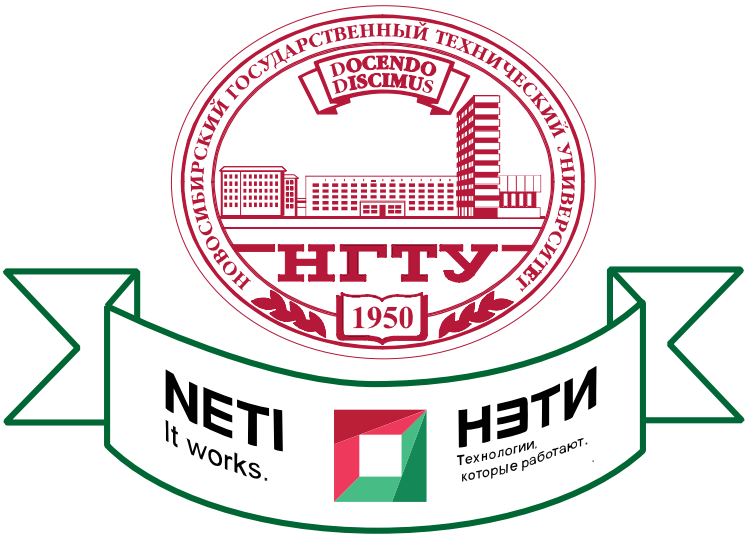
Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

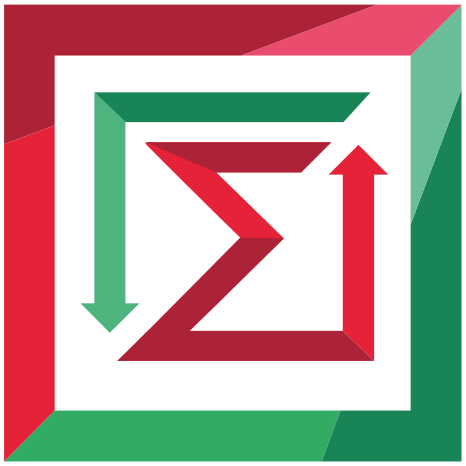
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»



Кафедра прикладной математики

Курсовая работа

по дисциплине «Численные методы»



Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМ-71
Вариант:	41
Студент:	Востриков Вячеслав
Преподаватель:	Персова М.Г.

Новосибирск

2019

1. Задание

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

2. Математическая модель

Пусть дана эллиптическая краевая задача, определяемая дифференциальным уравнением:

$$-div\,(\lambda\,grad\,u) + \gamma u = f \text{ (1)}$$

С краевыми условиями на границах :

$u|_{s_1} = u_g$- первое краевое условие *(2)*

$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}|_{s_2} = \theta$ - второе краевое условие *(3)*

$(\lambda\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u - u_\beta))|_{s_3} = 0$- третье краевое условие *(4)*

2.1. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркина

Умножим скалярно уравнение *(1)* на пробную функцию ψ и проинтегрируем обе части уравнения по всей области Ω:

$$\int_\Omega -div(\lambda grad(u))\psi d\Omega + \int_\Omega \gamma u\psi \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega f\psi \mathrm{d}\Omega,$$

Преобразуем первый интеграл по формуле Грина:

$$\int_\Omega -div(\lambda grad(u))\psi d\Omega = \int_\Omega (\lambda grad(u))grad(\psi)d\Omega - \int_S \lambda\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$\int_\Omega (\lambda grad(u))grad(\psi)d\Omega - \int_S \lambda\frac{\partial u}{\partial n}dS + \int_\Omega \gamma u\psi \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega f\psi \mathrm{d}\Omega$$

Интеграл по границе S разобьем на три интеграла по границам S_1, S_2, S_3 , на которых заданы краевые условия:

$\int_{S_1} \lambda\frac{\partial u}{\partial n}\psi = 0$, функции ψ построим такие, что на границе S_1 они равны 0.

