

Table des matières

1	Introduction	1
2	Cadre probabiliste des modèles à intensité	2
2.1	Présentation modèle forme réduite	2
2.2	Modélisation de l'intensité de défaut	3
3	Présentation du CDO	5
3.1	Présentation du portefeuille de dettes	5
3.2	Présentation des tranches	5
4	Calibration des lois marginales	6
4.1	Généralités sur les <i>credit default swap</i>	6
4.2	CDS considérés	7
4.3	Ajustement paramètres	7
5	Corrélation des défauts	9
5.1	Approche Directe	9
5.2	Modèle de Copule Gaussienne à Un Facteur	10
6	Construction du CBO : Approche Monte-Carlo	11
6.1	Définition de la fonction de perte	11
6.2	Calibration de la <i>base correlation</i>	12
6.3	Détermination des taux de coupons	15
7	Comparaison analytique : Approche portefeuille homogène	16

Chapitre 1

Introduction

Une *Collateralized Debt Obligation* (CDO) est un instrument financier issu de la titrisation, permettant de transformer un portefeuille de dettes en tranches négociables sur les marchés. Cette transaction implique des investisseurs et des émetteurs de dettes, avec un intermédiaire appelé *Special Purpose Vehicle* (SPV). Le rôle du SPV est d'acquérir un ensemble d'actifs sous-jacents, tels que des obligations ou des prêts bancaires, détenus par une institution financière. Il restructure ensuite ces actifs en différentes tranches de CDO, adaptées aux préférences des investisseurs en matière de risque et de rendement.

La structuration des tranches suit un principe de hiérarchisation du risque. La tranche *senior*, la plus sécurisée, est prioritaire dans le remboursement et bénéficie du rendement le plus faible. Viennent ensuite une ou plusieurs tranches *mezzanine*, qui offrent un rendement plus élevé en échange d'une exposition accrue au risque de défaut. Enfin, la tranche *equity*, la plus risquée, absorbe les premières pertes du portefeuille sous-jacent mais présente un potentiel de rendement maximal.

Chaque tranche fonctionne de manière similaire à une obligation : l'investisseur verse un capital initial et reçoit des paiements réguliers sous forme de coupons. Le remboursement suit un ordre de priorité strict. Tant que le portefeuille sous-jacent ne subit pas de défauts significatifs, les investisseurs de toutes les tranches perçoivent leurs paiements. Toutefois, en cas de défauts, les pertes sont absorbées en premier par la tranche *equity*, puis par la tranche *mezzanine*, avant d'affecter la tranche *senior*. Ce mécanisme assure une protection aux tranches supérieures, mais accroît la volatilité des rendements pour les investisseurs des tranches inférieures.

L'un des enjeux majeurs de l'analyse des CDO est la détermination du taux de coupon associé à chaque tranche. Ce taux dépend de plusieurs facteurs, notamment la corrélation entre les défauts des actifs sous-jacents, la probabilité de défaut individuelle de chaque emprunteur et la structure globale du portefeuille. La modélisation de ces dynamiques repose sur des outils mathématiques avancés, comme les copules de dépendance et les modèles d'intensité de défaut, afin d'évaluer précisément le risque et d'optimiser la tarification des tranches.

Chapitre 2

Cadre probabiliste des modèles à intensité

Les modèles à intensité stochastique, aussi appelés modèles en forme réduite, constituent un cadre probabiliste dans lequel le défaut de l'emprunteur est modélisé comme un événement soudain et inattendu, en contraste avec les modèles structurels à la Merton. Dans ces modèles, on suppose l'existence d'un processus d'intensité de défaut (ou taux de risque) $(\lambda_t)_{t \geq 0}$, tel que le temps de défaut τ survienne de manière imprévisible.

Autrement dit, conditionnellement à l'information disponible, le défaut est assimilable au saut d'un processus de Poisson dont le paramètre peut varier aléatoirement dans le temps. Ce cadre a été développé dans les années 1990 par de nombreux auteurs, dont Duffie et Singleton, Jarrow et Turnbull, afin de relier directement le risque de défaut aux spreads de crédit observables sur les marchés.

2.1 Présentation modèle forme réduite

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabiliste muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ représentant l'information du marché avant l'occurrence d'un éventuel défaut. Le temps de défaut τ est un temps d'arrêt défini sur Ω .

On définit alors le processus de défaut $H_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$, ainsi que la filtration élargie $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$, où $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(H_u : u \leq t)$ qui contient non seulement l'information "ordinaire" du marché (\mathcal{F}_t) , mais aussi l'information sur l'occurrence éventuelle du défaut jusqu'à t .

Mathématiquement, H_t est une sous-martingale bornée dans \mathbb{G} , donc la décomposition de Doob–Meyer s'applique.

Le théorème de décomposition de Doob–Meyer appliqué à H_t dans la filtration \mathbb{G} garantit l'existence d'un processus \mathbb{G} -prévisible à variations finies A_t , appelé le *compensateur* de H_t , tel que :

$$H_t = M_t + A_t, \tag{2.1}$$

où M_t est une \mathbb{G} -martingale et cette décomposition est unique.

