Cálculo de Uma Variável

Profa.: Danielle Teixeira
danielle.teixeira@ibmec.edu.br

Sumário

1. Definição de Derivada de Uma Função
2. Regra da Cadeia
3. Retas Tangente e Normal
4. Derivação e Ordem Superior
5. Derivação Implícita

Ibmec

Derivadas

Definição

A derivada de uma função f é uma função f' definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

para todo x no domínio de f e onde o limite existir.

A derivada de f no ponto x_0 é a taxa de variação de f em relação a x em x_0.

Exemplo

(a) $f(x) = x^2 + 5$

(b) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x - 1}$

Derivadas

Solução

(a) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{[(x+\Delta x)^2 + 5] - (x^2+5)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 5 - x^2 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2\,x + \Delta x) = 2\,x$$

Ibmec

Derivadas

(b) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2+x+\Delta x}{x+\Delta x-1} - \frac{2+x}{x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-1)(2+x+\Delta x) - (2+x)(x+\Delta x-1)}{\Delta x\,(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\,\Delta x}{\Delta x\,(x+\Delta x-1)(x-1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$= \frac{-3}{(x-1)(x-1)} = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

Derivadas

Suponha que ***f*** e ***g*** são funções deriváveis em ***x***. Sejam ***c*** uma constante e ***r*** um número racional. Então:

(i) $(c)' = 0$

(ii) $(c\, f(x))' = c\, f'(x)$

(iii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(iv) $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

Derivadas

(v) $$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = -c\,\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

(vi) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(vii) $$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Derivadas

Tabela de derivadas

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e r racional.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^r	rx^{r-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Derivadas

Exemplos

Derive:

(a) $f(x) = 3x^5 + 5x^2 - 8x + 1$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(d) $f(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x^3}$

(e) $f(x) = x \sec x$

(f) $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2+1}$

(g) $f(x) = 3\sqrt[3]{x}\ln x$

(h) $f(x) = \log_5(x) + 8\operatorname{arctg} x$

.

Ibmec

Derivadas

Solução

(a) $f(x) = 3x^5 + 5x^2 - 8x + 1$

$$f'(x) = 15x^4 + 10x - 8$$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

$$f'(x) = \cos x \cos x + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Derivadas

(d) $f(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x^3} = 4x^3 - 3x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - \frac{9}{2}x^{1/2} = 12x^2 - \frac{9}{2}\sqrt{x}$

(e) $f(x) = x \sec x$

$$f'(x) = \sec x + x \sec x \,\mathrm{tg} x = \sec x(1 + x\,\mathrm{tg} x)$$

(f) $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(xe^x)'(x^2+1) - xe^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(x^2+1) - xe^x 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

Derivadas

(g) $f(x) = 3\sqrt[3]{x}\ln x = 3x^{1/3}\ln x \Rightarrow f'(x) = 3\frac{1}{3}x^{-2/3}\ln x + 3x^{1/3}\frac{1}{x} = \frac{\ln x + 3}{\sqrt[3]{x^2}}$

(h) $f(x) = \log_5(x) + 8\,\mathrm{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 5} + \frac{8}{1+x^2}$$

Derivadas

Regra da Cadeia

Se ***g*** é uma função derivável em ***x*** e ***f*** é uma função derivável em ***g*(*x*)**, então a função composta ***f* o *g*** é derivável em ***x***, e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Teorema

Se $y = f(u)$ *e* $\frac{dy}{du}$ *existe e se* $u = g(x)$ *e* $\frac{du}{dx}$ *existe, então,* y *é uma função de* x *e*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Derivadas

Exemplos

Derive as funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 7x^3)$

(c) $f(x) = \log_2 \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(d) $f(x) = \log_5 \dfrac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x}$

Derivadas

Solução

(a) $$f(x) = \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{3}x^3(1+x^2)^{-3/2}$$

$$f'(x) = x^2(1+x^2)^{-3/2} + \frac{1}{3}x^3\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-5/2}2x$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} - \frac{x^4}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

Derivadas

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 7x^3)$

$$f'(x) = \cos(\operatorname{tg} 7x^3) \cdot \sec^2 7x^3 \cdot 21x^2$$

(c) $f(x) = \log_2 \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2} \log_2 \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{2}{2\ln 2(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{\ln 2(1-x^2)}$$

Derivadas

(d) $f(x) = \log_5 \dfrac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{arcsen} x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x}{(\operatorname{arcsen} x)^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x}}$$

$$= -\frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{\operatorname{arcsen} x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arcsen} x \cdot \arccos x}$$