$\int_{S_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi ds = \int_{S_2} \theta \psi ds$ - учет второго краевого условия

$\int_{S_3} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \psi ds = \int_{S_3} \beta(u - u_\beta) \psi ds$ - учет третьего краевого условия

В итоге получим:

$$\int_\Omega \big(\lambda grad(u)\big) grad(\psi) d\Omega + \int_\Omega \gamma u \psi \mathrm{d}\Omega - \int_{S_2} \theta \psi ds - \int_{S_3} \beta\big(u - u_\beta\big)\psi ds = \int_\Omega f \psi \mathrm{d}\Omega$$

$$\int_\Omega \big(\lambda grad(u)\big) grad(\psi) d\Omega + \int_\Omega \gamma u \psi \mathrm{d}\Omega + \int_{S_3} \beta u \psi ds = \int_\Omega f \psi \mathrm{d}\Omega + \int_{S_2} \theta \psi ds + \int_{S_3} \beta u_\beta \psi ds$$

2.2 Построение дискретного аналога

Далее разобьем область $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$

Решение задачи будем искать в виде: $u^h = \sum_{i=1}^n q_i * \psi_i$, перебирая $\psi = \psi_i$ получим:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \left(\int_\Omega \lambda * grad\, \psi_i * grad \psi_j d\Omega + \int_\Omega \gamma * \psi_i * \psi_j d\Omega + \beta * \int_{S_3} \psi_i * \psi_j \, d\mathrm{S} \right) - \int_{S_2} \theta * \psi_i d\mathrm{S}$$
$$- \int_{S_3} \beta * u_\beta * \psi_i d\mathrm{S} = \int_\Omega f * \psi_i d\Omega$$

где функции ψ_i есть базисные функции, которыми аппроксимируются функция u и f. После суммирования по всем функциям ψ_i получим СЛАУ относительно весов q_i .

$$Aq = b$$

$$A_{ij} = \begin{cases} \int_\Omega \lambda * grad\, \psi_j * grad \psi_i d\Omega + \int_\Omega \gamma * \psi_j * \psi_i d\Omega + \beta * \int_{S_3} \psi_j * \psi_i \, d\mathrm{S}, \mathrm{i} \epsilon \mathrm{N}_0 \\ \delta_{ij}, i \notin N_0 \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \int\limits_{S_2} \theta * \psi_i dS + \int\limits_{S_3} \beta * u_\beta * \psi_i dS + \int\limits_{\Omega} f * \psi_i d\Omega, \text{i}\epsilon\text{N}_0 \\ u_g(x_i), i \notin N_0 \end{cases}$$

в которых символ δ_{ij} – символ Кронекера (δ_{ij}=1, если j=i иначе δ_{ij}=0)

где матрица А представлена в виде суммы некоторых матриц.

$G_{ij} = \int\limits_{\Omega} \lambda grad\psi_i grad\psi_j d\Omega$ - матрица жесткости

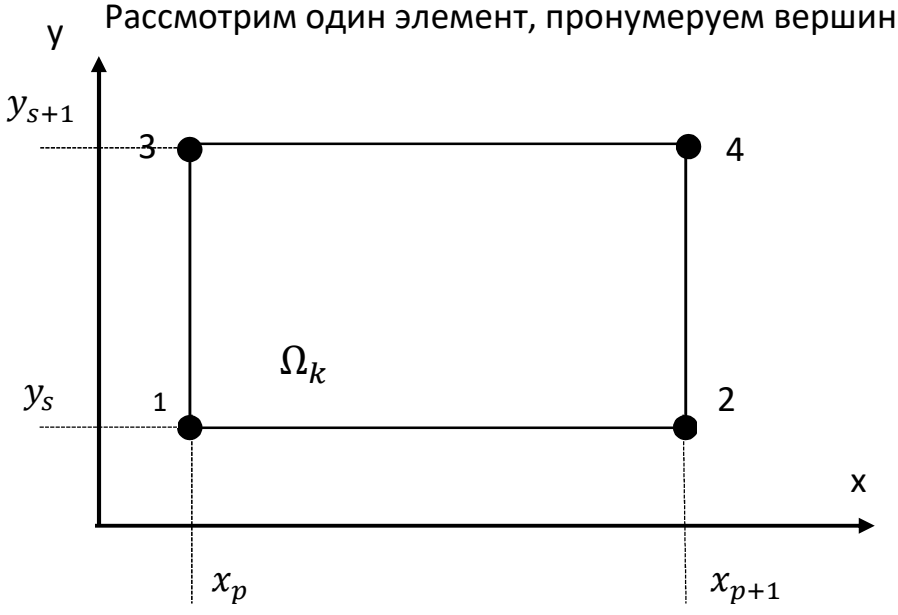
$M_{ij} = \int\limits_{\Omega} \gamma\psi_i\psi_j d\Omega$ - матрица массы

$F_i = \int\limits_{\Omega} f\psi_i d\Omega$. – вектор правой части.