Sous l'hypothèse que A_t est absolument continu par rapport au temps : il existe un processus prévisible λ_t tel que :

$$A_t = \int_0^t \lambda_s \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} ds = \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_s ds.$$

Ainsi, λ_t est la densité instantanée du compensateur aussi appelée l'intensité du défaut.

2.2 Modélisation de l'intensité de défaut

Dans les modèles à intensité, on définit λ_t comme la fonction de hazard (ou taux de défaillance) associée à τ :

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau \leq t + h \mid \tau > t, \mathcal{F}_t),$$

Forme exponentielle

Une conséquence clé de la définition de l'intensité est la formule donnant la probabilité de survie jusqu'au temps t . Soit $S(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$ la fonction de survie. Par définition du taux de hazard, on a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} S(t) = -\lambda(t) S(t)$$

En intégrant cette équation différentielle, et en utilisant la condition initiale $S(0) = 1$, on obtient la formule exponentielle :

$$\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = S(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_s ds \right)$$

Pour faciliter la modélisation informatique (simuler des instants de défauts), il est pertinent de retrouver la formule de survie en considérant une variable aléatoire auxiliaire. En effet, une construction équivalente du temps de défaut consiste à poser :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \lambda_s ds \geq \eta \right\}, \quad (2.2)$$

où η est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, indépendante du processus $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ (rappel \mathcal{F}_t mesurable), c'est-à-dire $\eta \sim \text{Exp}(1)$.

Ainsi, la probabilité de survie jusqu'à l'instant t s'écrit :

$$\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P} \left(\int_0^t \lambda_s ds < \eta \mid \mathcal{F}_t \right) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_s ds \right)$$

Processus d'intensité

Pour conclure cette introduction, nous abordons un modèle d'intensité stochastique pour l'intensité de défaut. Historiquement, le processus CIR (bien connu en modélisation des taux d'intérêt) a été l'une des premières diffusions utilisées pour modéliser une intensité de défaut, en raison de son caractère toujours positif. Cependant, après de nombreux tests, certaines hypothèses théoriques (notamment la condition de Feller) ne sont pas vérifiées dans mon exemple. J'ai donc choisi d'utiliser un processus d'Ornstein-Uhlenbeck plus classique (diffusion gaussienne), dont la dynamique sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} s'écrit :

$$d\lambda_t = k(\theta - \lambda_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien (standard) sous \mathbb{Q} et $k, \theta, \sigma > 0$ sont des paramètres. Les paramètres k et θ représentent respectivement la vitesse de retour à la moyenne et le niveau moyen de long terme de l'intensité, tandis que σ contrôle la volatilité des fluctuations de λ_t .

Remarque : Sous cette dynamique, le processus d'intensité peut théoriquement prendre des valeurs négatives ce qui contredit les hypothèses de la théorie abordée ci dessus. Le processus M_t définit à l'équation (2.1) par $M_t = H_t - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_s ds$ n'est donc plus nécessairement une martingale. (c.f "A Gaussian Term Structure Model of Credit Spreads and Valuation of Credit Spread Options", Kijima and Muromachi, 2001)

Chapitre 3

Présentation du CDO

3.1 Présentation du portefeuille de dettes

On considère ici un portefeuille équipondéré d'obligations d'État zéro coupon de maturité 1 an. Notre produit structuré sera donc un **CBO**. Etant donné qu'il s'agit d'un projet scolaire avec des moyens limités, le nombre d'actif est limité à 5. (en pratique ~ 100)

Les valeurs ci-dessous représentent les *yields to maturity* des différents zéro coupons.

Pays	Brésil	Chine	Inde	A.Saoudite	Australie
Yield to Maturity	14.7%	1.57%	6.70%	1.76%	3.86%

TAB. 3.1 : Cours des obligations zéro coupon le 17/03/2025

Source : <https://www.investing.com>

3.2 Présentation des tranches

On définit les tranches du CBO :

- **Tranche *equity*** : absorbe les premières pertes, [0%, 3%].
- **Tranche Junior** : absorbe les pertes, [3%, 6%].
- **Tranche Mezzanine 1** : absorbe les pertes [6%, 12%].
- **Tranche Mezzanine 2** : absorbe les pertes [12%, 22%].
- **Tranche Senior** : absorbe les pertes [22%, 100%].

Chapitre 4

Calibration des lois marginales

Pour calibrer la dynamique de nos intensités marginales, nous allons naturellement exploiter les données de marché disponibles. L'ajustement des paramètres du modèle doit permettre de refléter au mieux les conditions de marché observées. Nous avons alors décidé d'utiliser les cours disponibles des *credit default swaps* pour effectuer ce calibrage.

4.1 Généralités sur les *credit default swap*

Un *Credit Default Swap* (CDS) est un produit dérivé permettant de transférer le risque de crédit d'une entité sous-jacente entre deux parties. Il fonctionne comme un contrat d'assurance contre le défaut, où un acheteur de protection paie une prime régulière à un vendeur de protection en échange d'un paiement en cas de défaut de l'entité sous-jacente.

