Рекурсивные функции

Тезис Черча: *класс интуитивно вычислимых функций совпадает с классом частично рекурсивных функций.*

Определение 1. Следующие функции называются *исходными:*

1) *нуль-функция*: $Z(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{N}$;

2) *функция следования*: $N(x) = x + 1$ для любого $x \in \mathbb{N}$;

3) *проектирующие функции*: $U_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i$ для всех $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ ($i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$);

4) *константа*: нульместная функция C_a, принимающая постоянное значение a.

Определение 2. *Правила образования новых функций из уже имеющихся:*

1) Говорят, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ получена *подстановкой* из функций $g(y_1, ..., y_m)$, $h_1(x_1, ..., x_n)$,...,$h_m(x_1, ..., x_n)$, если

$$f(x_1, ..., x_n) = g(h_1(x_1, ..., x_n), ..., h_m(x_1, ..., x_n)).$$

2) Говорят, что n-местная функция f получена из $(n-1)$-местной функции g и $(n+1)$-местной функции h с помощью *рекурсии*, если

$$\begin{aligned}&f(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = g(x_1, ..., x_{n-1}),\\&f(x_1, ..., x_{n-1}, y + 1) = h(x_1, ..., x_{n-1}, y, f(x_1, ..., x_{n-1}, y)).\end{aligned}$$

В частности, при $n = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}&f(0) = \mathrm{const},\\&f(y + 1) = h(y, f(y)).\end{aligned}$$

3) Говорят, что функция $f(x_1, .., x_n)$ получена из функции $g(x_1, .., x_n, y)$ с помощью *μ-оператора* (*оператора минимизации*), если выполнено условие: $f(x_1, .., x_n)$ определено и равно y тогда и только тогда, когда $g(x_1, .., x_n, 0), .., g(x_1, .., x_n, y-1)$ определены и не равны 0, а $g(x_1, .., x_n, y) = 0$. Обозначение:

$$f(x_1, .., x_n) = \mu y(g(x_1, .., x_n, y) = 0).$$

Замечание 1. Функция f, полученная из функции g применением μ-оператора, не определена в точке $(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$ в одном из следующих случаев:
- если не существует такого значения y, что $g(x_1^0, .., x_n^0, y) = 0$;
- если для $i = 0, .., t - 1$ значения $g(x_1^0, .., x_n^0, i)$ не равны 0, а значение $g(x_1^0, .., x_n^0, t)$ не определено (при этом возможно, что $g(x_1^0, .., x_n^0, y) = 0$ для некоторого $y > t$).

Определение 3. Функция f называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из исходных функций с помощью конечного числа применений правил подстановки, рекурсии и μ-оператора.

Если частично рекурсивная функция f может быть получена без применения μ-оператора, то она называется *примитивно-рекурсивной.*

Упражнение 1. Доказать, что всякая примитивно-рекурсивная функция всюду определена.

Определение 4. Частично рекурсивная функция f называется *общерекурсивной* (или *рекурсивной*), если она всюду определена.

Замечание 2. Не всякая рекурсивная функция примитивно рекурсивна. Одно из доказательств данного факта основывается на том, что всякая примитивно-рекурсивная функция достаточно медленно растет и можно предъявить рекурсивную функцию, растущую быстрее всех примитивно-рекурсивных. Примерами таких функций служат функции Аккермана.

Докажем, что введение фиктивных переменных, перестановка и отождествление переменных не выводят из класса частично рекурсивных функций, т.е. что верно

Предложение 1. *Если функция $g(y_1, ..., y_k)$ частично рекурсивна и $x_1, ..., x_n$ – различные переменные, причем при любом i, $1 \leq i \leq k$, z_i есть одна из переменных $x_1, ..., x_n$, то функция*

$$f(x_1, ..., x_n) = g(z_1, ..., z_k)$$

также частично рекурсивна.

