1 Rozwiązanie równania Burgersa

Rozważamy cztery równania różniczkowe cząstkowe.

Równanie transportu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 \leqslant x \leqslant 10, t > 0 \tag{1}$$

Nielepkie równanie Burgersa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 \leqslant x \leqslant 10, t > 0 \tag{2}$$

Równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leqslant x \leqslant 10, t > 0, \beta > 0 \tag{3}$$

Równanie Burgersa (nieliniowe, paraboliczne)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leqslant x \leqslant 10, t > 0, \beta > 0 \tag{4}$$

gdzie zmienne i parametry zostały opisane w rozdziale 2, pod równaniem (1).
Dla przypomnienia, β jest współczynnikiem lepkości.

Naszym celem jest wykorzystanie metod różnic skończonych w celu znalezienia przybliżonych wartości $u(x, t)$ rozwiązania wszystkich równań.
Najpierw określmy krok przestrzenny h oraz krok czasowy k. Niech

$$\begin{aligned} &u_{i,j} = u(x_i, t_j) = u(i \cdot h, j \cdot k), \\ &h = 0.1, k = 0.005, i \in [0, M-1], j \in [0, N-1], M, N \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{5}$$

Wtedy niech warunek początkowy wszystkich równań (funkcja Gaussa)

$$u_{i,0} = e^{-(x_i - x_{mid})^2}, x_{mid} = \frac{(M-1) \cdot h}{2} = 5 \tag{6}$$

Oraz niech warunki brzegowe wszystkich równań

$$u_{0,j} = u_{M-1,j} = 0 \tag{7}$$

Niech

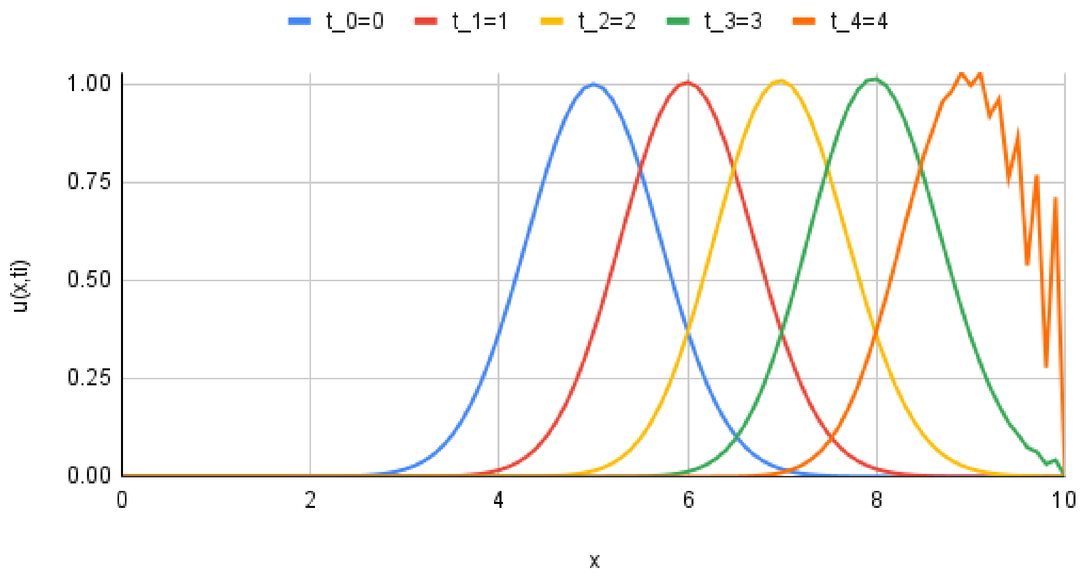
$$\beta < \frac{h^2}{2k} \wedge \beta = 0.99 \tag{8}$$

w celu uzyskania stabilności rozwiązań.

