Cálculo de Uma Variável

Profa.: Danielle Teixeira

danielle.teixeira@professores.ibmec.edu.br

Sumário

1. Introdução a Limite
2. Limite de Função
3. Definição de Limite
4. Limites algébricos
5. Limites laterais
6. Continuidade

Limite

Considere as seguintes sucessões numéricas

$$a)\ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$b)\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

$$c)\ 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$$

$$d)\ 1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \ldots$$

Limite

Note que:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Na sucessão (a) os termos crescem sem atingir um limite. Escrevemos que

$$x \to +\infty$$

Significa que os termos da sucessão tendem para o infinito

Limite

Note que:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\dots$$

Na sucessão (b) os números aproximam-se cada vez mais do valor 1 (sem nunca se atingirem esse valor). Dizemos que

$$x \to 1$$

Limite

Note que:

$$1, 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Na sucessão (c) os termos diminuem sem atingir um limite. Escrevemos que

$$x \to -\infty$$

$$\downarrow$$

Significa que os termos da sucessão tendem para menos infinito

Ibmec

Limite

Note que:

$$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \ldots$$

Na sucessão (d) os termos oscilam sem tender para um limite.

Limite de uma Função

Exemplo: Seja a função

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que x ≠ 1.

Podemos reescrever a função como

$$f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$

pois $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

Limite de uma Função

Estudaremos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferente de 1

$x \to 1^-$ (x tende a 1 através de valores menores que 1)

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

$x \to 1^+$ (x tende a 1 através de valores maiores que 1)

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,08	3,002

Limite de uma Função

Escrevemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(2x+1)=2.1+1=3$$

Ibmec

Definição de Limite

Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número a. Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de f(x), quando x tende a a , é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limite de uma Função

Exemplos:

Cálculo os limites.

$$a)\ \lim_{x\to 2}(3x^2-5x+2)=\lim_{x\to 2}(3(2)^2-5.2+2)=\lim_{x\to 2}(3.4-5.2+2)=4$$

$$b)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x-3}{4x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^2+2.(-1)-3}{4.(-1)-3}=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$$

Ibmec

Limites De Funções Algébricas

Calcule os limites que seguem.

1. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$$

2. $$\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^2-9}{2x+3}$$

Solução

1. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ = 0/0 → Temos uma indeterminação do tipo 0/0. Nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado!

Devemos proceder no sentido de tentar eliminar essa indeterminação. O caminho é eliminar o radical do numerador com a esperança que consigamos cancelar algum termo do numerador com $x-3$ do denominador – um elemento que compõe a indeterminação.

Devemos então multiplicar o numerador e o denominador por $(\sqrt{x+6}+3)$. Lembrem-se que a ideia é utilizar o produto notável

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

fazendo as seguintes identificações: $a = \sqrt{x+6}$ e $b = 3$

Assim, obtemos

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\left[\left(\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+6)-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{\sqrt{3+6}+3} = \frac{1}{6}$$

2. $\lim_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ = 0/0 → Temos uma indeterminação do tipo 0/0. Nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado!

Para tentarmos eliminar a indeterminação, vamos fatorar o numerador e, para isso, usamos o produto notável

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Tomando $a = 2x$ e $b = 3$, obtemos

$$\lim_{x \to -3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \lim_{x \to -3/2} \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x + 3}$$

$$= \lim_{x \to -3/2} (2x - 3) = 2 \cdot \frac{-3}{2} - 3 = -6$$

Ibmec

3. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+x-14}$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

Solução

3. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+x-14} = 0/0$

Temos mais uma vez uma indeterminação do tipo 0/0. Devemos aqui relembrar o teorema de D'Alembert, o qual afirma que, se um polinômio P(x) se anula para *x* = *a*, então ele é divisível por *x* – *a*. Logo, o termo que leva à indeterminação é o fator comum *x* – 2. Utilizando o algoritmo da divisão de polinômio, ou o método de Briot–Ruffini, obtemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+x-14} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3x+7)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{3x+7} = \lim_{x\to 2} \frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+7} = \frac{5}{13}$$

4. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ = 0/0

O numerador se anula para $x = 2$, o que significa pelo teorema de D'Alembert que este polinômio é divisível por $x - 2$. Utilizamos então o algoritmo da divisão de polinômio, ou método de Briot-Ruffini para encontrar

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

Com $a = x$ e $b = 2$, obtemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$= 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 8 = 32$$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$

Solução

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$ = 0/0 → Temos uma indeterminação do tipo 0/0. Nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado!

