



Carlos Roberto Alves de Almeida Júnior
Jully Ketely Aves da Silva
Laura Lourdes Coutinho Rodrigues

Problema

Uma empresa de distribuição e logística possui uma frota composta por **N** caminhões. Semanalmente, esta empresa organiza suas entregas em **M** rotas, as quais devem ser distribuídas entre os caminhões disponíveis. A empresa deseja fazer a distribuição de maneira que cada caminhão cumpra a **mesma quilometragem**, evitando assim que ao final do período existam caminhões ociosos enquanto outros continuam executando várias rotas. Se não for possível cumprir a mesma quilometragem, que a **diferença** entre a quilometragem dos caminhões seja a **menor** possível, diminuindo o problema.

Solução

O grupo decidiu que cada membro implementaria uma solução:

Carlos Roberto	Programação Dinâmica
Jully Ketely	Backtracking
Laura Lourdes	Divisão e Conquista

Na geração de rotas fornecida pelo professor, os valores representados abaixo foram pré-definidas para início da solução do problema. Para cada iteração do *backtracking* a quantidade de rotas (*qtd_rotas*) é incrementado. Para resolução do problema é considerada a **existência de 3 caminhões**.

```
qtd_rotas = 6  
qtd_conjunto = 10  
dispersao = 75  
whileTime = True
```

Backtracking

A função de backtracking foi implementada para distribuir rotas entre caminhões de forma a minimizar a diferença de quilometragem entre eles.

O *backtracking* busca realizar uma exploração sistemática de todas as opções possíveis. A função do *backtracking* gera soluções parciais incrementais, tentando atribuir cada rota a um dos caminhões. Claro que, são realizados testes para verificar se a solução parcial é

viável ou se pode ser descartada. Se caso a solução parcial não atender aos critérios é realizado a poda, ou seja, o algoritmo abandona esse ramo da busca. A cada vez que uma solução completa é alcançada, o algoritmo verifica se essa solução é a melhor que a melhor solução encontrada até agora.

O critério de poda funciona da seguinte maneira:

- A poda recebe a distribuição atual, o índice da rota a ser considerada, a melhor diferença atual e o tamanho das rotas;
- Calcula a quilometragem total em cada caminhão;
- Verifica se a distribuição parcial já é pior que a melhor solução encontrada, **realizando a poda**;
 - Se o índice da rota for menor que o tamanho total das rotas, verifica se a diferença parcial já é menor ou igual à melhor diferença encontrada.
- Retorna *True* se a poda for válida, indicando que o ramo da árvore de busca pode ser podado.