Un CDS peut être représenté par deux variables (G, Z) où :

- G est le paiement cumulé effectué pendant la durée du contrat. Il correspond aux primes versées par l'acheteur de protection au vendeur de protection. Nous pouvons le modéliser comme : $G_t = s \cdot t$.
- Z est le paiement effectué en cas de défaut avant la maturité. Si le défaut survient à $\tau \leq T$, le vendeur de protection compense l'acheteur en lui versant un montant correspondant à la perte estimée sur l'actif sous-jacent. Cela est généralement exprimé comme : $Z = 1 - R$, où R est le taux de recouvrement du sous-jacent.

Valorisation du CDS

En appliquant les principes de valorisation sous une mesure risque-neutre \mathbb{Q} , la valeur du contrat est donnée par :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(t, u) dG_u - (1 - R) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} D(t, \tau) \mid \mathcal{F}_t \vee \sigma(H_u : u \leq t) \right]$$

Équilibre et détermination du spread s

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, le spread s à la date initiale vérifie la relation :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(0, u) s \, du - (1 - R) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} D(0, \tau) \right] = 0 \quad (4.1)$$

4.2 CDS considérés

Étant donné que chaque τ suit une dynamique dépendant de trois paramètres, il est important de considérer plusieurs CDS à différentes échéances pour pouvoir identifier les paramètres de notre modèle à intensité.

Les valeurs ci-dessous représentent les cours des Credit Default Swaps (CDS) en **basis points (bps)** pour différentes maturités et pays.

Pays	1 an	2 ans	5 ans	10 ans
Brésil	57.75	80.77	173.83	278.67
Chine	22.99	27.03	47.23	66.78
Inde	24.03	35.70	84.08	92.57
Arabie Saoudite	27.09	34.38	63.20	100.98
Australie	1.47	3.52	10.15	16.24

TAB. 4.1 : Cours des CDS le 09/03/2025

Source : <https://www.cbond.com>

4.3 Ajustement paramètres

En notant que τ suit une dynamique dépendant des paramètres (k, θ, σ) , on introduit la notation $\tau_{k, \theta, \sigma}$ et utilisons la relation (4.1) pour poser le problème d'optimisation suivant :

$$\arg \min_{\theta, k, \sigma} \sum_i \left| \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{T_i} \mathbf{1}_{\{\tau_{k, \theta, \sigma} > u\}} e^{-\int_0^u r_s ds} S_i \, du - (1 - R) \mathbf{1}_{\{\tau_{k, \theta, \sigma} \leq T_i\}} e^{-\int_0^{\tau_{k, \theta, \sigma}} r_s ds} \right] \right|$$

Remarques :

- Afin de simplifier l'évaluation du *discount factor*, le taux d'intérêt est supposé constant et égal à 3%
- On fait également l'hypothèse que le taux de recouvrement $R \sim \text{Beta}(40\%, 26\%)$
- L'espérance est évaluée par simulation de Monte Carlo, ce qui introduit un bruit significatif dans la fonction à optimiser. Il est donc impossible d'effectuer l'optimisation avec des méthodes de différentiation telles que la descente de gradient ou l'algorithme de Newton. J'ai donc utilisé l'algorithme CMA-ES (*Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy*) pour trouver mes paramètres optimaux.

Rappel : Dynamique de l'intensité de τ_i

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, où \mathbb{Q} est une mesure risque-neutre et $\{W_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$ des mouvements browniens corrélés sous \mathbb{Q} :

La dynamique du processus d'intensité $\lambda_i(t)$ est donnée par l'équation :

$$d\lambda_i(t) = k_i (\theta_i - \lambda_i(t)) dt + \sigma_i dW_i(t),$$

Résultat optimisation :

Pays	k_i	θ_i	σ_i
Brésil	$1.27e^{-1}$	$8.74e^{-4}$	$1.50e^{-3}$
Chine	$8.45e^{-1}$	$2.55e^{-4}$	$9.36e^{-7}$
Inde	$6.34e^{-1}$	$4.61e^{-4}$	$1.42e^{-3}$
Arabie Saoudite	$3.23e^{-3}$	$3.16e^{-4}$	$2.24e^{-4}$
Australie	$5.71e^{-1}$	$2.25e^{-4}$	$1.11e^{-6}$

TAB. 4.2 : Paramètres optimisés

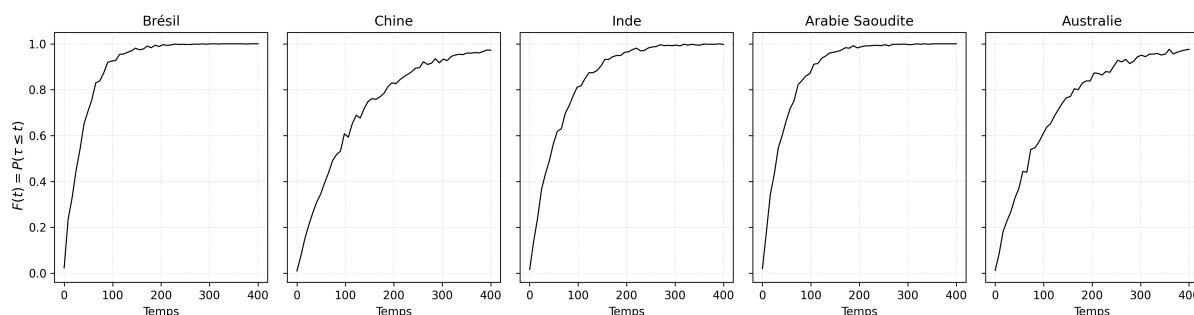


FIG. 4.1 : ECDF : Lois marginales

Chapitre 5

Corrélation des défauts

5.1 Approche Directe

Dans une application directe, nous postulons d'abord qu'une fonction de répartition (marginale univariée) F_i est donnée pour chaque variable aléatoire τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Une fonction de copule particulière C est ensuite choisie afin d'introduire une structure de dépendance appropriée pour le vecteur aléatoire (τ_1, \dots, τ_n) .

