Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy metody różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka

23 czerwca 2024

Spis treści

1 Wprowadzenie

W tej pracy przybliżymy równanie Burgersa oraz jego zastosowania, jego rozwiązanie analityczne i metody, które użyliśmy podczas pisania programu, który numerycznie wyznacza rozwiązania przytoczonego równania.

2 Równanie Burgersa

Równanie Burgersa w ogólnej postaci jest fundamentalnym, nieliniowym, parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu występującym w przeróżnych obszarach zastosowań matematyki, takich jak mechanika płynów, dynamika gazów oraz płynność ruchu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie:

- t - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako czas,
- x - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako położenie,
- $u(x,t)$ - zmienna zależna zwykle interpretowana jako prędkość płynu,
- v - stały parametr, zwykle interpretowany jako lepkość płynu.

3 Transformacja Hopf-Cole'a

Transformacja Cole-Hopf'a jest zmianą zmiennych, która umożliwia przekształcenie specjalnego rodzaju parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych z nieliniowością kwadratową w liniowe równanie cieplne. Wygląda następująco:

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)} \tag{2}$$

$$u = -2v\frac{\theta_x}{\theta}$$

Liczymy pochodne cząstkowe z (2), aby podstawić je potem do równania Burgersa

$$u_x = -2v\frac{\theta_{xx}\theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad u_t = -2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2}$$

$$u_{xx} = -2v\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

Podstawiamy teraz to co nam wyszło do równania Burgersa:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

$$-2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4v^2\frac{\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3}{\theta^3} = -2v^2\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$-2v\theta(\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t) + 4v^2(\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3) = -2v^2(\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3)$$

$$\theta^2\theta_{xt} - \theta\theta_x\theta_t - 2v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3 = v\theta_{xxx}\theta^2 - 3v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3$$

$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t - 2v\theta_x\theta_{xx} = v\theta\theta_{xxx} - 3v\theta_x\theta_{xx}$$
$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t = v(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx})$$
$$\theta\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t} = v(\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2})$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}) = v\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x})$$
$$\theta\theta_x - \theta_x \neq 0$$
$$\theta_t = v\theta_{xx}$$

Po podstawieniu transformacji Hopf-Cole'a do równania Burgersa otrzymaliśmy równanie ciepła.

4 Rozwiązanie analityczne przy pomocy transformacji Hopf-Cole'a

Równanie Burgersa:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Warunek początkowy:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

Warunki brzegowe:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Transformacja Hopf-Cole'a:

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

Z równania Burgersa z poprzedniego punktu mamy:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Warunek początkowy θ :

$$u(x,0) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}, \quad \theta(x,0) \neq 0$$

$$\sin(\pi x) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\sin(\pi x) = \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\int_0^x \sin(\pi x)dx = \int_0^x \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}dx$$
$$-\frac{1}{2v}[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^{x=x} = [ln[\theta(x,0)]]_0^{x=x}$$
$$\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x) - 1) = ln[\theta(x,0)] - ln[\theta(0,0)]$$

Wyznaczamy $\theta(0,0)$:

$$u(0,0) = -2v\frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$u(0,0) = \sin(\pi 0) = 0$$

$$0 = \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$\int_0^x 0dx = \int_0^x \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}dx$$

$$ln(\theta(0,0)) = 0$$

$$\theta(0,0) = e^0 = 1$$

Co daje:

$$\theta(x,0) = e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)}, \quad 0 < x < 1$$

Warunki brzegowe θ :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$-2v\frac{\theta_x(0,t)}{\theta(0,t)} = -2v\frac{\theta_x(1,t)}{\theta(1,t)} = 0, \quad \theta(0,t) \neq 0 \quad \theta(1,t) \neq 0$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

Rozwiązanie:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Do rozwiązania tego równania wykorzystam metodę Fouriera:

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T`(t) = vX``(x)T(t)$$

$$\frac{T`(t)}{vT(t)} = \frac{X``(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

$$T`(t) = -\lambda^2 vT(t)$$

$$T(t) = e^{-\lambda^2 vt}$$

$$X``(x) = -\lambda^2 X(x)$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$\theta(x,t) = (A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(x,t) = (A\cos(\lambda x) - B\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(0,t) = 0$$

$$(A\cos(\lambda 0) - B\sin(\lambda 0))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

$$Ae^{-\lambda^2 vt} = 0 <=> A = 0$$

$$\theta_x(1,t) = 0$$

$$(-B\sin(\lambda))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

Funkcja sinus przyjmuje wartości 0 dla $\lambda = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, ...$, omijamy rozwiązanie trywialne $B = 0$:

