Модуль числа

Определение модуля числа

Модуль (или абсолютная величина) действительного числа а:

а) это само заданное число, если оно больше или равно нулю

$|a| = a$, если $a \geq 0$;

б) это противоположное заданному число, если оно меньше нуля

$|a| = -a$, $a < 0$.

Свойства модуля числа

1) $|a| \geq 0$, $a \in R$

Пример: $|2| \geq 0$

$|-2| \geq 0$

2) $|a| \geq a$, $a \in R$

Пример: $2 \geq 0$, значит, $2 \geq 2$

$-2 \leq 0$, значит, $|-2| > -2$

3) $|-a| = |a|$, $a \in R$

Пример: $|-7| = |7|$

Следствие: $|a - b| = |b - a|$

Пример: $|7 - 4| = |4 - 7|$

$|3| = |-3|$

4) $|a^n| = |a|^n$, $a \in R$, $n \in Z$

Пример: $|3^3| = |3|^3$

5) $|a|^{2n} = a^{2n}$, $a \in R$

Пример: $|-7|^2 = (-7)^2 = 49$

6) $|a * b| = |a| * |b|$, $a \in R$, $b \in R$

Пример: $|7 * 3| = |7| * |3| = 21$

$|(-7) * 3| = |-7| * |3| = 21$

$|(-7)*(-3)| = |-7|*|-3| = 21$

7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $a \in R$, $b \neq 0$

Пример: $\left|\frac{6}{3}\right| = \frac{|6|}{|3|} = |2| = 2$

$\left|\frac{-6}{3}\right| = \frac{|-6|}{|3|} = |-2| = 2$

8) $|a| = |b| <=> a^2 = b^2$

Пример: $|7| = |-7| <=> 7^2 = (-7)^2$

$7 = 7 <=> 49 = 49$

9) $|a| = |b|$

$\left[\begin{matrix} a = b \\ a = -b \end{matrix}\right.$

10) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, a \in R, n \in R$

Пример: $\sqrt{4^2} = |4|$

11) $|a| + |b| \geq |a + b|$, $a \in R, b \in R$

Пример 1: $|7| + |3| \geq |7 + 3|$

$10 \geq 10$

Примет 2: $|-7| + |3| \geq |-7 + 3|$

$10 \geq 4$

Пример 3: $|-7| + |-3| \geq |-7 + (-3)|$

$10 \geq 10$

Следствие I: $|a| + |b| \geq |a - b|, a \in R, n \in R$

Пример 1: $|7| + |3| \geq |7 - 3|$

$10 \geq 4$

Пример 2: $|-7| + |3| \geq |-7 - 3|$

$10 \geq 10$

Пример 3: $|7| + |-3| \geq |7 - (-3)|$

$10 \geq 10$

Пример 4: $|-7| + |-3| \geq |-7 - (-3)|$

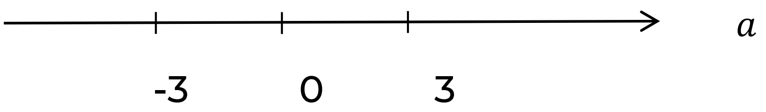
$10 \geq 4$

Следствие II: $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$, $a \in R$, $n \geq 2$

Геометрический смысл модуля числа

Модуль числа $a = |a|$ – расстояние от начала отсчета до точки, соответствующей числу а.

Пример: $|a|$ = 3, значит, на числовой оси имеются 2 точки, удаленные на расстояние три единицы от 0: $a_1 = 3$, a_2= -3.



Расстояние между двумя действительными числами – модуль разности между этими числами.

d $(a; b)$ = $|a - b|$= $|b - a|$

Пример: d (3; 7) = $|3 - 7|$= $|-4|$ = 4

d (3; 7) = $|7 - 3|$= $|4|$ = 4

Виды уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

$* |f(x)| = a;$

$* |f(x)| = g(x);$

$* |f(x)| = |g(x)|;$

$* |f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x).$

Методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

1. Метод решения уравнений по определению модуля

$|f(x)| = a$:

если $a < 0$, то решений нет;

если $a = 0$, то $f(x) = 0$;

если $a > 0$, то $|f(x)| = a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$

Пример 1: решить уравнение $|4x+7| = 3$

Решение: $|4x+7| = 3$

$$\left[\begin{array}{l} 4x+7=3 \\ 4x+7=-3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x=-4 \\ 4x=-10 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2{,}5 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2{,}5;\ -1.$

Пример 2: решить уравнение $|x^2-2x| = 3$

Решение: $|x^2-2x| = 3$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2-2x=3 & (2.1.) \\ x^2-2x=-3 & (2.2.) \end{array}\right.$$

Решение уравнения 2.1.

$x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$

$a+c=b$

$1-3=2$, значит, $x_1=-1$

Решение уравнения 2.2.

