Numeryczne wyznaczanie rozwiązań równania Burgersa przy pomocy metody różnic skończonych

Konrad Bonicki, Tomasz Orzechowski, Maciej Pestka

9 czerwca 2024

1 Wprowadzenie

W tej pracy przybliżę równanie Burgersa oraz jego zastosowania, jego rozwiązanie analityczne i metody, które użyliśmy podczas pisania programu, który numerycznie wyznacza rozwiązania przytoczonego równania.

2 Równanie Burgersa

Równanie Burgersa w ogólnej postaci jest fundamentalnym, nieliniowym, parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu występującym w przeróżnych obszarach zastosowań matematyki, takich jak mechanika płynów, dynamika gazów oraz płynność ruchu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie:
t - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako czas,
x - zmienna niezależna zwykle interpretowana jako położenie,
u(x,t) - zmienna zależna zwykle interpretowana jako prędkość płynu,
v - stały parametr, zwykle interpretowany jako lepkość płynu

3 Transformacja Hopf-Cole'a

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

$$u = -2v\frac{\theta_x}{\theta}$$

$$u_x = -2v\frac{\theta_{xx}\theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad u_t = -2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2}$$

$$u_{xx} = -2v\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

$$-2v\frac{\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4v^2\frac{\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3}{\theta^3} = -2v^2\frac{\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3}{\theta^3}$$

$$-2v\theta(\theta_{xt}\theta - \theta_x\theta_t) + 4v^2(\theta\theta_x\theta_{xx} - \theta_x^3) = -2v^2(\theta_{xxx}\theta^2 - 3\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3)$$

$$\theta^2\theta_{xt} - \theta\theta_x\theta_t - 2v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3 = v\theta_{xxx}\theta^2 - 3v\theta\theta_x\theta_{xx} + 2\theta_x^3$$

$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t - 2v\theta_x\theta_{xx} = v\theta\theta_{xxx} - 3v\theta_x\theta_{xx}$$

$$\theta\theta_{xt} - \theta_x\theta_t = v(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx})$$

$$\theta\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t} = v(\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2})$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}) = v\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x})$$

$$\theta\theta_x - \theta_x \neq 0$$

$$\theta_t = v\theta_{xx}$$

Po podstawieniu transformacji Hopf-Cole'a do równania Burgersa otrzymaliśmy równanie ciepła.

4 Rozwiązanie analityczne przy pomocy transformacji Hopf-Cole'a

Równanie Burgersa:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Warunek początkowy:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

Warunki brzegowe:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Transformacja Hopf-Cole'a:

$$u(x,t) = -2v\frac{\theta_x(x,t)}{\theta(x,t)}$$

Z równania Burgersa z poprzedniego punktu mamy:

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

Warunek początkowy θ :

$$u(x,0) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}, \quad \theta(x,0) \neq 0$$

$$\sin(\pi x) = -2v\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$

$$-\frac{1}{2v}\sin(\pi x) = \frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}$$

$$-\frac{1}{2v}\int\sin(\pi x)dx = \int\frac{\theta_x(x,0)}{\theta(x,0)}dx$$

$$-\frac{1}{2v}(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)) = ln[\theta(x,0)] + C$$

$$\frac{1}{2v\pi}\cos(\pi x)) - C = ln[\theta(x,0)]$$

$$\theta(x,0) = e^{\frac{1}{2v\pi}\cos(\pi x) - C}, \quad 0 < x < 1$$

Warunki brzegowe θ :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$-2v\frac{\theta_x(0,t)}{\theta(0,t)} = -2v\frac{\theta_x(1,t)}{\theta(1,t)} = 0, \quad \theta(0,t) \neq 0 \quad \theta(1,t) \neq 0$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$