

Table des matières

1	Un seul actif et une seule période	2
1.1	Méthode naïve	2
1.1.1	Dynamique de l'actif	2
1.1.2	Résultats de l'algorithme naïf	3
1.2	Méthode raffinée	3
1.2.1	Pont Brownien : Définition et Probabilité de Franchissement	3
1.2.2	Résultats de l'algorithme raffiné	4
1.2.3	Convergence des deux méthodes	4
2	Un seul actif et plusieurs périodes	5
2.1	Résultats des algorithmes	5
2.2	Comparaison des méthodes	6
2.3	Chocs des paramètres	6
2.3.1	Analyse des paramètres r et σ , $T = 1$	7
2.3.2	Analyse des paramètres r et σ , $T = 10$	8
2.4	La sensibilité de la PDD	8
2.4.1	Vega	9
2.4.2	Rho	10
2.4.3	Delta	11
3	Plusieurs actifs	12
3.1	Construction du portefeuille	12
3.1.1	La corrélation des actifs	12
3.2	Méthode model point (S_t^0) une seule période	13
3.2.1	paramètres prix initial et prix d'acquisition	13
3.2.2	Paramètre volatilité	13
3.2.3	Résultats	13
3.3	Méthode ligne à ligne	14
3.3.1	Décomposition Cholesky	14
3.3.2	Comparaison des résultats	14
4	Conclusion	16
4.1	Limites des modèles	16
4.2	En terme d'application	17
	Annexe	18

Introduction

La Provision pour Dépréciation Durable (PDD) constitue un outil essentiel dans la gestion actif-passif (ALM) des institutions d'assurance. Elle vise à anticiper les pertes de valeur durables des actifs, en particulier dans les scénarios où la valeur de marché d'un actif reste significativement inférieure à sa valeur d'acquisition sur une période prolongée. Ce projet s'inscrit dans une démarche d'estimation et de quantification de la PDD, tout en explorant la pertinence d'un *model point* pour simplifier l'agrégation des actifs.

Le calcul de la PDD repose sur la dynamique d'un actif $S = (S_t)_{t \geq 0}$ modélisé sous une mesure neutre au risque \mathbb{Q} par une équation de type Black-Scholes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t,$$

où r est le taux sans risque, σ la volatilité et W_t un mouvement brownien.

La PDD est définie comme l'espérance sous \mathbb{Q} d'une perte conditionnelle calculée pour chaque période, telle que :

$$\lambda_t(r, \sigma, S_a, S_0) = (S_a - S_{t+1})^+ \mathbb{I}_{\{S_{t+1} \leq \alpha S_a\}} \mathbb{I}_{\{\sup_{u \in]t-1/2, t]} S_u \leq S_a\}},$$

avec S_a la valeur d'acquisition, $\alpha \in [0, 1]$ un seuil critique et t une période discrète. La PDD totale sur T périodes s'exprime alors comme :

$$\text{PDD}_T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t(r, \sigma, S_a, S_0) \right].$$

Les objectifs principaux de ce projet sont :

- Estimer la PDD pour différents scénarios à l'aide de simulations Monte-Carlo.
- Comparer deux méthodes de simulation (naïve et raffinée) basées respectivement sur des schémas d'Euler et des ponts browniens.
- Étudier la sensibilité de la PDD aux paramètres clés r , σ , et S_0 .
- Évaluer l'efficacité d'un *model point* pour représenter un portefeuille diversifié d'actifs.

En combinant techniques numériques et modèles stochastiques, ce projet apporte des outils pour une gestion optimisée des risques financiers en assurance.

Chapitre 1

Un seul actif et une seule période

1.1 Méthode naïve

1.1.1 Dynamique de l'actif

L'énoncé du projet propose d'utiliser des schémas de type Euler-Maruyama ou Milstein. Cependant, nous avons choisi d'exploiter la solution exacte de l'équation différentielle stochastique (EDS).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace probabilisé, $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous \mathbb{Q} et $(S_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire d'un actif. Sous \mathbb{Q} , la dynamique de S s'écrit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t,$$

où r est le taux sans risque, σ la volatilité, et W_t un mouvement brownien.

En réécrivant l'EDS pour $\ln(S_t)$ et en appliquant Itô, nous avons :

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} d\langle S \rangle_t = \frac{1}{S_t} (S_t(r dt + \sigma dW_t)) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t.$$

Par intégration sur $[0, t]$, la solution explicite de l'EDS est :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t \implies S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

Pour des instants discrétisés t_k et t_{k-1} avec $t_k > t_{k-1}$, la dynamique discrète est donnée par :

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_k\right),$$

où $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ et $\Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

1.1.2 Résultats de l'algorithme naïf

Résultats de la simulation PDD naïve	
Nombre de simulations (N)	10 000
Durée de la période (T)	1 an(s)
Pas de temps (dt)	0.000100 an(s)
Nombre de pas dans la discrétisation	10 000
PDD (méthode naïve)	10.5226
Probabilité de dépréciation (naïve)	0.252700