Utilizando o *GeradorDeProblemas* fornecido pelo professor, o backtracking alcançou seu limite de 30 segundos, com o **tamanho de rotas, igual a 47**, e conferindo o seguinte conjunto de rotas, que posteriormente foram analisados pela Programação Dinâmica e Divisão e Conquista.

```
Conjunto resultante do Backtracking

[[438, 185, 726, 391, 579, 181, 462, 262, 960, 608, 54, 149, 115, 823, 880, 660,
640, 398, 809, 174, 29, 913, 511, 95, 19, 20, 196, 961, 104, 736, 680, 620, 921,
303, 439, 723, 839, 824, 804, 500, 721, 142, 224, 159, 668, 290, 548], [474, 434,
257, 973, 191, 638, 721, 51, 623, 197, 747, 524, 639, 986, 103, 655, 859, 814, 321,
369, 441, 17, 584, 254, 209, 133, 555, 110, 646, 383, 896, 792, 565, 532, 237, 488,
801, 654, 688, 226, 296, 67, 211, 128, 828, 165, 714], [877, 946, 498, 522, 193,
176, 699, 957, 57, 68, 673, 385, 304, 227, 458, 270, 355, 644, 837, 924, 789, 477,
57, 119, 771, 66, 960, 563, 193, 174, 817, 42, 509, 540, 131, 85, 929, 253, 751,
468, 619, 606, 346, 442, 216, 778, 706], [932, 346, 248, 810, 125, 346, 246, 113,
255, 768, 435, 903, 217, 397, 925, 238, 88, 495, 612, 509, 68, 924, 459, 161, 234,
963, 637, 478, 195, 409, 395, 152, 481, 750, 211, 660, 380, 289, 220, 356, 143, 45,
721, 595, 74, 300, 152], [126, 885, 489, 482, 441, 188, 791, 364, 238, 920, 315,
631, 173, 821, 826, 666, 988, 639, 940, 187, 604, 579, 888, 248, 101, 434, 890, 547,
513, 895, 234, 618, 497, 870, 486, 298, 27, 760, 451, 766, 906, 265, 266, 348, 457,
606, 240], [926, 962, 618, 981, 165, 948, 600, 932, 18, 440, 58, 54, 494, 764, 800,
529, 47, 448, 556, 416, 503, 842, 830, 726, 854, 113, 476, 520, 259, 98, 584, 784,
25, 722, 762, 429, 985, 236, 148, 380, 315, 257, 676, 105, 29, 504, 698], [325, 178,
733, 483, 891, 597, 778, 610, 37, 478, 487, 803, 154, 908, 733, 428, 202, 821, 905,
392, 654, 488, 733, 661, 14, 894, 655, 85, 407, 927, 720, 353, 556, 46, 316, 449,
783, 289, 727, 981, 640, 568, 602, 826, 225, 819, 714], [95, 648, 914, 356, 766,
967, 69, 540, 981, 944, 703, 385, 922, 65, 126, 405, 387, 489, 646, 54, 387, 388,
192, 676, 585, 734, 81, 587, 739, 805, 222, 154, 355, 257, 565, 129, 677, 502, 768,
974, 783, 607, 905, 732, 227, 784, 775], [792, 243, 341, 374, 932, 286, 528, 709,
446, 296, 68, 77, 394, 366, 476, 510, 526, 552, 862, 138, 494, 739, 557, 707, 858,
558, 934, 312, 475, 648, 389, 832, 702, 981, 722, 841, 976, 917, 80, 205, 926, 918,
481, 102, 95, 413, 932], [196, 308, 91, 124, 181, 295, 127, 726, 164, 521, 167, 908,
222, 546, 987, 655, 36, 313, 439, 711, 567, 967, 148, 498, 368, 443, 467, 768, 673,
34, 311, 206, 77, 35, 905, 834, 250, 867, 983, 545, 673, 356, 434, 605, 364, 684,
674]]
```