La distribution de probabilité conjointe du vecteur aléatoire (τ_1, \dots, τ_n) est donnée par :

$$\mathbb{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)).$$

L'approche basée sur une copule directe présente un inconvénient apparent : elle est essentiellement statique, dans le sens où elle ne tient pas compte du flux d'informations du marché, lequel peut être représenté par une filtration de référence. En particulier, certains phénomènes de dépendance conditionnelle dynamique observés empiriquement, tels que les risques de contagion, sont mal capturés par cette modélisation. Cependant, étant donné que dans un contexte de pricing de CDO nous souhaitons évaluer un dérivé de crédit à un instant $t = 0$, les hypothèses d'une approche directe sont alors considérées comme raisonnables.

5.2 Modèle de Copule Gaussienne à Un Facteur

Nous allons ici utiliser l'approche directe de la copule gaussienne à un facteur, introduite par Li (cf. "On Default Correlation : A Copula Function Approach", 2000) et développée par Laurent et Gregory (cf. "Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas", 2003). Cette approche correspond à la structure de dépendance sous-jacente à CreditMetrics et a été largement adoptée comme modèle de référence pour le pricing des CDO dans le cadre de la gestion du risque de crédit.

Définissons :

$$X_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} V_i,$$

où V (part systémique du risque) et $(V_i)_{i \geq 1}$ (part idiosyncratique du risque, *firm-specific*), sont des variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes sous \mathbb{Q} , et où le paramètre de corrélation ρ appartient à $(-1, 1)$. Soit C la fonction de copule correspondant à la distribution du vecteur (X_1, \dots, X_n) , c'est-à-dire que C est donné par l'expression suivante, pour tout $v_1, \dots, v_n \in [0, 1]$:

$$C(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{Q}(X_1 < N^{-1}(v_1), \dots, X_n < N^{-1}(v_n)).$$

où la fonction N est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

Nous définissons les temps de défaut τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, par la formule :

$$\tau_i = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ : \int_0^t \lambda_i(u) du > \eta_i \right\} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ : \int_0^t \lambda_i(u) du > -\ln \xi_i \right\}$$

où les $(\eta_i)_{i \geq 0}$ sont les barrières exponentielles définies en introduction, les $(\xi_i)_{i \geq 0}$ barrières aléatoires uniformément distribuées, définies par l'égalité $\xi_i = 1 - N(X_i)$. On précise également que les vecteurs aléatoires (X_1, \dots, X_n) , (ξ_1, \dots, ξ_n) et (τ_1, \dots, τ_n) partagent une même fonction de copule gaussienne C ; ceci découle de la monotonie des transformations impliquées.

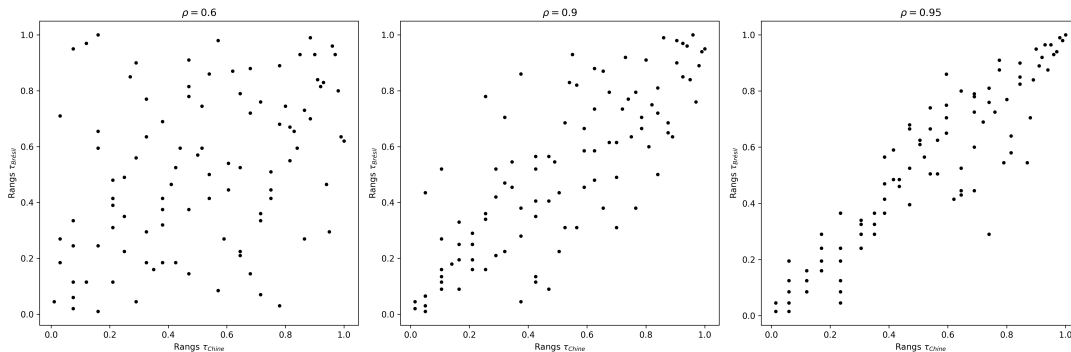


FIG. 5.1 : Exemple en dimension 2

Chapitre 6

Construction du CBO : Approche Monte-Carlo

6.1 Définition de la fonction de perte

Etant donnée que mon portefeuille est équipondéré, la perte cumulée du portefeuille à l'horizon T est donnée par :

$$\text{Loss}(T) = \sum_{i=1}^n \text{LGD}_i \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} = \sum_{i=1}^n (1 - R_i) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

Où :

- $\text{LGD}_i = 1 - R_i$: perte en cas de défaut (Loss Given Default) de l'actif i
- R_i : taux de recouvrement de l'actif i (hypothèse : $(R_i)_{i \geq 0} \sim \text{Beta}(40\%, 26\%)$ iid)