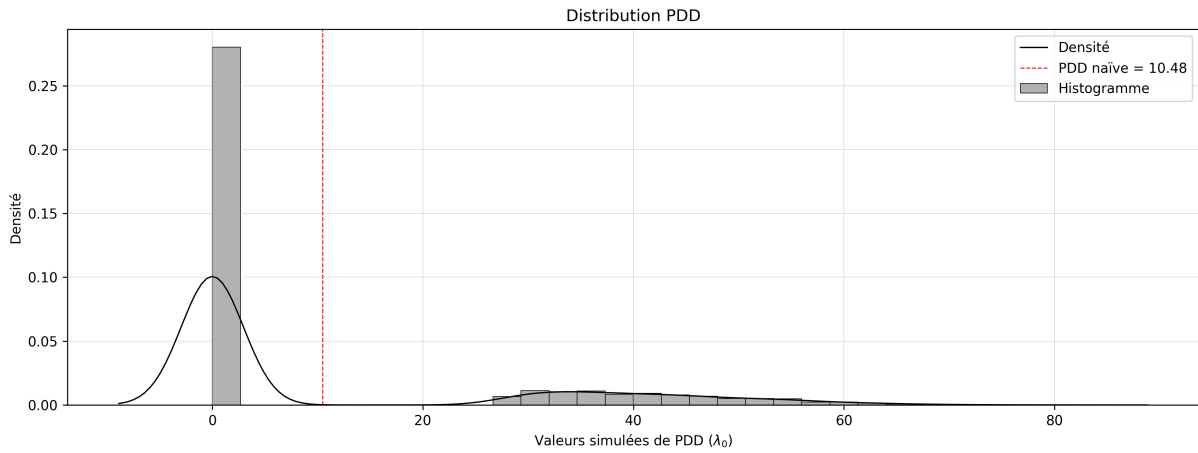


FIG. 1.1 : Distribution PDD

1.2 Méthode raffinée

1.2.1 Pont Brownien : Définition et Probabilité de Franchissement

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Le pont brownien $(Z_t^{a,b})_{t \in [t_1, t_2]}$ est défini par :

$$Z_t^{a,b} = W_t + \frac{b - W_{t_2}}{t_2 - t_1}(t - t_1),$$

où W_t est un mouvement brownien standard sur $[t_1, t_2]$, avec $Z_{t_1}^{a,b} = a$ et $Z_{t_2}^{a,b} = b$.

Probabilité de franchissement d'une barrière

$$P\left(\max_{t \in [t_1, t_2]} Z_t^{a,b} > M\right) = P\left(\max_{t \in [t_1, t_2]} W_t > M \mid W_{t_1} = a, W_{t_2} = b\right) = \exp\left(-\frac{2(a - M)(b - M)}{t_2 - t_1}\right).$$

Démonstration : Voir Annexe

1.2.2 Résultats de l'algorithme raffiné

Résultats de la simulation PDD raffinée	
Nombre de simulations (N)	10 000
Durée de la période (T)	1 an(s)
Pas de temps (dt)	0.000100 an(s)
Nombre de pas dans la discrétisation	10 000
PDD (méthode raffinée)	11.0006
Probabilité de dépréciation (raffinée)	0.264100

1.2.3 Convergence des deux méthodes

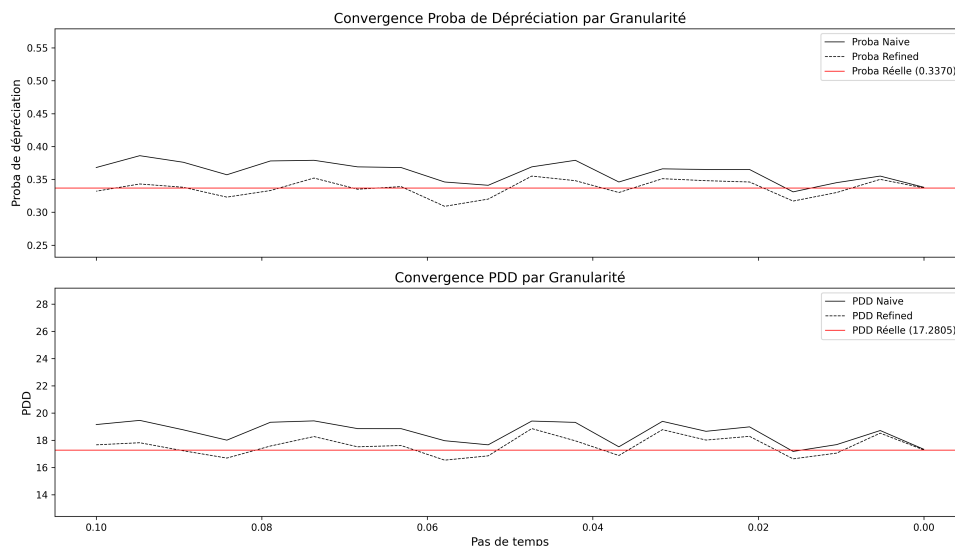


FIG. 1.2 : Convergence des méthodes naïve et raffinée

Remarque et interprétation :

On observe sur ce graphique que plus le pas de temps est grand, plus la PDD calculée avec la méthode naïve est surévaluée. Ce phénomène s'explique mathématiquement par la condition $\sup_{u \in]\frac{1}{2}, 1]} S_u \leq S_a$, qui peut être mal évaluée dans le modèle naïf lorsque le prix de l'actif évolue très près de la barrière durant les six derniers mois de l'exercice.

Chapitre 2

Un seul actif et plusieurs périodes

2.1 Résultats des algorithmes

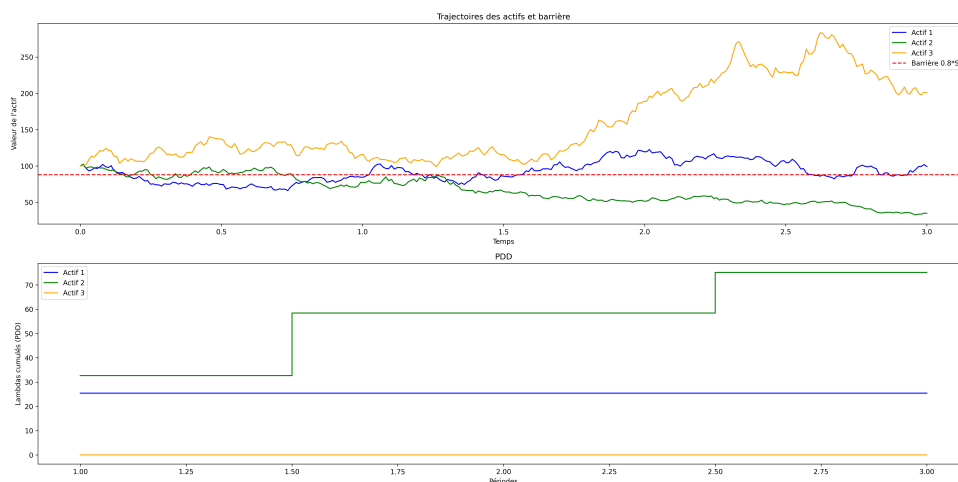


FIG. 2.1 : Simulation $T = 3$

Résultats pour chaque période :