Wracamy z wyznaczonymi współczynnikami do momentu przed różniczkowaniem funkcji θ:

$$\theta(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}$$

Wyznaczamy współczynniki $B_n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$:

$$B_0 = \int_0^1 e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)} dx = e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} dx$$

$$B_n = 2\int_0^1 e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)} \cos(n\pi x) dx = 2e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} \cos(n\pi x) dx$$

Rozwiązanie:

$$u(x,t) = 2v\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}}{B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}}$$

5 Metody numeryczne - wstęp

Metod numerycznych używamy do rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Metody numeryczne są wykorzystywane, gdy problem nie posiada rozwiązania analitycznego lub gdy takie rozwiązanie jest zbyt skomplikowane do zastosowania. W naszym projekcie korzystamy z metody różnic skończonych, metody Rungego-Kuty'ego oraz metody Eulera.

6 Wzór Taylora

Wzór Taylora jest ważnym narzędziem w analizie numerycznej:

Twierdzenie 1 *Jeśli $f \in C^n[a,b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a,b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a,b]$ mamy:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x), \tag{3}$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x:

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}. \tag{4}$$

7 Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych polega na przybliżaniu pochodnych za pomocą różnic skończonych. Zarówno dziedzina przestrzenna, jak i czasowa są dyskretyzowane, czyli dzielone na skończoną liczbę przedziałów, a wartości rozwiązania na końcach tych przedziałów są przybliżane przez rozwiązywanie równań algebraicznych zawierających różnice skończone i wartości z pobliskich punktów.

Wyznaczanie ilorazów różnicowych przy pomocy wzoru Taylora:

$$
\begin{aligned}
u(x+h) &= u(x) + u'(x)\frac{(h)}{1!} + u''(x)\frac{(h-x)}{2!} + O(h^2) \\
u(x) &= u(x) \\
u(x-h) &= u(x) - u'(x)\frac{(h)}{1!} + u''(x)\frac{(-h-x)}{2!} + O(h^2)
\end{aligned}
$$

Przybliżenie pierwszej pochodnej:

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= Au(x+h) + Bu(x) + Cu(x-h) \\
&= A(u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}u''(x)h^2) + Bu(x) + C(u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}u''(x)h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x): &\quad A + B + C = 0 \\
u'(x): &\quad Ah - Ch = 1 \\
u''(x): &\quad \frac{1}{2}h^2A + \frac{1}{2}h^2C = 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \frac{1}{2h}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2h}
$$

$$
u'(x) \approx \frac{1}{2h}u(x+h) + 0u(x) - \frac{1}{2h}u(x-h) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}
$$

Przybliżenie drugiej pochodnej:

$$
u''(x) = Au(x+h) + Bu(x) + Cu(x-h)
$$

$$
\begin{aligned}
u(x): &\quad A + B + C = 0 \\
u'(x): &\quad Ah - Ch = 0 \\
u''(x): &\quad \frac{1}{2}h^2A + \frac{1}{2}h^2C = 1
\end{aligned}
$$

$$
A = \frac{1}{h^2}, \quad B = -\frac{2}{h^2}, \quad C = \frac{1}{h^2}
$$

$$
u''(x) \approx \frac{1}{h^2}u(x+h) - \frac{2}{h^2}u(x) + \frac{1}{h^2}u(x-h) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}
$$

8 Metoda Eulera

Metoda Eulera jest najprostszą metodą rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, opartą na wzorze Taylora. Opisuje ją wzór:

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t,x) \tag{5}$$

Jej zaletą jest to, że nie trzeba różniczkować funkcji f, natomiast wadą jest konieczność wyboru bardzo małego kroku h.

9 Metoda Rungego-Kutty

Rozważmy ogólne równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:

$$y' = f(t,y) \tag{6}$$

z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$.

Algorytm

Metoda Rungego-Kutty drugiego stopnia jest jedną z metod numerycznych stosowanych do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych (ODE). Jest to rozwinięcie metody Eulera, które zwiększa dokładność przez uwzględnienie dodatkowych informacji o nachyleniu funkcji.

1. **Krok początkowy:**
$$y_0 = y(t_0) \tag{7}$$
2. **Obliczenie przyrostów:**
$$k_1 = hf(t_n, y_n) \tag{8}$$
$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \tag{9}$$
3. **Obliczenie następnej wartości y:**
$$y_{n+1} = y_n + k_2 \tag{10}$$
4. **Aktualizacja czasu:**
$$t_{n+1} = t_n + h \tag{11}$$

10 Podsumowanie

W tej pracy przybliżyliśmy równanie Burgersa oraz jego zastosowania, transformację Hopf-Cole'a, rozwiązanie analityczne oraz metody numeryczne, w tym metodę różnic skończonych, metodę Eulera oraz metodę Rungego-Kutty.