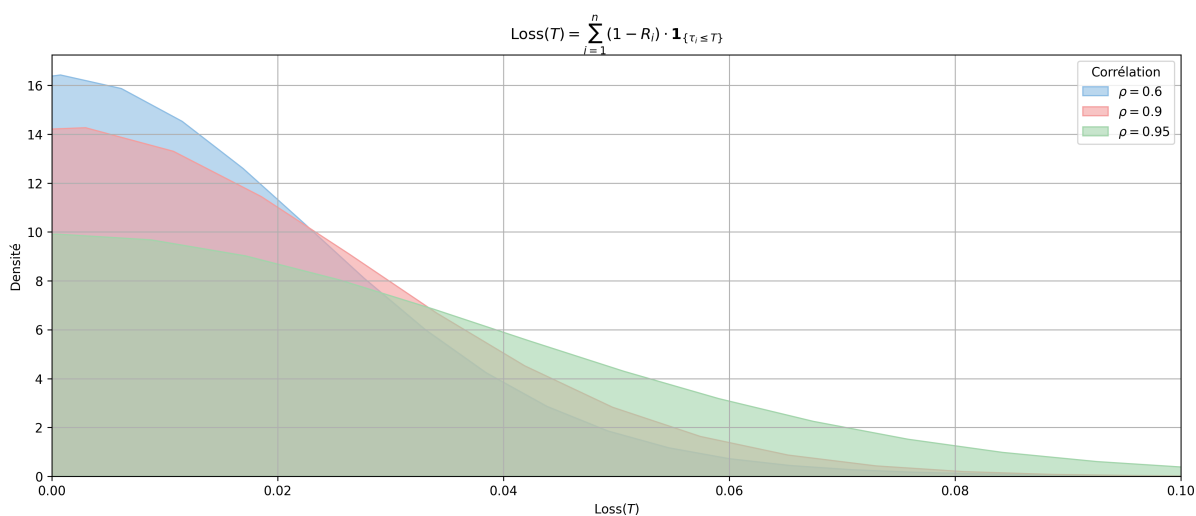


FIG. 6.1 : Densité fonction de perte

Remarque : Une augmentation du niveau de corrélation entre les défauts tend à étirer la distribution des pertes vers des valeurs plus élevées. Ce comportement reflète en partie les phénomènes de contagion, dans lesquels le défaut d'une entité accroît la probabilité de défaut d'autres entités.

6.2 Calibration de la *base correlation*

Dans cette section, nous nous intéressons à l'ajustement de la surface de corrélation. Le modèle de copule gaussienne standard ne comporte qu'un seul paramètre de dépendance, ce qui implique que ce paramètre unique doit permettre de reproduire les prix (ou spreads) de plusieurs tranches de CDO — un défi structurel connu sous le nom de *corrélation implicite*.

En utilisant les données de marché pour ajuster les spreads de chacune des tranches, on constate rapidement que le facteur de corrélation ρ requis pour obtenir un bon ajustement n'est pas constant d'une tranche à l'autre. Cela conduit à l'introduction d'une corrélation dépendante du niveau de perte, notée $\rho(K, T)$, où K représente le point de détachement d'une tranche *equity*, et T la maturité.

Il est courant de ramener le problème à l'étude des seules tranches *equity*, en exploitant la propriété d'additivité de la fonction de perte :

$$\text{Loss}_{[a,b]}(T) = \text{Loss}_{[0,b]}(T) - \text{Loss}_{[0,a]}(T).$$

Cette propriété permet de construire les pertes des tranches mezzanine et senior à partir des pertes cumulées jusqu'aux différents points de détachement, et ainsi de calibrer indirectement la surface de base correlation.

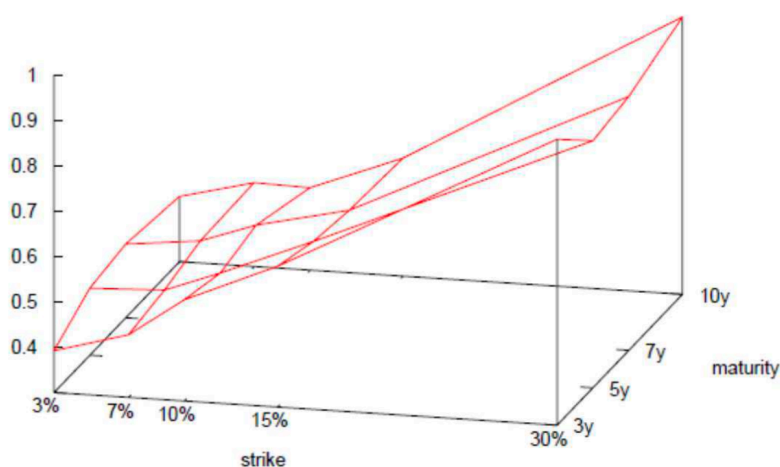


FIG. 6.2 : Exemple, Source *Prampolini and Dinnis (2009)*

Méthode de perturbation du modèle gaussien

Au lieu d'estimer une corrélation $\hat{\rho}(K^*, T = 1)$ pour chaque tranche K , je choisis ici d'introduire le *skew* de corrélation observé empiriquement à l'aide d'une méthode de perturbation appliquée à la copule gaussienne à un facteur (on dit simplement que la corrélation est une fonction du risque systémique). Cette approche permet d'incorporer un phénomène d'asymétrie dans la distribution des pertes, souvent mis en évidence dans les données de marché.

