Mathématique - TP Fourier

Ibanez Thomas, Lovino Maxime

26 avril 2017

1 Introduction

Pour ce TP il nous a été demandé d'utiliser MatLab pour calculer numériquement des transformées de Fourier (via fft) et leurs inverses (via ifft) et de modifier ces transformée pour créer un filtre.

2 Questions de l'énoncé

2.1 Serie de Fourier de f(t)

Soit la fonction $f(t) = cos(2\pi t) + 0.9 * cos(2\pi 10t)$
Nous devons calculer les coefficients de la serie de Fourier de cette fonction (rappel, une serie de fourier est calculée par cette formule :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k * cos(2\pi ftk) + b_k * sin(2\pi ftk)$$

Où

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

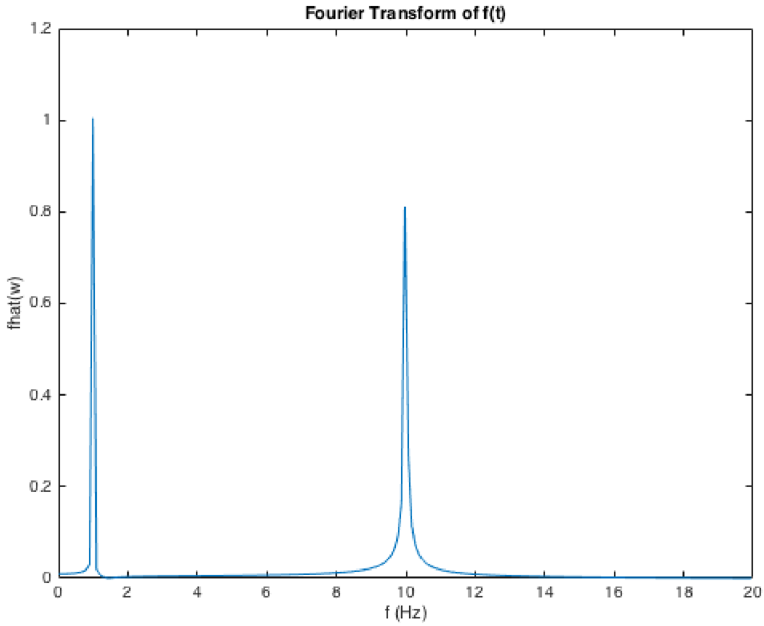
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) * cos(2\pi ftk)dt \ \forall k > 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) * sin(2\pi ftk)dt \ \forall k > 0$$

La periode de cette fonction est de 1
Analytiquement nous (et wolfram) obtenons $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{2...9} = 0$, $a_{10} = 0.9$ (tous les coefficient b_k sont nuls)

2.2 Transformée de f(t)

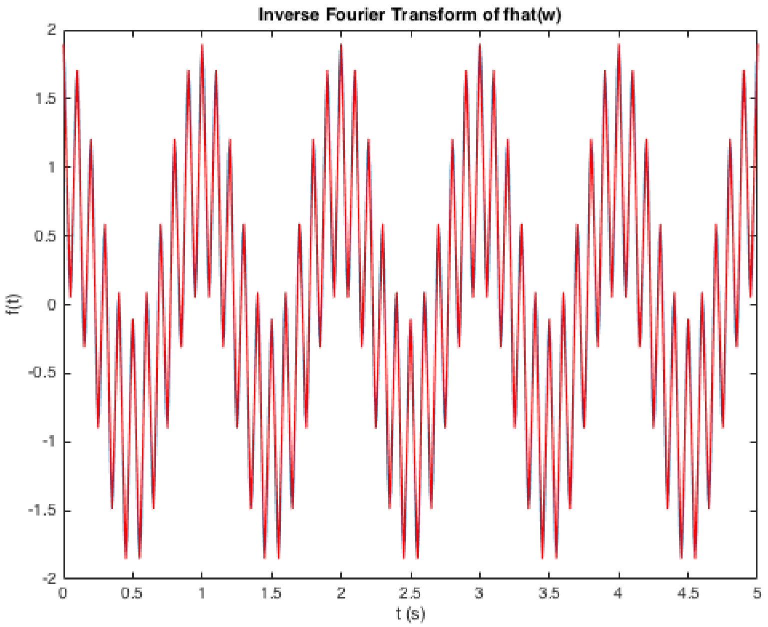
La transformée de Fourier de cette fonction calculée numériquement par matlab donne ceci :