$x^2-2x=-3$

$x^2-2x+3=0$

$D=4-4*3, D=-8$

$D<0$, значит, действительных

$x_2 = \frac{c}{a}$, $x_2 = 3$ корней нет

Ответ: -1; 3.

Пример 3: найти сумму корней уравнения $|2x^2 - 5x| = 3$

Решение: $|2x^2 - 5x| = 3$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 3 \\ 2x^2 - 5x = -3 \end{array}\right.$$

Решение уравнения 3.1.

$2x^2 - 5x = 3$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 5^2 + 4 * 3 * 2, D = 49$

$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$

$x_1 = \frac{5+7}{4}, x_1 = 3$

$x_2 = \frac{5-7}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}$

Решение уравнения 3.2.

$2x^2 - 5x = -3$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$a + b + c = 0, 2 - 5 + 4 = 0$

значит, $x_3 = 1$

$x_4 = \frac{c}{a}, x_4 = \frac{3}{2}$

Сумма корней: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 5$

Ответ: 5.

Пример 4: решить уравнение $x^2 - 6|x| + 8 = 0$

Решение:

Случай 1

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Неравенство $x \geq 0$ выполняется при $x = 2$ и $x = 4$, значит, $x = 2$ и $x = 4$ являются решениями данной системы.

Случай 2

$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \end{cases}$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Неравенство $x < 0$ выполняется при $x = -2$ и $x = -4$, значит, $x = -2$ и $x = -4$ являются решениями данной системы.

Ответ: $-4; -2; 2; 4$.

Пример 5: решить уравнение $\left|10 - \left|7 + |x|\right|\right| = 5$

Решение: $\left|10 - \left|7 + |x|\right|\right| = 5$

Случай 1: $\left|10 - \left|7 + |x|\right|\right| = 5$

$$\left|7 + |x|\right| = 5$$

$7 + |x| = 5$ или $7 + |x| = -5$

$|x| \neq -2$ $|x| \neq -12$

Невозможно, т.к. $f(x) < 0$, значит, решений нет.

Случай 2: $\left|10 - \left|7 + |x|\right|\right| = -5$

$$\left|7 + |x|\right| = 15$$

$7 + |x| = 15$ или $7 + |x| = -15$

$|x| = 8$ $|x| \neq -22$

$\left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-8 \end{array}\right.$ Невозможно, т.к. $f(x) < 0$, значит, решений нет.

Ответ: $-8; 8.$

Пример 6: Найти произведение наименьшего и наибольшего корней уравнения $\left|9 + \left|5x - |x^2|\right|\right| = 15$

Решение: По свойству модуля $|x^2| = x^2$

$$\left|9 + \left|5x - |x^2|\right|\right| = 15$$

$$\left[\begin{array}{ll} 9 + |5x - x^2| = 15 & (6.1.) \\ 9 + |5x - x^2| = -15 & (6.2.) \end{array}\right.$$

Решение уравнения 6.1.
$|5x - x^2|$ = 6
$$\left[\begin{array}{ll} 5x - x^2 = 6 & (6.1.1.) \\ 5x - x^2 = -6 & (6.1.2.) \end{array}\right.$$

Решение уравнения 6.2.
$|5x - x^2| = -24$ – невозможно, так как $f(x) < 0$, решений нет.

6.1.1.

$x^2-5x+6=0$

$\left[\begin{matrix} x=2 \\ x=3 \end{matrix}\right.$

6.1.2.

$x^2-5x-6=0$

$\left[\begin{matrix} x=-1 \\ x=6 \end{matrix}\right.$

$x_{\text{наим}}=-1, x_{\text{наиб}}=6$

$x_{\text{наим}} * x_{\text{наиб}}=-1*6=-6$

Ответ: -6.

Пример 7: решить уравнение $|x|-3|x+2|=7$

Решение: данное уравнение равносильно совокупности трех систем

$\begin{cases} x<-2 \\ -x+3x+6=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2 \\ 2x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\frac{1}{2}>-2$ => решений нет	$\begin{cases} -2\le x<0 \\ -x-3x-6=7 \end{cases}$ $\begin{cases} -2\le x<0 \\ -4x=13 \end{cases}$ $\begin{cases} -2\le x<0 \\ x=-\dfrac{13}{4} \end{cases}$ $-\frac{13}{4}<-2$ => решений нет	$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-3x-6=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ -2x=13 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ x=-6{,}5 \end{cases}$ $-6{,}5<0$ => решений нет

Ответ: решений нет.