Rotas que foram geradas pelo conjunto que ultrapassou:

```
----- BACKTRACKING -----
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [438, 391, 181, 262, 608, 115, 660, 398, 174, 29, 511, 95, 196, 680, 303, 723, 804, 142, 224, 159, 290]
Caminhão 2: [185, 579, 462, 54, 149, 823, 640, 913, 736, 620, 439, 824, 500, 668]
Caminhão 3: [726, 960, 880, 809, 19, 20, 961, 104, 921, 839, 721, 548]
Diferença mínima de quilometragem: 209 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [474, 434, 257, 973, 191, 638, 721, 51, 623, 197, 524, 103, 17, 254, 209, 133, 110, 383, 565, 67, 211, 128, 165]
Caminhão 2: [747, 639, 986, 655, 859, 814, 321, 441, 555, 532, 237, 714]
Caminhão 3: [369, 584, 646, 896, 792, 488, 801, 654, 688, 226, 296, 828]
Diferença mínima de quilometragem: 232 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [877, 946, 498, 522, 193, 176, 57, 68, 385, 837, 477, 57, 119, 66, 174, 42, 509, 131, 85, 253, 751, 346, 216]
Caminhão 2: [699, 957, 673, 304, 227, 458, 270, 924, 771, 540, 468, 619, 442]
Caminhão 3: [355, 644, 789, 960, 563, 193, 817, 929, 606, 778, 706]
Diferença mínima de quilometragem: 445 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [932, 346, 248, 125, 346, 246, 217, 397, 238, 88, 509, 68, 459, 161, 234, 478, 395, 152, 211, 380, 220, 143, 45, 74]
Caminhão 2: [810, 113, 255, 768, 925, 495, 963, 637, 481, 660, 289]
Caminhão 3: [435, 903, 612, 924, 195, 409, 750, 356, 721, 595, 300, 152]
Diferença mínima de quilometragem: 360 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [126, 885, 188, 364, 238, 315, 631, 666, 940, 187, 248, 101, 434, 513, 234, 618, 298, 27, 451, 265, 266, 348]
Caminhão 2: [489, 482, 441, 173, 821, 988, 604, 579, 890, 497, 870, 766, 457, 240]
Caminhão 3: [791, 920, 826, 639, 888, 547, 895, 486, 760, 906, 606]
Diferença mínima de quilometragem: 79 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [926, 618, 165, 600, 18, 440, 58, 54, 494, 47, 448, 503, 830, 113, 476, 259, 98, 25, 722, 236, 148, 105, 29, 504]
Caminhão 2: [962, 948, 764, 800, 556, 726, 520, 584, 762, 380, 315, 698]
Caminhão 3: [981, 932, 529, 416, 842, 854, 784, 429, 985, 257, 676]
Diferença mínima de quilometragem: 330 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 3: [510, 862, 557, 558, 934, 702, 841, 80, 205, 926, 918, 481, 413, 932]
Diferença mínima de quilometragem: 655 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhos:
Caminhão 1: [196, 308, 91, 124, 181, 295, 127, 726, 164, 167, 655, 36, 313, 148, 498, 368, 443, 34, 311, 206, 77, 35, 250, 545, 673, 356]
Caminhão 2: [521, 908, 222, 546, 439, 711, 467, 768, 905, 867, 434, 605]
Caminhão 3: [987, 567, 967, 673, 834, 983, 364, 684, 674]
Diferença mínima de quilometragem: 660 km
```

Divisão e Conquista

É utilizada a Divisão e Conquista para outra solução do problema apresentado, distribuir rotas entre caminhões. O algoritmo recebe duas entradas: uma lista de rotas e o número de caminhões.

A função *diferenca_entre_caminhoes(caminhoes)* retorna a diferença entre a maior e a menor quilometragem entre os caminhões.

A função *distribuir_rotas_divisao_conquista(rotas, num_caminhoes)* distribui as rotas entre os caminhões. Se não houver rotas, ela retorna uma lista vazia para cada caminhão. Caso contrário, ela classifica as rotas em ordem decrescente e chama a função *divide_rotas(rotas, num_caminhoes)*.

A função *divide_rotas(rotas, num_caminhoes)*: divide as rotas entre os caminhões. Se não houver rotas, ela retorna uma lista vazia para cada caminhão. Se houver apenas um caminhão, ela retorna todas as rotas para esse caminhão. Caso contrário, ela divide as rotas entre os caminhões de tal forma que a diferença entre a maior e a menor quilometragem seja minimizada. **Ela faz isso verificando todas as possíveis divisões das rotas e escolhendo a que resulta na menor diferença de quilometragem.**

