ЛЕКЦІЯ 1

Числові множини. Комплексні числа та дії над ними.

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Множини можуть складатися з будь-яких об'єктів різної природи. Для математики особливо важливу роль відіграють множини складені із «математичних об'єктів» — чисел, геометричних фігур тощо. Дуже часто зустрічаються числові множини, тобто множини, елементами яких є числа. Згадаємо деякі множини чисел, з якими ви знайомилися в курсі математики.

1. Множина **натуральних чисел** тобто чисел, які виникають в процесі лічби предметів. Цю множину чисел позначають буквою ***N:***

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

В цій множині завжди можна виконати дії додавання і множення.

2. Об'єднання натуральних чисел, чисел протилежних до натуральних і числа 0 утворює множину **цілих чисел**, яку позначають буквою ***Z:***

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$.

В цій множині завжди можна виконати дії додавання, віднімання та множення.

3. Множина **раціональних чисел** (її позначають буквою **Q**) — це множина чисел, які можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z,\ n \in N$

$Q = \{x: x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\}$.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного дробу. Наприклад $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$. В множині раціональних чисел завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення, ділення (крім ділення на 0). Проте, квадратний корінь з раціонального числа не завжди є раціональним числом. Наприклад: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ і т. д.

4. Числа, які не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z,\ n \in N$ (або числа, які подаються у вигляді нескінченного неперіодичного дробу, наприклад $\pi = 3{,}1415926...$), утворюють множину **ірраціональних чисел**.

Об'єднання раціональних і ірраціональних чисел утворює множину **дійсних чисел**, яку позначають буквою **R.**

У множині дійсних чисел завжди можна виконати дії: додавання, віднімання, множення, ділення (крім ділення на 0), добування квадратного кореня з невід'ємного числа.

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

При розв’язанні квадратних алгебраїчних рівнянь виникла проблема тоді, коли дискримінант $D = p^2 - 4q$ виявлявся числом від’ємним, і стало зрозуміло, що дуже корисно і зручно не ігнорувати символ $\sqrt{-1}$ і вирази $a + b\sqrt{-1}$ (де $a, b \in R$), а оперувати з ними (чисто формально!), як із звичайними числами. А саме, якщо позначити $\sqrt{-1} = i$ та оперувати з виразами $a + bi$ за звичайними правилами

$$\begin{gathered}(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\\(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,\end{gathered} \tag{1}$$

то при цьому виконуються всі звичайні властивості додавання та множення. Отже, з цієї точки зору вирази $a + bi$ мають таке саме право називатися числами, як вираз $\frac{m}{n}$ (де $m \in Z, n \in N$) – раціональними числами, або нескінченні десяткові дроби – дійсними числами.

Якщо вважати, що $a + 0i$ – це просто дійсне число a, що i – це $0 + 1i$, то у відповідності з (1) $a + bi = (a + 0i) + (b + 0i)\cdot(0 + 1i)$ і, отже, вираз $a + bi$ утворюється з $a, b \in R$ та $i = \sqrt{-1}$ шляхом заданого в (1) алгоритму множення та додавання, тобто $a + bi = a + b \cdot i$.

Отже, будь-яке квадратне рівняння виду $x^2 + px + q = 0$, де p і q – дійсні числа, має два корені, тобто:

- якщо дискримінант $D > 0$, то дане рівняння має два різних дійсних кореня $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$;
- якщо дискримінант $D = 0$, то дане рівняння має два рівних дійсних кореня $x_{1,2} = \frac{-p}{2}$;

▪ якщо дискримінант $D<0$, то дане рівняння має два різних комплексних кореня

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm i\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\ .$$

Подібне твердження відоме під назвою “основна теорема алгебри” (Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоч один комплексний корінь), доведення якої було дане Гаусом в кінці XVIII ст., має місце для алгебраїчних рівнянь будь-якого ступеня з довільними комплексними коефіцієнтами.

Таким чином, ми отримуємо своєрідне розширення множини дійсних чисел, породжене приєднанням до *R* уявного елементу $i=\sqrt{-1}$, тобто такого, що $i^2=-1$.

АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ТА ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Комплексними числами називаються вирази виду $a+bi$, де a і b – дійсні числа, а число i, що визначається рівністю $i^2=-1$, називається *уявною одиницею*, причому дійсне число a називається *дійсною частиною* комплексного числа $z=a+bi$ і позначається $\operatorname{Re} z$, число bi – *уявною частиною* і позначається $\operatorname{Im} z$, а дійсне число b – *коефіцієнтом уявної частини*. Множина **комплексних чисел** позначається ***C*** (від *Complex*).

Два комплексні числа a_1+b_1i і a_2+b_2i називаються *рівними*, якщо їхні дійсні та уявні частини відповідно рівні, тобто коли $a_1=a_2$ і $b_1=b_2$.

Сумою двох комплексних чисел a_1+b_1i і a_2+b_2i називається комплексне число, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин доданків, а коефіцієнт уявної частини – відповідно сумі коефіцієнтів уявної частини доданків, тобто $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

Добутком двох комплексних чисел a_1+b_1i і a_2+b_2i називається комплексне число, дійсна частина якого дорівнює $a_1a_2-b_1b_2$, а уявна – $a_1b_2+a_2b_1$.

Запис комплексного числа у вигляді $z=a+bi$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Будь-яке дійсне число a міститься в множині комплексних чисел, тому що його можна записати так: $a = a + 0 \cdot i$. Числа 0, 1 та i записуються відповідно у вигляді $0 = 0 + 0 \cdot i$, $1 = 1 + 0 \cdot i$ і $i = 0 + 1 \cdot i$. При $a = 0$ комплексне число $a + bi$ перетворюється в чисто уявне число bi.

Комплексні числа вигляду $a + bi$ і $-a - bi$ називаються ***протилежними***.

Комплексне число $a - bi$ називається ***спряженим*** з числом $a + bi$ і позначається $\bar{z}$, тобто $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$, але до числа $\bar{z}$ також можна знайти спряжене число, яким буде число z, тому можна вести мову про пару спряжених чисел. Наприклад, до числа $-7 + 5i$ протилежним є число $7 - 5i$, а спряженим $-7 - 5i$.

Властивості спряжених чисел

1. Сума і добуток спряжених комплексних чисел є числа дійсні, так як $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ і $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

2. Число, спряжене з сумою двох чисел, дорівнює сумі чисел, спряжених з доданками, тобто $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

3. Число, спряжене з добутком двох чисел, дорівнює добутку чисел, спряжених з співмножниками, тобто $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

4. Число, спряжене з різницею двох чисел, дорівнює різниці чисел, спряжених зі зменшуваним z_1 і від'ємником z_2, тобто $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

5. Число, спряжене з часткою двох чисел, дорівнює частці чисел, спряжених з діленим z_1 і дільником z_2, тобто $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

Розглядаючи віднімання і ділення комплексних чисел як дії, обернені відповідно додаванню і множенню, одержимо правила віднімання і ділення комплексних чисел.

Правило віднімання комплексних чисел: *для того, щоб відняти два комплексних числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *та* $z_2 = a_2 + b_2 i$, *потрібно окремо знайти різниці дійсної та уявної частин і результати відповідно записати, тобто*

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \qquad (2)$$

Правило ділення комплексних чисел: для того, щоб поділити два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, потрібно і чисельник і знаменник отриманого дробу $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ помножити на число, спряжене до знаменника, тобто числа $z_2 = a_2 + b_2 i$; отже,

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \,. \tag{3}$$

Приклади.

Виконати дії: $(4+2i)+(1+5i)$. ◄ За правилом додавання комплексних чисел маємо $(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i.$ ►

Виконати дії: $(3+5i)-(6+3i)$. ◄ За правилом віднімання комплексних чисел одержимо $(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i.$ ►

Виконати дії: $(5-4i)(3+2i)$. ◄ Згідно з правилом множення комплексних чисел $(5-4i)(3+2i)=[5\cdot 3-(-4)\cdot 2]+i[5\cdot 2-3(-4)]=23-2i.$ ►

Виконати дії: $\dfrac{2-3i}{4+5i}$. ◄ $\dfrac{2-3i}{4+5i}=\dfrac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\dfrac{8-10i-12i+15i^2}{16+25}=\dfrac{-7-22i}{41}=-\dfrac{7}{41}-\dfrac{22}{41}i.$ ►

Знайти дійсні числа x та y із умови рівності двох комплексних чисел: $-2+5ix-3iy=9i+2x-4y$.

