Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy metody różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka

15 czerwca 2024

1 Wprowadzenie

W tej pracy przybliżę równanie Burgersa oraz jego zastosowania, jego rozwiązanie analityczne i metody, które użyliśmy podczas pisania programu, który numerycznie wyznacza rozwiązania przytoczonego równania.

2 Równanie Burgersa

Równanie Burgersa w ogólnej postaci jest fundamentalnym, nieliniowym, parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu występującym w przeróżnych obszarach zastosowań matematyki, takich jak mechanika płynów, dynamika gazów oraz płynność ruchu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie:
t - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako czas,
x - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako położenie,
u(x,t) - zmienna zależna zwykle interpretowana jako prędkość płynu,
v - stały parametr, zwykle interpretowany jako lepkość płynu

3 Transformacja Hopf-Cole'a

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

$$u = -2v\frac{\theta_x}{\theta}$$

$$u_x = -2v\frac{\theta_{xx}\theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad u_t = -2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2}$$

$$u_{xx} = -2v\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

$$-2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4v^2\frac{\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3}{\theta^3} = -2v^2\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$-2v\theta(\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t) + 4v^2(\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3) = -2v^2(\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3)$$
$$\theta^2\theta_{xt} - \theta\theta_x\theta_t - 2v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3 = v\theta_{xxx}\theta^2 - 3v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3$$
$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t - 2v\theta_x\theta_{xx} = v\theta\theta_{xxx} - 3v\theta_x\theta_{xx}$$
$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t = v(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx})$$
$$\theta\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t} = v(\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2})$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}) = v\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x})$$
$$\theta\theta_x - \theta_x \neq 0$$
$$\theta_t = v\theta_{xx}$$

Po podstawieniu transformacji Hopf-Cole'a do równania Burgersa otrzymaliśmy równanie ciepła.

4 Rozwiązanie analityczne przy pomocy transformacji Hopf-Cole'a

Równanie Burgersa:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Warunek początkowy:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

Warunki brzegowe:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Transformacja Hopf-Cole'a:

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

Z równania Burgersa z poprzedniego punktu mamy:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Warunek początkowy θ :

$$u(x,0) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}, \quad \theta(x,0) \neq 0$$

$$\sin(\pi x) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\sin(\pi x) = \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$
$$-\frac{1}{2v}\int_0^x \sin(\pi x)dx = \int_0^x \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}dx$$
$$-\frac{1}{2v}[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^{x=x} = [ln[\theta(x,0)]]_0^{x=x}$$

$$\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1) = ln[\theta(x,0)] - ln[\theta(0,0)]$$

Wyznaczamy $\theta(0,0)$:

$$u(0,0) = -2v\frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$u(0,0) = \sin(\pi 0) = 0$$

$$0 = \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}$$

$$\int_0^x 0dx = \int_0^x \frac{\theta_x(0,0)}{\theta(0,0)}dx$$

$$ln(\theta(0,0)) = 0$$

$$\theta(0,0) = e^0 = 1$$

Co daje:

$$\theta(x,0) = e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)}, \quad 0 < x < 1$$

Warunki brzegowe θ :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$-2v\frac{\theta_x(0,t)}{\theta(0,t)} = -2v\frac{\theta_x(1,t)}{\theta(1,t)} = 0, \quad \theta(0,t) \neq 0 \quad \theta(1,t) \neq 0$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

Rozwiązanie:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Do rozwiązania tego równania wykorzystam metodę Fouriera:

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T`(t) = vX``(x)T(t)$$

$$\frac{T`(t)}{vT(t)} = \frac{X``(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

$$T`(t) = -\lambda^2 vT(t)$$

$$T(t) = e^{-\lambda^2 vt}$$

$$X``(x) = -\lambda^2 X(x)$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$\theta(x,t) = (A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(x,t) = (A\cos(\lambda x) - B\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2 vt}$$

$$\theta_x(0,t) = 0$$

$$(A\cos(\lambda 0) - B\sin(\lambda 0))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

$$Ae^{-\lambda^2 vt} = 0 <=> A = 0$$

$$\theta_x(1,t) = 0$$

$$(-B\sin(\lambda))e^{-\lambda^2 vt} = 0$$

Funkcja sinus przyjmuje wartości 0 dla $\lambda = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, ...$, omijamy rozwiązanie trywialne $B = 0$:

Wracamy z wyznaczonymi współczynnikami do momentu przed różniczkowaniem funkcji θ:

$$\theta(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}$$

Wyznaczamy współczynniki $B_n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$:

$$B_0 = \int_0^1 e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)} dx = e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} dx$$

$$B_n = 2\int_0^1 e^{\frac{1}{2v\pi}(\cos(\pi x)-1)} \cos(n\pi x) dx = 2e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} \cos(n\pi x) dx$$