Cette idée a été largement développée dans la littérature, notamment par Roncalli (cf. *Prise en compte du skew de corrélation dans le pricing des CDO*, 2005).

Plutôt que de supposer un coefficient de corrélation constant ρ , nous introduisons une fonction décroissante du facteur de marché V , notée $\beta(V)$, qui modifie la structure de dépendance. La variable latente X_i pour chaque entité est alors modélisée comme suit :

$$X_i = \beta(V)V + \sqrt{1 - \|\beta(V)\|^2} V_i$$

où V est le facteur de risque systémique, V_i un facteur idiosyncratique indépendant.

La paramétrisation choisie pour $\beta(x)$ est la suivante :

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \sqrt{\rho})e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{\rho} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

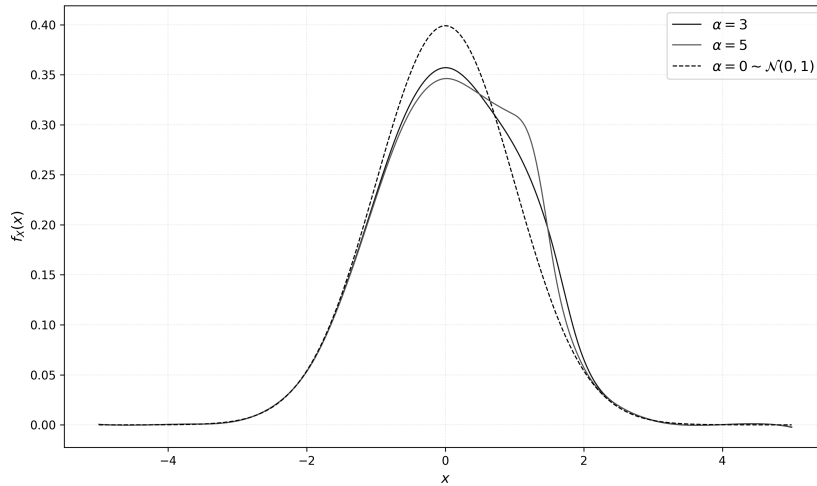


FIG. 6.3 : Densité de X

Remarque : Cette perturbation a donc pour effet d'introduire une *upper tail dependence* dans la simulation de nos défauts.

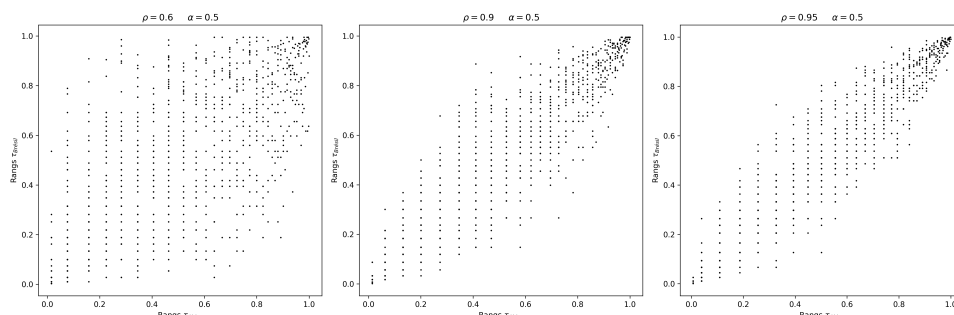


FIG. 6.4 : Exemple en dimension 2

Calibration sur l'indice iTraxx

En l'absence de données de marché réelles pour ce projet, je vais utiliser une courbe de *base correlation iTraxx* réaliste, mais non observée directement sur les marchés.

En supposant que les spreads de l'indice *iTraxx* induisent une structure de corrélation implicite (une fonction $\rho_{iTraxx}(K, T = 1)$), nous cherchons à ajuster notre modèle gaussien déformé en minimisant l'écart en norme \mathcal{L}^1 . Cela conduit au problème d'optimisation suivant :

$$\arg \min_{\rho^*, \alpha} \left[\int_0^{K_{\max}} |\rho_{iTraxx}(u, T = 1) - \rho_{\rho^*, \alpha}(u, T = 1)| du \right]$$

Remarque : La fonction $\rho_{\rho^*, \alpha}$ est évaluée par dichotomie.