Devemos proceder no sentido de tentar eliminar essa indeterminação. O caminho é eliminar o radical do denominador com a esperança que consigamos cancelar algum termo do denominador com $(x-2)$ do numerador – um elemento que compõe a indeterminação.

Devemos então multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{(3x-5)}+1$.

Lembrem-se que a ideia é utilizar o produto notável

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

fazendo as seguintes identificações: $a = \sqrt[3]{3x-5}$ e $b = 1$

Assim, obtemos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1)}{3x-5-1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1)}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1)}{3(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1)}{3}=1$$

- 6- $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Solução

6. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ = 0/0 → Temos uma indeterminação do tipo 0/0. Nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado!

Fazemos $y=\sqrt[6]{x}$, pois o mmc (2,3) =6

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y^2-4}=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}=\lim_{y\to 2}\frac{(y^2+2y+4)}{(y+2)}=3$$

onde

$$\sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=y^3,\sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=y^2 \;\text{ e }\; \lim_{x\to 64}\sqrt[6]{x}=2=\lim_{y\to 2}y$$

Limites Laterais

Calcule os limites que seguem.

1. $\lim_{x\to 1} f(x)$; $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & se \quad x<1 \\ 2 & se \quad x=1 \\ 5x-2 & se \quad x>1 \end{cases}$

2. $\lim_{x\to 1} f(x)$; $f(x) = \begin{cases} |1-x| & se \quad x<-2 \\ -1 & se \quad x=-2 \\ |x-1| & se \quad x>-2 \end{cases}$

Solução

1. O limite de $f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

forem iguais. Vamos fazer então o cálculo desses limites laterais. Temos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x+1) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (5x-2) = 3 .$$

Logo, o limite de f(x) em 1 é 3,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3 .$$

2. Em todos os exercícios que nos deparamos com funções modulares, temos que ter em mente a definição de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases} .$$

Temos então que

$$|x-1| \begin{cases} x-1 \text{ se } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ se } x < 1 \end{cases} .$$

Daí segue que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} |x-1| = \lim_{x \to 1^-} -(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} |x-1| = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$$

Os limites laterais existem e são iguais a zero. Logo, o limite de $f(x)$ em 1 é igual a 0.

Calcule $\lim_{x \to p} f(x)$, sendo $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{|2x^2 - 9x + 10|}, \quad x \in \Re - \{2, \frac{5}{2}\};\ p = 2$.

Solução

$\lim_{x \to p} f(x)$ = 0/0 → Devemos tentar isolar *x* – 2 tanto no numerador, como no denominador

Fatorando o numerador, obtemos

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3) \quad .$$

Quanto ao denominador, podemos escrever

$$|2x^2 - 9x + 10| = |(x - 2)(2x - 5)| = |x - 2|\,|2x - 5| \quad .$$

Assim, para, $x \neq 2$ e $5/2$, temos

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{|2x^2 - 9x + 10|} = \frac{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)}{|x - 2|\,|2x - 5|} \quad .$$

Como $|x-2| = \begin{cases} x-2 & se \quad x \geq 2 \\ 2-x & se \quad x < 2 \end{cases}$, podemos escrever

$$\frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{|x-2|\,|2x-5|} = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{|2x-5|} & se \quad x > 2 \; x \neq 5/2 \\ \frac{3+2x-x^2}{|2x-5|} & se \quad x < 2 \end{cases} .$$

Daí então,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3+2x-x^2}{|2x-5|} = \frac{3+2 \cdot 2-2^2}{|2 \cdot 2-5|} = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x-3}{|2x-5|} = \frac{2^2-2 \cdot 2-3}{|2 \cdot 2-5|} = -3$$

Logo, f(x) não possui limite em 2, pois os limites laterais são diferentes.