3. Базисные функции

Разобьём область Ω на прямоугольники $\Omega_k : \Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Omega_k$

Рассмотрим один элемент, пронумеруем вершины следующим образом:



Рассмотрим билинейные базисные функции. Эти функции определяются следующим образом:

$X_1(x) = \frac{x_{p+1}-x}{h_x}$, $X_2(x) = \frac{x-x_p}{h_x}$, $h_x = x_{p+1} - x_p$

$Y_1(y) = \frac{y_{s+1}-y}{h_y}, \quad Y_2(y) = \frac{y-y_s}{h_y}, \; h_y = y_{s+1} - y_s$

Локальные базисные функции на конечном элементе Ω_k представляются в виде:

$\psi_1(x,y) = X_1(x)Y_1(y)$

$\psi_2(x,y) = X_2(x)Y_1(y)$

$\psi_3(x,y) = X_1(x)Y_2(y)$

$\psi_4(x,y) = X_2(x)Y_2(y)$

Таким образом каждая из функций равна 1 в одном из узлов и 0 в остальных. Значит вес q_i фактически является значением функции u в i - ом узле сетки.

4. Построение локальных матриц и локального вектора правой части.

Рассмотрим следующие локальные матрицы:

$G_{ij} = \int_\Omega \lambda \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) d\Omega$ – матрица жесткости

$M_{ij} = \int_\Omega \gamma \, \psi_i \psi_j \, d\Omega$ – матрица массы

Матрица жёсткости:

$$G = \frac{\lambda}{6}\frac{h_y}{h_x}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{6}\frac{h_x}{h_y}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Матрица массы:

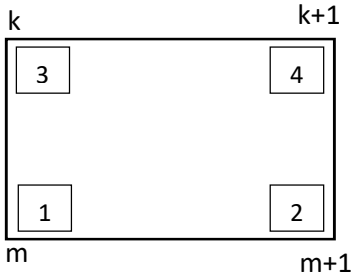
$$M = \gamma \frac{h_x h_y}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части:

$$F = \begin{bmatrix} M_{11}f_1 + M_{12}f_2 + M_{13}f_3 + M_{14}f_4 \\ M_{21}f_1 + M_{22}f_2 + M_{23}f_3 + M_{24}f_4 \\ M_{31}f_1 + M_{32}f_2 + M_{33}f_3 + M_{34}f_4 \\ M_{41}f_1 + M_{42}f_2 + M_{43}f_3 + M_{44}f_4 \end{bmatrix}$$

5.Сборка глобальной матрицы и вектора правой части

Для занесения результатов сборки локальной матрицы в глобальную необходимо установить соответствие между локальной нумерацией узлов и глобальной.



На рисунке показано соответствие между локальной и глобальной нумерациями. Таким образом, изменения глобальной матрицы будут иметь вид:

$$A_{m,m} = G_{11} + M_{11}$$

$$A_{m,m+1} = G_{12} + M_{12}$$

$$A_{m,k} = G_{13} + M_{13}$$

… … …

$$A_{k,k+1} = G_{34} + M_{34}$$

$$A_{k+1,k+1} = G_{44} + M_{44}$$

Аналогично выполняется занесение результатов в вектор правой части.

6. Краевые условия.

6.1.Краевые условия первого рода.

Для учета первых краевых условий в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим вместо диагонального элемента глобальной матрицы достаточно большое число, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части это число, умноженное на значение краевого условия.

Пусть в i-том узле задано первое краевое условие, тогда то i-е уравнение СЛАУ примет вид $q_i \cdot 10^{20} = u_g \cdot 10^{20}$, или $q_i = u_g$.

6.2.Краевые условия второго рода

Учет краевого условия второго рода осуществляется за счет добавления в глобальный вектор правой части слагаемого $\int_{\Gamma_k} \theta \psi_i dS$, где ребро Γ_k принадлежит конечному элементу Ω_k и содержит узлы с номерами k_1, k_2.

Вклад в вектор правой части будем вычислять по формуле:

$$b^{S_2} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2\theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 + 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

После вычисления вектора его компоненты заносятся в глобальный вектор на позиции k_1 и k_2.

6.3.Краевые условия третьего рода.

При учете третьих краевых условий формируются локальная матрица и вектор правой части, которые заносятся в СЛАУ аналогично локальной матрицы конечного элемента и локального вектора правой части конечного элемента.