Доказательство. Пусть $z_i = x_{j_i}$ $(1 \leq j \leq n)$. Тогда $z_i = U^n_{j_i}(x_1, ..., x_n)$ и $f(x_1, ..., x_n) = g\left(U^n_{j_1}(x_1, ..., x_n), ..., U^n_{j_k}(x_1, ..., x_n)\right)$, т.е. f получается из функций g, $U^n_{j_1}, ..., U^n_{j_k}$ подстановкой, а, значит, частично рекурсивна, т.к. эти функции частично рекурсивны. $\lhd$

Замечание 3. Нетрудно видеть, что если в предложении 1 функция g примитивно-рекурсивна, то и f примитивно-рекурсивна.

Из предложения 1 получаем такое следствие.

Предложение 2.

а) *Нуль-функция $Z_n(x_1, ..., x_n) = 0$ примитивно-рекурсивна.*

б) *Постоянная функция $C^n_k(x_1, ..., x_n) = k$ примитивно-рекурсивна.*

в) *Правило подставновки может быть распространено и на случай, когда функции h_i являются функциями лишь от некоторых из переменных $x_1, ..., x_n$. Аналогично, правило рекурсии распространяется и на случаи, когда функция g не зависит от некоторых из переменных $x_1, ..., x_{n-1}$, а функция h может не зависеть от некоторых из переменных $x_1, ..., x_{n+1}$.*

Доказательство. а) Если в предложении 1 положить $g(x) = Z(x)$, $k = 1$, $z_1 = x_1$, то получим $Z_n(x_1, ..., x_n) = Z(x_1)$, а, значит, Z_n примитивно-рекурсивна.

б) Доказывается индукцией по k. Заметим, что при $k = 0$ имеем: $C^n_0(x_1, ..., x_n) = Z_n(x_1, ..., x_n)$, т.е. C^n_0 примитивно-рекурсивна.

Шаг индукции: $C^n_{k+1}(x_1, ..., x_n) = N\left(C^n_k(x_1, ..., x_n)\right)$.

в) Следует сразу из возможности введения фиктивных переменных. $\lhd$

Примеры примитивно-рекурсивных функций

Предложение 3. *Следующие функции являются примитивно-рекурсивными:*

1) $s(x, y) = x + y$;

2) $p(x, y) = x \cdot y$;

3) $\Phi(x, y) = x^y$;

4) $\delta(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

5) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ 0, & \text{если } x < y; \end{cases}$

6) $|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ y - x, & \text{если } x < y; \end{cases}$

7) $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

8) $\overline{\mathrm{sgn}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

9) $x!$;

10) $\min(x, y)$;

11) $\min(x_1, ..., x_n)$;

12) $\max(x, y)$;

13) $\max(x_1, ..., x_n)$;

14) $r(x, y) = \begin{cases} \text{остаток от деления } x \text{ на } y, & \text{если } y > 0, \\ x, & \text{если } y = 0; \end{cases}$

15) $\left[\frac{y}{x}\right] = \begin{cases} \text{частное от деления } y \text{ на } x, & \text{если } x > 0, \\ y, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

Доказательство.

1) Имеем:

$s(x, 0) = x = U_1^1(x) =: g(x)$,

$s(x, y + 1) = N(s(x, y)) = N(U_3^3(x, y, s(x, y))) =: h(x, y, s(x, y))$.

Таким образом, функция $s(x, y)$ получается из примитивно-рекурсивных функций g (одноместной) и h (трехместной) по правилу рекурсии, а значит, является примитивно-рекурсивной (заметим, что h получена подстановкой из исходных функций $N(x)$ и $U_3^3(x_1, x_2, x_3)$).

2) $p(x, 0) = Z(x) =: g(x)$,

$p(x, y + 1) = s(p(x, y), x) = s(U_1^3(x, y, p(x, y)), U_3^3(x, y, p(x, y))) =: h(x, y, p(x, y))$.

3) Функция $\Phi(x, y) = x^y$ определяется с помощью рекурсии следующим образом:

$\Phi(x, 0) = x^0 = 1 = C_1^1(x)$,

$\Phi(x, y + 1) = x^{y+1} = x \cdot (x^y) = p(x, \Phi(x, y)) = p(U_1^3(x, y, \Phi(x, y), U_3^3(x, y, \Phi(x, y)))$.