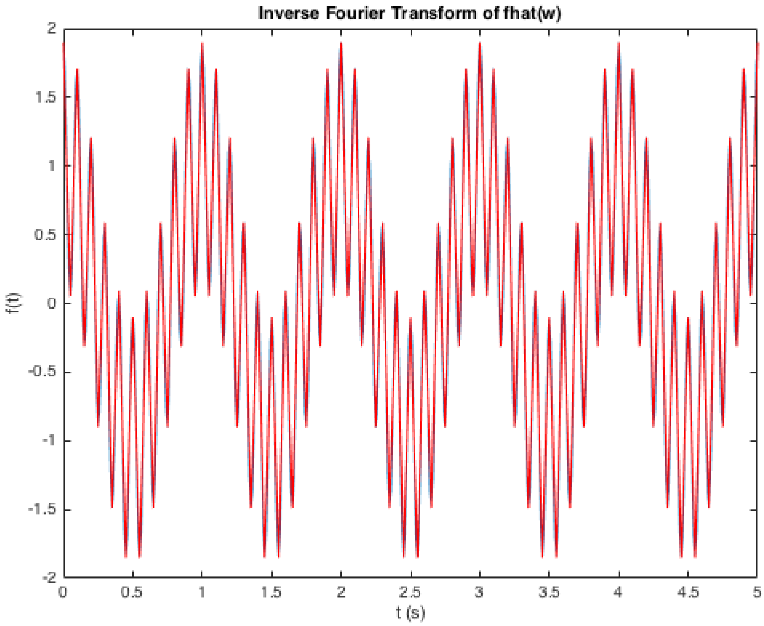
On obtiens donc 2 "diracs" a 1 et 10 Hz ce qui correspond bien au fréquences trouvées dans la serie de Fourier. Les hauteurs sont respectivement 1 et 0.9 ce qui correspond également au coefficients trouvés dans la serie de Fourier.

2.3 Transformée inverse de $\hat{f}(\omega)$

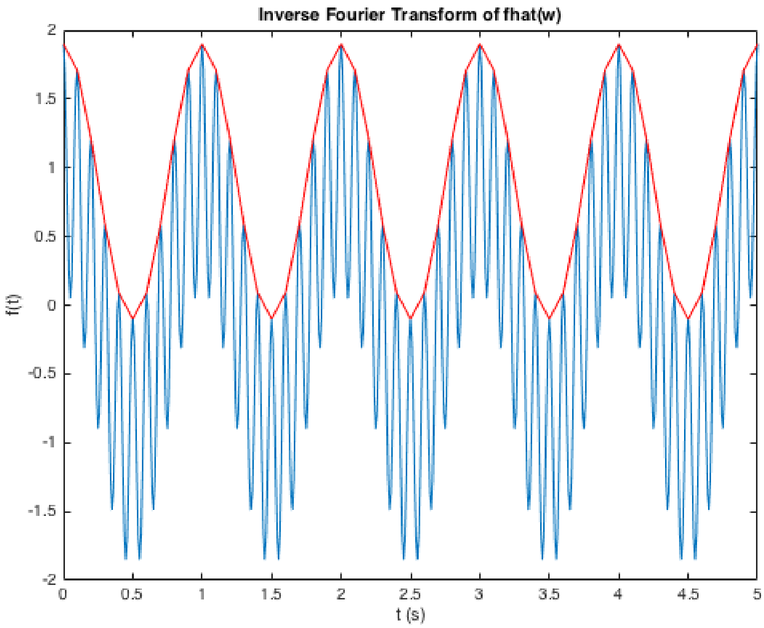
Si on fait la transformée inverse de $\hat{f}(\omega)$ On obtient une fonction très proche de l'originale.



La fonction originale est tracée en bleu, et la fonction recomposée est tracée en rouge. (avec une periode d'échantillonnage de 0.025 [s])



La fonction originale est tracée en bleu, et la fonction recomposée est tracée en rouge. (avec une periode d'échantillonnage de 0.05 [s])

