pomocy transformacji Hopf-Cole'a

Równanie Burgersa:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Warunek początkowy:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

Warunki brzegowe:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Transformacja Hopf-Cole'a:

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

Z równania Burgersa z poprzedniego punktu mamy:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Warunek początkowy θ :

$$u(x,0) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}, \quad \theta(x,0) \neq 0$$

$$\sin(\pi x) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\sin(\pi x) = \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\int_0^x \sin(\pi x)dx = \int_0^x \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}dx$$
$$-\frac{1}{2v}[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^{x=x} = [ln[\theta(x,0)]]_0^{x=x}$$

$$\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x) - 1) = ln[\theta(x,0)] - ln[\theta(0,0)]$$

Wyznaczamy $\theta(0,0)$:

$$u(0,0) = -2v\frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$u(0,0) = \sin(\pi 0) = 0$$

$$0 = \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$\int_0^x 0dx = \int_0^x \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}dx$$

$$ln(\theta(0,0)) = 0$$

$$\theta(0,0) = e^0 = 1$$

Co daje:

$$\theta(x,0) = e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)}, \quad 0 < x < 1$$

Warunki brzegowe θ :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$-2v\frac{\theta_x(0,t)}{\theta(0,t)} = -2v\frac{\theta_x(1,t)}{\theta(1,t)} = 0, \quad \theta(0,t) \neq 0 \quad \theta(1,t) \neq 0$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

Rozwiązanie:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Do rozwiązania tego równania wykorzystam metodę Fouriera:

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = vX''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{vT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

$$T'(t) = -\lambda^2 vT(t)$$

$$T(t) = e^{-\lambda^2 vt}$$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$\theta(x,t) = (A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(x,t) = (A\cos(\lambda x) - B\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(0,t) = 0$$

$$(A\cos(\lambda 0) - B\sin(\lambda 0))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

$$Ae^{-\lambda^2 vt} = 0 <=> A = 0$$

$$\theta_x(1,t) = 0$$

$$(-B\sin(\lambda))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

Funkcja sinus przyjmuje wartości 0 dla $\lambda = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, ...$, omijamy rozwiązanie trywialne $B = 0$:

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} -B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}$$

Wracamy z wyznaczonymi współczynnikami do momentu przed różniczkowaniem funkcji θ:

$$\theta_n(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}$$

Wyznaczamy współczynniki $B_n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$:

$$B_0 = \int_0^1 e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)} dx = e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} dx$$