◄ Виділимо в обох частинах рівняння дійсні і уявні частини даних комплексних чисел:

$$-2+(5x-3y)i=2x-4y+9i.$$

Тепер, використовуючи рівності комплексних чисел, складемо систему:

$$\begin{cases} 2x-4y=-2, \\ 5x-3y=9, \end{cases}$$

розв’язавши яку, одержуємо $x=3, y=2$. ►

ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. МОДУЛЬ ТА АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Візьмемо на площині декартову прямокутну систему координат xOy (рис. 1)

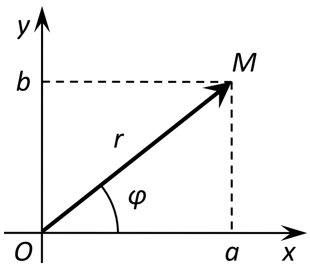

Рис. 1

Домовимось комплексне число $z = a + bi$ зображати точкою $M(a,b)$ площини, абсциса якої у вибраній нами декартовій прямокутній системі координат дорівнює a, а ордината – b. Так між множиною всіх комплексних чисел і сукупністю всіх точок площини встановлюємо взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = a + bi$ відповідає одна і тільки одна точка $M(a,b)$ площини і, навпаки, кожна точка $M_1(a_1, b_1)$ відповідає одному і тільки одному комплексному числу $z_1 = a_1 + b_1 i$. Очевидно, комплексне число 0 зображене точкою O площини, яку взято як початок координат.

Дійсні числа зображують точками осі абсцис Ox, яку називають в цьому випадку *дійсною віссю*. Суто уявні числа bi зображують точками осі ординат Oy, тому цю вісь називають *уявною*. Площину, між точками якої і комплексними числами встановлено взаємно однозначну відповідність, щойно описаним способом, називають *комплексною* площиною.

Довільному комплексному числу $z = a + bi$ ставимо у відповідність напрямлений відрізок $\vec{z} = \overrightarrow{OM}$ комплексної площини xOy, початком якого є початок координат O, а кінцем – точка M з координатами (a, b). Інакше, комплексному числу $z = a + bi$ ставимо у відповідність напрямлений відрізок z, що виходить з початку координат і проекція якого на вісь абсцис дорівнює a, а на вісь ординат – b. Числу 0 ставимо у відповідність точку O – початок координат. Так між множиною всіх комплексних чисел і сукупністю всіх напрямлених відрізків площини, що виходять з початку координат, встановлено взаємно однозначну відповідність. Очевидно, кожному дійсному числу a відповідає відрізок, що лежить на дійсній осі, а всякому суто уявному числу bi – відрізок, який лежить на уявній осі, і навпаки. Зокрема, одиничним відрізкам, що лежать на дійсній і уявній осях і мають напрями цих осей, відповідають числа 1 та i.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається число $\sqrt{a^2 + b^2}$, яке позначається r або $|z|$, тобто

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4}$$

Модуль комплексного числа завжди є дійсне невід'ємне число: $|z| \geq 0$, причому $|z| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $z = 0$.

Із визначення модуля комплексного числа випливає, що для будь-яких комплексних чисел z, z_1, z_2 мають місце співвідношення:

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, якщо $z_2 \neq 0$;
- $|z^n| = |z|^n$ для будь-якого цілого числа n (при $n < 0$ за умови, що $z \neq 0$).