4) $\delta(0) = 0 = Z(x)$,

$\delta(y + 1) = y = U_1^2(y, \delta(y))$.

5) $x \dot{-} 0 = x = U_1^1(x)$,

$x \dot{-} (y + 1) = \delta(x \dot{-} y) = U_3^3(x, y, \delta(x \dot{-} y))$.

6) $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = s(x \dot{-} y, y \dot{-} x)$, т.е. функция $|x - y|$ получается с помощью правила подстановки из примитивно-рекурсивных функций, а значит, $|x - y|$ примитивно-рекурсивна.

7) $\mathrm{sgn}(0) = 0 = C_0$, $\mathrm{sgn}(y + 1) = 1 = C_1^2(y, \mathrm{sgn}(y))$.

8) $\overline{\mathrm{sgn}}(x) = 1 \dot{-} \mathrm{sgn}(x) = C_1 \dot{-} \mathrm{sgn}(x)$, т.е. $\overline{\mathrm{sgn}}(x)$ получается подстановкой из примитивно-рекурсивных функций C_1, $\dot{-}$ и $\mathrm{sgn}(x)$, а значит, она примитивно-рекурсивна.

9) $0! = 1 = C_1$,

$(y + 1)! = y! \cdot (y + 1) = p(y!, y + 1) = p(N(y), y!)$.

10) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$, т.е. функция $\min(x, y)$ получается подстановкой из примитивно-рекурсивных функций.

11) Доказывается методом математической индукции: $\min(x_1, ..., x_{n+1}) = \min(\min(x_1, ..., x_n), x_{n+1})$.

12) $\max(x,y) = y + (x \dot{-} y) = s(y, x \dot{-} y)$.

13) $\max(x_1, ..., x_{n+1}) = \max(\max(x_1, ..., x_n), x_{n+1})$.

14) $r(0,y) = Z(y)$,

$r(x+1, y) = N(r(x,y)) \cdot \mathrm{sgn}(|y - N(r(x,y))|)$.

15) $\left[\frac{0}{y}\right] = Z(y)$,

$\left[\frac{x+1}{y}\right] = \left[\frac{x}{y}\right] + \overline{\mathrm{sgn}}(|y - N(r(x,y))|)$. ◁

Упражнение 2. Пусть функция $g(x_1, .., x_n)$ примитивно-рекурсивна. Доказать, что следующие функции примитивно-рекурсивны:

а) $f(x_1, .., x_{n-1}, y) = \sum\limits_{i=0}^{y} g(x_1, .., x_{n-1}, i)$;

б) $f(x_1, .., x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, .., x_{n-1}, i), & \text{если } y \le z, \\ 0, & \text{если } y > z; \end{cases}$

в) $f(x_1, .., x_{n-1}, y) = \prod\limits_{i=0}^{y} g(x_1, .., x_{n-1}, i)$;

г) $f(x_1, .., x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \prod\limits_{i=y}^{z} g(x_1, .., x_{n-1}, i), & \text{если } y \le z, \\ 0, & \text{если } y > z. \end{cases}$

Ограниченный μ-оператор. Примитивно-рекурсивные предикаты

Определение 5. Говорят, что функция $f(x_1, .., x_n)$ получена из функций $g(x_1, ..x_n, x_{n+1})$ и $h(x_1, .., x_n)$ с помощью *ограниченного μ-оператора*, если $\mu y(g(x_1, ..x_n, y) = 0)$ определено для всех $x_1, .., x_n$ и не больше $h(x_1, .., x_n)$ и

$$f(x_1, .., x_n) = \mu y(g(x_1, ..x_n, y) = 0).$$

Будем использовать обозначение

$$f(x_1, .., x_n) = \mu y_{y \le h(x_1, .., x_n)}(g(x_1, ..x_n, y) = 0).$$

Предложение 4. *Если функция f получена из примитивно-рекурсивных функций g и h с помощью ограниченного μ-оператора, то f примитивно-рекурсивна.*

Доказательство. $f(x_1, .., x_n) = \sum\limits_{i=0}^{h(x_1, .., x_n)} \mathrm{sgn}\big(\prod\limits_{j=0}^{i} g(x_1, .., x_n, j)\big)$. ◁

Рассмотрим теперь "арифметизированные" логические функции, т.е. функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Нетрудно видеть, что

$$x \wedge y = \min\{x, y\},$$

$$x \vee y = \max\{x, y\},$$

$$\overline{x} = 1 \dot{-} x.$$

Отсюда и из полноты системы $\{-, \wedge, \vee\}$ следует примитивная рекурсивность всех логических функций.