Continuidade

Definição

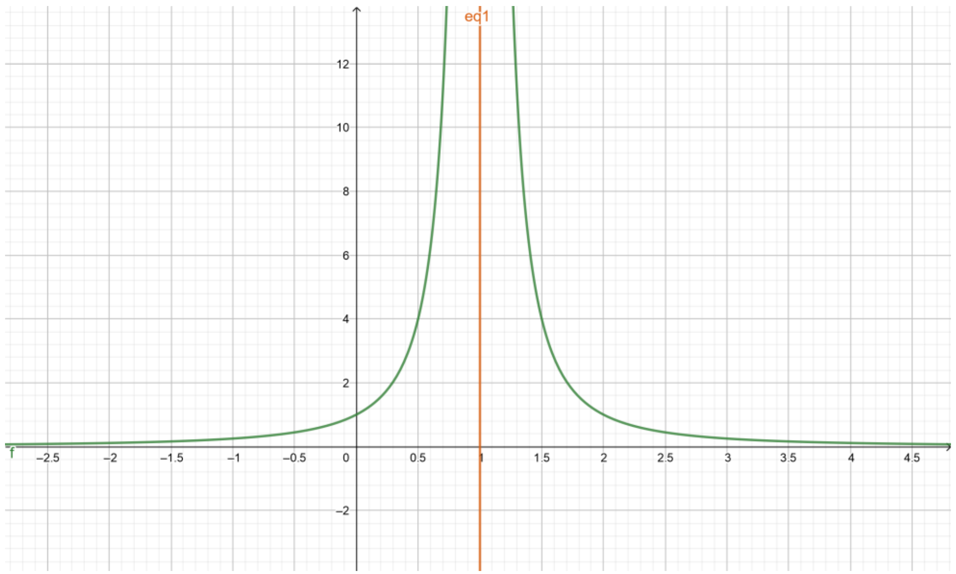
Diz-se que uma função f é contínua em um número a pertencente ao seu domínio se, e somente se:

$$(i)\ \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe} \qquad (ii)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

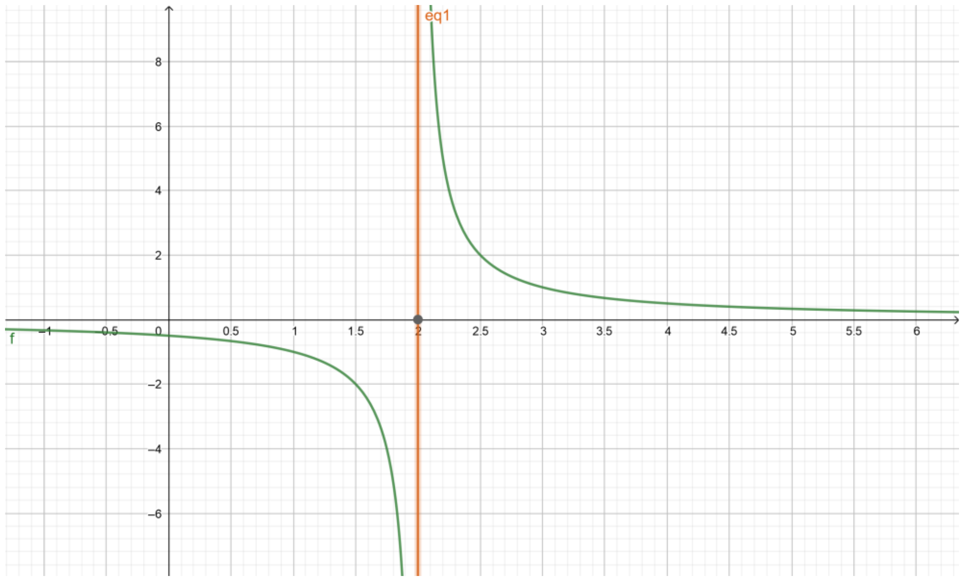
Uma função f é dita contínua num intervalo I se for contínua em

Continuidade

Exemplos gráficos de funções descontínuas.



