Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy metody różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka, Aron Kumor

5 czerwca 2024

Równanie Burgersa

Równanie Burgersa w ogólnej postaci jest nieliniowym, parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie:
t - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako czas,
x - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako położenie,
u(x,t) - zmienna zależna zwykle interpretowana jako prędkość płynu,
v - stały parametr, zwykle interpretowany jako lepkość płynu

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Warunek początkowy:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

Warunki brzegowe:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Za pomocą transformacji Hopf-Cole'a

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

przekształcamy równanie (1) na równanie ciepła

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v\frac{\partial^2 \theta}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{2}$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Przebieg podstawienia transformacji Hopf-Cole'a:

$$u = -2v\frac{\theta_x}{\theta}$$

$$u_x = -2v\frac{\theta_{xx}\theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad u_t = -2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2}$$

$$u_{xx} = -2v\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Podstawiamy pochodne cząstkowe do równania (1):

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

$$-2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4v^2\frac{\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3}{\theta^3} = -2v^2\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$-2v\theta(\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t) + 4v^2(\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3) = -2v^2(\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3)$$

$$\theta^2\theta_{xt} - \theta\theta_x\theta_t - 2v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3 = v\theta_{xxx}\theta^2 - 3v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t - 2v\theta_x\theta_{xx} = v\theta\theta_{xxx} - 3v\theta_x\theta_{xx}$$

$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t = v(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx})$$

$$\theta\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t} = v(\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2})$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}) = v\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x})$$

$$\theta\theta_x - \theta_x \neq 0$$

$$\theta_t = v\theta_{xx}$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Warunek początkowy:

$$\theta(x,0) = exp\{-2(\pi v)^{-1}[1 - cos(\pi x)]\}, \quad 0 < x < 1$$

oraz warunki brzegowe:

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

Przy użyciu metody separacji zmiennych dostaniemy:

$$\theta(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, exp(-n^2\pi^2 vt)\cos(n\pi x)$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Współczynniki Fouriera:

$$a_0 = \int_0^1 exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx$$

$$a_n = 2\int_0^1 exp\{-(2\pi v)^{-1}[1-\cos(n\pi)]\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

Przykładowe rozwiązanie analityczne

Wracając do transformacji Hopf-Cole'a dostaniemy:

$$u(x,t) = 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, exp(-n^2\pi^2 vt)\sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, exp(-n^2\pi^2 vt)\cos(n\pi x)}$$

Metody numeryczne

Metody numeryczne – zbiór metod rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Otrzymywane tą drogą wyniki są z reguły przybliżone, jednak dokładność obliczeń może być z góry określona i dobrana w zależności od potrzeb. Metody numeryczne są stosowane gdy dany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego lub wykorzystanie takiego rozwiązania jest utrudnione ze względu na jego złożoność.

Dziękuję za uwagę!