Якщо r – деяке додатне дійсне число, то на основі означення модуля комплексного числа одержуємо (див. рис.2):

1) множина всіх чисел z, для яких $|z| = r$, являє собою коло радіусом r з центром у початку координат;

2) множина всіх чисел z, для яких $|z| \leq r$, являє собою круг радіусом r з центром у початку координат;

3) множина всіх чисел z, для яких $|z| > r$, являє собою зовнішню частину

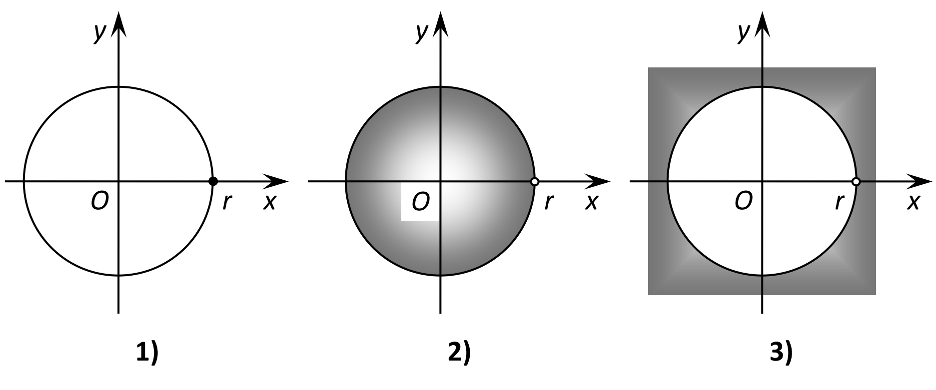

Рис. 2

круга радіусом r з центром у початку координат.

Приклад. Визначити на комплексній площині області, що задаються умовами: 1) $|z|=5$; 2) $|z|\le 6$; 3) $|z-(2+i)|\le 3$; 4) $6\le |z-i|\le 7$.

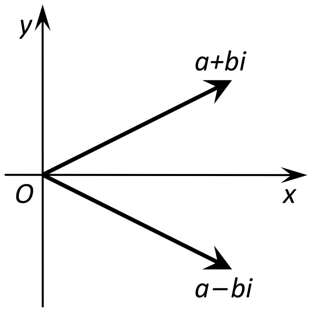

Рис. 3

⮜ 1) розв'язком є коло радіусу 5 з центром у початку координат;

2) розв'язком є круг радіусу 6 з центром у початку координат;

3) розв'язком є круг радіусу 3 з центром у точці $z_0=2+i$;

4) розв'язком є кільце, обмежене колами з радіусами 6 і 7 з центром в точці $z_0=i$. ⮞

Із геометричної інтерпретації комплексного числа випливають наступні властивості:

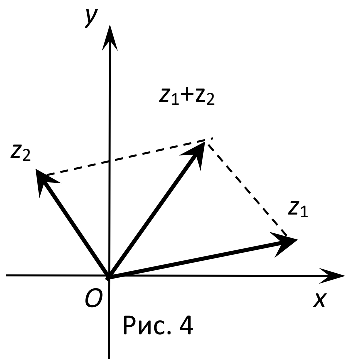

Рис. 4

1. Довжина вектора $\vec{z}$ дорівнює $|z|$.

2. Точки $z=a+bi$ і $\bar{z}=a-bi$ симетричні відповідно дійсної осі (рис. 3).

3. Точки z і $-z$ симетричні відносно точки $z=0$.

4. Число z_1+z_2 геометрично відображається як вектор, який побудовано за правилом додавання векторів, які відповідають точкам z_1 і z_2 (рис. 4).

5. Відстань між точками z_1 і z_2 дорівнює $|z_1-z_2|$ (рис.5).

Кут φ між дійсною віссю Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$, що відраховується від додатного напрямку дійсної осі, називається *аргументом* комплексного числа $z=a+bi$ (див. рис. 1). Якщо відлік ведеться проти руху годинникової стрілки, то величина кута вважається додатною, а якщо за рухом стрілки – від'ємною.

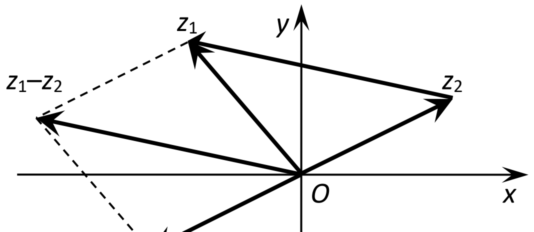

Рис. 5

Аргумент φ комплексного числа $z=a+bi$ записується так:

$$\varphi=\arg z \text{ або } \varphi=\arg(a+bi). \qquad (5)$$

Для числа $z=0$ аргумент не визначений.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно: будь-яке комплексне число $z \neq 0$ має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на число, кратне 2π. Найменше за абсолютною величиною значення аргументу із проміжку $(-\pi, \pi]$ називається *головним значенням* аргументу.