Вклад в матрицу:

$$A^{S_3} = \frac{\beta h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Вклад в вектор правой части, при представлении u_β на Г в виде разложения по базисным функциям ψ_1 и ψ_2 :

$$b^{S_3} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2u_{\beta 1} + u_{\beta 2} \\ u_{\beta 1} + 2u_{\beta 2} \end{bmatrix}$$

7. Формирование портрета глобальной матрицы.

Портрет глобальной матрицы формируется при помощи дополнительного массива, в который заносятся все связи между узлами (назовем узлы связанными, если существует конечный элемент, содержащий каждый из них), затем под каждую пару связанных узлов выделяется память в глобальной матрице, построенной в разреженном строчном формате.

8. Код программы.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
#include <locale.h>
#include <memory.h>
#include "math.h"

using namespace std;

#define STR 15                // количество выводимых знаков после запятой
#define EPS 1e-15                // точность решения СЛАУ
#define MAX_ITER 1000          // количество итераций
#define MEMORY  200000     // объем памяти

typedef double real;

real* global;       // указатель области памяти
real* GridX;            // сетка для X
real* GridY;            // сетка для У
real* di;                   // диагональ исходной матрицы
real* ggl;                  // нижний треугольник исходной матрицы
real* ggu;                  // верхний треугольник исходной матрицы
real* r;                // вспомогательный вектор
real* x;                // вектор решения
real* f;                // вектор правой части
real* p;                // вспомогательный вектор
real* z;                // вспомогательный вектор
real* q;                // вспомогательный вектор
real* L;                // нижний треугольник обусловленной матрицы
real* U;                // верхний треугольник обусловленной матрицы
real* diag;             // диагональ обусловленной матрицы
real* s;                // вспомогательный вектор
real* sout;             // вспомогательный вектор
real eps;                   // точность решения

int* ig;            // портрет матрицы
int* jg;            // позиции элементов матрицы
```

```
int N;                  // размерность СЛАУ
int Nx;                 // количество по X
int Ny;                 // количество по Y


int     LU();               // функция факторизации
void    assembling();   // сборка глобальной матрицы
void    get_info();     // получение параметов
void    read_grid();    // чтение сетки

void    AddToMatrix(int, int, real);         // добаление в матрицу
real    GetLambda(real, real);                  // коэффициент лямбда
real    GetGamma(real, real);                   // коэффициент гамма
real    GetF(real, real);                               // правая часть
real    GetU_(real, real);                      // точное решение

void    GaussL(real*, real*);                   // Решение СЛАУ
void      GaussU(real*, real*);                 // Решение СЛАУ
void      MultMatrixOnVector(real*, real*);     // Умножение матрицы на вектор
real    ScalarMult(real*, real*);                       // Скалярное произведение векторов
real    sum(int, int);                      // Скалярное произведение факторизации

void    method();                                       // Сборка метода
void    run();                                  // Выполнение метода
void    result();                           // Вывод результата в файл


//      Задание парамметров и функции
real GetLambda(real x, real y)
{
        return 1.0;
}
real GetGamma(real x, real y)
{
        return 0.;
}
real GetF(real x, real y) // F
{
        return 1.;
}
real GetU_(real x, real y) // U
{
        return x+y;
}


void method()
{
        int i, k;
        // Получение информации о задаче
        global = new double[MEMORY];                                            // выделение памяти
        memset(global, 0, MEMORY * sizeof(double));     // заполнение нулями
        get_info();

        // Настройка указателей
        ig = (int*)global;
        jg = (int*)(global + N + 1);

        // Генерация количества элементов матрицы
        int istep = 0;
        for (i = 0; i < N + 1; i++)
        {
                ig[i] = istep;
                istep += i;
        }

        // Генерация позиций элементов матрицы
        istep = 0;
        for (i = 0; i < N; i++)
                for (k = 0; k < i; k++)
                {
                        jg[istep] = k;
                        istep++;
                }

        //      Настройка указателей
        ggl = global + N + 1 + ig[N];
```

```
        ggu = global + 2 * (ig[N]) + N + 1;
        di = global + 3 * (ig[N]) + N + 1;
        f = di + N;
        r = f + N;
        z = r + N;
        p = z + N;
        q = p + N;
        diag = q + N;
        L = diag + N;
        U = L + ig[N];
        x = U + ig[N];
        s = x + N;
        sout = s + N;
        GridX = sout + N;
        GridY = GridX + Nx;

        // Чтение сетки
        read_grid();