Nombre de simulations (N) : 1000		
Durée de la période (T) : 10 an(s)		
Pas de temps (dt) : 0.010000 an(s)		
Nombre de pas dans la discrétisation : 30		
Période	PDD naïve	PDD raffinée
1	12.6040	12.2303
2	21.0136	20.7517
3	27.9692	27.7734
4	33.8231	33.6399
5	38.1381	38.0540
6	41.6393	41.5811
7	44.9441	44.8367
8	47.6907	47.6328
9	49.9871	49.8946
10	52.1190	52.0829

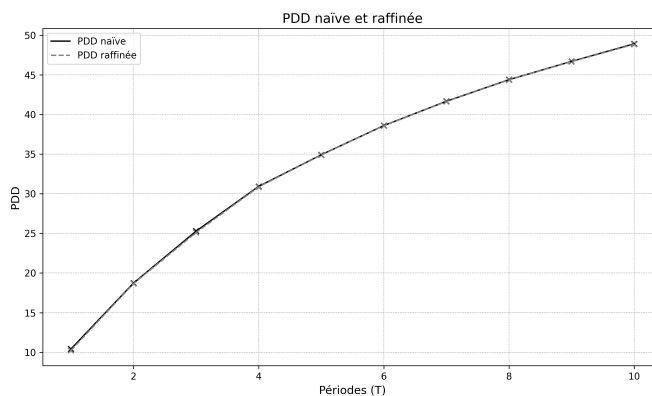


FIG. 2.2 : Évolution PDD par période

2.2 Comparaison des méthodes

Comme nous avons vu précédemment, la méthode naïve a tendance à surévaluer la PDD. Une mesure intéressante pour comparer l'erreur commise par la version naïve serait d'estimer :

$$\Delta = PDD_{\text{naïve}} - PDD_{\text{raffinée}}$$

La forte variance des estimations rend la mesure difficile à évaluer. Nous avons donc utilisé la fonction *gaussian_filter* pour lisser les graphiques 3D et faciliter les interprétations.

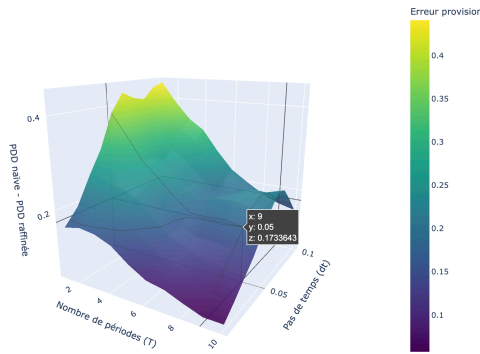


FIG. 2.3 : Erreur algorithme naïf

Interprétation : Le résultat de ce graphique est contre-intuitif et particulièrement intéressant. On observe que l'erreur de prédiction de la méthode naïve augmente avec le pas de temps (comme dans la première partie), mais qu'elle diminue avec le nombre de périodes T.

Ce comportement peut s'expliquer : plus l'actif est projeté sur un horizon temporel lointain, plus sa distribution s'étale (variance plus élevée), plus il y a de chances qu'il s'éloigne de la barrière, ce qui réduit la fréquence des erreurs dues à la discrétisation.

2.3 Chocs des paramètres

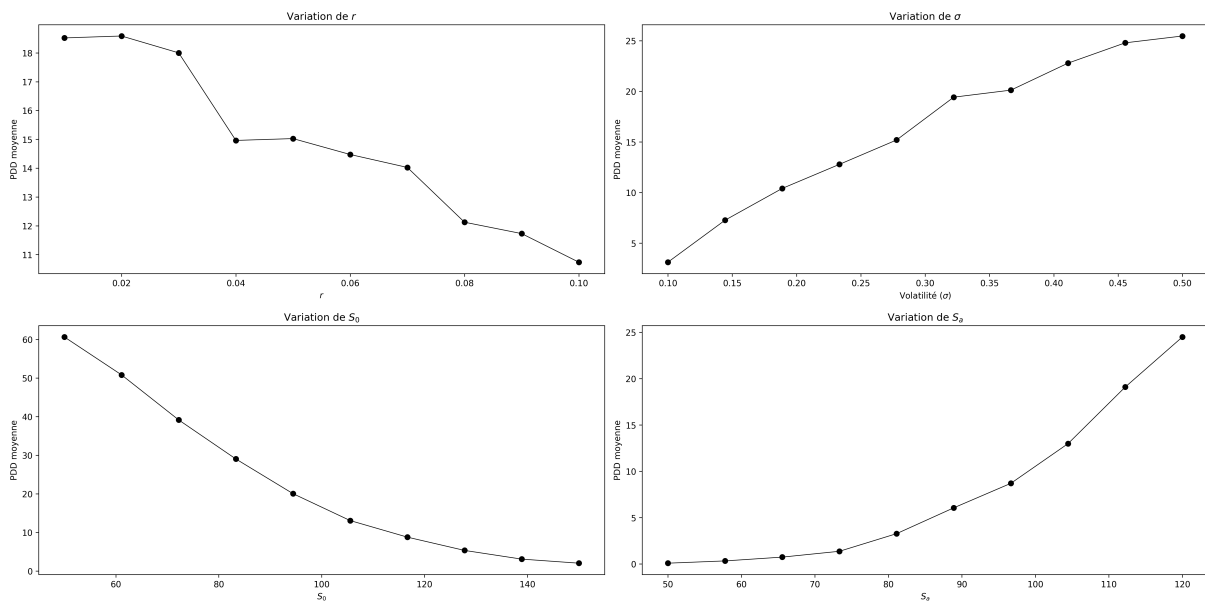


FIG. 2.4 : Chocs des paramètres

Interprétation :