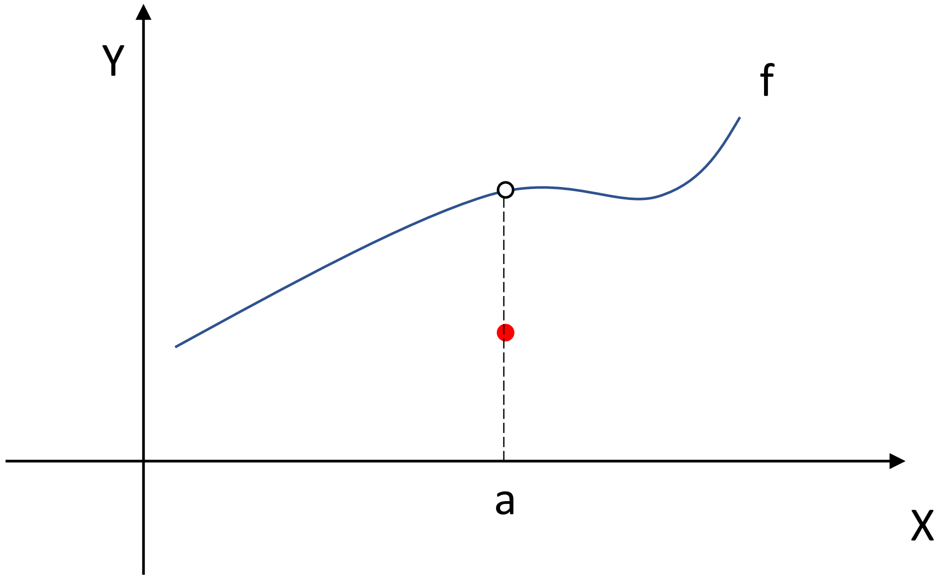
$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