Пример 8: решить уравнение $|x^2+3x-4|=|x-1|$

Решение:

Упрощение левой части $|x^2+3x-4|=|(x-1)(x+4)|=|x-1||x+4|$

$|x-1||x+4|=|x-1|$

$|x-1||x+4|-|x-1|=0$

$|x-1|(|x+4|-1)=0$

$|x-1|=0$ или $|x+4|-1=0$

$x-1=0$ $\quad$ $|x+4|=1$

$x=1$ $\quad$ $\left[\begin{matrix} x+4=1 \\ x+4=-2 \end{matrix}\right.$

$x=-3, x=-5$

Ответ: $-5; -3; 1$.

2. Метод решения уравнений: замена данного уравнения равносильным

Способ решения 1: Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Способ решения 2:

$|f(x)| = |g(x)|$

$f^2(x) = g^2(x)$

$|f(x)| - |g(x)| = 0$

$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$

Пример 1: решить уравнение $|x^2 - 2x| = |6 - 3x|$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x = 6 - 3x & (1.1.) \\ x^2 - 2x = -(6 - 3x) & (1.2.) \end{array}\right.$$

Решение уравнения 1.1.

$x^2 - 2x = 6 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$

Решение уравнения 1.2.

$x^2 - 2x = -(6 - 3x)$

$x^2 - 2x = -6 + 3x$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ответ: $-3; 2; 3.$

Пример 2: найти сумму корней уравнения $|x^2 - 5| = |x^2 + 3|$

Решение: уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$. Значит, $|x^2 - 5| = |x^2 + 3|$

$(x^2 - 5)^2 = (x^2 + 3)^2$

$x^4 - 10x^2 + 25 = x^4 + 6x^2 + 9$

$16x^2 = 16$

$x_1 = 1; x_2 = -1$

$x_1 + x_2 = 1 + (-1) = 0$

Ответ: 0.

Пример 3: решить уравнение $\left|x^2-3x-|5x+2|\right|=|x^2-4x+2|$

Решение: $\left[\begin{array}{ll} x^2-3x-|5x+2|=x^2-4x+2 & (3.1.) \\ x^2-3x-|5x+2|=-(x^2-4x+2) & (3.2.) \end{array}\right.$

Решение уравнения 3.1.

$x^2-3x-|5x+2|=x^2-4x+2$

$|5x+2|=\mathrm{x}-2$

Решение уравнения 3.1.1.

$\begin{cases} 5x+2\geq 0 \\ 5x+2=x-2 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -0{,}4 \\ x=-1 \\ x\geq 2 \end{cases}$

Решений нет

Решение уравнения 3.1.2.

$\begin{cases} 5x+2<0 \\ 5x+2=-(x-2) \\ x-2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-0{,}4 \\ x=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$

Решений нет

Решение уравнения 3.2.

$x^2-3x-|5x+2|=-(x^2-4x+2)$

$2x^2-7x+2=|5x+2|$

Решение уравнения 3.2.1.

$\begin{cases} 5x+2\geq 0 \\ 5x+2=2x^2-7x+2 \\ 2x^2-7x+2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -0{,}4 \\ 2x^2-12x=0 \\ x\leq \dfrac{7-\sqrt{33}}{4} \\ x\geq \dfrac{7+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -0{,}4 \\ x(x-6)=0 \\ x\leq \dfrac{7-\sqrt{33}}{4} \\ x\geq \dfrac{7+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

$x_1=0;\ x_2=6$

Ответ: 0; 6.

Решение уравнения 3.2.2.

$\begin{cases} 5x+2<0 \\ 5x+2=-(2x^2-7x+2) \\ 2x^2-7x+2\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-0{,}4 \\ x^2-x+2=0 \\ 2x^2-7x+2\geq 0 \end{cases}$

$x^2-x+2=0$

$D=(-1)^2-4*2*1=-7$

$D<0$, значит, нет действительных корней

Решений нет

3.Метод решения уравнений: замена данного уравнения системой

Способ решения 1:

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}\end{array}\right.$$

Способ решения 2:

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ возможно привести к следующей системе

$$\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases};$$

Также можно вычислить корни через уравнение $f^2(x) - g^2(x) = 0$ и потом их проверить.

Пример : решить уравнение $|x^2 - 10x + 16| = 4x - 8$, пользуясь способом 1.

Решение: $|x^2 - 10x + 16| = 4x - 8$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-10x+16 \geq 0 \\ x^2-10x+16 = 4x-8 \end{cases} \quad (\text{система } 1) \\ \begin{cases} x^2-10x+16 < 0 \\ x^2-10x+16 = -(4x-8) \end{cases} \quad (\text{система } 2)\end{array}\right.$$

Решим систему 1:

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 16 \geq 0 \\ x^2 - 10x + 16 = 4x - 8 \end{cases}$$

$x^2 - 10x + 16 - 4x + 8 = 0$

$x^2 - 14x + 24 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=12 \end{array}\right.$$

Неравенство $x^2 - 10x + 16 \geq 0$ выполняется при $x = 2$ и $x = 12$,значит, $x = 2$ и $x = 12$ являются решениями данной системы

Решим систему 2:

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 16 < 0 \\ x^2 - 10x + 16 = -(4x - 8) \end{cases}$$

$x^2 - 10x + 16 + 4x - 8 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Неравенство $x^2 - 10x + 16 < 0$ выполняется при $x = 4$, значит, $x = 4$ является решением данной системы.