Wtedy stosując metodę Eulera:
dla równania transportu

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) = 0 \\
&u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})
\end{aligned} \tag{9}
$$

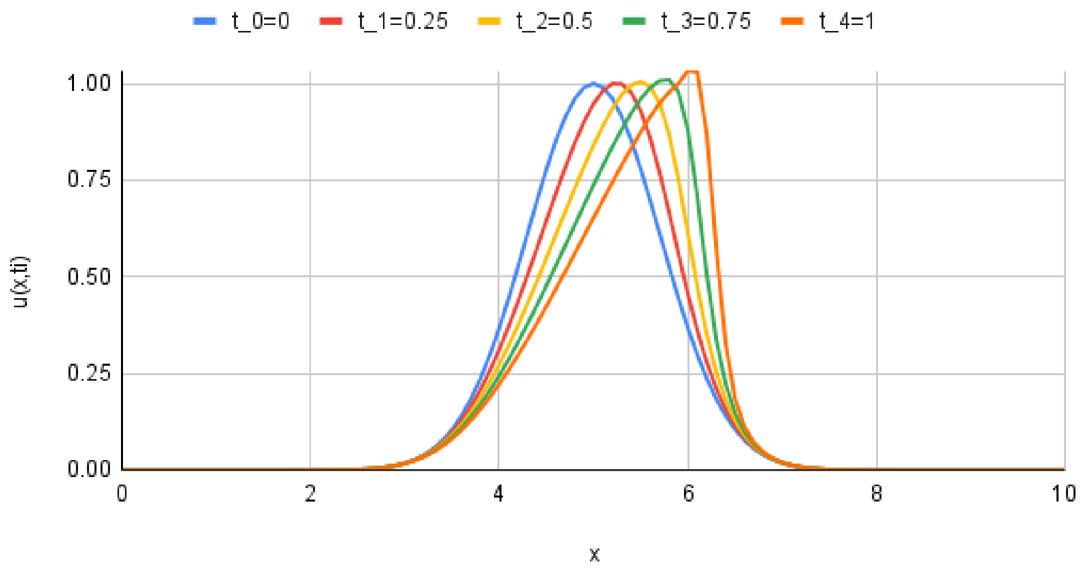
Rysunek 1: Równanie transportu, metoda Eulera



dla nielepkiego równania Burgersa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4h}(u^2_{i+1,j} - u^2_{i-1,j}) = 0 \\
&u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u^2_{i+1,j} - u^2_{i-1,j})
\end{aligned} \tag{10}
$$

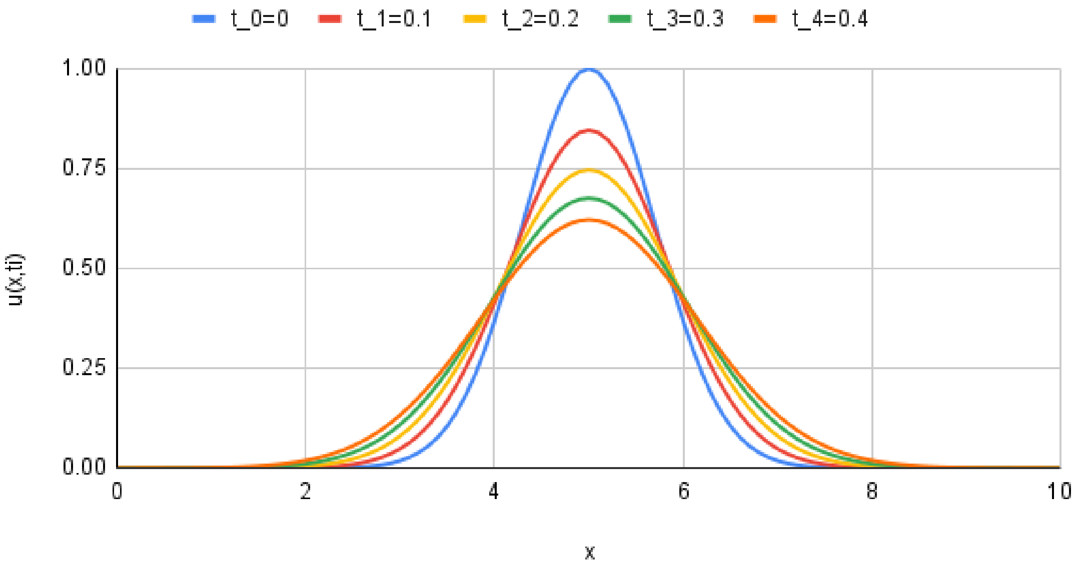
Rysunek 2: Nielepkie równanie Burgersa, metoda Eulera



dla równania ciepła

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0 \\ &u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\beta k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{aligned} \tag{11}$$