        // Сборка глобальной матрицы
        assembling();
}

void get_info()
{
        ifstream file("Area.txt");
        file >> Nx >> Ny;
        N = Nx * Ny;                                    // размер матрицу СЛАУ
        file.close();
}

void read_grid()
{
        // Чтение сетки по оси X
        ifstream flie_x("GridX.txt");
        for (int i = 0; i < Nx; i++)
                flie_x >> GridX[i];
        flie_x.close();

        // Чтение сетки по оси У
        ifstream flie_y("GridY.txt");
        for (int i = 0; i < Ny; i++)
                flie_y >> GridY[i];
        flie_y.close();
}


void assembling()
{
        int i, k, i1, k1;

        int Index[4];   // номера узлов
        real lambda, gamma, px, y, xp, yp, hx, hy;      // параметры КЭ
        real tmp, hx2, hy2, ud, u1, u2, u3;

        real fv[4];             // значения правой части
        real B[4][4];   // матрица жёсткости
        real C[4][4];   // матрица масс
        real F[4];              // вектор правой части

        // Процедура ассемблирования глобальной матрицы
        for (k = 0; k < Ny - 1; k++)
                for (i = 0; i < Nx - 1; i++)
                {
                        px = GridX[i];  // опорная точка
                        y = GridY[k];

                        // верхние точки
                        xp = GridX[i + 1];
                        yp = GridY[k + 1];

                        // шаги
                        hx = xp - px;
                        hy = yp - y;
                        hx2 = hx * hx;
                        hy2 = hy * hy;
```

```
// коэффициенты
lambda = GetLambda(px + hx / 2.0, y + hy / 2.0);
gamma = GetGamma(px + hx / 2.0, y + hy / 2.0);

// значения правой части
fv[0] = GetF(px, y);
fv[1] = GetF(xp, y);
fv[2] = GetF(px, yp);
fv[3] = GetF(xp, yp);

// Задаём значения матрицы жёсткости
tmp = 1.0 / (hx * hy);

ud = (hx2 + hy2) * tmp / 3;
u1 = (hx2 - 2 * hy2) * tmp / 6;
u2 = -(2 * hx2 - hy2) * tmp / 6;
u3 = -(hx2 + hy2) * tmp / 6;


B[0][0] = ud;
B[0][1] = u1;
B[0][2] = u2;
B[0][3] = u3;

B[1][0] = u1;
B[1][1] = ud;
B[1][2] = u3;
B[1][3] = u2;

B[2][0] = u2;
B[2][1] = u3;
B[2][2] = ud;
B[2][3] = u1;

B[3][0] = u3;
B[3][1] = u2;
B[3][2] = u1;
B[3][3] = ud;

// Задаём значения матрицы масс
ud = hx * hy / 9.0;
u1 = hx * hy / 18.0;
u2 = u1;
u3 = hx * hy / 36.0;

C[0][0] = ud;
C[0][1] = u1;
C[0][2] = u2;
C[0][3] = u3;

C[1][0] = u1;
C[1][1] = ud;
C[1][2] = u3;
C[1][3] = u2;

C[2][0] = u2;
C[2][1] = u3;
C[2][2] = ud;
C[2][3] = u1;

C[3][0] = u3;
C[3][1] = u2;
C[3][2] = u1;
C[3][3] = ud;

//Задаём значения вектора правой части

for (int j = 0; j++; j < 4)
        F[j] = 0;

for (int j = 0; j < 4; j++)
        for (int k = 0; k < 4; k++)
                F[j] += C[j][k] * fv[k];

//Сборка глобальной матрицы

Index[0] = Nx * k + i;
```

```
                        Index[1] = Nx * k + i + 1;
                        Index[2] = Nx * (k + 1) + i;
                        Index[3] = Nx * (k + 1) + i + 1;

                        for (i1 = 0; i1 < 4; i1++)
                        {
                                for (k1 = 0; k1 < 4; k1++)
                                        AddToMatrix(Index[i1], Index[k1], lambda * B[i1][k1] + gamma *
C[i1][k1]);
                                f[Index[i1]] += F[i1];
                        }
                }