Неравенство $x^2 - 10x + 16 < 0$ не выполняется при $x = 2$, значит, $x = 2$ не является решением данной системы.

Ответ: 2;4;12.

Пример 2: решить уравнение $|x^2+7x-8| = x^2-2x+10$, используя способ 2.

Решение: $(x^2+7x-8)^2 = (x^2-2x+10)^2$

$18x^3+9x^2-72x-36=0$

$(2x+1)*(x^2-4)=0$

$2x+1=0$ или $x^2-4=0$

$x=-\frac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Проверка: $x^2-2x+10 \geq 0$

$\frac{1}{4}-2*\frac{1}{2}+10 \geq 0$ $4-2*2+10 \geq 0$ 4 – 2 *(-2) +10 ≥ 0

$-\frac{1}{2}$ – является корнем 2 – является корнем (-2) – является корнем

Ответ: -2; $-\frac{1}{2}$; 2.

4.Решение уравнений вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\cdots+|f_n(x)|=g(x)$

Уравнения вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\cdots+|f_n(x)|=g(x)$ принято решать по следующему алгоритму:

1) на числовой прямой выделить нули подмодульных выражений;
2) определить знак каждого из подмодульных выражений на каждом промежутке;
3) раскрыть модули на каждом промежутке и решить полученное уравнение;
4) выбрать решение, принадлежащее этому промежутку;
5) объединить решения.

Пример 1: решить уравнение $|x-3|+|x+1|=6$

Решение: $|x-3|+|x+1|=6$

Выражения под модулем обращаются в нуль в точках $x=3, x=-1$

$x-3$ $-$ $-$ $+$ x

$x+1$ $-$ -1 $+$ 3 $+$

Эти числа разбивают координатную прямую на 3 промежутка, значит, для решения уравнения необходимо составить 3 системы.

I) $\begin{cases} x < -1 \\ -(x-3)-(x+1)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x = -2 \end{cases}$

$-2 < -1, -2$ является корнем уравнения

II) $\begin{cases} -1 \le x < 3 \\ -(x-3)+(x+1)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 3 \\ -x+3+x+1=6 \end{cases}$

решений нет

III) $\begin{cases} x \ge 3 \\ (x-3)+(x+1)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x = 4 \end{cases}$

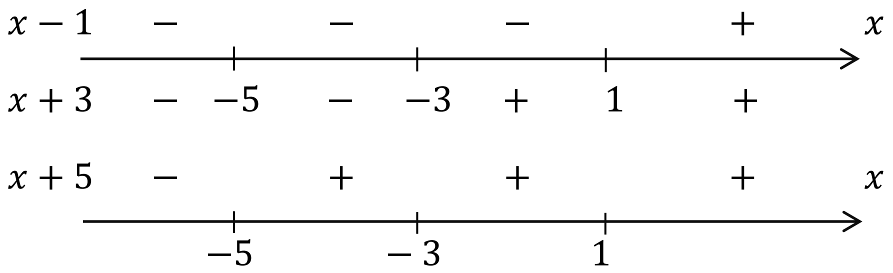
$4 \ge 3, 4$ является корнем уравнения

Ответ: $-2; 4$.

Пример 2: Решить уравнение $|x+5| + 2\,|x-1| - 4|x+3| = 7$

Решение: $|x+5| + 2\,|x-1| - 4|x+3| = 7$

Выражения под модулем обращаются в ноль при $x = -5, x = 1$ и $x = -3$.



Эти числа разбивают координатную плоскость на 4 промежутка, значит, для решения уравнения необходимо составить 4 системы.

I) $\begin{cases} x < -5 \\ -(x+5)-2(x-1)+4(x+3)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x = -2 \end{cases}$

$-2 > -5, -2$ не является корнем уравнения.

II) $\begin{cases} -5 \le x < -3 \\ (x+5)-2(x-1)+4(x+3)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \le x < -3 \\ x = -4 \end{cases}$

$-5 \le -4 < -3, -4$ является корнем уравнения.

III) $\begin{cases} -3 \le x < 1 \\ (x+5)-2(x-1)-4(x+3)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x < 1 \\ x = -2{,}4 \end{cases}$

$-3 \le -2{,}4 < 1, -2{,}4$ является корнем уравнения.

IV) $\begin{cases} x \ge 1 \\ (x+5)+2(x-1)-4(x+3)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x = -16 \end{cases}$

$-16 < 1, -16$ не является корнем уравнения.

$(-4) \cdot (-2{,}4) = 9{,}6$

Ответ: 9,6.