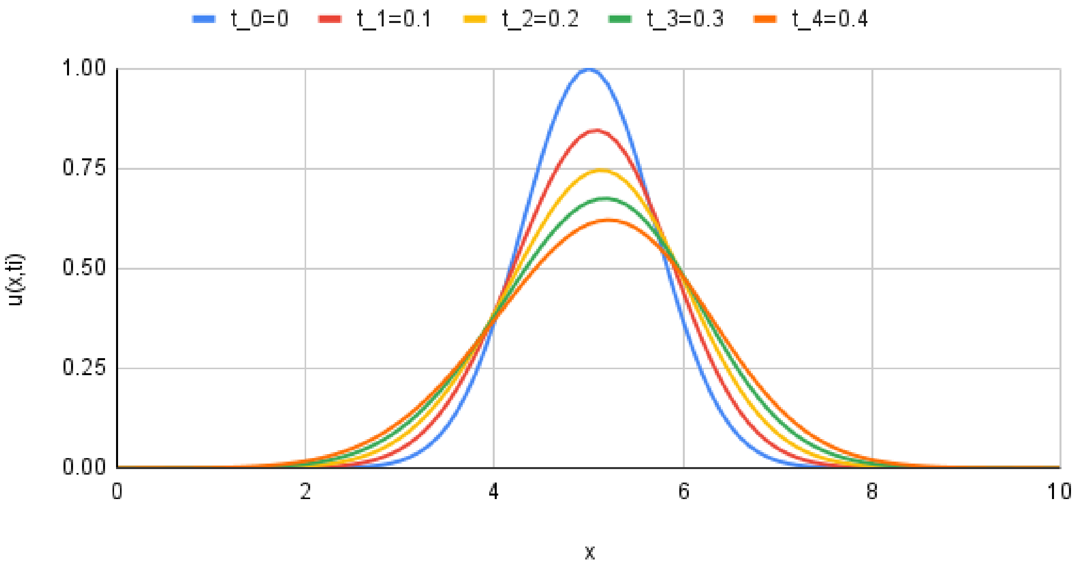
Rysunek 3: Równanie ciepła, metoda Eulera



dla równania Burgersa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0 \\ &u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + \frac{\beta k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{aligned} \tag{12}$$

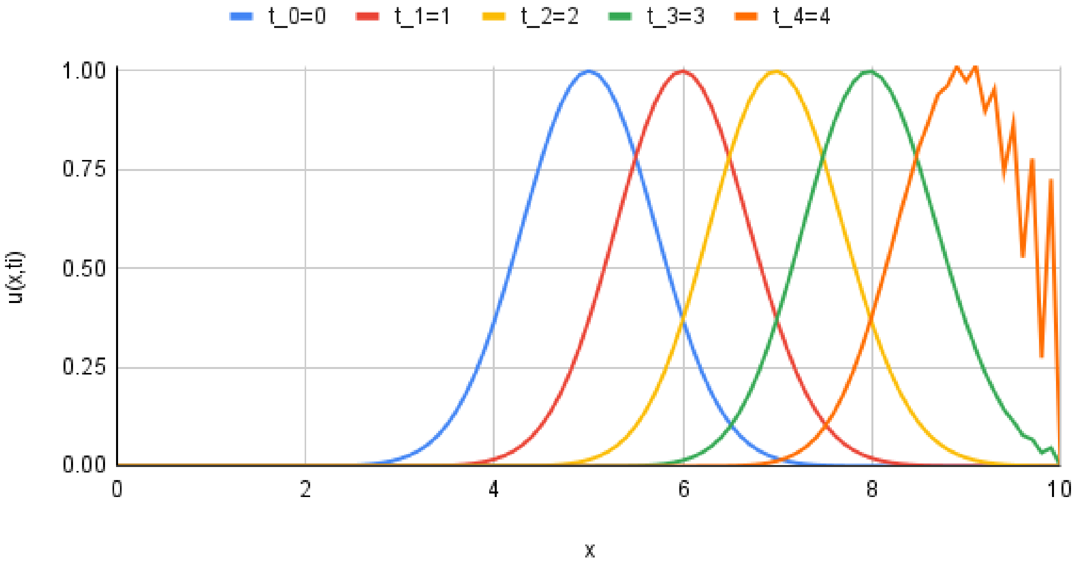
Rysunek 4: Równanie Burgersa, metoda Eulera



Stosując metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu:
dla równania transportu

$$\begin{aligned} v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{2h}(v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}) \end{aligned} \tag{13}$$