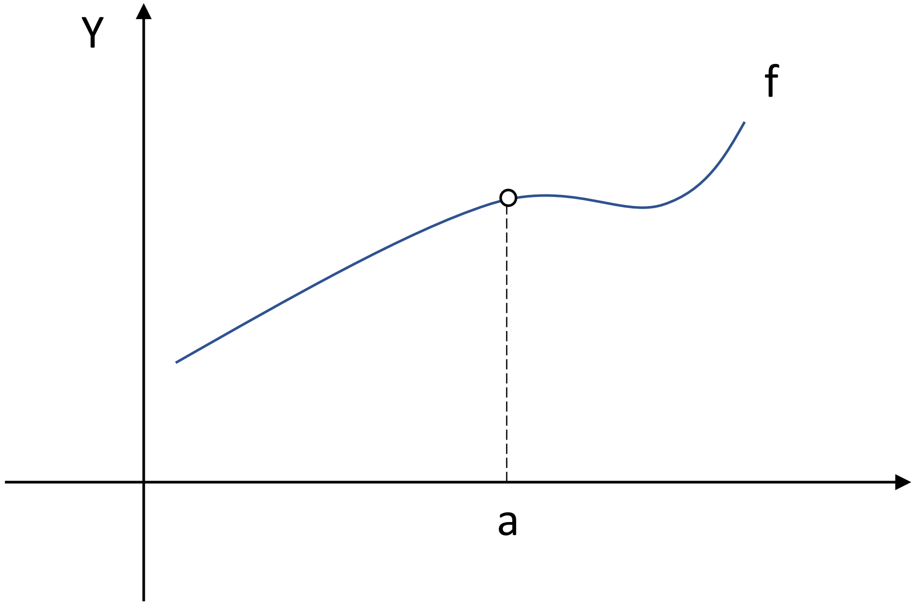


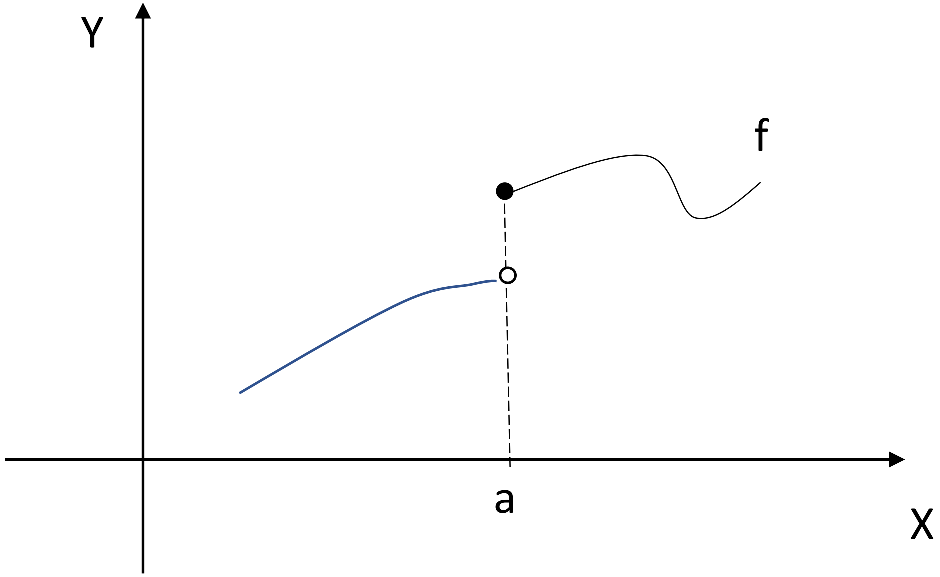
$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

Continuidade

Exemplos gráficos de funções descontínuas.







Continuidade

Alguns teoremas sobre continuidade

Se f e g são funções contínuas em um número a, então:

(i) $f \pm g$ é contínua em a

(ii) $f \times g$ é contínua em a

(iii) f/g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$

Toda função polinomial é contínua em $\Re$.

Toda função racional é contínua em seu domínio.

Continuidade

As funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante são funções contínuas em seus domínios.

Exercícios

Nos exercícios que se seguem, ache os números a e b que tornam a função dada contínua para todo x real.

a) $$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & se \quad x < -3 \\ 3ax - 7b & se \quad -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & se \quad x > 3 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & se \quad x < \pi/2 \\ ax + b & se \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \\ x + 3b & se \quad x > \pi \end{cases}$$

Ibmec

Continuidade

Solução

a) $$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & se \quad x < -3 \\ 3ax - 7b & se \quad -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & se \quad x > 3 \end{cases}$$

A função $f(x)$ é contínua para todo $x \neq -3$ e $x \neq 3$. Devemos impor a continuidade em $x = -3$ e em $x = 3$.

(i) $f(x)$ é contínua em $x = -3$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) \quad = \quad f(-3) \Rightarrow \lim_{x \to -3^-} (3x + 6a) = -9a - 7b \Rightarrow$$

Continuidade

$$-9 + 6a \quad = \quad -9a - 7b \Rightarrow 15a + 7b = 9$$

(ii) $f(x)$ é contínua em $x = 3$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = f(3) \Rightarrow \lim_{x \to 3+} (x - 12\,b) = 9a - 7b \Rightarrow 3 - 12\,b = 9a - 7b$$

Concluindo, temos que $f(x)$ é contínua para todo x real se, e somente se,

$$\begin{cases} 15\,a + 7\,b = 9 \\ 9\,a + 5\,b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Continuidade

b) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & se \quad x < \pi/2 \\ ax + b & se \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \\ x + 3b & se \quad x > \pi \end{cases}$

$f(x)$ é contínua para todo $x \neq \pi/2$ e $x \neq \pi$. Devemos impor a continuidade em $x = \pi/2$ e em $x = \pi$.

(i) $f(x)$ é contínua em $x = \pi/2$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{sen } x = a\,\frac{\pi}{2} + b \Rightarrow 1$$

$$= a\,\frac{\pi}{2} + b \Rightarrow a\,\pi + 2\,b = 2$$

Ibmec

Continuidade

(ii) $f(x)$ é contínua em $x = \pi$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) \quad = \quad f(\pi) \Rightarrow \lim_{x \to \pi^+} (x + 3\,b) = a\,\pi + b \Rightarrow \pi + 3\,b$$

$$= \quad a\,\pi + b \Rightarrow a\pi - 2b = \pi$$

Concluindo, temos que $f(x)$ é contínua para todo x real se, e somente se,

$$\begin{cases} a\,\pi + 2\,b = 2 \\ a\,\pi - 2\,b = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/\pi + \pi/2 \\ b = 1/2 - \pi/4 \end{cases}$$