Лабораторная работа № 4

Модель гармонических колебаний

Никита Алексеевич Бакулин

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Научиться создавать модель линейного гармонического осциллятора, так как движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели.

2 Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $x'' + 13x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $x'' + 7x' + x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $x'' + x' + 30x = \sin(0.6t)$

3 Теоретическое введение

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1}$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

Уравнение [3.1] есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

4 Выполнение лабораторной работы

1. Запишем наши уравнения в общем виде:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = F(t) \tag{4.1}$$

Сведем уравнение [4.1] к системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = F(t) - ay - bx \end{cases} \tag{4.2}$$

2. Написание программы на Julia [1]

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 0.7
y0 = 1.5


tspan = (0,57)


function F(du, u, p, t)
 du[1] = u[2]
 du[2] = f(t)-a*u[2]-b*u[1]
end
```

```
a = 0
b = 13
f(t) = 0

prob = ODEProblem(F, [x0;y0], tspan)
sol = solve(prob, saveat=0.05)
X = Float64[]
Y = Float64[]
for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end

plt = plot(legend=true)
plot!(plt, sol)
savefig(plt, "solution1.png")
plt = plot(legend=true)
plot!(plt, X, Y)
savefig(plt, "solution1_phase.png")


a = 7
b = 1
f(t) = 0

prob = ODEProblem(F, [x0;y0], tspan)
sol = solve(prob, saveat=0.05)
```

```
X = Float64[]
Y = Float64[]
for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end

plt = plot(legend=true)
plot!(plt, sol)
savefig(plt, "solution2.png")
plt = plot(legend=true)
plot!(plt, X, Y)
savefig(plt, "solution2_phase.png")



a = 1
b = 30
f(t) = sin(0.6 * t)

prob = ODEProblem(F, [x0;y0], tspan)
sol = solve(prob, saveat=0.05)
X = Float64[]
Y = Float64[]
for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end
```