Rozwiązanie:

$$u(x,t) = 2v\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 [e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} \cos(n\pi x)] dx \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}}{e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 [e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}}] dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-\frac{1}{2v\pi}} \int_0^1 [e^{\frac{\cos(\pi x)}{2v\pi}} \cos(n\pi x)] dx \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 vt}}$$

5 Metody numeryczne - wstęp

Metod numerycznych używamy do rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Metody numeryczne są wykorzystywane, gdy problem nie posiada rozwiązania analitycznego lub gdy takie rozwiązanie jest zbyt skomplikowane do zastosowania, więc przydadzą się nam one do wyznaczenia rozwiązań równania Burgersa. W naszym projekcie korzystamy z metody różnic skończonych, metody Rungego-Kuty'ego, metody Eulera.

6 Wzór Taylora

Jest to ważny wzór dotyczący funkcji z $C^n[a, b]$, którym posługujemy się bardzo często w rozważaniach z analizy numerycznej i badaniu algorytmów numerycznych

Twierdzenie 1 *Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a,b), to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego [a,b]*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}.$$

Wyrażenie $E_n(x)$ nazywamy resztą Lagrange'a wzoru Taylora. Słowa "leży między"użyte w twierdzeniu należy rozumieć tak, że albo $c < \xi < x$, albo $x < \xi < c$, zależne od wartości c i x (przypadkiem $x = c$ można pominąć).

7 Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych to metoda numeryczna służąca do rozwiązywania równań różniczkowych poprzez przybliżanie pochodnych za pomocą różnic skończonych. Zarówno dziedzina przestrzenna, jak i czasowa są dyskretyzowane, czyli dzielone na skończoną liczbę przedziałów, a wartości rozwiązania na końcach tych przedziałów są przybliżane przez rozwiązywanie równań algebraicznych zawierających różnice skończone i wartości z pobliskich punktów.

Wyznaczanie ilorazów różnicowych przy pomocy wzoru Taylora:

$$u(x+h) = u(x) + \frac{u`(x)}{1!}(x+h-x) + \frac{u``(x)}{2!}(x+h-x)^2 + O(h^2)$$

$$u(x) = u(x)$$

$$u(x-h) = u(x) + \frac{u`(x)}{1!}(x-h-x) + \frac{u``(x)}{2!}(x-h-x)^2 + O(h^2)$$

Przybliżenie pierwszej pochodnej:

$$u`(x) = Au(x+h) + Bu(x) + Cu(x-h) =$$

$$= A(u(x) + hu`(x) + \frac{1}{2}u``(x)h^2) + Bu(x) + C(u(x) - hu`(x) + \frac{1}{2}u``(x)h^2)$$

$$u(x): \quad A + B + C = 0$$

$$u`(x): \quad Ah - Ch = 1$$

$$u``(x): \quad \frac{1}{2}h^2A + \frac{1}{2}h^2C = 0$$

$$A = \frac{1}{2h}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2h}$$

$$u`(x) \approx \frac{1}{2h}u(x+h) + 0u(x) - \frac{1}{2h}u(x-h) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

Przybliżenie drugiej pochodnej:

$$u``(x) = Au(x+h) + Bu(x) + Cu(x-h)$$

$$u(x): \quad A + B + C = 0$$

$$u`(x): \quad Ah - Ch = 0$$

$$u``(x): \quad \frac{1}{2}h^2A + \frac{1}{2}h^2C = 1$$

$$A = \frac{1}{h^2}, \quad B = -\frac{2}{h^2}, \quad C = \frac{1}{h^2}$$

$$u``(x) \approx \frac{1}{h^2}u(x+h) - \frac{2}{h^2}u(x) + \frac{1}{h^2}u(x-h) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

8 Metoda Eulera

Metoda Eulera jest najprostszą metodą rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych oparty na wzorze Taylora. Jest to metoda rzędu pierwszego. Opisuje ją wzór:

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t,x).$$

Jej zaletą jest to, że nie trzeba różniczkować funkcji f. Wadą jest to, że należy wybierać bardzo małe h.

9 Metoda Rungego-Kutty

Klasyczna metoda Rungego-Kutty (RK4) jest metodą rzędu czwartego.

Funkcja f z danymi warunkami początkowymi t_0, y_0 :
Teraz wybieramy wielkość kroku $h > 0$ i zdefiniujmy:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

dla $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ gdzie:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}),$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3).$$

Metoda RK4 jest metodą czwartego rzędu, co oznacza, że błąd lokalny jest rzędu $O(h^5)$, podczas gdy błąd globalny jest rzędu $O(h^4)$.

10 Podsumowanie