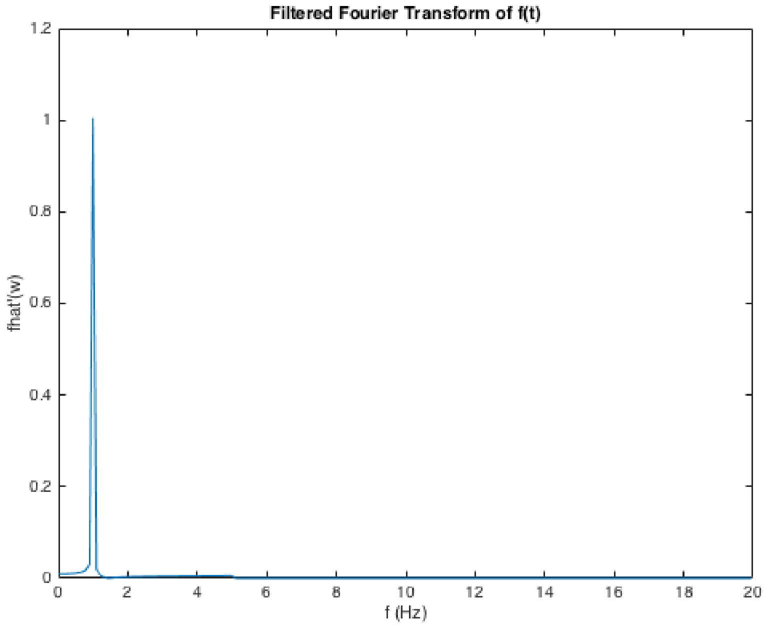


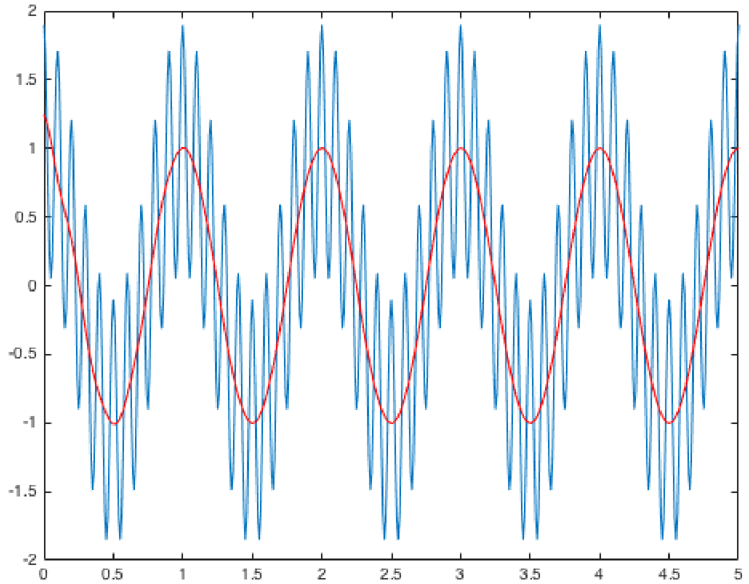
La fonction originale est tracée en bleu, et la fonction recomposée est tracée en rouge. (avec une periode d'échantillonnage de 0.1 [s])

Moins on a d'échantillons, moins la fft est priécise et donc moins la recomposition est proche de l'originale.

2.4 Filtre

Si on filtre toutes les fréquences $>$ 5 Hz on supprime le deuxième pic et on trouve la fonction suivante après ifft.