Пример 3: решить уравнение $|x^2 - x| + |x - 4| = x^2 - 4$

Решение: $|x^2 - x| + |x - 4| = x^2 - 4$

Выражения под модулем обращаются в ноль при $x = 0, x = 1, x = 4$.

Эти числа разбивают координатную прямую на 4 промежутка, значит, для решения уравнения необходимо составить 4 системы.

I) $\begin{cases} x < 0 \\ (x^2 - x) - (x - 4) = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$4 > 0$, решений нет

II) $\begin{cases} 0 \le x < 1 \\ -(x^2 - x) - (x - 4) = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

$2 > 1, -2 < 0$, решений нет

III) $\begin{cases} 1 \le x < 4 \\ (x^2 - x) - (x - 4) = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x < 4 \\ x = 4 \end{cases}$

$4 < 4$, решений нет

IV) $\begin{cases} x \ge 4 \\ (x^2 - x) + (x - 4) = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x \ge 4$

Ответ: $[4; +\infty)$.

5. Решение уравнений с модулем и параметром. Аналитический способ

Пример 1: решить уравнение $|x - a| = a - 4$

Решение $|x - a| = a - 4$

Случай 1:
$a - 4 < 0$
$a < 4$
При $a < 4$
решений нет

Случай 2:
$a - 4 = 0$
$a = 4$
$x - a = 0$
$x - 4 = 0$
$x = 4$

Случай 3:
$a - 4 > 0$
$a > 4$
$x - a = a - 4$ или $x - a = -(a - 4)$
$x = 2a - 4$ $\quad$ $x = 4$

Ответ: при $a < 4$ корней нет; при $a = 4$ $x = 4$; при $a > 4$ $x = 2a - 4$ и $x = 4$.

Пример 2: решить уравнение $|x - 3| = 2ax - 6$

Решение: $|x - 3| = 2ax - 6$

Случай 1: $x \ge 3$

$x - 3 = 2ax - 6,\ x = \frac{3}{2a-1}$

$\frac{3}{2a-1} \ge 3,\ \frac{3-6a+3}{2a-1} \ge 0,\ \frac{a-1}{a-1/2} \le 0$

Случай 2: $x < 3$

$-x + 3 = 2ax - 6,\ x = \frac{9}{2a+1}$

$\frac{9}{2a+1} < 3,\ \frac{9-6a-3}{2a+1} < 0,\ \frac{a-1}{a+1/2} > 0$

При $x \geq 3$ $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

При $x \leq 3$ $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$\frac{3}{2a-1}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\frac{9}{2a+1}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

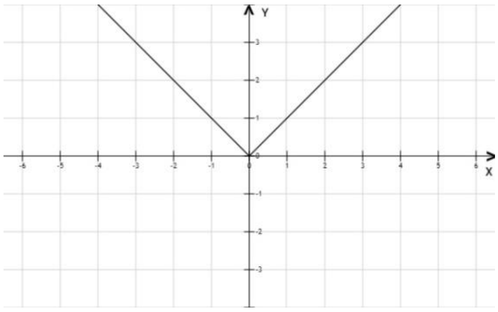
Ответ: при $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ уравнение имеет один корень; при $a \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ уравнение не имеет корней.

Графический метод решения уравнений, содержащих модуль

1. Построение некоторых видов графиков

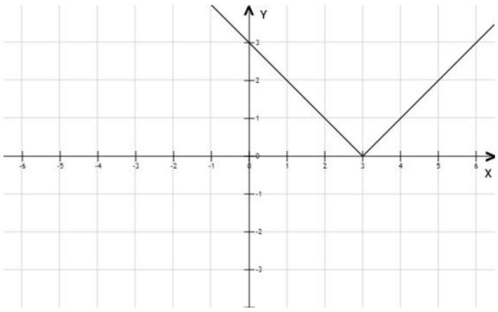
1) $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x, \text{при } x \geq 0 \\ -x, \text{при } x < 0 \end{cases}$$



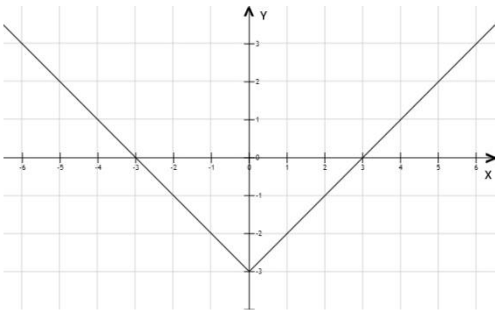
2) $y = |x - 3|$

Параллельный перенос $y = |x|$ на 3 единицы вправо.