Derivadas

Derivada da função

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)} = e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} = e^{v(x)\cdot\ln\, u(x)}$$

$$f'(x) = e^{v(x)\cdot\ln\, u(x)} \cdot \left[v'(x)\cdot\ln\, u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$= e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} \cdot \left[v'(x)\cdot\ln\, u(x) + v(x) + \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$= [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\cdot\ln\, u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$$

Derivadas

Exemplos

Derive as funções:

(a) $f(x) = (\cos\ x)^{x^3}$ (b) $f(x) = (e^{2x})^{\operatorname{cotg} 2x}$

Solução

(a) $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$

$u(x) = \cos\ x$ $v(x) = x^3$

$u'(x) = -\operatorname{sen} x$ $v'(x) = 3x^2$

Derivadas

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right]$$

$$f'(x) = (\cos x)^{x^3} \cdot \left[3x^2 \ln(\cos x) + \frac{x^3(-\operatorname{sen} x)}{\cos x} \right]$$

$$= (\cos x)^{x^3} \cdot [3x^2 \ln(\cos x) - x^3 \operatorname{tg} x]$$

Derivadas

(b) $f(x) = (e^{2x})^{\text{cotg}\, 2x}$

$$u(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2e^{2x}$$

$$v(x) = \text{cotg}\, 2x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -2\,\text{cosec}^2\, 2x$$

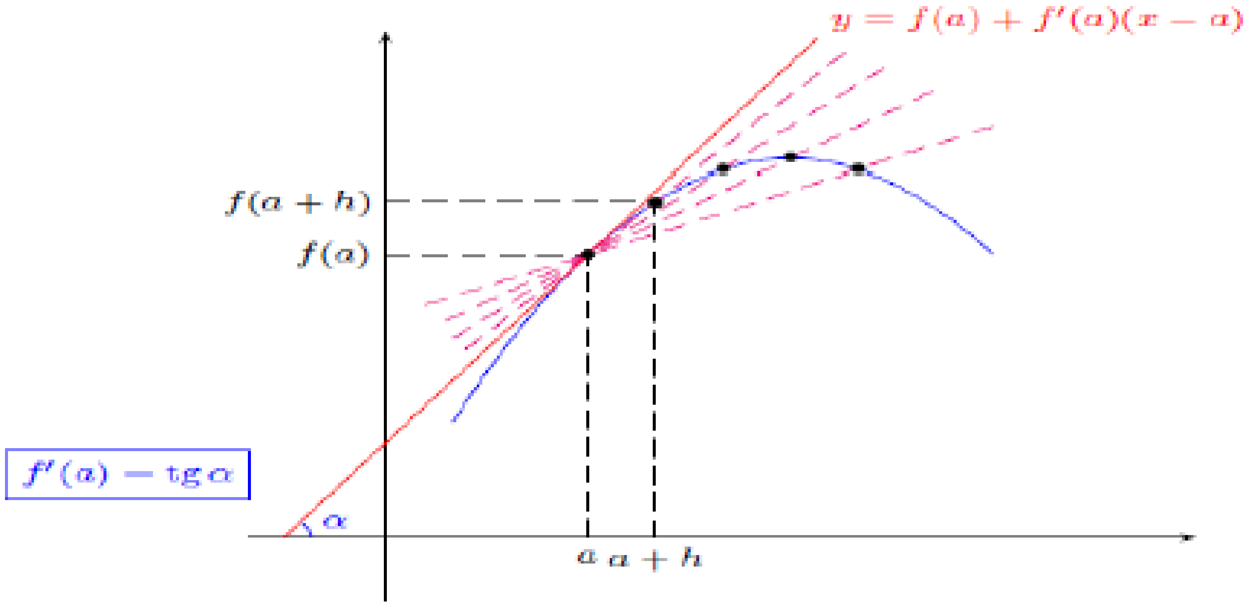
$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \ln\, u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right]$$

$$f'(x) = (e^{2x})^{\text{cotg}\, 2x} \left[-2\text{cosec}^2\, 2x \cdot \ln\, e^{2x} + \frac{\text{cotg}\, 2x \cdot 2 \cdot e^{2x}}{e^{2x}} \right]$$

$$= (e^{2x})^{\text{cotg}\, 2x} [-4x \cdot \text{cosec}^2\, 2x + 2 \cdot \text{cotg}\, 2x]$$