Із означень тригонометричних функцій випливає, що якщо $\varphi = \arg(a+bi)$, то мають місце рівності:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}. \qquad (6)$$

Справедливе і обернене твердження, тобто якщо виконуються обидві рівності (6), то $\varphi = \arg(a+bi)$. Таким чином, всі значення аргументу φ можна знайти, розв'язуючи разом рівняння (6).

Алгоритм знаходження значення аргументу комплексного числа $z = a+bi \neq 0$: визначити, в якій чверті знаходиться точка $z = a+bi$ (використати геометричну інтерпретацію числа $z = a+bi$); знайти в цій чверті кут φ, розв'язавши одне із рівнянь (6) або рівняння

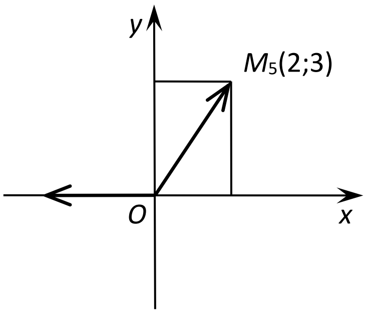

Рис.6

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \qquad (7)$$

та знайти всі значення аргументу числа z за формулою $\arg z = \varphi + 2\pi k, k \in Z.$

Приклад. Побудувати радіус-вектор, який відповідає комплексному числу $z = 2+3i$.

➤ $M_5 = (2;3)$ (рис. 6). ➤

Знайти модуль і головне значення аргументу комплексних чисел:

1) $z = -5i$; 2) $z = 1+i$

1) $a = 0, b = -5$; знаходимо $r = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$; так як вектор, який відображає дане число, лежить на від'ємній вісі *Oy*, то $\varphi = -\frac{\pi}{2}$;

2) так як $a=1, b=1$, точка, яка відображає дане число, лежить в I чверті, значить, $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=1$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ➤

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАНИМИ У ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Нехай $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль, а φ – одне із значень аргументу комплексного числа $a+bi$. Оскільки із співвідношення (6) випливає, що $a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi$, то

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (8)$$

Таким чином, будь-яке комплексне число $a+bi\neq 0$ можна записати за формулою (8), де r – модуль, а φ – одне із значень аргументу цього числа.

Справедливе і обернене твердження: якщо комплексне число $a+bi$ представлене у вигляді (8), де $r>0$, то $r=|a+bi|, \varphi=\arg(a+bi)$.

Представлення комплексного числа у вигляді

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

де $r>0$, називається ***тригонометричною формою*** запису комплексного числа.

Алгоритм представлення комплексного числа в тригонометричній формі: *знайти модуль цього числа та обчислити одне із значень аргументу цього числа.*

Зауваження. В силу багатозначності $\arg z$ тригонометрична форма комплексного числа також неоднозначна.

Добуток комплексних чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ і $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ знаходиться за формулою

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \qquad (9)$$

тобто

$$|z_1z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|, \arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Правило множення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі: *при множенні двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.*

Частка комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, причому $z_2 \neq 0$, знаходиться за формулою

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \tag{10}$$

тобто

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Правило ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі: *при діленні комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.*

Для піднесення комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до *n*-го ступеня використовується формула

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in Z, \tag{11}$$

яка називається *формулою Муавра*.