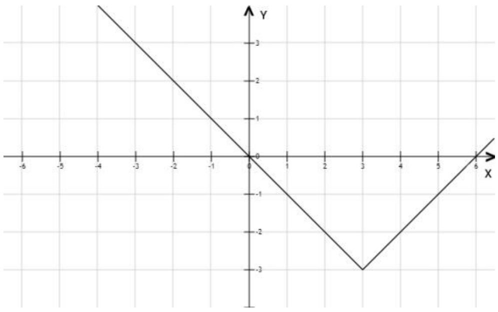
3) $y = |x| - 3$

Параллельный перенос $y = |x|$ на 3 единицы вниз.



4) $y = |x - 3| - 3$

Параллельный перенос $y = |x|$ на 3 единицы вправо и на 3 единицы влево.

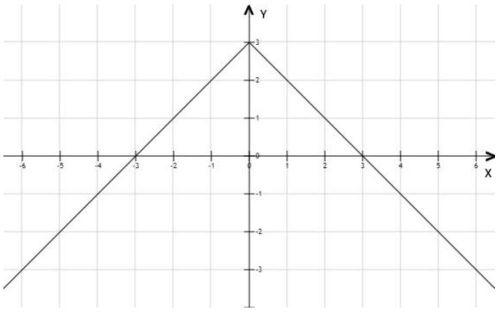


5) $y = 3 - |x|$

1. $y = -x$

$$y = \begin{cases} x, \text{при } x < 0 \\ -x, \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Параллельный перенос $y = -x$ на 3 единицы вверх



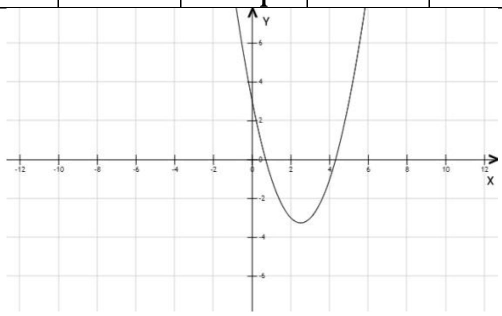
6) $y = x^2 - 5x + 3$

Квадратичная функция, график – парабола, ветви вверх.

1. Вершина: $\left(\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$.

2. Построение по точкам

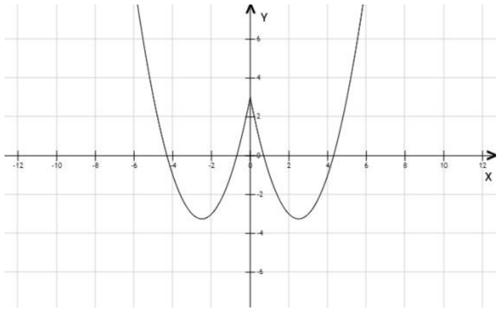
x	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	9	3	-1	-3	$-\frac{13}{4}$	-3	-1	3	9



7) $y = x^2 - 5|x| + 3$

1. Построить график $y = x^2 - 5x + 3$;

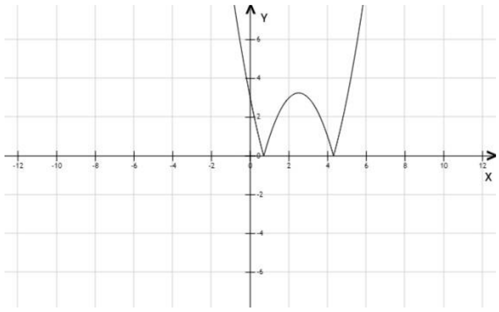
2. Часть графика, находящегося левее оси y, убрать, оставшуюся часть зеркально отобразить относительно оси y.



8) $y = |x^2 - 5x + 3|$

1. Построить график $y = x^2 - 5x + 3$;

2. Часть графика, находящегося ниже оси x, зеркально отобразить относительно оси x.

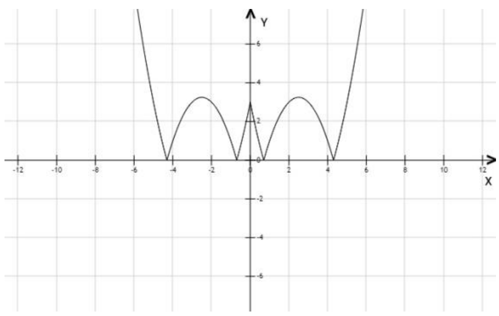


9) $y = |x^2 - 5|x| + 3|$

1. Построить график $y = x^2 - 5x + 3$;

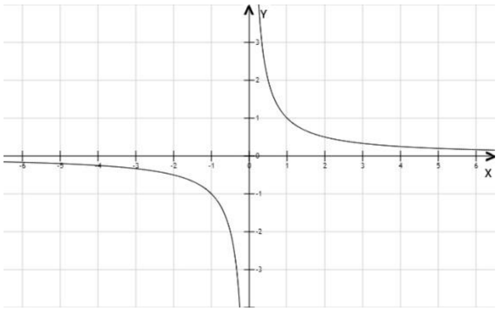
2. Часть графика, находящегося левее оси y, убрать, оставшуюся часть зеркально отобразить относительно оси y;

3. Часть графика, находящегося ниже оси x, зеркально отобразить относительно оси x.