- **Le taux sans risque r** : On remarque que la PDD est une fonction décroissante de r . Sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , les actifs ont un rendement moyen espéré égal au taux sans risque. Ainsi, plus le taux sans risque r augmente, plus l'espérance des actifs s'accroît. Par conséquent, les probabilités d'observer une dépréciation diminuent.
- **La volatilité σ** : On remarque que la PDD est une fonction croissante de σ . Plus la volatilité d'un actif est élevée, plus sa distribution est étalée, ce qui augmente la densité de probabilité sous la barrière, entraînant une probabilité de dépréciation plus élevée.
- **Prix initial S_0** : La relation est décroissante, car plus le prix initial est élevé, plus la trajectoire s'éloigne de la barrière (qui ne dépend que de S_a).
- **Prix d'acquisition S_a** : La relation est croissante, car, au contraire, l'augmentation de S_a rapproche S_0 de la barrière, augmentant ainsi les chances de dépréciation.

2.3.1 Analyse des paramètres r et σ , $T = 1$

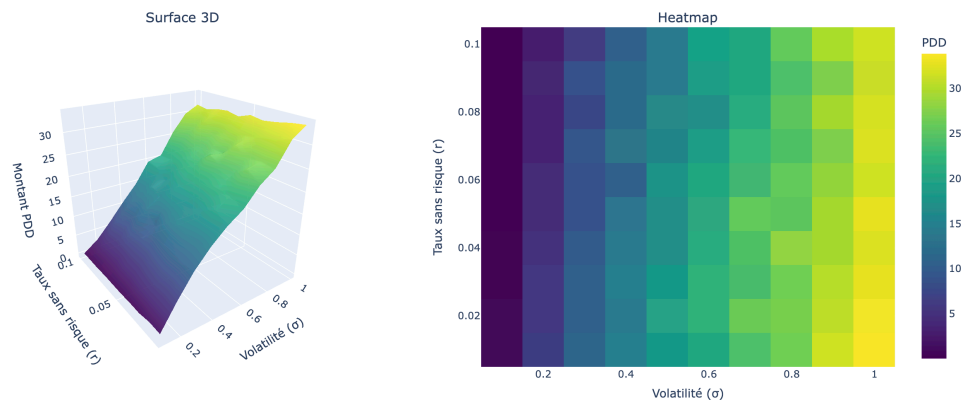


FIG. 2.5 : Analyse bivariée r et σ , $T = 1$

Interprétation : Les résultats précédents sont confirmés. Toutefois, ce graphique met en évidence que la PDD est significativement plus sensible à un choc de volatilité qu'à un choc de taux sans risque.

2.3.2 Analyse des paramètres r et σ , $T = 10$

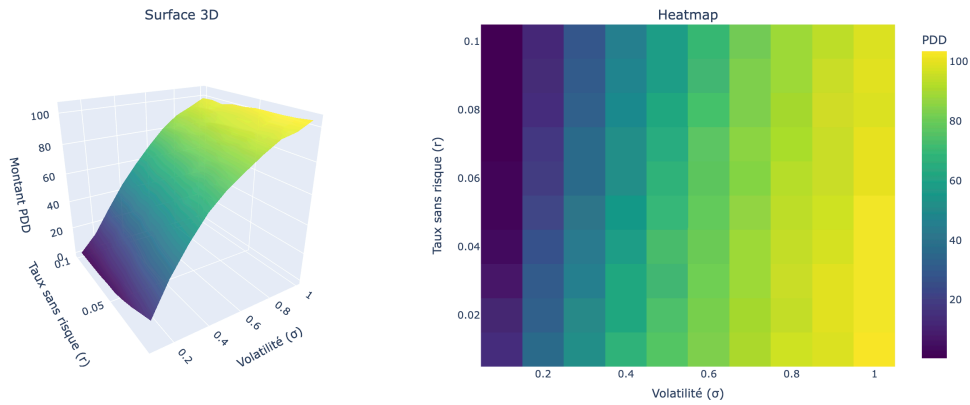


FIG. 2.6 : Analyse bivariée r et σ , $T = 10$

Interprétation : Comme précédemment, on observe une sensibilité accrue de la PDD à la volatilité. Cependant, ce graphique met également en évidence une légère différence dans la croissance de la courbe : la PDD apparaît légèrement plus convexe par rapport à la variable de volatilité. Cette convexité traduit une sensibilité plus importante aux variations de volatilité lorsque T est élevé.

2.4 La sensibilité de la PDD

Pour estimer les dérivées partielles de notre fonction numérique, nous avons choisi d'utiliser la méthode des différences finies centrées. L'intérêt principal de cette méthode est de limiter la variance de l'estimateur par rapport à une méthode de différences finies classique.

$$\frac{\partial PDD}{\partial x} \approx \frac{PDD(x+h) - PDD(x-h)}{2h}.$$

Le choix de h est crucial. Il est nécessaire que h soit suffisamment petit pour approcher une variation infinitésimale, cependant pour une variation trop petite, notre estimateur risque de capter les variations de l'estimateur PDD et non les variations liées à la variable étudiée.