Resultado (Conjunto utilizado pelo backtracking)

```
divisaOconquista(conjuntoResultante, 3)
```

```
----- DIVISÃO E CONQUISTA -----  
  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [961, 960, 921, 913, 880, 839, 824, 823]  
Caminhão 2: [809, 804, 736, 726, 723, 721, 680, 668, 660, 640, 620]  
Caminhão 3: [608, 579, 548, 511, 500, 462, 439, 438, 398, 391, 303, 290, 262, 224, 196, 185, 181, 174, 159, 149, 142, 115, 104, 95, 54, 29, 20, 19]  
Diferença mínima de quilometragem: 666 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [986, 973, 896, 859, 828, 814, 801, 792, 747]  
Caminhão 2: [721, 714, 688, 655, 654, 646, 639, 638, 623, 584, 565]  
Caminhão 3: [555, 532, 524, 488, 474, 441, 434, 383, 369, 321, 296, 257, 254, 237, 226, 211, 209, 197, 191, 165, 133, 128, 110, 103, 67, 51, 17]  
Diferença mínima de quilometragem: 569 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [960, 957, 946, 929, 924, 877, 837, 817]  
Caminhão 2: [789, 778, 771, 751, 706, 699, 673, 644, 619, 606, 563]  
Caminhão 3: [540, 522, 509, 498, 477, 468, 458, 442, 385, 355, 346, 304, 270, 253, 227, 216, 193, 193, 176, 174, 131, 119, 85, 68, 66, 57, 57, 42]  
Diferença mínima de quilometragem: 384 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [963, 932, 925, 924, 903, 810, 768]  
Caminhão 2: [750, 721, 660, 637, 612, 595, 509, 495, 481, 478, 459, 435]  
Caminhão 3: [409, 397, 395, 380, 356, 346, 346, 300, 289, 255, 248, 246, 238, 234, 220, 217, 211, 195, 161, 152, 152, 143, 125, 113, 88, 74, 68, 45]  
Diferença mínima de quilometragem: 607 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [988, 940, 920, 906, 895, 890, 888, 885, 870]  
Caminhão 2: [826, 821, 791, 766, 760, 666, 639, 631, 618, 606, 604, 579]  
Caminhão 3: [547, 513, 497, 489, 486, 482, 457, 451, 441, 434, 364, 348, 315, 298, 266, 265, 248, 240, 238, 234, 188, 187, 173, 126, 101, 27]  
Diferença mínima de quilometragem: 233 km
```

Resultado (Conjunto de rotas teste)

```
divisaOconquista(rotas_teste, 3)
```

```
----- DIVISÃO E CONQUISTA -----  
  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [40, 39, 39, 39, 38, 38, 38, 36]  
Caminhão 2: [35, 35, 35, 33, 33, 32, 32, 32, 32]  
Caminhão 3: [31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 29, 28, 28]  
Diferença mínima de quilometragem: 13 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [55, 55, 53, 51, 51, 51]  
Caminhão 2: [44, 43, 43, 43, 42, 42, 32, 32]  
Caminhão 3: [32, 32, 30, 30, 29, 29, 29, 29, 27, 27, 25, 24]  
Diferença mínima de quilometragem: 27 km
```

Programação Dinâmica

Inicialmente algumas soluções foram tentadas, como por exemplo algoritmos utilizando um intervalo definido pela soma das rotas e dividido pela quantidade de caminhões, como condição de parada. Sendo algumas dessas soluções utilizando min e max para comparações diferentes, como por exemplo:

- $(M[i-1][j], M[i-1][j-1] + V_i)$
- $(M[i-1][j], M[i][j-1] + V_i)$

Para estas tentativas de soluções, foi utilizado as linhas como a quantidade de rotas, e as colunas como a quantidade de caminhões, sendo $M[i][j]$: i = quantidade rotas + 1, e j = quantidade de caminhões + 1.

Porém, a solução que mais foi efetiva comparada a outras foi utilizando o mínimo da seguinte comparação:

- $\min(M[i][j-1], M[i-1][j-1] + V_j)$

Para esta solução a matriz teve como linha a quantidade de caminhões, e coluna a quantidade de rotas, ou seja, o inverso das outras tentativas de soluções.

Alguns dos problemas nas outras soluções, foi devido ao fato de não conseguir reproduzir o resultado e/ou dar erro em algum resultado por algum motivo não identificado (não foi erro de sintaxe da linguagem utilizada).

O Algoritmo final usa a função citada anteriormente: $\min(M[i][j-1], M[i-1][j-1] + V_j)$, as linhas são a quantidade de caminhões e as colunas as rotas; primeira linha e coluna não inicializadas com 0 exceto a posição $M[0][0]$ que é de onde o algoritmo parte.