        // Учёт краевых условий первого рода
        for (i = 0; i < Nx; i++)                // параллельно оси X
        {
                px = GridX[i];
                y = GridY[0];
                di[i] = 1.0e+50;
                f[i] = 1.0e+50 * GetU_(px, y);
                y = GridY[Ny - 1];
                di[Nx * (Ny - 1) + i] = 1.0e+50;
                f[Nx * (Ny - 1) + i] = 1.0e+50 * GetU_(px, y);
        }

        for (k = 0; k < Ny; k++)                // параллельно оси Y
        {
                y = GridY[k];
                px = GridX[0];
                di[k * Nx] = 1.0e+50;
                f[k * Nx] = 1.0e+50 * GetU_(px, y);
                px = GridX[Nx - 1];
                di[(k + 1) * Nx - 1] = 1.0e+50;
                f[(k + 1) * Nx - 1] = 1.0e+50 * GetU_(px, y);
        }
}



//      Добавление элементов в матрицу
void AddToMatrix(int i, int j, real el)
{
        int k;
        if (i == j) di[i] += el;
        else
        {
                if (i > j)
                {
                        for (k = ig[i]; k < ig[i + 1]; k++)
                                if (jg[k] == j) ggl[k] += el;
                }
                else
                {
                        for (k = ig[j]; k < ig[j + 1]; k++)
                                if (jg[k] == i) ggu[k] += el;
                }
        }
}



//-----------------LOC-------------------
//      Факторизация
int LU()
{
        int i, j;
        for (i = 0; i < N; i++)
        {
                for (j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++)
                {
                        L[j] = (ggl[j] - sum(i, jg[j]));
                        U[j] = (ggu[j] - sum(jg[j], i)) / diag[jg[j]];
                }
                diag[i] = di[i] - sum(i, i);
        }
        return 0;
```

```
}

//	Решение нижнего треугольника
void GaussL(real* in, real* out)
{
	int i, j;
	real result;
	for (i = 0; i < N; i++)
	{
		result = 0;
		for (j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++)
		{
			result += L[j] * out[jg[j]];
		}
		out[i] = (in[i] - result) / diag[i];
	}
}

//	Решение верхнего треугольника
void GaussU(real* in, real* out)
{
	int i, j;
	for (i = 0; i < N; i++) out[i] = in[i];
	for (i = N - 1; i >= 0; i--)
	{
		for (j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++)
		{
			out[jg[j]] -= U[j] * out[i];
		}
	}
}
//	Умножение матрицы на вектор
void MultMatrixOnVector(real* in, real* out)
{
	int i, j;
	real* out1;
	out1 = new real[N];
	for (i = 0; i < N; i++)
	{
		out1[i] = di[i] * in[i];
		for (j = ig[i]; j < ig[i + 1]; j++)
		{
			out1[i] += ggl[j] * in[jg[j]];
			out1[jg[j]] += ggu[j] * in[i];
		}
	}

	for (i = 0; i < N; i++)
		out[i] = out1[i];
	delete[] out1;
}

//	Скалярное произведение
real ScalarMult(real* v1, real* v2)
{
	int i;
	real result;
	result = 0;
	for (i = 0; i < N; i++)
	{
		result += v1[i] * v2[i];
	}
	return result;
}

//	Скалярное произведение для факторизации
real sum(int i, int j)
{
	int k, l, find;
	real result;
	result = 0.0;
	if (i == j)
	{
		for (k = ig[i]; k < ig[i + 1]; k++)
			result += U[k] * L[k];
	}
	else
```

```
	{
		// верхний треугольник
		if (i > j)
		{
			for (k = ig[j]; k < ig[j + 1]; k++)
			{
				find = 0;
				for (l = ig[i]; l < ig[i + 1] && find == 0; l++)
				{
					if (jg[l] == jg[k])
					{
						result += U[k] * L[l];
						find = 1;
					}
				}
			}
		}
		// нижний треугольник
		else
		{
			for (l = ig[i]; l < ig[i + 1]; l++)
			{
				find = 0;
				for (k = ig[j]; k < ig[j + 1] && find == 0; k++)
				{
					if (jg[l] == jg[k])
					{
						result += U[k] * L[l];
						find = 1;
					}
				}
			}
		}

	}
	return result;
}

//	Основная функция метода
void run()
{
	int iter;
	int i, check, stop;
	real alpha, alphazn, alphach, beta, betach, betazn, CheckExit;

	// Факторизация
	check = LU();
	if (check != 0) cout << "Нельзя выполнить факторизацию" << check + 1 << endl;

	// Инициализация
	stop = 0;
	for (i = 0; i < N; i++) x[i] = 0;
	GaussL(f, r);
	GaussU(r, z);
	MultMatrixOnVector(z, q);
	GaussL(q, p);