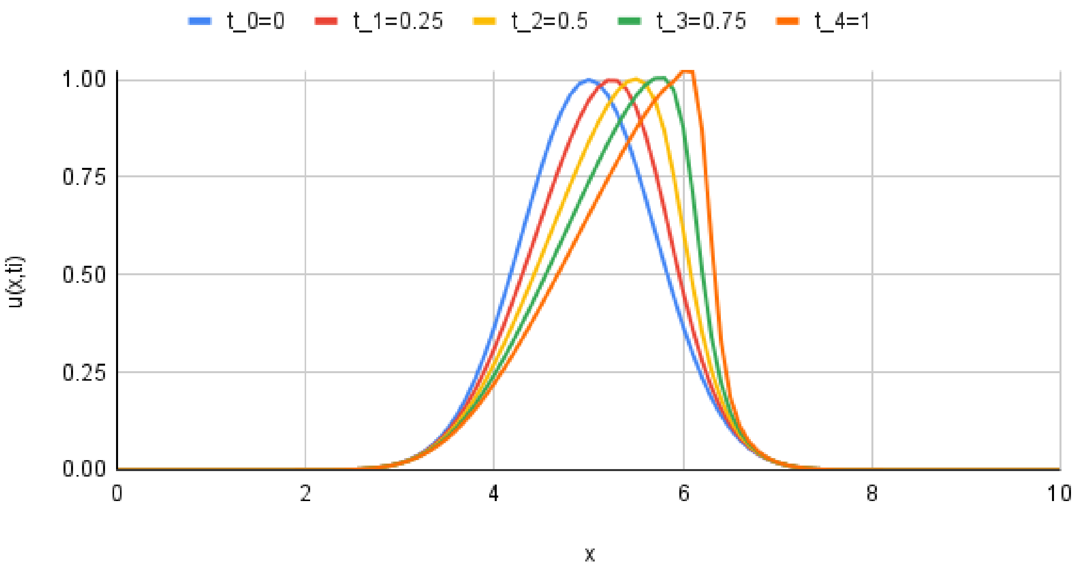
Rysunek 5: Równanie transportu, metoda RK2



dla nielepkiego równania Burgersa

$$\begin{aligned} v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{8h}(u^2_{i+1,j} - u^2_{i-1,j}) \\ u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(v^2_{i+1,j+1} - v^2_{i-1,j+1}) \end{aligned} \tag{14}$$

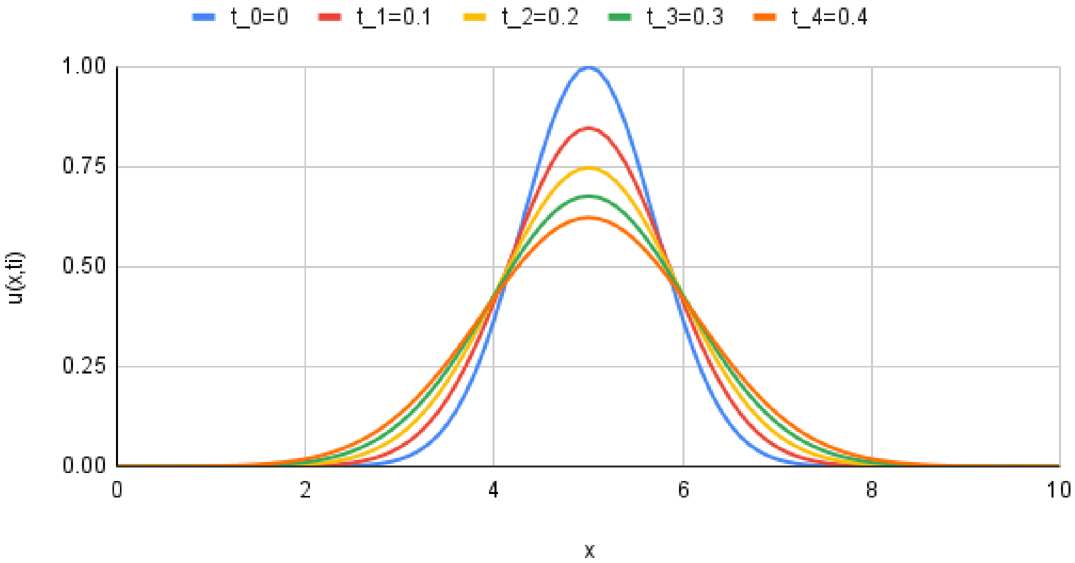
Rysunek 6: Nielepkie równanie Burgersa, metoda RK2



dla równania ciepła

$$
\begin{aligned}
v_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\beta k}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\
u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\beta k}{h^2}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