2.4.1 Vega

$$\text{Vega} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)]$$

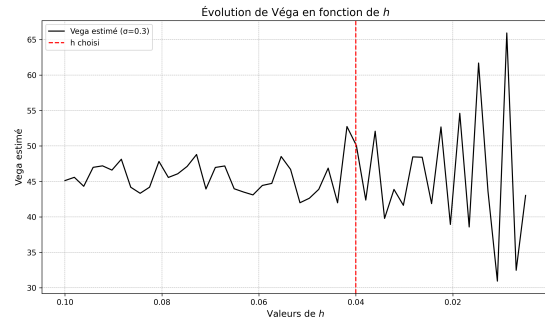


FIG. 2.7 : h optimal

Ici, on remarque que pour un h inférieur à 4%, la variance de l'estimateur devient relativement élevée. Nous allons donc construire notre estimateur comme :

$$\frac{\partial \text{PDD}}{\partial \sigma} \approx \frac{\text{PDD}(r, S_0, \sigma + 4\%) - \text{PDD}(r, S_0, \sigma - 4\%)}{2 \cdot 4\%}.$$

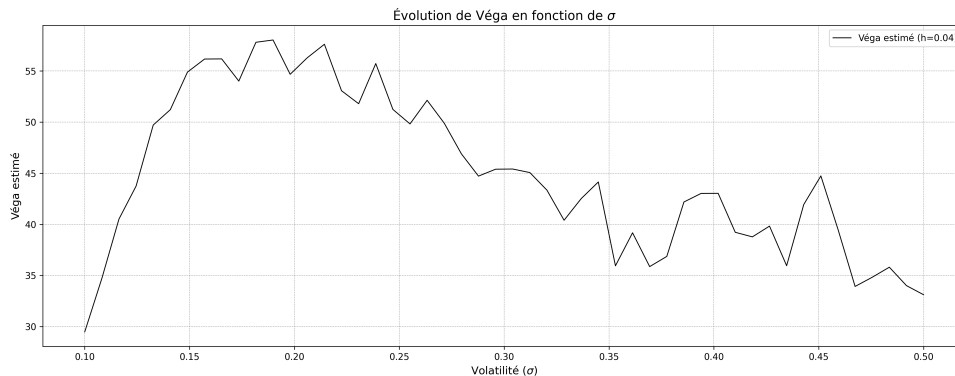


FIG. 2.8 : Vega

Remarque et interprétation :

On peut dans un premier temps dire que la grecque reste positive pour toutes les valeurs de σ , ce qui confirme les résultats précédents : la volatilité est une fonction croissante de la PDD.

On remarque cependant que la grecque Vega n'est pas monotone en fonction de la volatilité de l'actif. On observe d'abord une relation croissante pour la plage de volatilité $[10\%, 20\%]$, suivie d'une décroissance sur la plage $[20\%, 50\%]$.

Les actifs présentant une volatilité autour de 20% sont ceux pour lesquels la PDD est la plus sensible à une variation de σ .

2.4.2 Rho

$$\text{Rho} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)]$$

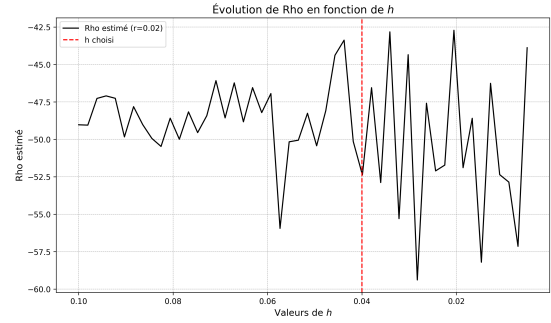


FIG. 2.9 : h optimal

Ici, on remarque que pour un h inférieur à 4%, la variance de l'estimateur devient relativement élevée, même pour un nombre d'itérations Monte Carlo très important. Ce résultat est légèrement gênant, car une variation de 4% représente une fluctuation considérable pour un taux sans risque.

$$\frac{\partial \text{PDD}}{\partial r} \approx \frac{\text{PDD}(r + 4\%, S_0, \sigma) - \text{PDD}(r - 4\%, S_0, \sigma)}{2 \cdot 4\%}.$$

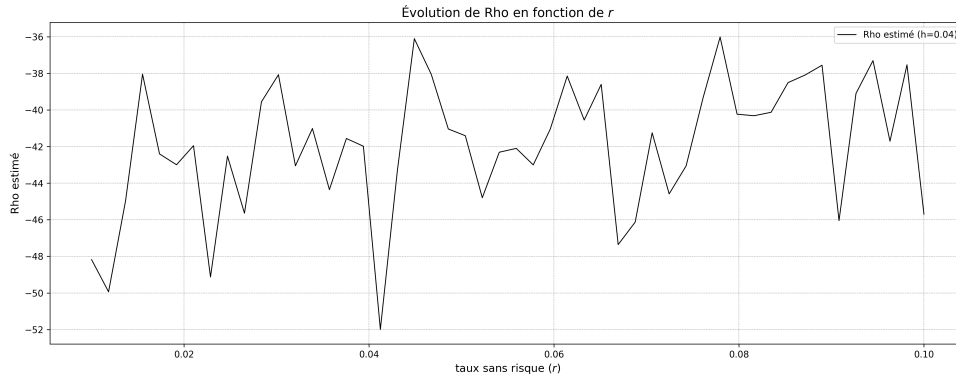


FIG. 2.10 : Rho

Remarque et interprétation :

On remarque ici que le signe de la grecque est clairement négatif pour l'ensemble de la plage de r , ce qui confirme également les résultats précédents. La PDD est une fonction décroissante du taux sans risque r .

On peut également remarquer que la grecque est très légèrement croissante selon r , ce qui est intuitif car une petite variation de taux sera moins significative dans un contexte économique où les taux sont déjà élevés.