Определение 6. Предикат $P(x_1, .., x_n)$ назовем *примитивно-рекурсивным*, если его характеристическая функция

$$\chi_P(x_1, .., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x_1, .., x_n) = \text{И}, \\ 0, & \text{если } P(x_1, .., x_n) = \text{Л} \end{cases}$$

примитивно-рекурсивна.

Из сказанного выше следует, что если предикаты $P_1, .., P_k$ примитивно-рекурсивны, то и любой предикат, полученный из них с помощью логических операций, примитивно-рекурсивен.

Примеры.

а) Предикат $P(x,y) = "x = y"$ примитивно-рекурсивен, так как $\chi_P(x,y) = \overline{\text{sgn}}|x-y|$.

б) Предикат $Q(x,y) = "x$ делится на $y"$ примитивно-рекурсивен, так как $\chi_Q(x,y) = \overline{\text{sgn}}(r(x,y))$.

в) Предикат $R(x,y,z) = "x$ делится на y и на $z"$ примитивно-рекурсивен, так как $R(x,y,z) = Q(x,y) \wedge Q(x,z)$.

г) Предикат $S(x,y) = "x > y"$ примитивно-рекурсивен, так как $\chi_S(x,y) = \text{sgn}(x \dot{-} y)$.

Применение μ-оператора и ограниченного μ-оператора

μ-оператор служит удобным инструментом построения обратных функций. Кроме того, не всюду определенные функции можно построить только с помощью μ-оператора.

Примеры.

а) Рассмотрим функцию $[\sqrt{x}]$. Чтобы доказать, что эта функция примитивно-рекурсивна, покажем, что она получается из примитивно-рекурсивных функций с помощью ограниченного μ-оператора. Действительно,

$$[\sqrt{x}] = \mu y_{y \le x}(\overline{\text{sgn}}(\chi_S((y+1)^2, x)) = 0),$$

где $S(x,y)$ – предикат из примера г). В таких случаях мы будем использовать запись

$$[\sqrt{x}] = \mu y_{y \le x}((y+1)^2 > x).$$

б) $[\lg x] = \mu y_{y \le x}(10^{y+1} > x)$, следовательно, функция $[\lg x]$ примитивно-рекурсивна.

в) Рассмотрим частично рекурсивную функцию

$$f(x,y) = \mu z(|x - (z+y)| = 0).$$

Эта функция определена на таких наборах (x_0, y_0), что $x_0 \ge y_0$. Действительно, если $x_0 \ge y_0$, то существует (причем только одно) такое значение z_0, что $x_0 = z_0 + y_0$, а значит, $|x_0 - (z_0 + y_0)| = 0$. При этом для $i < z_0$ значения $|x_0 - (i + y_0)|$ определены и не равны нулю. Если же $x_0 < y_0$, то не существует такого z_0, что $|x_0 - (z_0 + y_0)| = 0$. Таким образом, $f(x,y) = x - y$.

г) Функцию $f(x) = \mu y(y - (x+1) = 0)$ является частично рекурсивной. Покажем, что она нигде не определена. Пусть $x = x_0$. Тогда при $y_0 = x_0 + 1$ получаем $y_0 - (x_0 + 1) = 0$, но при $i < y_0$ значение $i - (x_0 + 1)$ не определено. По определению μ-оператора это означает, что функция $\mu y(y - (x+1) = 0)$ не определена в точке x_0.

д) Функция

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & \text{если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в противном случае} \end{cases}$$

частично рекурсивна, так как

$$g(x,y) = \mu z(|x - z \cdot y| = 0).$$