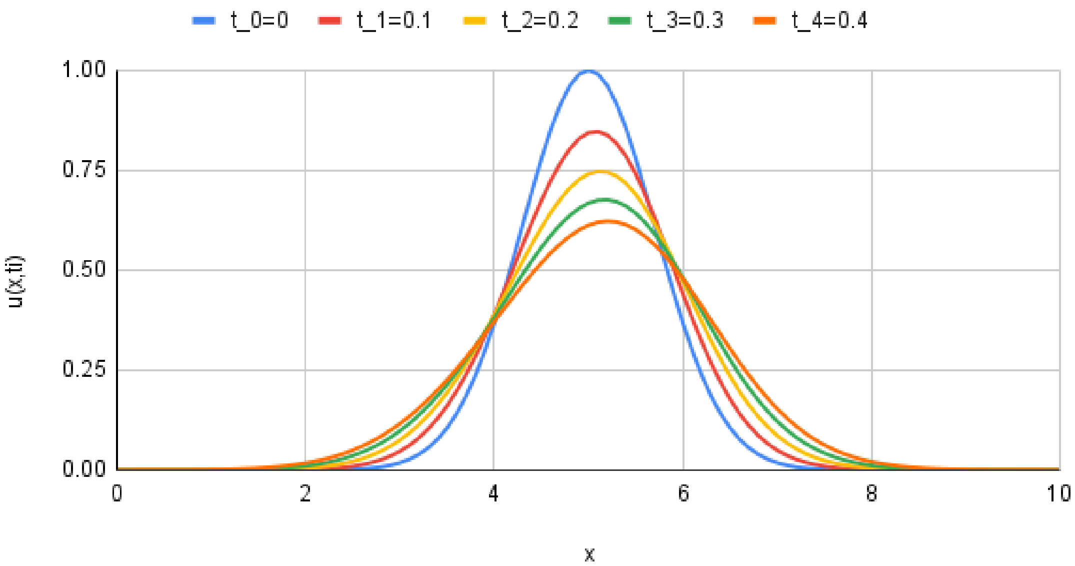
Rysunek 7: Równanie ciepła, metoda RK2



dla równania Burgersa

$$
\begin{aligned}
v_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{8h}(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + \frac{\beta k}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\
u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{k}{4h}(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i-1,j+1}^2) + \frac{\beta k}{h^2}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1})
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Rysunek 8: Równanie Burgersa, metoda RK2



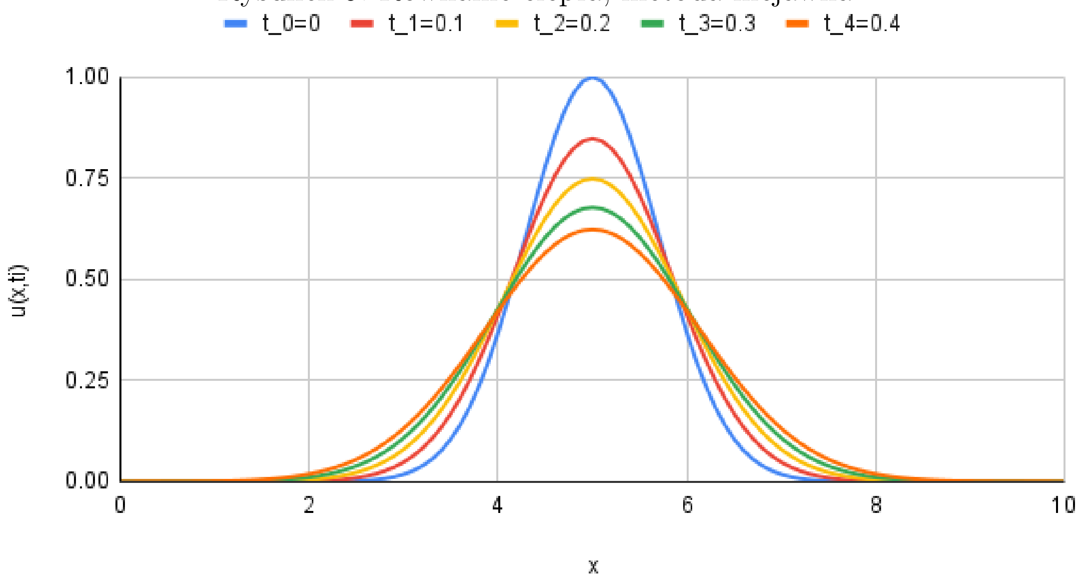
Stosując metodę niejawną:
dla równania ciepła

