

משפט: ב-BST שאין בו מפתחות זהים, אם קיים עוקב לקודקוד x אזי:

1. אם ל- x יש בן ימני, העוקב הוא הקודקוד השמאלי ביותר בתת העץ הימני.
2. אם ל- x אין בן ימני, העוקב הוא האב הקדמון הכי נמוך כך ש- x נמצא בתת העץ השמאלי שלו.

הוכחה :

יהי x קודקוד ב-BST שיש לו עוקב.

תחילה נוכיח שהעוקב הוא או צאצא של x או אב קדמון שלו. נניח בשלילה שהעוקב z הוא לא צאצא ולא אב קדמון של x אזי:

נסמן ב- y את האב הקדמון הנמוך ביותר של x ו- z . מכך שהערך ב- x קטן מהערך ב- z נובע ש- x בתת העץ השמאלי של y . מכך ש- y האב הקדמון הנמוך ביותר, נובע ש- z בתת העץ הימני של y . ולכן מתקבל:

$$x.key < y.key < z.key$$

בסתירה לכך ש- z העוקב של x .

עכשיו נסתכל על שני המקרים:

1. ל- x יש בן ימני. נסמן ב- r את הקודקוד השמאלי ביותר בתת העץ הימני. נניח בשלילה שהעוקב, z , הוא לא r אזי:

a. אם z הוא בתת העץ הימני של x :

i. אם z הוא אב של r אזי מכך ש- r הקודקוד הכי שמאלי נובע

ש- r בתת העץ השמאלי של z ולכן $r.key < z.key$ אך r בתת העץ הימני של x ולכן $x.key < r.key$ בסתירה לכך ש- z העוקב של x .

ii. אם r הוא אב של z אזי מכך ש- r הקודקוד הכי שמאלי נובע ש- z בתת העץ הימני של z ולכן $r.key < z.key$ אך r בתת העץ הימני של x ולכן $x.key < r.key$ בסתירה לכך ש- z העוקב של x .

iii. אחרת נסמן ב- y את האב הקדמון הנמוך ביותר של r ו- z . מכך ש- r הקודקוד הכי שמאלי נובע ש- z בתת העץ השמאלי של y . מכך ש- y הוא האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר נובע ש- z בתת העץ הימני של y ולכן מתקבל:

$$r.key < y.key < z.key$$

אך כולם בתת העץ הימני של x ולכן

$$x.key < r.key < y.key < z.key$$

בסתירה לכך ש- z העוקב של x .

b. אם z לא בתת העץ הימני של x אזי הוא לא יכול להיות בתת העץ השמאלי כי שם האיברים עם ערך נמוך מ- x ולכן z הוא אב של x . אזי מכך ש- x קטן ממנו נובע ש- x בתת העץ השמאלי של z (וכמובן r גם בתת העץ השמאלי של z) ולכן $r.key < z.key$. אך r בתת העץ הימני של x ולכן $x.key < r.key < z.key$ בסתירה לכך ש- z העוקב של x .

2. ל- x אין בן ימני. נסמן ב- v את האב הקדמון הכי נמוך כך ש- x נמצא בתת העץ השמאלי שלו. נניח בשלילה שהעוקב, z , הוא לא v . מהטענה הראשונה z הוא אב של x (הוא לא יכול להיות בתת העץ השמאלי כי אז הוא יהיה קטן ממנו) אזי מכך ש- x קטן ממנו נובע ש- x בתת העץ השמאלי של z , ומכיוון ש- v הוא אב קדמון

יותר נמוך מ- z נובע ש- v גם בתת העץ השמאלי של z . ולכן $v.key < z.key$.
אך מההגדרה x בתת העץ השמאלי של v ולכן $x.key < v.key < z.key$
בסתירה לכך ש- z העוקב של x .