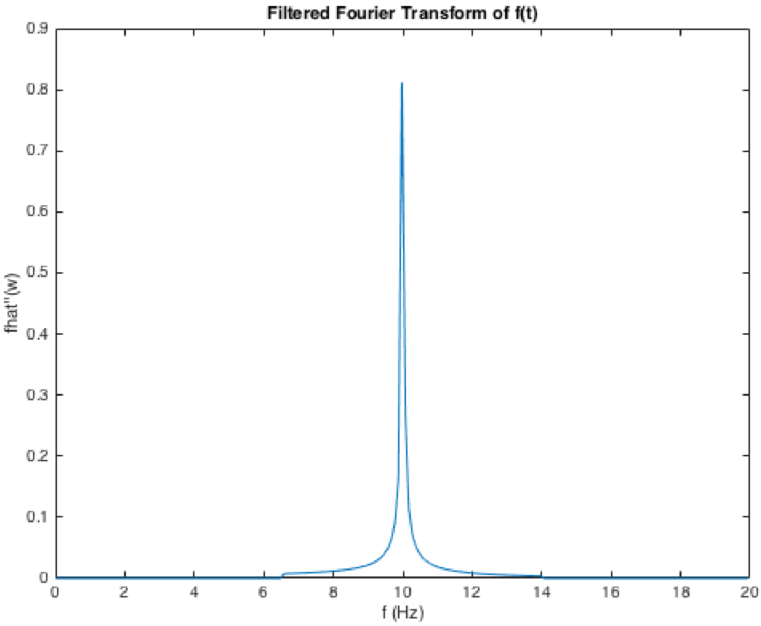


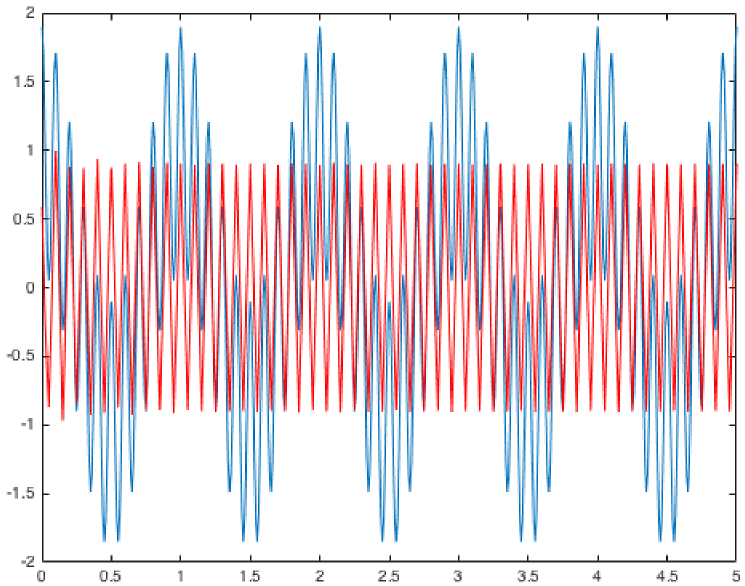


La fonction originale est tracée en bleu, et la fonction filtrée est tracée en rouge.

On observe que la fonction filtrée correspond bien a la sinusoidale de période 1 et d'amplitude 1 qui compose la fonction originale.

Si on filtre toutes les fréquences < 5 Hz on supprime le premier pic et on trouve la fonction suivante après ifft.



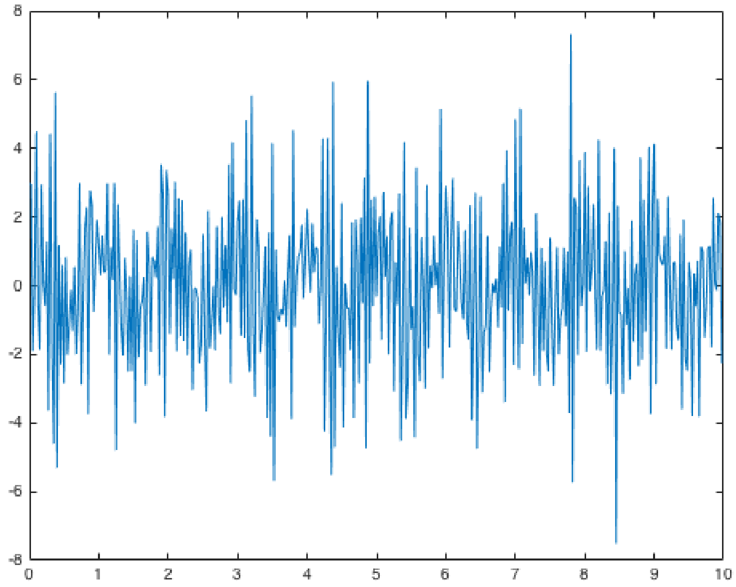


La fonction originale est tracée en bleu, et la fonction filtrée est tracée en rouge.

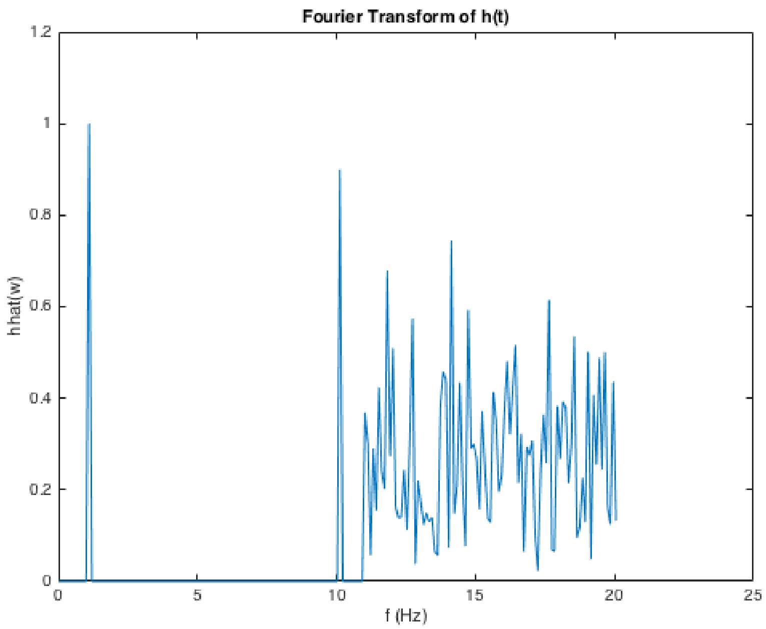
On observe que la fonction filtrée correspond a la sinusoidale de période 0.1 et d'amplitude 0.9 qui compose la fonction originale