```
plt = plot(legend=true)
plot!(plt, sol)
savefig(plt, "solution3.png")
plt = plot(legend=true)
plot!(plt, X, Y)
savefig(plt, "solution3_phase.png")
```

Графики решения и фазового портрета для первого случая представлен на рис. [4.1] и рис. [4.2], для второго на рис. [4.3] и рис. [4.4], для третьего на рис. [4.5] и рис. [4.6]

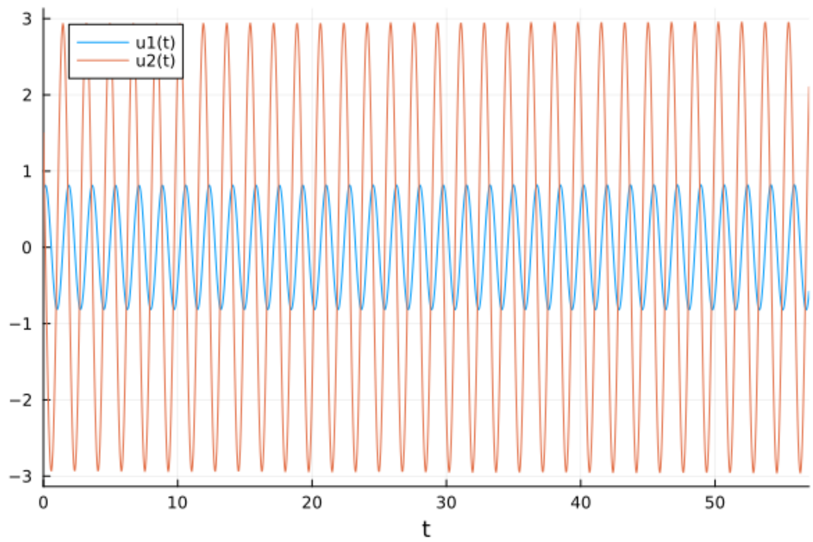

Рис. 4.1: Julia решение 1