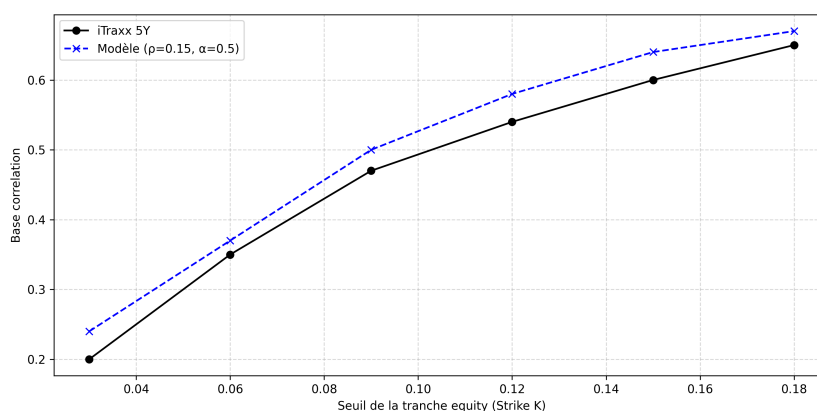


FIG. 6.5 : Calibration modèle

6.3 Détermination des taux de coupons

On va définir N le nombre d'actifs, le pourcentage de perte s'écrit alors :

$$\text{Loss}_{\%}(T) = \frac{\text{Loss}(T)}{N} = \sum_{i=1}^n \frac{(1 - R_i)}{N} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

Nos tranches CBO sont caractérisées comme des obligations zéro coupon. On suppose qu'un seul paiement, d'un montant k_j , est versé à l'échéance pour la tranche j , soit au bout d'un an. Le taux sans risque est constant supposé égal à 3%.

À la date de signature du contrat, c'est-à-dire à la date 0, l'espérance sous une probabilité risque-neutre de pricing de ce flux doit être égale à 0 :

$$\mathbb{E}_* \left(k_j \left(1 - \frac{\text{Loss}_{\%}(T)^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right) D(0, T) \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbb{E}_*[\text{Loss}_{\%}(T)^{(j)}]}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right) D(0, T)}$$

où $\text{Loss}_{\%}(T)^{(j)} = (\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_{j-1})_+ - (\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+$ est la perte de la tranche j à l'instant T .

Résultats approche Monte-Carlo :

Tranche	Seuil Inf.	Seuil Sup.	Coupon (%)	Taux actuariel (%)
Equity	0.00	0.03	109.45	9.45
Junior	0.03	0.06	107.37	7.37
Mezzanine 1	0.06	0.12	106.92	6.92
Mezzanine 2	0.12	0.22	104.87	4.87
Senior	0.22	1.00	103.09	3.09

Remarque :

Les taux actuariels sont décroissants et convergent vers le taux sans risque de 3%. Ce résultat est donc relativement cohérent. Nous allons maintenant essayer de comparer ces résultats avec une approche analytique.

Chapitre 7

Comparaison analytique : Approche portefeuille homogène

Dans cette seconde approche, nous réutilisons les paramètres calibrés du modèle de copule gaussienne perturbé. Contrairement à l'approche Monte-Carlo utilisée précédemment, notre objectif est ici d'exprimer l'espérance $\mathbb{E}[(L_t - k)^+]$ à l'aide de formules fermées en prenant comme hypothèse que notre portefeuille de risque est homogène (ie nos $(\tau_i)_{i \geq 1}$ sont identiquement distribués).

Cette méthode vise à réduire à la fois les temps de calcul et le biais des estimations, tout en permettant une comparaison rigoureuse avec les résultats obtenus par simulation.

Rappel :

Le modèle à un facteur perturbé s'écrit comme suit :

$$X_i = \beta(V)V + \sqrt{1 - \|\beta(V)\|^2} V_i$$

où V (la part systémique du risque) et $(V_i)_{i \geq 1}$ (les parts idiosyncratiques, ou *firm-specific*) sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale standard sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction déterministe décroissante.

Soit C la fonction de copule associée à la loi du vecteur (X_1, \dots, X_n) . Elle est définie, pour tout $v_1, \dots, v_n \in [0, 1]$, par :

$$C(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{Q}(X_1 < \Phi^{-1}(v_1), \dots, X_n < \Phi^{-1}(v_n)) \quad (7.1)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard.

Notons $(P^i(t))_{i \geq 1}$ les fonctions de répartitions marginales des instants de défauts.

Alors par le théorème de Sklar, on a :

$$\mathbb{Q}(\tau_1 < t_1, \dots, \tau_n < t_n) = C(P^1(t_1), \dots, P^n(t_n))$$

Par la relation (7.1) on a :

$$\begin{aligned} C(P^1(t_1), \dots, P^n(t_n)) &= \mathbb{Q}(X_1 < \Phi^{-1}(P^1(t_1)), \dots, X_n < \Phi^{-1}(P^n(t_n))) \\ \Rightarrow \mathbb{Q}(\tau_1 < t_1, \dots, \tau_n < t_n) &= \mathbb{Q}(X_1 < \Phi^{-1}(P^1(t_1)), \dots, X_n < \Phi^{-1}(P^n(t_n))) \end{aligned}$$

Lois marginales conditionnelles :

On suppose que les $(P^i(t))_{i \geq 1}$ sont continues. Par le lemme d'universalité de la loi uniforme :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P^i(\tau_i) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Phi(X_i), \quad \text{où } \Phi(X_i) \sim \mathcal{U}[0, 1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{V=v}^i(t) &= \mathbb{Q}(\tau_i \leq t \mid V = v) \\ &= \mathbb{Q}(P^i(\tau_i) \leq P^i(t) \mid V = v) \\ &= \mathbb{Q}(\Phi(X_i) \leq P^i(t) \mid V = v) \\ &= \mathbb{Q}(\beta(V)V + \sqrt{1 - \|\beta(V)\|^2} V_i \leq \Phi^{-1}(P^i(t)) \mid V = v) \\ &= \mathbb{Q}\left(V_i \leq \frac{\Phi^{-1}(P^i(t)) - \beta(v)v}{\sqrt{1 - \|\beta(v)\|^2}} \mid V = v\right) \\ &= \boxed{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P^i(t)) - \beta(v)v}{\sqrt{1 - \|\beta(v)\|^2}}\right)} \end{aligned}$$