Derivadas
Interpretação geométrica

A reta tangente ao gráfico de uma função *f no ponto (a, f(a)) é a reta de equação*

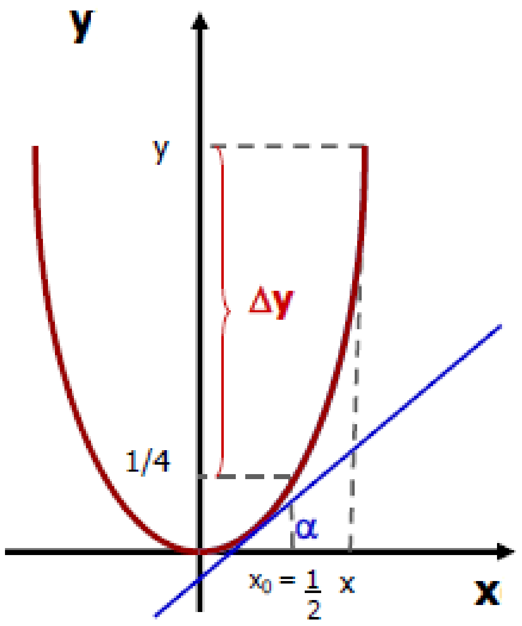


Interpretação geométrica do conceito de derivada

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Derivadas
Interpretação geométrica

Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de **f(x) = x²**, no ponto de abscissa 1/2.



$$y - f(x_0) = f'(x).(x - x_0) \qquad onde:\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$Cálculo\ de\ f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2x$$

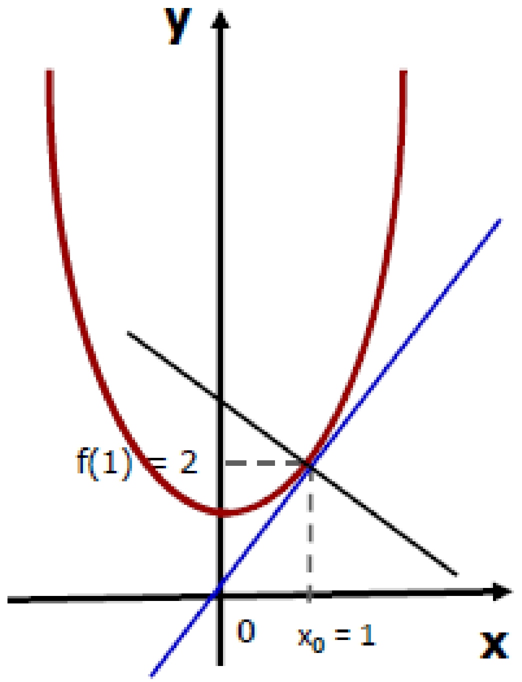
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Portanto:

$$y - \left(\frac{1}{4}\right) = 1.\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x - 4y - 1 = 0$$

Derivadas
Interpretação geométrica

Determinar a equação da reta normal ao gráfico de **f(x) = x² + 1**, no ponto de abscissa 1.



Chamando de m_1 o coeficiente angular da reta normal n, sua equação é:

$$y - f(1) = m_1.(x-1) \qquad (1)$$

onde: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

Cálculo em m_1 :

Como a reta normal é perpendicular à reta tangente, chamando de m o coeficiente angular da tangente, temos:

$$m_1.m = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m} \qquad (2)$$

Assim, para calcularmos m, como

$f'(x) = 2x + 0 = 2x$ e $m = f'(1)$, teremos:

$m = 2.1 = 2$

Substituindo este valor em (2):

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

Levando este valor de m_1 em (1):

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow$$

$$x + 2y - 5 = 0$$

Derivadas

Retas Tangente e Normal

Obtenha as equações das retas tangente e normal à curva

$$y = x^2$$

no ponto de abscissa 1.

Reta tangente: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

Reta normal: $y - y_0 = -(1/m)\,(x - x_0)$

Derivadas

Reta tangente

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

onde

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 2 \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_1 = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

Derivadas

Reta normal

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

onde

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 2 \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_1 = 2$$