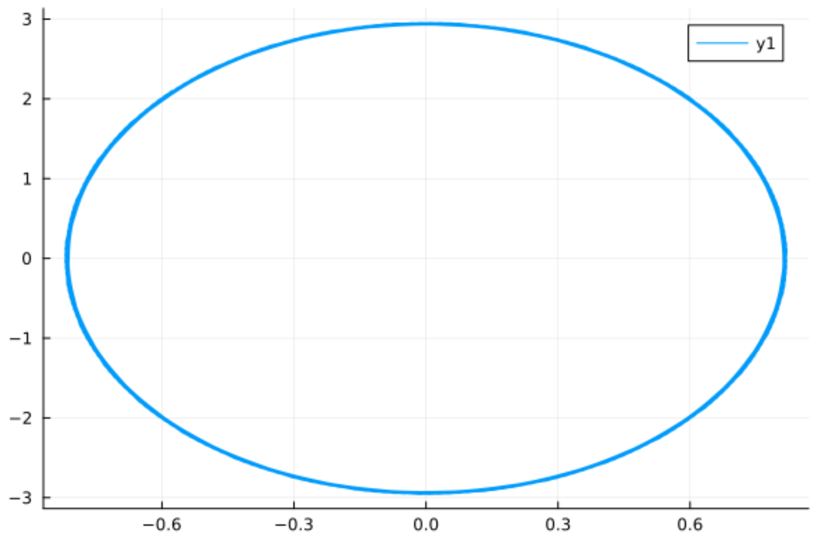

Рис. 4.2: Julia фазовый портрет 1

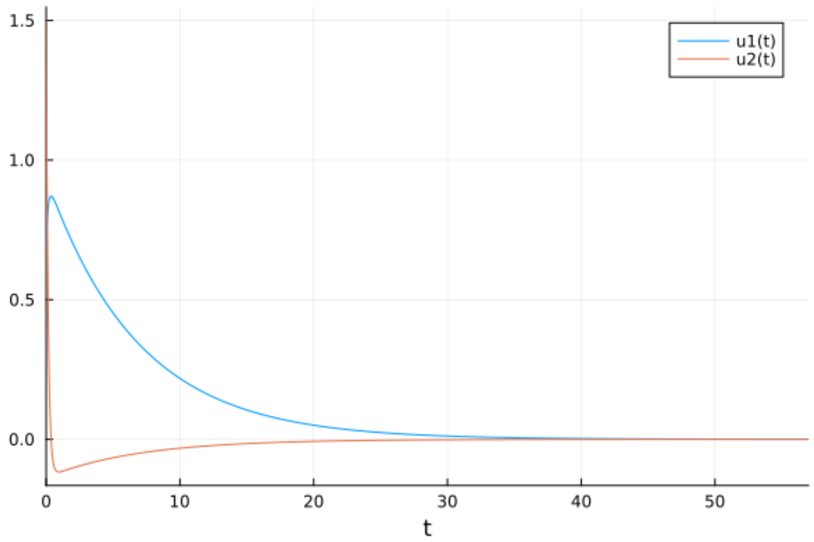

Рис. 4.3: Julia решение 2

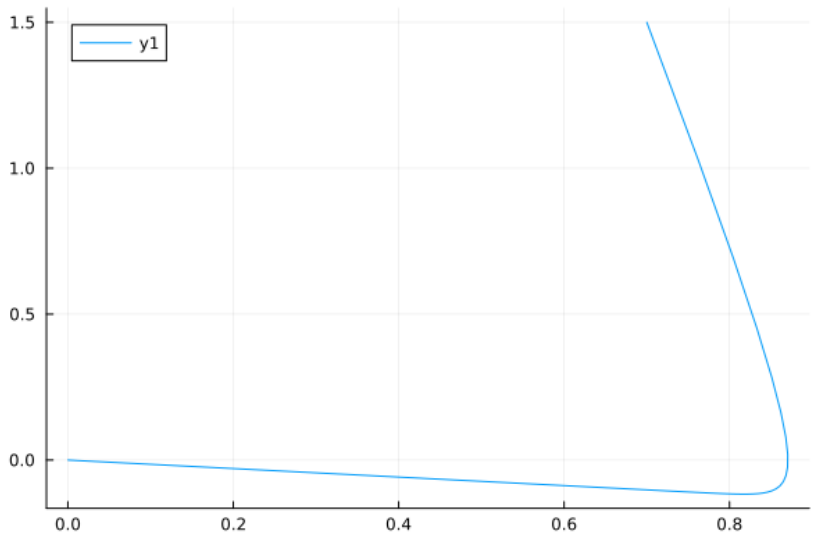

Рис. 4.4: Julia фазовый портрет 2

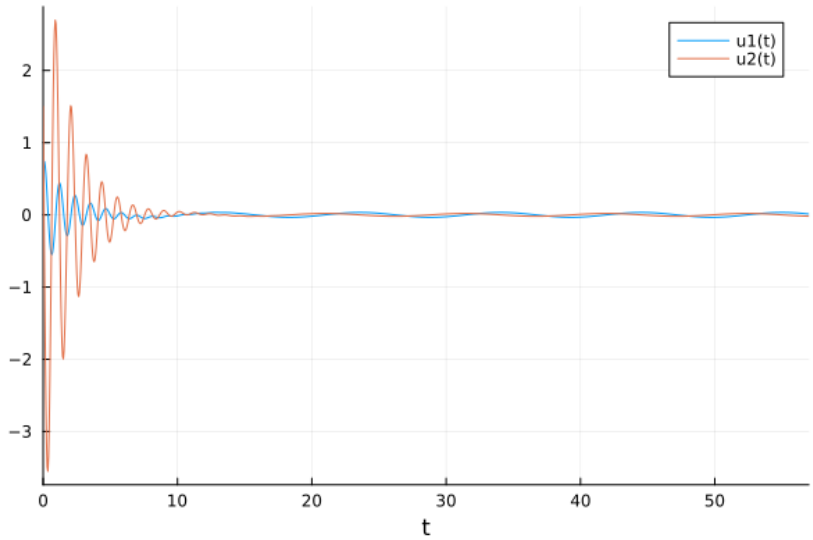

Рис. 4.5: Julia решение 3

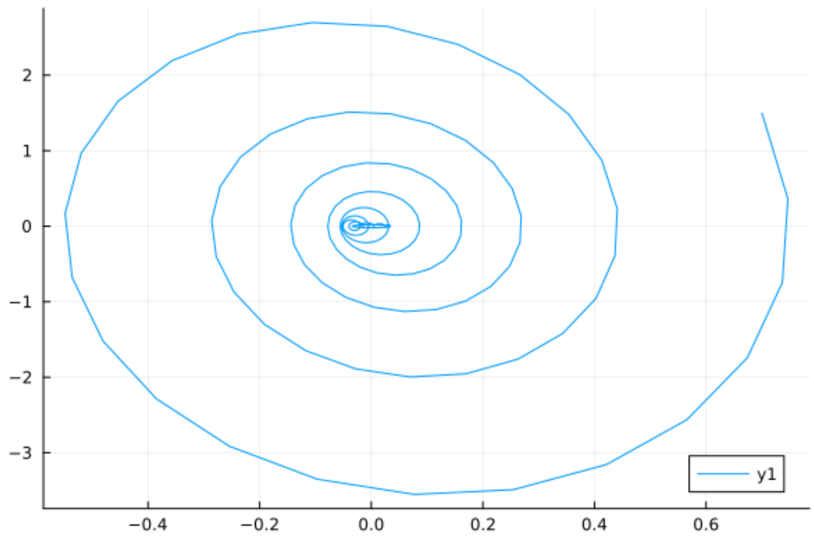

Рис. 4.6: Julia фазовый портрет 3

3. Написание программы на OpenModelica [2]