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) - \frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0 \\ u_{i,j-1} = -\frac{\beta k}{h^2}u_{i-1,j} + (1 + 2\frac{\beta k}{h^2})u_{i,j} - \frac{\beta k}{h^2}u_{i+1,j} \end{aligned} \tag{17}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2s \end{bmatrix}, s = \frac{\beta k}{h^2}$$

$$u_{i,j} = A^{-1}u_{i,j-1} \tag{18}$$

Rysunek 9: Równanie ciepła, metoda niejawna



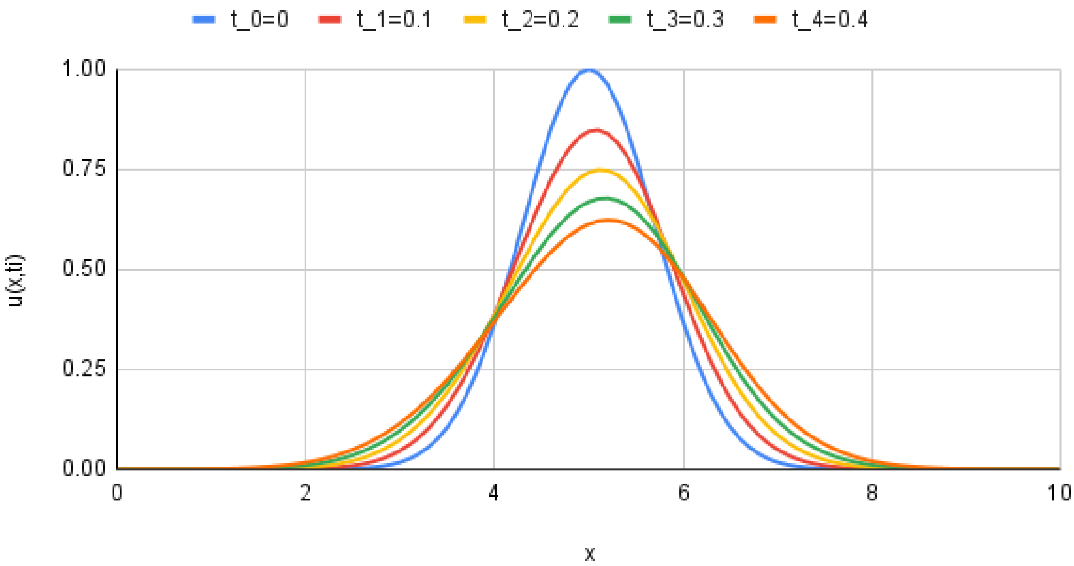
dla równania Burgersa

$$\frac{1}{k}(u_{i,j}-u_{i,j-1})+\frac{1}{4h}(u^2_{i+1,j-1}-u^2_{i-1,j-1})-\frac{\beta}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})=0$$
$$u_{i,j-1}-\frac{k}{4h}(u^2_{i+1,j-1}-u^2_{i-1,j-1})=-\frac{\beta k}{h^2}u_{i-1,j}+(1+2\frac{\beta k}{h^2})u_{i,j}-\frac{\beta k}{h^2}u_{i+1,j} \tag{19}$$

$$A=\begin{bmatrix}1+2s & -s & 0 & \cdots & 0\\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0\\ 0 & -s & 1+2s & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2s\end{bmatrix}, s=\frac{\beta k}{h^2}$$

$$u_{i,j}=A^{-1}(u_{i,j-1}-\frac{k}{4h}(u^2_{i+1,j-1}-u^2_{i-1,j-1})) \tag{20}$$

Rysunek 10: Równanie Burgersa, metoda niejawna



Algorytm, który realizuje opisaną metodę niejawną korzysta z procedury tri rozwiązującej układ równań o macierzy trójprzekątniowej. Metoda tri korzysta ze szczególnego przypadku eliminacji Gaussa w czasie $O(n)$, zamiast czasu $O(n^3)$ dla normalnego przypadku, co ogromnie przyspiesza znajdowanie rozwiązań.