2.4.3 Delta

$$\text{Delta} = \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0)]$$

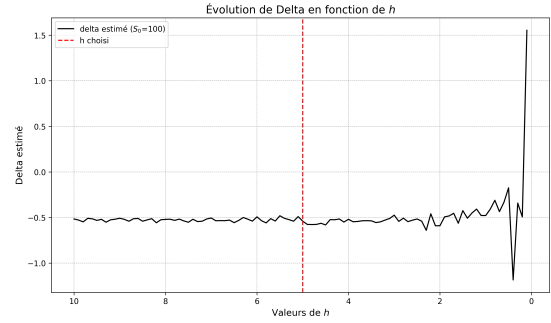


FIG. 2.11 : h optimal

Ici, on remarque que pour un h inférieur à 2, la variance de l'estimateur devient relativement élevée. Nous avons donc choisi $h = 5$ par précaution.

$$\frac{\partial \text{PDD}}{\partial S_0} \approx \frac{\text{PDD}(r, S_0 + 5, \sigma) - \text{PDD}(r, S_0 - 5, \sigma)}{2 \cdot 5}.$$

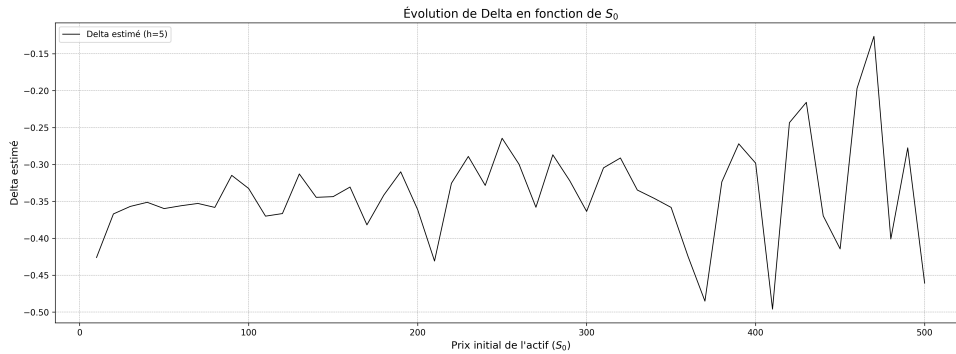


FIG. 2.12 : Delta

Remarque et interprétation :

Ce résultat confirme les analyses précédentes (signe négatif), sans fournir d'informations supplémentaires particulières sur la monotonie (Γ faible).

Chapitre 3

Plusieurs actifs

3.1 Construction du portefeuille

Notations :

- $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^{10})$ représente les actifs du marché.
- $S_a = (S_a^1, \dots, S_a^{10})$ représente le prix d'acquisition des actifs.
- $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^{10})$ représente le prix initial des actifs.
- $\lambda = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$ représente le vecteur des coefficients pour chaque actif.
- $S_t^0 = \lambda^T S_t$ représente la valeur du portefeuille au temps t .
- $w_{t,i} = \frac{\lambda_i S_t^i}{S_t^0}$ représente le poids de l'actif i au temps t .
- $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{10})$ représente le vecteur des volatilités.
- $\rho_{i,j}$ représente les corrélations entre l'actif i et j .
- Σ représente la matrice de covariance.
- Γ représente la matrice de corrélation.

3.1.1 La corrélation des actifs

D'après l'énoncé :

- $\forall i \in \{1, \dots, 10\}, \sigma_i \sim \mathcal{U}[0.1, 0.5]$
- $\forall i, j \in \{1, \dots, 10\}, \rho_{ij} = \mathbf{1}_{\{i=j\}} + u_{ij} \mathbf{1}_{\{i \neq j\}}, \text{ où } u_{ij} \sim \mathcal{U}[0, 1]$

On peut alors construire la matrice Σ avec la relation :

$$\Sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

Pour la suite du projet, il est nécessaire d'avoir : $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$

$$\text{où } S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T A x \geq 0\}.$$

Cette condition n'est pas compatible avec la distribution proposée dans l'énoncé. En dimension 10, seulement 0,1 % des matrices respectent cette condition. Pour simplifier la suite du projet, nous avons donc forcé cette condition lors de la simulation de nos corrélations. (Condition sur les valeurs propres de Σ)

En pratique, si Σ avait été imposée, nous aurions ajouté une perturbation (minimale) pour la rendre définie positive.

3.2 Méthode model point (S_t^0) une seule période

3.2.1 paramètres prix initial et prix d'acquisition

$$S_0^0 = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i S_0^i = \lambda^\top S_0 \quad S_a^0 = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i S_a^i = \lambda^\top S_a$$

3.2.2 Paramètre volatilité

Soit (r_t^i) les rendements de l'actif i au temps t , on utilise une approximation par rendements arithmétiques pour obtenir une formule fermée :

$$\begin{aligned} V(r_t^0) &= V\left(\frac{S_t^0 - S_{t-1}^0}{S_{t-1}^0}\right) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} \lambda_i (S_t^i - S_{t-1}^i)}{S_{t-1}^0}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=1}^{10} \frac{\lambda_i S_{t-1}^i}{S_{t-1}^0} \cdot \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}\right) = V\left(\sum_{i=1}^{10} w_t^i \cdot r_t^i\right) = V(w_t^\top r_t) = w_t^\top \text{Cov}(r_t) w_t. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_t^0 = \sqrt{V(r_t^0)} = \sqrt{w_t^\top \text{Cov}(r_t) w_t}.$$

3.2.3 Résultats

Paramètres agrégés du modèle point	
S_0 agrégé	1438.44
S_a agrégé	1663.61
Volatilité agrégée	0.2117
Résultats de la simulation	
Nombre de simulations (N)	10000
Durée de la période (T)	1 an(s)
Pas de temps (dt)	0.010000 an(s)
Nombre de pas dans la discrétisation	100
PDD1 (totale)	156.0756
Probabilité de dépréciation	27.20%

3.3 Méthode ligne à ligne

3.3.1 Décomposition Cholesky

Pour toute matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure L telle que :

$$A = LL^\top,$$

Application aux vecteurs gaussiens (C.f cours M. THOMAS)

Le vecteur R_t des rendements logarithmiques est un vecteur gaussien. Par définition, R_t s'écrit :

$$R_t = \mu_t + LZ_t,$$

où :

- $R_t = (\ln(\frac{S_t^1}{S_{t-1}^1}), \dots, \ln(\frac{S_t^{10}}{S_{t-1}^{10}}))$
- $\mu_t = ((r - \frac{\sigma_1^2}{2}) \cdot t, \dots, (r - \frac{\sigma_{10}^2}{2}) \cdot t)$ est l'espérance de R_t ,
- L vérifie $\Sigma = LL^\top$, avec Σ la matrice de covariance de R_t ,
- $Z \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur dont les composantes sont des variables normales centrées réduites indépendantes ($Z_i \sim \mathcal{N}(0, t)$).