Для добування кореня *n*-го ступеня із комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ використовується формула

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{12}$$

де $\sqrt[n]{r}$ – арифметичній корінь *n*-го ступеня, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Приклад. Представити в тригонометричній формі $-2 + 2\sqrt{3}i$

➤ $a = -2, b = 2\sqrt{3}, r = 4$, тому точка, яка відображає число *z*, лежить у ІІ чверті, тобто $\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, значить, $-2 + 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ або

$$-2 + \sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right], k \in Z\ .$$ ➤

Представити в алгебраїчній формі $z = 2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

➤ Підставивши значення $\cos 2\pi = 1, \sin 2\pi = 0$ в дане рівняння, отримаємо $z = 2(1 + i \cdot 0) = 2$ ➤

Знайти добуток: $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

➤ За формулою (9) одержимо

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]==2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=6\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}.$$ ➤

Виконати ділення: $\dfrac{10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]}{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}$.

➤ За формулою (10) одержимо

$$\frac{10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]}{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}=\frac{10}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=5[0+i]=5i.$$ ➤

Піднести до ступеня: 1) $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$.

➤ 1) За формулою Муавра одержимо

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=\cos\left[6\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+i\sin\left[6\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1$$ ➤

Добути корінь $\sqrt{i}$.

➤ 1) Подамо число i у тригонометричній формі: $i=0+1\cdot i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

За формулою (12) одержимо

$$z_k=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\ k=0{,}1,$$

якщо $k=0$, то $z_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$,

якщо $k=1$, то $z_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$ ➤

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ З КОМПЛЕКСНИМ ПОКАЗНИКОМ. ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА. ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Ступінь e^z з комплексним показником $z=x+iy$ визначається рівністю:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Можна довести, що

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

тобто

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (13)$$

Зокрема, при $x=0$ отримується відношення

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \qquad (14)$$

яке називається *формулою Ейлера*.

Для комплексних показників залишаються в силі основні правила дій з показниками: при множенні чисел показники додаються, при діленні – віднімаються, при піднесенні до ступеня –перемножуються.

Показникова функція має період, який дорівнює $2\pi i$, тобто $e^{z+2\pi i} = e^z$. Зокрема, при $z=0$ одержується відношення $e^{2\pi i} = 1$.

Тригонометричну форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можна замінити *показниковою формою*:

$$z = re^{\varphi i}. \qquad (15)$$

Множення, ділення, піднесення до цілого додатного ступеня та добування кореня цілого додатного ступеня для комплексних чисел, заданих в показниковій формі, виконуються за наступними формулами:

$$r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \qquad (16) \qquad \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ r_2\neq 0; \qquad (17)$$

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi}; \qquad (18) \qquad \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}\ (k=0,1,2,\dots,n-1). \qquad (19)$$

Приклад. Знайти показникову форму числа $z_1 = 1+i$. ➤ 1) для заданого числа $z_1 = 1+i$ знаходимо $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, тобто $z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.➤

Знайти алгебраїчну форму числа $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

➤ 1) За умовою маємо $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.➤

Знайти добуток $z_1 z_2$ і частку $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних чисел та записати результати в тригонометричній формі: $z_1 = 3e^{\frac{2}{3}i}$; $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$.

◀ 1) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2}{3}i} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 3 \cdot 6e^{\frac{2}{3}i + \frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5}{6}i} = 18\left(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6}\right)$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2}{3}i}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}i - \frac{i}{6}} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{6}i} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}\right)$ ▶

Обчислити z^4, де $z = 2e^{-3i}$, та представити результати в тригонометричній формі.

◀ $z^4 = \left(2e^{-3i}\right)^4 = 2^4 e^{-3i \cdot 4} = 16e^{-12i} = 16(\cos(-12) + i\sin(-12)) \approx 16(0{,}8438 + 0{,}5366i) \approx 13{,}50 + 8{,}59i$ ▶

Формула Ейлера (14) встановлює зв'язок між тригонометричними функціями і показниковою функцією. Замінивши в ній y на φ і на $-\varphi$, отримаємо

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \; e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Додаючи і віднімаючи ці рівності, отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}, \qquad (20) \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}. \qquad (21)$$

Ці дві прості формули, які також називають формулами Ейлера, виражають тригонометричні функції через показникові і дозволяють алгебраїчним шляхом отримати основні формули тригонометрії.

Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$
$f(\alpha)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0

Знаки тригонометричних функцій

α	Чверть	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	I	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	II	+	–	–	–
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	III	–	–	+	+
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IV	–	+	–	–