2.5 MyData

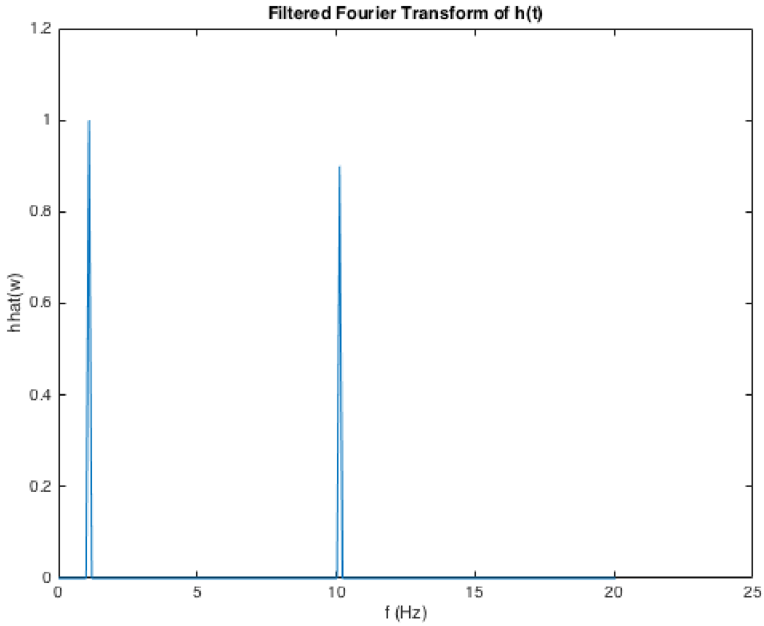
La fonction h(t) donne ce graphique :



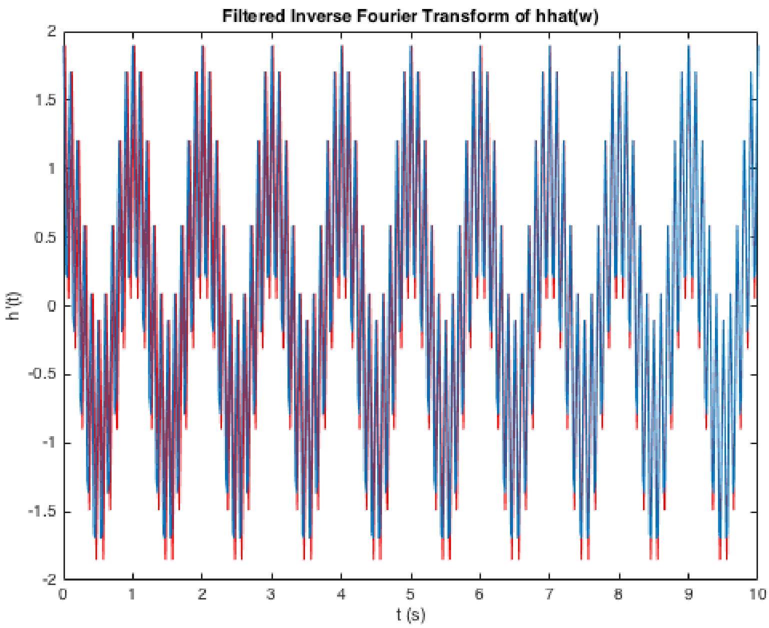
Sa transformée de Fourier est la suivante :



Après filtrage la transformée ressemble a ceci :



Ce qui donne la fonction suivante



On constate que $h(t) \approx f(t)$

3 Fonction de filtrage

4 Affichage

5 Script Principal