Uzyskaliśmy prawie identyczne wyniki za pomocą użycia metody Eulera, RK2 i niejawnej. Nie mogliśmy skorzystać z metody niejawnej dla równania transportu, ani dla nielepkiego równania Burgersa, ponieważ wymaga ona użycia macierzy kwadratowej (M=N), a dla tych równań ta równość nie zachodziła.

Dla równania transportu oraz nielepkiego równania Burgersa, jeśli t przekroczy odpowiednią wartość, to przybliżone wartości u zaczynają bardzo mocno odbiegać od rzeczywistych (dla równania transportu $t > 3$, dla nielepkiego równania Burgersa, $t > 1$).

Dla równania transportu, kolejne przesunięcia w czasie powodują uzyskanie maksymalnej wartości u w kolejnych przesunięciach w przestrzeni. Funkcja Gaussa zostaje jedynie przesunięta w prawo. Zobrazowna zostaje liniowość.

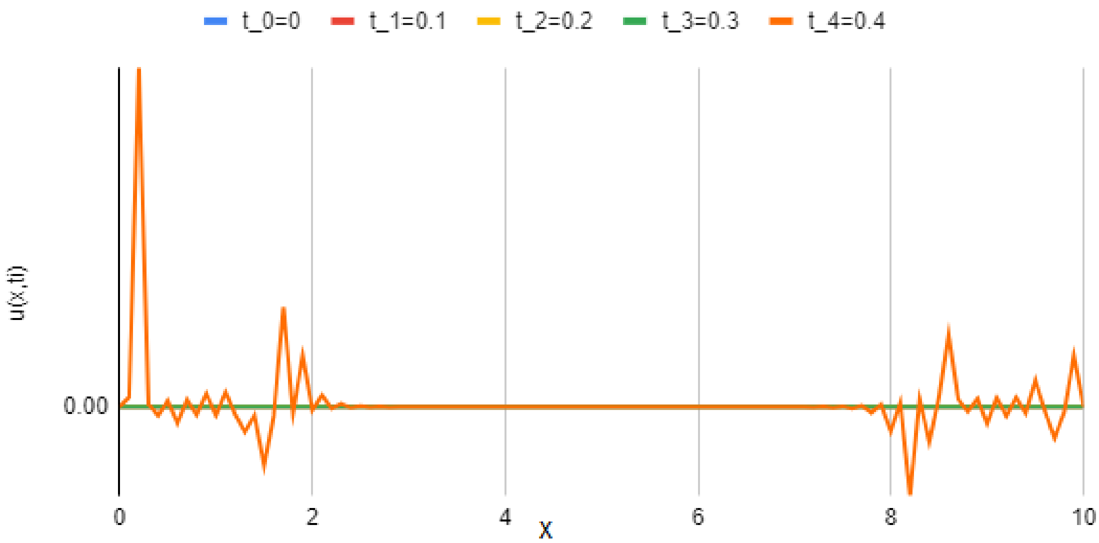
Dla nielepkiego równania Burgera, kolejne przesunięcia w czasie powodują uzyskanie maksymalnej wartości u w kolejnych przesunięciach w przestrzeni. Funkcja Gaussa nie zostaje jedynie przesunięta w prawo, tylko wolniej rośnie przed osiągnieciem kresu i szybciej opada po osiągnięciu kresu. Zobrazowna zostaje nieliniowość.

Dla równania ciepła, kolejne przesunięcia w czasie powodują zmniejszenie kresu funkcji Gaussa. Maksymalna wartość u maleje w tym samym punkcie w przestrzeni (5) dla kolejnych czasów.

Dla równania Burgersa, kolejne przesunięcia w czasie powodują zmniejszenie kresu funkcji Gaussa oraz powodują przesunięcie w prawo. Maksymalna wartość u maleje i przesuwa się w przestrzeni dla kolejnych czasów.

Zwiększanie współczynnika β powoduje zmniejszenie kresu $u(x,t)$. Dzieje się tak do około $\beta = 1.2$, po czym rozwiązanie staje się całkowicie niepoprawne.

Rysunek 11: Równanie Burgersa, metoda Eulera, β=1.3



Program komputerowy w języku C++ wyznaczający powyższe rozwiązania został dołączony w Dodatku A.