```
model lab4_1
  Real x(start=0.7);
  Real y(start=1.5);

  parameter Real a = 0.0;
  parameter Real b = 13.0;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -a*y-b*x;
end lab4_1;

model lab4_2
  Real x(start=0.7);
  Real y(start=1.5);

  parameter Real a = 7.0;
```

```
  parameter Real b = 1.0;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -a*y-b*x;
end lab4_2;

model lab4_3
  Real x(start=0.7);
  Real y(start=1.5);


  parameter Real a = 1.0;
  parameter Real b = 30.0;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = sin(0.6*time)-a*y-b*x;
end lab4_3;
```

График решения и фазового портрета для первого случая представлен на рис. [4.7] и рис. [4.8], для второго на рис. [4.9] и рис. [4.10], для третьего на рис. [4.11] и рис. [4.12]

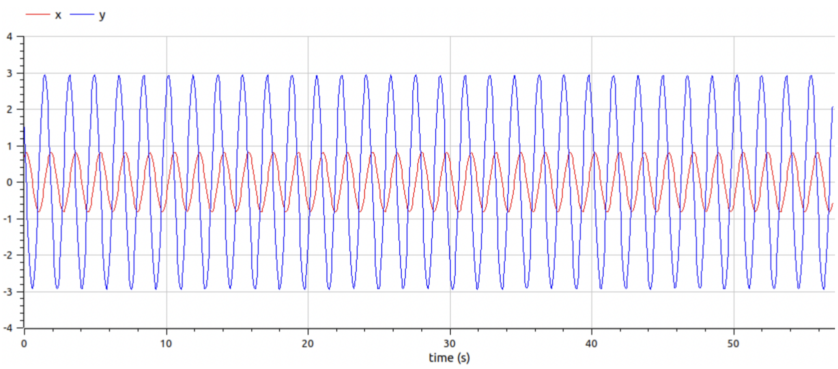

Рис. 4.7: OpenModelica решение 1

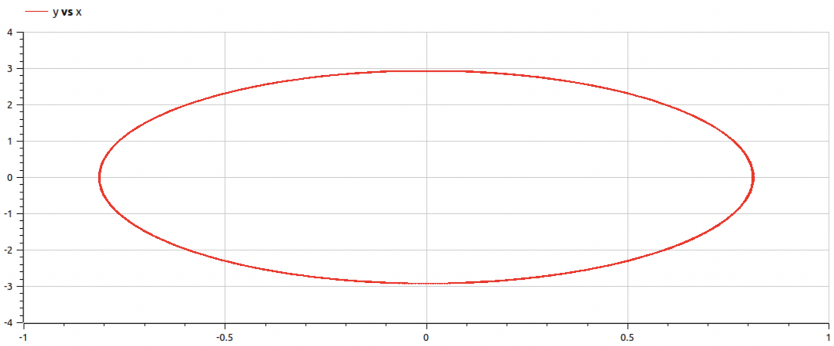

Рис. 4.8: OpenModelica фазовый портрет 1

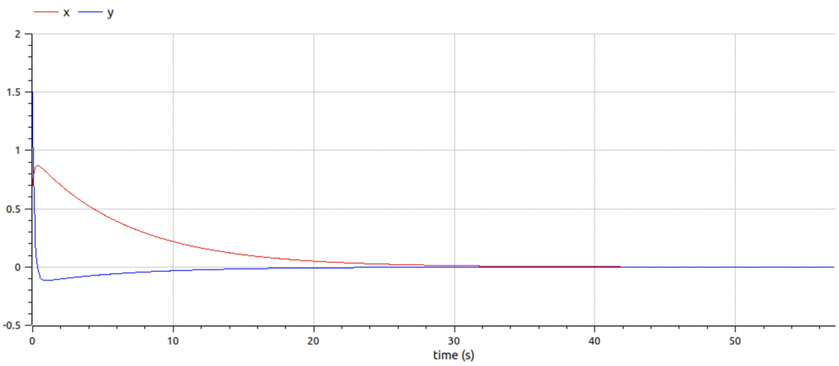

Рис. 4.9: OpenModelica решение 2

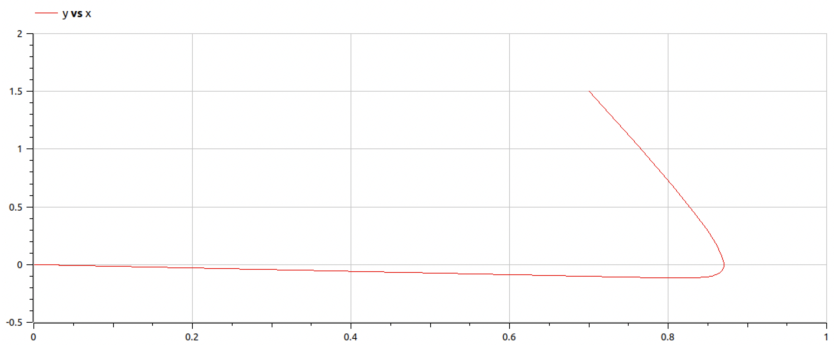

Рис. 4.10: OpenModelica фазовый портрет 2

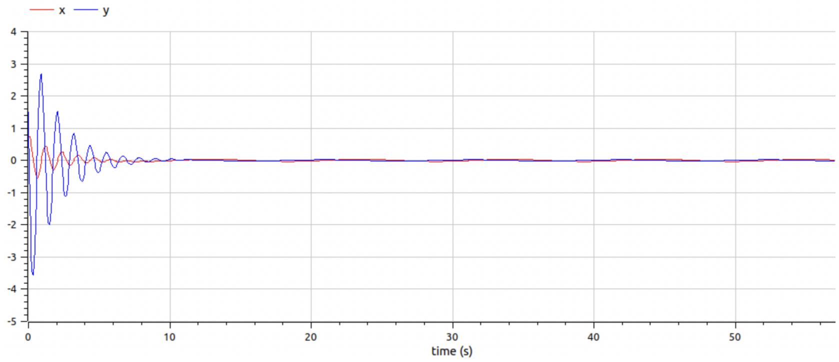

Рис. 4.11: OpenModelica решение 3

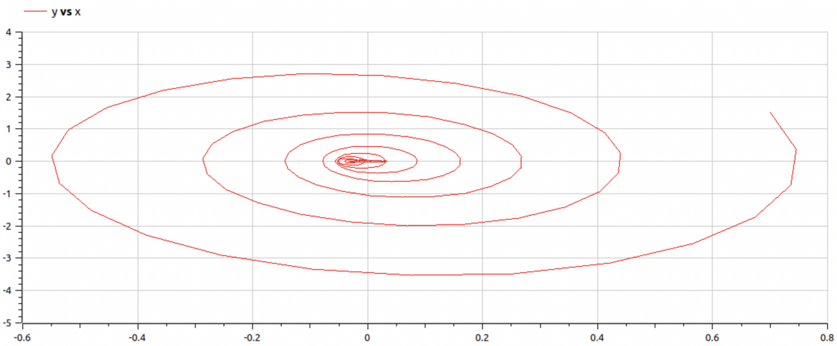

Рис. 4.12: OpenModelica фазовый портрет 3

5 Выводы

Успешно рассчитали модель линейного гармонического осциллятора

Список литературы

1. Julia 1.8 Documentation [Электронный ресурс]. The Julia Project, 2022. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. OpenModelica User’s Guide [Электронный ресурс]. OpenModelica, 2022. URL: https://openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/1.20/.