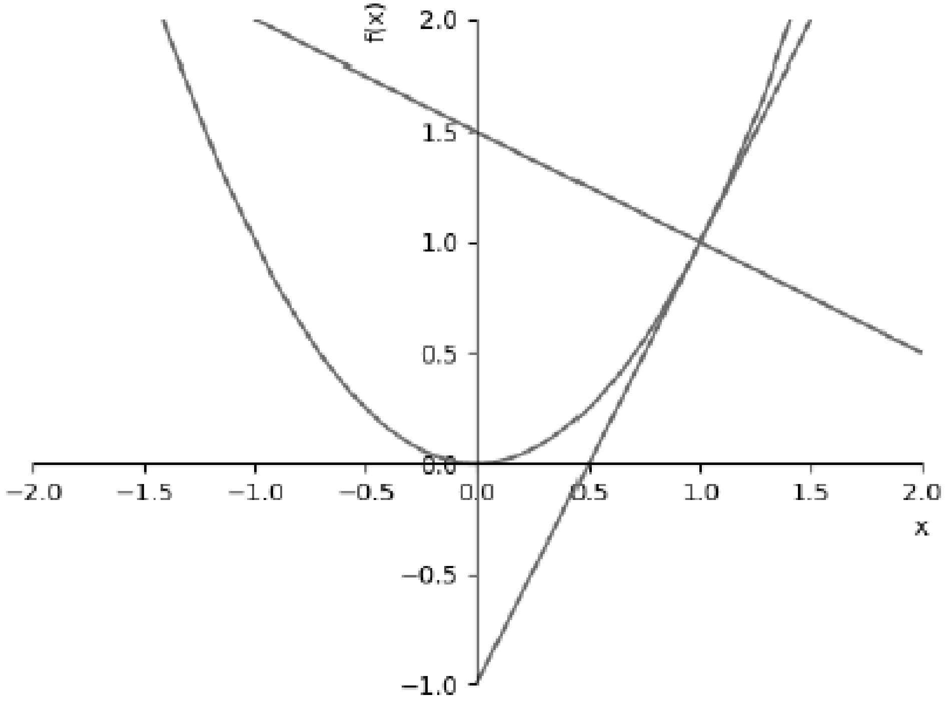
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Derivadas

Reta tangente: $y = 2x - 1$

Reta normal: $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$



Derivadas

Retas Tangente e Normal

Obtenha as equações das retas tangente e normal à curva

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

no ponto de abscissa -2.

Reta tangente: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

Reta normal: $y - y_0 = -(1/m)\,(x - x_0)$

Derivadas

Reta tangente

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

onde

$$x_0 = -2 \qquad y_0 = (e^{-2} + e^{2})/2 \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{-2} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2}$$

$$y - \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2}\,(x + 2)$$

$$y = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2}\,x + \frac{3}{2}\,e^{-2} - \frac{1}{2}\,e^{2}$$

Derivadas

Reta normal

$$y - y_0 = -(1/m)\,(x - x_0)$$

onde

$$x_0 = -2 \qquad y_0 = (e^{-2} + e^2)/2 \qquad m = \frac{dy}{dx}_{-2} = \frac{e^{-2} - e^2}{2}.$$

$$y - \frac{e^{-2} + e^2}{2} = \frac{2}{e^{-2} - e^2}\,(x + 2)$$

$$y = \frac{2}{e^{-2} - e^2}\,x + \frac{4}{e^{-2} - e^2} + \frac{e^{-2} + e^2}{2}$$

Derivadas

Derivadas de Ordem Superior

A derivada da derivada de $y = f(x)$ é chamada de derivada segunda de y e é representada por y'' ou $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. De modo análogo, pode-se definir a derivada terceira de y, representada por y''' ou $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, e assim por diante; representa-se a derivada de ordem n de y por $y^{(n)}$ ou $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Ibmec

Derivadas

Exemplo

Calcule as derivadas sucessivas:

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x - 7$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x + 6$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$f^{iv}(x) = 72$ ... $f^{(n)}(x) = 0, \; n \geq 5$

Derivadas

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$$

$$f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \ldots \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Derivadas

Derivação Implícita

Suponha que a equação $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função derivável de x, ou seja, existe $y = f(x)$ derivável tal que $F(x, f(x)) = 0$. Para calcular y', derive a equação dada em relação a x, usando a regra da cadeia, e explicite y' na equação resultante.

Exemplo

Determine $y'(x)$:

(a) $xy = 8y^2 + x$

(b) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 6$

Derivadas

Solução

(a) $xy = 8y^2 + x$

$$y + xy' = 16yy' + 1 \quad \Rightarrow \quad y'(x - 16y) = 1 - y$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1 - y}{x - 16y}$$

Derivadas

(b) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 6$

$$\frac{y - xy'}{y^2} - \frac{y'x - y}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2y - x^3y' = y'xy^2 - y^3$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x^2y + y^3}{xy^2 + x^3}$$