Resultado (Conjunto que inicia pelo último conjunto do backtracking):

- Parte do primeiro conjunto de teste, que é o último conjunto do backtracking. O tamanho deste conjunto é de 47 rotas, devido ao fato do conjunto de rotas crescer de T em T não ficaria legível adicionar o último conjunto.

```
----- PROGRAMAÇÃO DINAMICA -----
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:
Caminhão 1: [668, 142, 804, 723, 921, 736, 196, 95, 29, 398, 880, 149, 960, 181, 726] -- Quilometragem: 7608 km
Caminhão 2: [290, 224, 500, 839, 303, 680, 961, 19, 913, 809, 660, 115, 608, 462, 391, 438] -- Quilometragem: 8212 km
Caminhão 3: [548, 159, 721, 824, 439, 620, 104, 20, 511, 174, 640, 823, 54, 262, 579, 185] -- Quilometragem: 6663 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:
Caminhão 1: [828, 67, 688, 488, 565, 383, 555, 254, 441, 814, 103, 524, 623, 638, 257] -- Quilometragem: 7228 km
Caminhão 2: [165, 211, 226, 801, 532, 896, 110, 209, 17, 321, 655, 639, 197, 721, 973, 474] -- Quilometragem: 7147 km
Caminhão 3: [714, 128, 296, 654, 237, 792, 646, 133, 584, 369, 859, 986, 747, 51, 191, 434] -- Quilometragem: 7821 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:
Caminhão 1: [216, 606, 751, 85, 509, 174, 960, 119, 789, 644, 458, 385, 57, 176, 498] -- Quilometragem: 6427 km
Caminhão 2: [778, 346, 468, 929, 540, 817, 563, 771, 477, 837, 270, 304, 68, 699, 522, 877] -- Quilometragem: 9266 km
Caminhão 3: [706, 442, 619, 253, 131, 42, 193, 66, 57, 924, 355, 227, 673, 957, 193, 946] -- Quilometragem: 6784 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:
Caminhão 1: [74, 45, 220, 660, 481, 409, 637, 161, 68, 495, 925, 903, 255, 346, 248] -- Quilometragem: 5927 km
Caminhão 2: [300, 721, 356, 380, 750, 395, 478, 234, 924, 612, 238, 217, 768, 246, 810, 932] -- Quilometragem: 8361 km
Caminhão 3: [152, 595, 143, 289, 211, 152, 195, 963, 459, 509, 88, 397, 435, 113, 125, 346] -- Quilometragem: 5172 km
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:
Caminhão 1: [457, 265, 451, 298, 497, 895, 890, 248, 604, 639, 826, 631, 238, 188, 489] -- Quilometragem: 7616 km
Caminhão 2: [606, 266, 766, 27, 870, 234, 547, 101, 579, 940, 666, 173, 920, 791, 482, 126] -- Quilometragem: 8094 km
Caminhão 3: [240, 348, 906, 760, 486, 618, 513, 434, 888, 187, 988, 821, 315, 364, 441, 885] -- Quilometragem: 9194 km
```

Resultado (Conjunto de rotas teste):


```
----- PROGRAMAÇÃO DINAMICA -----  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [29, 33, 32, 38, 29, 30, 31, 29, 40] -- Quilometragem: 291 km  
Caminhão 2: [39, 29, 38, 39, 39, 32, 35, 32, 36] -- Quilometragem: 319 km  
Caminhão 3: [28, 33, 32, 35, 35, 30, 31, 28, 38] -- Quilometragem: 290 km  
Distribuição encontrada para minimizar a diferença de quilometragem entre os caminhões:  
Caminhão 1: [30, 55, 29, 29, 25, 43, 30, 32] -- Quilometragem: 273 km  
Caminhão 2: [24, 29, 32, 55, 27, 51, 42, 43, 32] -- Quilometragem: 335 km  
Caminhão 3: [27, 53, 44, 43, 32, 29, 51, 42, 51] -- Quilometragem: 372 km
```

Nos códigos entregues juntamente a este relatório, está contida a segunda tentativa de solução que falhou em alguns conjuntos ao tentar mostrar os resultados.