10) $y = \frac{1}{x}$

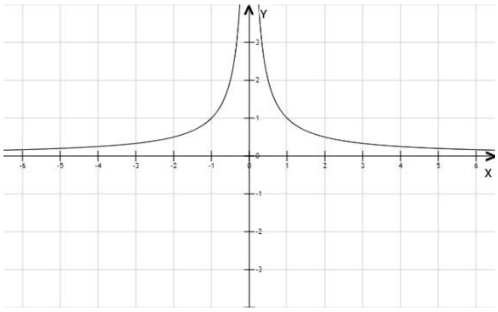
Обратная пропорциональность, график – гипербола, $x \neq 0$ (по условию существования дроби).



11) $y = \frac{1}{|x|}$

1. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$;

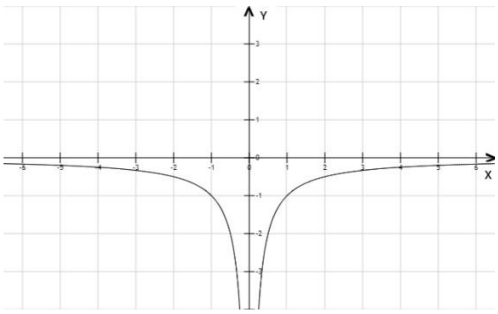
2. Часть графика, находящегося ниже оси x, зеркально отобразить относительно оси x.



12) $y = -\frac{1}{|x|}$

1. Построить график функции $y = -\frac{1}{x}$;

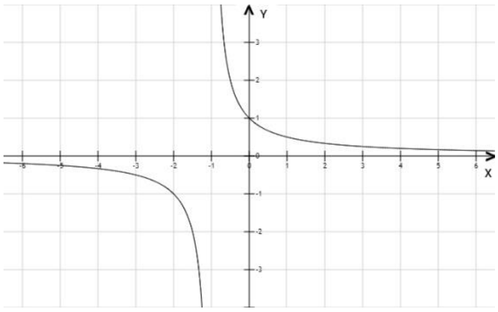
2. Часть графика, находящуюся выше оси x, зеркально отобразить относительно оси x.



13) $y = \frac{1}{x+1}$

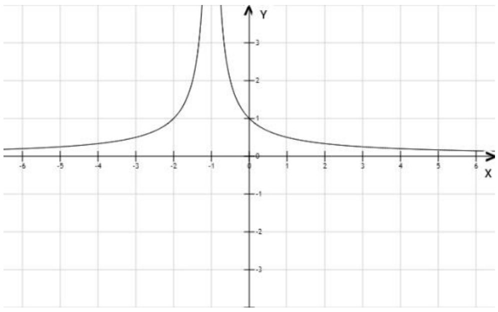
1. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$;

2. Параллельный перенос графика на одну единицу влево.



14 $y=\frac{1}{|x+1|}$

1. Построить график функции $y=\frac{1}{x}$;
2. Параллельный перенос графика на одну единицу влево.
3. Часть графика, находящегося ниже оси x, зеркально отобразить относительно оси x.



2. Построение сложных графиков

Пример 1: $y=|x+2|+|x-2|$

Решение: $x=-2$ и $x=2$ разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty;-2)\cup[-2;2)\cup[2;+\infty)$.

I) $y=|x+2|+|x-2|$, при $x\in(-\infty;-2)$, $x<-2$

x	-3	-2
y	6	4

$(-2;4)$ –точка выколота

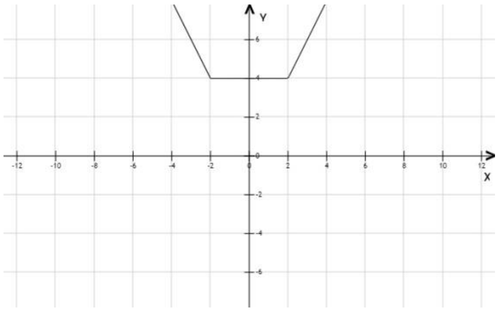
II) $y=|x+2|+|x-2|$, при $x\in[-2;2)$, $-2\le x<2$

x	-2	2
y	4	4

(2;4) – точка выколота

III) $y=|x+2|+|x-2|$, при $x\in[2;+\infty)$, $x\ge 2$

x	2	3
y	4	6



Пример 2: $y = |x - 1| - |x + 2| + |x + 3|$

Решение: $x = -3$, $x = -2$, $x = 1$ разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty; -3) \cup [-3; -2) \cup [-2; 1) \cup [1; +\infty)$.

