Математическая логика.
Домашнее задание 3

Легостаев Глеб

7 июня 2025 г.

Задача 1.

Решение:

Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \{=, \cdot, e\}$, где:
$\cdot$ — двуместная функция
$=$ — двуместный предикат
e — константа (нейтральный элемент).
Рассмотрим интерпретацию этой сигнатуры на множестве G, где $\cdot$ интерпретируется как групповая операция, $=$ как обычное равенство, а e как единичный элемент группы.

Надо написать аксиомы, соответствующие *ассоциативности*, *наличию нейтрального* и *обратного элементов*:
Ассоциативность: $\forall x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Наличие нейтрального элемента: $\forall x \in G : e \cdot x = x \cdot e = x$
Наличие обратного элемента: $\forall x \in G\ \exists\ y \in G : x \cdot y = y \cdot x = e$

Задача 2.

Пусть $J = \mathbb{Z}_{>0}$; $\mathrm{div}(y, x)$ означает, что $y \vdots x$

Равняться единице: $\mathrm{One}(x) = \forall y \in J : \mathrm{div}(y, x)$. Все числа делятся на единицу и на само себя, но мы показали что все числа делятся на $x \Rightarrow x$ — единица.

Быть простым числом: $\mathrm{Prime}(x) = \neg\mathrm{One}(x) \ \wedge\ \forall d : (\mathrm{div}(x, d) \to (\mathrm{One}(d) \vee (d = x)))$. Показали, что если число не единица и есть только два делителя, то оно простое.

Быть равным двойке: НЕВЫРАЗИМО, потому что можем предъявить такой автоморфизм:

$$f(2) = 5$$

$$f(5) = 2$$

Причем заменяем двойки на пятерки (и наоборот) в разложении числа на простые. Покажем, почему выполняются предикатные символы сигнатуры: если выполнялось, что $x \vdots y$, то пусть $x = 2^a * 5^b * c, y = 2^d * 5^e * f$, где $c \vdots f$ и c, и f не содержат в разложении двоек и пятерок. Так как $x \vdots y$, то:

$$d \leq a$$

$$e \leq b$$

После применения автоморфизма получим, что

$$f(x) = 5^a * 2^b * c$$

$$f(y) = 5^d * 2^e * f$$

Так как $d \leq a$ и $e \leq b$ и $c \vdots f$, то $f(x) \vdots f(y)$.

А также остается верным предикатный символ = (очевидно почему).

Биективность тоже очевидна, так как есть взаимооднозначное соответствие между числами вида $2^a 5^d C$ и $2^d 5^a C$, а все остальные числа, не содержащие 2 и 5, переходят сами в себя.

Таким образом, f это действительно автоморфизм. Теперь покажем, что предикат P - быть равным двойке - не сохраняется при действии f. То есть $P(f(x)) \neq P(x)$. Пусть $x = 2 \Rightarrow P(x) = true$, но $P(f(x) = P(5) = false \Rightarrow P(f(x)) \neq P(x)$.

Задача 3.

«Быть нулем» в множестве $\mathbb{Z}$... : Можем предъявить автоморфизм $f : x \to x + 1$:

1. такое отображение биективно. Докажем инъективность и сюръективность:
Инъекция: пусть $f(x) = f(y)$, тогда $x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$
Сюръекция: докажем, что $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists\ x \in Z : f(x) = y$. В качестве такого x можно всегда выбрать(так как мы в $\mathbb{Z}$) $y - 1, \text{так как} f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$.

2. если $x = y$, то $f(x) = x + 1 = y + 1 = f(y)$ — сохранение «=»

3. если $x < y$, то $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$ — сохранение порядка

Итог: Если $x = 0$, то $P(f(x)) = P(0 + 1) = P(1) \neq P(x)$

«Быть единицей» в множестве $\mathbb{Q}$... : Можем предъявить автоморфизм $f : x \to 2x$:

1. отображение биективно, так как если $f(x) = f(y)$, то $2x = 2y \Rightarrow x = y$ (инъекция). а также для любого y можно взять $y/2$, так как $f(y/2) = y$ (сюръекция)

2. если $x = y$, то $f(x) = 2x = 2y = f(y)$ — сохранение «=»

3. если $x < y$, то $f(x) = 2x < 2y = f(y)$ — сохранение порядка

4. $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$ — сохранение «+»

Итог: Если $x = 1$, то $P(f(x)) = P(1 * 2) = P(2) = false$. Но в то же время $P(x) = P(1) = true$. Значит, $P(f(x)) \neq P(x)$

«Быть равным $\frac{1}{2}$» в множестве $\mathbb{R}$... : Можем предъявить автоморфизм $f : x \to x^3$:

1. отображение биективно, так как если $f(x) = f(y)$, то $x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ (инъекция). А также для любого y можно взять $y^{\frac{1}{3}}$ и будет выполняться $f(y^{\frac{1}{3}}) = y$ (сюръекция)

2. если $x = y$, то $f(x) = x^3 = y^3 = f(y)$ — сохранение «=»

3. если $x < y$, то $f(x) = x^3 < y^3 = f(y)$, так как функция возрастающая на $\mathbb{R}$ — сохранение порядка

4. $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$ — сохранение «0» и «1»

Итог: Если $x = \frac{1}{2}$, то $P(f(x)) = P(\frac{1}{8}) = false$. Но в то же время $P(x) = P(\frac{1}{2}) = true$. Значит, $P(f(x)) \neq P(x)$

Задача 4.

Решение:

«Быть константой 2C» через предикат «Быть константой C»:

Для начала определим единицу:

$$\text{One}(x) \equiv \forall y \neg (S(y) = x)$$

Тогда предикат «Быть константой C» записывается вот так:

$$\text{ConstC}(x) \equiv \exists z : (\text{One}(z) \wedge S(S(S(...(S(z))...))) = x), \text{ применяем (C - 1) раз S}$$

А тогда предикат «Быть константой 2C» записывается вот так:

$$\text{Const2C}(x) \equiv \exists y : (\text{ConstC}(y) \wedge (x = S(S(...S(y)...)))), \text{применяем C раз S}$$