	// Процесс решения СЛАУ
	for (iter = 0; iter < MAX_ITER && stop == 0; iter++)
	{
		alphach = ScalarMult(p, r);
		alphazn = ScalarMult(p, p);
		alpha = alphach / alphazn;
		for (i = 0; i < N; i++) x[i] += alpha * z[i];
		for (i = 0; i < N; i++) r[i] -= alpha * p[i];
		GaussU(r, s);
		MultMatrixOnVector(s, sout);
		GaussL(sout, q);
		betazn = ScalarMult(p, p);
		betach = ScalarMult(p, q);
		beta = -betach / betazn;
		//GaussU(r,s);
		for (i = 0; i < N; i++) z[i] = beta * z[i] + s[i];
		for (i = 0; i < N; i++) p[i] = beta * p[i] + q[i];
		CheckExit = ScalarMult(r, r);
		if (CheckExit < EPS) stop = 1;
	}
```

```
}


//-------------------------------------------------------
void result()
{
	int i, k, num = 0;
	real px, y, func, res = 0.0, norm = 0.0, tmp;

	ofstream output("result.txt");
	output << "X" << setw(STR + 8) << "Y" << setw(STR + 8)
		<< "U" << setw(STR + 8) << "U*" << setw(STR + 8) << "U* - U" << endl;

	for (k = 0; k < Ny; k++)
		for (i = 0; i < Nx; i++)
		{
			px = GridX[i];
			y = GridY[k];
			func = GetU_(px, y);
			tmp = fabs(x[num] - func);
			res += tmp * tmp;
			norm += func * func;

			output << setprecision(STR) << px
				<< setw(STR + 8) << y
				<< setw(STR + 8) << x[num]
				<< setw(STR + 8) << func;
			output << setw(STR + 8) << tmp << endl;
			num++;
		}
	output << "\n ||U-U*|| / ||U*|| = " << scientific << sqrt(res / norm) << endl;
	output.close();
}

