

Raport

Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka
Promotor: dr inż. Paweł Wojda

June 25, 2024

Cel projektu

Celem pracy jest zapoznanie z równaniem Burgersa oraz jego zastosowaniami oraz wyznaczenie jego rozwiązań numerycznych. Zadanie polega na zaprojektowaniu, napisaniu i przetestowaniu programu służącego do obliczania rozwiązań równania Burgersa.

Opis projektu

Przedstawione i omówione zostały:

- Równanie Burgersa
- Transformacja Hopf-Cole'a
- Rozwiązanie analityczne przy pomocy transformacji Hopf-Cole'a
- Metoda różnic skończonych
- Metoda Eulera
- Metoda Rungego-Kutty
- Rozwiązanie numeryczne równania Burgersa
- Rozwiązanie numeryczne transformaty Hopf-Cole'a

Wnioski

Rozwiązane zostały numerycznie RRC równania transportu, nielepkiego równania Burgersa, równania ciepła, równania Burgersa. Użyto metod Eulera, Rungego-Kutty drugiego rzędu dla wszystkich równań oraz metody niejawnej dla równania ciepła oraz równania Burgersa dla warunku początkowego $u_{x_i,0} = e^{-(x-5)^2}$. Przedstawiono wyniki za pomocą wykresów dla różnych wartości czasów t_j aby zobrazować jak działa liniowość/nieliniowość równań oraz jaki wpływ ma współczynnik β lepkości na rozwiązanie. Pokazano efekt „fali uderzeniowej” nieliniowości oraz znaleziono przedział rzeczywisty β w którym rozwiązanie przestaje być stabilne. Program wykonujący obliczenia napisano w języku C++.

Wykonano analizę transformaty Hopf-Cole’a dla warunku początkowego $u(x_i, 0) = \sin(\pi x_i)$. Pokazano jak zachowuje się rozwiązanie dla różnego wyboru kroku przestrzennego x_i , kroku czasowego t_j oraz różnych wartości β . Program wykonujący obliczenia napisano w języku C++.

Podział pracy

Konrad Bonicki: wstęp teoretyczny.

Tomasz Orzechowski: RRC transportu, nielepkiego Równania Burgersa, ciepła oraz równanie Burgersa - program w C++ oraz analiza wyników.

Maciej Pestka: pisanie kodu do transformacji Hopf-Cole’a.

References

- [1] W. Rudin, „*Podstawy analizy matematycznej*”, PWN, Warszawa 2009.
- [2] David Kincaid, Ward Cheney, *Analiza numeryczna*, 2006
- [3] S.Kutluay, A.R. Bahadir, A.Özdes, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, 1999
- [4] A. Salih, *Burgers’ Equation*, 2016