Loi du nombre de défauts :

Soit N_t^n le nombre de défauts dans le portefeuille, défini par :

$$N_t^n = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{\tau_i \leq t\}$$

On va donc ici utiliser le fait que les τ_i sont identiquement distribués et indépendants :

$$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in \mathbb{R}^+, P^i(t) = P^j(t) = p_t$$

On va également utiliser le fait que conditionnellement à V (risque systémique), les τ_i sont indépendants :

$$N_{t,V=v}^n \sim \mathcal{B}(n, p_t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}(N_t^n = k \mid V = v) = \binom{n}{k} p_t(y)^k (1 - p_t(y))^{n-k}$$

et

$$\mathbb{Q}(N_t^n = k) = \int_{\mathbb{R}} \binom{n}{k} \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(P^i(t)) - \beta(v)v}{\sqrt{1 - \|\beta(v)\|^2}} \right) \right)^k \left(1 - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(P^i(t)) - \beta(v)v}{\sqrt{1 - \|\beta(v)\|^2}} \right) \right)^{n-k} \varphi(v) dv$$

où $\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$ est la densité de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Calcul de $E_{\mathbb{Q}}[(\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+]$:

$$\text{Loss}_{\%}(T) = \frac{\text{Loss}(T)}{N} = \sum_{i=1}^n \frac{(1 - R)}{N} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}} = \frac{(1 - R)}{N} \cdot N_T^n$$

où $R \sim \text{Beta}(40\%, 26\%)$, de densité f_R

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{\mathbb{Q}}[(\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+] &= E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1 - R}{N} \cdot N_T^n - \alpha_j \right)_+ \right] \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1 - R}{N} \cdot N_T^n - \alpha_j \right)_+ \mid R \right] \right] \\ &= \int_{\Omega_R} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1 - R}{N} \cdot N_T^n - \alpha_j \right)_+ \mid R = r \right] f_R(r) dr \\ &\stackrel{R \perp\!\!\!\perp N}{=} \int_{\Omega_R} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1 - r}{N} \cdot N_T^n - \alpha_j \right)_+ \right] f_R(r) dr \\ &\stackrel{\text{transfert}}{=} \boxed{\int_{\Omega_R} \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{1 - r}{N} \cdot k - \alpha_j \right)_+ \mathbb{Q}(N_t^n = k) \right] f_R(r) dr} \end{aligned}$$

Implémentation : Détermination des taux de coupons

Rappel :

$$\begin{aligned}
 \text{Loss}_{\%}(T)^{(j)} &= (\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_{j-1})_+ - (\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+ \\
 \Rightarrow k_j &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{Loss}_{\%}(T)^{(j)}]}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)} D(0, T) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_{j-1})_+ - (\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+]}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)} D(0, T) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_{j-1})_+] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\text{Loss}_{\%}(T) - \alpha_j)_+]}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)} D(0, T)
 \end{aligned}$$

Résultats approche analytique :

Tranche	Seuil Inf	Seuil Sup	Coupon (%)	Taux actuariel (%)	Δ (%)
Equity	0.00	0.03	109.18	9.18	0.37
Junior	0.03	0.06	107.89	7.89	0.52
Mezz 1	0.06	0.12	106.87	6.87	0.05
Mezz 2	0.12	0.22	105.10	5.10	0.23
Senior	0.22	1.00	103.27	3.27	0.18

Remarque :

Dans l'ensemble, les résultats obtenus avec cette méthode sont proches de ceux fournis par une approche Monte-Carlo (voir Δ), ce qui confirme la cohérence des deux cadres.

Cependant, la méthode analytique présente plusieurs avantages notables. Elle est en particulier beaucoup plus simple à mettre en œuvre, plus stable numériquement et considérablement plus rapide en termes de temps de calcul.

Bibliographie

- Duffie, D. & Singleton, K. J. (2003). *Credit Risk : Pricing, Measurement, and Management*. Princeton University Press.
- El Karoui, N., Jeanblanc, M. & Jiao, Y. (2010). *What happens after a default : the conditional density approach*. *Stochastic Processes and their Applications*.
- Li, D. X. (2000). *On Default Correlation : A Copula Function Approach*. *Journal of Fixed Income*.
- Laurent, J.-P. & Gregory, J. (2003). *Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas*. Working Paper, ISFA Lyon.
- Roncalli, T. (2005). *Prise en compte du skew de corrélation dans le pricing des CDO*. Working Paper, Crédit Lyonnais.
- Kijima, M. & Muromachi, Y. (2001). *A Gaussian Term Structure Model of Credit Spreads and Valuation of Credit Spread Options*. *Journal of Derivatives*.
- Prampolini, A. & Dinnis, M. (2009). *Copula-Based Factor Models for Pricing CDO Tranches*. Working Paper.