I) $y = |x - 1| - |x + 2| + |x + 3|$, $x \in (-\infty; -3)$, $x < -3$

x	-4	-3
y	4	3

$(-3; 3)$ – точка выколота

II) $y = |x - 1| - |x + 2| + |x + 3|$, $x \in [-3; -2)$, $-3 \leq x < -2$

x	-3	-2
y	3	4

$(-2; 4)$ – точка выколота

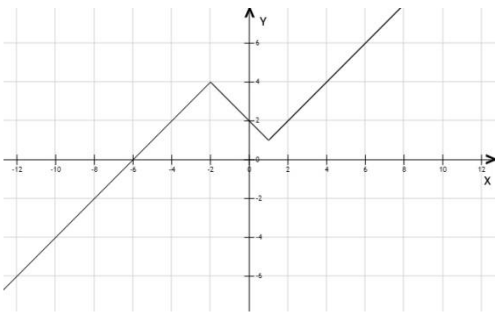
III) $y = |x - 1| - |x + 2| + |x + 3|$, $x \in [-2; 1)$, $-2 \leq x < 1$

x	-2	1
y	4	1

$(1; 1)$ – точка выколота

IV) $y = |x - 1| - |x + 2| + |x + 3|$, $x \in [1; +\infty)$, $x \geq 1$

x	1	2
y	1	2



Пример 1: Решить уравнение: $\frac{1}{|x|} = 2|x| + 1$.

Решение: в одной координатной плоскости необходимо построить графики: $y = \frac{1}{|x|}$ и $y = 2|x| + 1$.

Из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$.

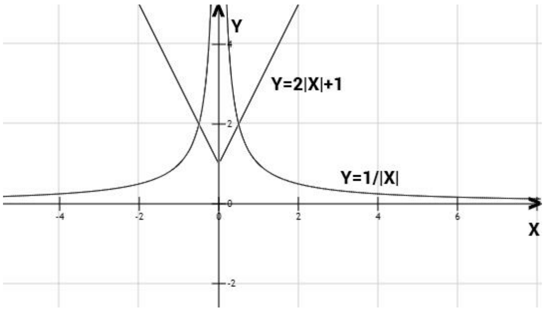


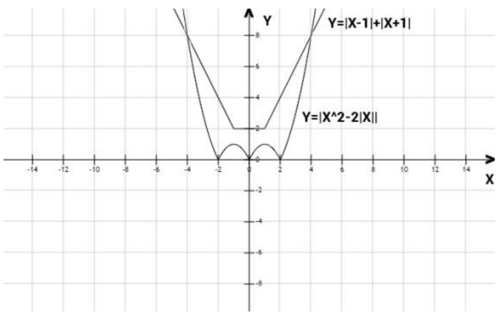
Рисунок 17.

Пример 2: Решить уравнение $|x^2 - 2|x|| = |x - 1| + |x + 1|$.

Решение: в одной координатной плоскости необходимо построить графики: $y = |x^2 - 2|x||$ и $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках $(-4; 8)$ и $(4; 8)$, значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$.

Ответ: $-4; 4$.



4. Решение уравнений с параметром

Пример 1: Определить число корней уравнения: $|x+1|+|x-4|=a$, для всех значений a.

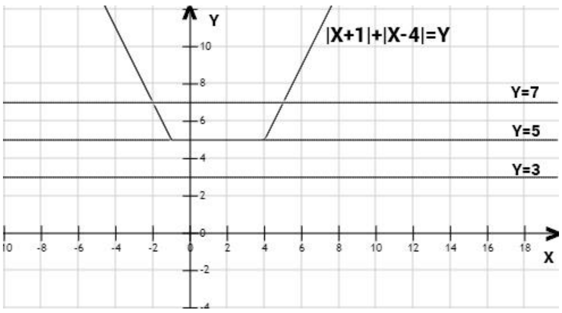
Решение:1. Необходимо построить график $y=|x+1|+|x+4|$;

2. $y=a$ – уравнение прямой, параллельной оси x или совпадающей с ней.

Ответ: 1) при $a<5$ решений нет;

2) при $a=5$ – бесконечно много решений, $x\in[-1;-4]$;

3) при $a>5$ два решения.



Пример 2: Определить число корней уравнения $a=||x+2|-4|$.

Решение: 1. Необходимо построить график $y=||x+2|-4|$;

2. $y=a$ – уравнение прямой, параллельной оси x или совпадающей с ней.

Ответ: 1) при $a<0$ решений нет;

2) при $a=0$ уравнение имеет два решения: $x_1=2$; $x_2=-6$

3) при $0<a<4$ уравнение имеет четыре решения;

4) при $a=4$ уравнение имеет три решения: $x_1=-10$, $x_2=-2$, $x_3=6$;

5) при $a>4$ уравнение имеет два решения.