Comme dans notre exemple $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$, la décomposition de Cholesky est alors unique et L représente donc cette décomposition (racine carrée de Σ).

3.3.2 Comparaison des résultats

Pas de temps = 0.01		
Itérations Monte Carlo = 1000		
Période	PDD (Ligne à ligne)	PDD (Modèle point)
Période 1	187.58	144.55
Période 2	313.35	249.73
Période 3	404.18	317.10
Période 4	471.08	371.99
Période 5	522.31	419.73
Période 6	567.39	457.52
Période 7	607.13	492.61
Période 8	642.17	519.07
Période 9	675.94	547.87
Période 10	705.32	573.22

TAB. 3.1 : Comparaison des PDD (Ligne à ligne vs Modèle point)

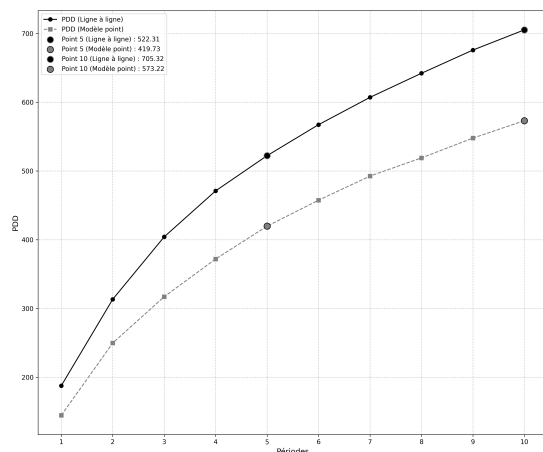


FIG. 3.1 : Comparaison des estimations

Remarques et interprétations :

On observe clairement que **dans nos simulations** : $\sum_{i=1}^n \text{PDD}_i \geq \text{PDD}_{\text{agrégée}}$

Autrement dit, la somme des dépréciations individuelles est supérieure ou égale à la dépréciation des actifs agrégés. Il s'agit d'un mécanisme de compensation et d'absorption de la PDD au sein du portefeuille agrégé. Les actifs ayant un rendement positif peuvent, potentiellement, compenser les pertes venant d'actifs sous-performants.

On peut expliquer mathématiquement ce phénomène en réécrivant notre λ_0 comme :

$$\lambda_0(r, \sigma, S_a, S_0, \alpha, s) = [\max(\alpha S_a - S_1, 0) + (1 - \alpha) S_a \cdot \mathbf{1}_{S_1 < \alpha S_a}] \cdot \mathbf{1}_{\sup_{u \in [1-s, 1]} S_u \leq S_a}.$$

On retrouve ici l'expression du *payoff* d'une option exotique avec une condition *past dependent* (dépendance au passé) sur les s derniers instants de l'actif.

Si on retire la condition *past dependent* et l'option barrière, on retrouve l'expression classique d'une option *put*, qui admet des propriétés de convexité grâce à la fonction max. En effet, la convexité implique :

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, 0 \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \max(x_i, 0),$$

où les λ_i sont des poids satisfaisant $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Cependant, même si l'inégalité $\sum_{i=1}^n \text{PDD}_i \geq \text{PDD}_{\text{agrégée}}$ semble vraie, **elle ne l'est pas dans le cas général**, à cause de la condition $\mathbf{1}_{\sup_{u \in [1-s, 1]} S_u \leq S_a}$.

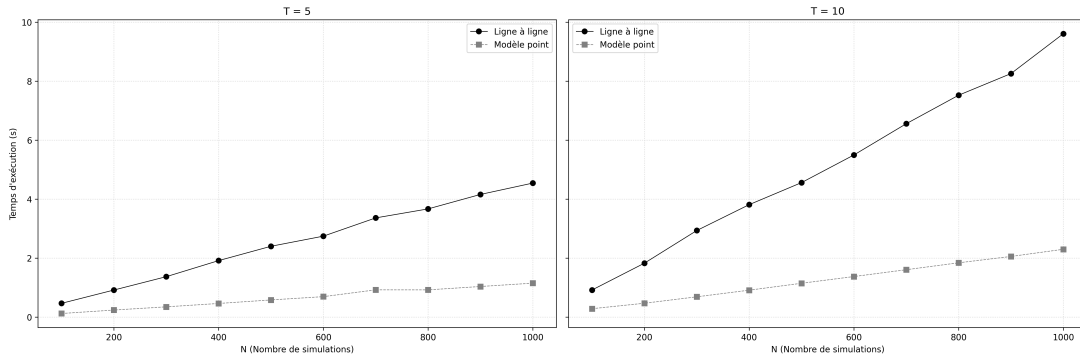


FIG. 3.2 : Comparaison temps de calcul

Remarque : Le résultat suivant est cohérent. La complexité de l'algorithme provient principalement du nombre de simulations Monte Carlo effectuées, ainsi que de la génération des variables aléatoires nécessaires à chaque itération. Pour l'algorithme "ligne à ligne", il est important de noter que chaque itération nécessite la simulation de 10 fois plus de variables aléatoires. De plus, cet algorithme manipule des objets de dimension plus élevée, ce qui entraîne une surcharge computationnelle supplémentaire. Par conséquent, son temps d'exécution est naturellement plus long.

Chapitre 4

Conclusion

4.1 Limites des modèles

Méthode ligne à ligne :

Les limites du modèle ligne à ligne utilisé peuvent se retrouver dans ses hypothèses trop restrictives. De nombreuses généralisations peuvent être ajoutées à ce modèle. Dans un premier temps, certains paramètres sont supposés constants, comme la volatilité ou le taux sans risque. Une volatilité constante n'est peut-être pas spécialement gênante dans notre approche, cependant l'intégration d'un modèle de taux ou la construction d'une courbe de taux pourraient s'avérer pertinentes pour améliorer la précision des estimations et pour actualiser les pertes dans nos simulations.

De plus, certains paramètres sont également supposés fixes dans ce modèle, comme $\alpha = 0.75$ ou encore $\sigma = \frac{1}{2}$. Il aurait pu être intéressant d'étudier la sensibilité de notre PDD à ces paramètres et d'examiner la relation qui les relie. (C.f. *Some characteristics of an equity security next-year impairment*, Azzaz, J., Loisel, S., Thérond, P. E. (2015))

Méthode model point :

La méthode *model point* est également concernée par les remarques ci-dessus. On peut également noter que, comme mentionné précédemment, sa capacité à fidèlement estimer la PDD d'un portefeuille d'actions peut être remise en question, même si elle s'avère plus efficace en termes de temps de calcul. Par ailleurs, l'appréciation des actifs générant une performance excédentaire est intégrée dans l'évaluation, ce qui contribue à réduire la perte globale du portefeuille ainsi que celle des actifs ayant subi une dévalorisation.

On peut supposer que dans un contexte de portefeuille obligataire, et en faisant abstraction des notions de spread et de liquidité, l'ensemble des actifs dépend directement du taux sans risque, présentant ainsi une corrélation positive relativement forte. Dans ce cas, l'utilisation d'un *model point* pour estimer des indicateurs ALM peut s'avérer plus pertinente.

4.2 En terme d'application

D'après nos premières expériences (encore limitées) dans le monde professionnel et la modélisation ALM. Nous pouvons remarquer que la PDD semble être généralement calculée en ligne à ligne. Les *models points* sont plutôt utilisés pour l'estimation des autres indicateurs ALM (*Net Asset Value*, *Value of In-Force* par exemple).

Le calcul de la PDD peut également atteindre un niveau de détail important. Pour un même titre (i.e., un code ISIN), plusieurs lignes de PDD peuvent être nécessaires en fonction des prix d'acquisition distincts. Par exemple, si un assureur achète Q_1 actions A au prix P_1 et Q_2 actions A au prix P_2 , avec $P_1 \leq P_2$, une modélisation avec une seule ligne de PDD devient problématique si, à la date d'inventaire, le prix de marché P_3 vérifie $P_1 < P_3 < \alpha P_2$. Dans ce cas, la PDD réelle est donnée par $Q_2 \cdot (P_2 - P_3)$, ce qui justifie la création de nouvelles lignes pour chaque prix d'acquisition.

Le calcul de la PDD peut également être fastidieux, notamment pour des actifs détenus via des fonds, nécessitant une transposition des positions, ou pour des actifs non cotés comme l'immobilier, où une expertise est requise pour évaluer la valeur vénale. La complexité est accrue pour des groupes internationaux, car les méthodologies de calcul varient selon les pays (ex : en Belgique, la PDD est calculée à l'euro près).

Enfin, la PDD peut également être un outil de pilotage stratégique, d'où l'importance d'un calcul rigoureux. Par exemple, si une action achetée 100 € est cotée 70 € depuis 6 mois, la dotation de 30 € est enregistrée au passif du bilan. Ce mécanisme peut être utilisé pour générer du résultat : la vente de l'actif permet alors de réaliser un profit équivalent à la PDD dotée.

Annexe

Démonstration : Pont brownien

On définit la barrière M et le temps d'arrêt $\tau_M = \inf\{t \geq 0 : W_t = M\}$.

$$P\left(\max_{u \in [t_1, t_2]} W_u \geq M; W_{t_1} \leq a, W_{t_2} \leq b\right) = P(\tau_M \leq t_2; W_{t_1} - W_{\tau_M} \leq a - M, W_{t_2} - W_{\tau_M} \leq b - M).$$

Comme $W_{t_i} - W_{\tau_M} \stackrel{\text{loi}}{=} W_{\tau_M} - W_{t_i}$, on a :

$$\begin{aligned} &P(\tau_M \leq t_2; W_{t_1} - W_{\tau_M} \leq a - M, W_{t_2} - W_{\tau_M} \leq b - M) \\ &= P(\tau_M \leq t_2; W_{\tau_M} - W_{t_1} \leq a - M, W_{\tau_M} - W_{t_2} \leq b - M). \end{aligned}$$

En inversant les termes, cela équivaut à :

$$P(\tau_M \leq t_2; W_{t_1} \geq 2M - a, W_{t_2} \geq 2M - b).$$

De plus, $\{\tau_M \leq t_2\}$ implique $W_{\tau_M} - W_{t_2} \leq b - M$ lorsque $M > b$, donc :

$$P(\tau_M \leq t_2; W_{t_1} \geq 2M - a, W_{t_2} \geq 2M - b) = P(W_{t_1} \geq 2M - a, W_{t_2} \geq 2M - b) \quad (1)$$

On considère maintenant :

$$P\left(\max_{u \in [t_1, t_2]} W_u \geq M \mid W_{t_1} = a, W_{t_2} = b\right) = \frac{P(\max_{u \in [t_1, t_2]} W_u \geq M; W_{t_1} = a, W_{t_2} = b)}{P(W_{t_1} = a, W_{t_2} = b)}.$$

Pour exprimer ces probabilités avec les densités, on utilise :

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} P(\max_{u \in [t_1, t_2]} W_u \geq M; W_{t_1} \leq a, W_{t_2} \leq b)}{\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} P(W_{t_1} \leq a, W_{t_2} \leq b)}.$$

Par la relation (1), cela devient :

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} P(W_{t_1} \geq 2M - a, W_{t_2} \geq 2M - b)}{\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} P(W_{t_1} \leq a, W_{t_2} \leq b)}.$$

Finalement, en effectuant le rapport des densités, on obtient :

$$P\left(\max_{t \in [t_1, t_2]} Z_t^{a,b} > M\right) = \exp\left(-\frac{2(a - M)(b - M)}{t_2 - t_1}\right).$$