//	Главная функция
int main()
{
	setlocale(LC_CTYPE, "russian");
	method();
	run();
	result();
	return 0;
}
```

9. Тестирование.

Тест 1

Условия:

$$\lambda = 1 \quad \gamma = 0 \quad f = -4$$

Исходная функция:

$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

Сетка: Y={0;1;2} X={0;2;4;6}

Цель теста:

Проверка правильного составления матрицы жесткости с постоянным коэффициентом.

X	***Y***	***U***	***U****	***U**** **- U**	**‖*U**-U*‖ / ‖*U**‖**
0	0	2,00E-50	0	2,00E-50	
2	0	4	4	0	5,02E-17
4	0	16	16	0	

6	0	36	36	0	
0	1	1	1	0	
2	1	5	5	8,88E-16	
4	1	17	17	3,55E-15	
6	1	37	37	0	
0	2	4	4	0	
2	2	8	8	0	
4	2	20	20	0	
6	2	40	40	0	

Тест 2

Условия:

$$\lambda = 1 \;\; \gamma = 1 \;\; f = x^2 + y^2 - 4$$

Исходная функция:

$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

Сетка: Y={0;1;2} X={0;2;4;6}

Цель теста:

Проверка совместного составления матрицы жесткости и матрицы масс.

X	***Y***	***U***	***U****	***U**** **- U**	**‖*U**-U*‖ / ‖*U**‖**
0	0	1,17E-50	0	1,17E-50	1,60E-52
2	0	4	4	0	
4	0	16	16	0	
6	0	36	36	0	
0	1	1	1	0	
2	1	5	5	0	
4	1	17	17	0	
6	1	37	37	0	
0	2	4	4	0	
2	2	8	8	0	
4	2	20	20	0	
6	2	40	40	0	

Тест 3

Условия:

$$\lambda = 1 \;\; \gamma = 1 \;\; f = x(x^2 - 6) + y(y^2 - 6)$$

Исходная функция:

$$u(x, y) = x^3 + y^3$$

Сетка: Y={0;1;2} X={0;2;4;6}

Цель теста:

Проверка точного приближения базисными функциями полинома третьего порядка.

X	*Y*	*U*	*U**	*U* - U*	‖*U**-*U*‖ / ‖*U**‖
0	0	1,50E-50	0	1,50E-50	7,17E-17
2	0	8	8	0	
4	0	64	64	0	
6	0	216	216	0	
0	1	1	1	0	
2	1	9	9	1,78E-15	
4	1	65	65	2,84E-14	
6	1	217	217	0	
0	2	8	8	0	
2	2	16	16	0	
4	2	72	72	0	
6	2	224	224	0	

Вывод:

Действительно, полиномы третьего порядка приближаются с точностью до 13 знаков базисными функциями на любой сетке.

Тест 4

Условия:

$$\lambda = 1 \ \gamma = 0 \ \ f = -12x^2 - 12y^2$$

Исходная функция:

$$u(x, y) = x^4 + y^4$$

Цель теста:

Проверка приближения бикубическими функциями полиномы четвертого порядка.

Сетка 1: Y={0;1;2} X={0;2;4;6}

X	*Y*	*U*	*U**	*U* - U*	‖*U**-*U*‖ / ‖*U**‖
0	0	2,73E-50	0	2,73E-50	3,35E-03
2	0	16	16	0	
4	0	256	256	0	
6	0	1296	1296	0	
0	1	1	1	0	

2	1	11,545455	17	5,45E+00	
4	1	251,54545	257	5,45E+00	
6	1	1297	1297	0	
0	2	16	16	0	
2	2	32	32	0	
4	2	272	272	0	
6	2	1312	1312	0	

Сетка 2: Y={0; 0.5; 1; 1.5 ;2} X={0;1;2;3;4;5;6}

X	***Y***	***U***	***U****	***U**** **- U**	**‖*U**-U*‖ / ‖*U**‖**
0	0	-2,12E-52	0	2,12E-52	
1	0	1	1	0	
2	0	16	16	0	
3	0	81	81	0	
4	0	256	256	0	
5	0	625	625	5,45E+00	
6	0	1296	1296	5,45E+00	
0	0,5	0,0625	0,0625	0	
1	0,5	0,261734	1,0625	8,01E-01	
2	0,5	15,14864	16,0625	9,14E-01	
3	0,5	80,13150	81,0625	9,31E-01	
4	0,5	255,1486	256,0625	9,14E-01	
5	0,5	624,2617	625,0625	8,01E-01	
6	0,5	1296,063	1296,063	0	
0	1	1	1	0	
1	1	0,957945	2	1,04E+00	
2	1	15,78054	17	1,22E+00	2,09E-04
3	1	80,76026	82	1,24E+00	
4	1	255,7805	257,0000	1,22E+00	
5	1	624,9579	626	1,04E+00	
6	1	1297	1297	0	
0	1,5	5,0625	5,0625	0	
1	1,5	5,2617	6,0625	8,01E-01	
2	1,5	20,14864	21,0625	9,14E-01	
3	1,5	85,13150	86,06250	9,31E-01	
4	1,5	260,1486	261,0625	9,14E-01	
5	1,5	629,2617	630,0625	8,01E-01	
6	1,5	1301,063	1301,063	0	
0	2	16	16	0	
1	2	17	17	0	
2	2	32	32	0	
3	2	97	97	0	
4	2	272	272	0	
5	2	641	641	0	

6	2	1312	1312	0	

Сетка 3: Y={0; 0.25; 0.5; 0.75; 1; 1.25; 1.5; 1.75; 2}

X={0; 0.5; 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 3.5; 4; 4.5; 5; 5.5; 6}

X	***Y***	***U***	***U****	***U**** - ***U***	**‖*U**-*U*‖ / ‖*U**‖**
0	0	-1,48E-52	0	1,48E-52	
0,5	0	0,0625	0,0625	0	
1	0	1	1	0	
1,5	0	5,0625	5,0625	0	
2	0	16	16	0	
2,5	0	39	39	0	
3	0	81	81	0	
3,5	0	150,063	150,063	0	
4	0	256	256	0	
4,5	0	410,063	410,063	0	
5	0	625	625,0000	0	
5,5	0	915,063	915,063	0	
6	0	1296,000	1296,000	0	
0	0,25	0,003906	0,003906	0	
0,5	0,25	-0,015992	0,066406	0,082398	
1	0,25	0,891582	1,003910	1,12E-01	
1,5	0,25	4,940540	5,066410	1,26E-01	
2	0,25	15,87220	16	1,32E-01	
2,5	0,25	38,93220	39,06640	1,34E-01	
3	0,25	80,86910	81,00390	1,35E-01	1,30E-05
3,5	0,25	149,9320	150,0660	0,134179	
4	0,25	255,8720	256,0040	0,131749	
4,5	0,25	409,9410	410,0660	1,26E-01	
5	0,25	624,8920	625,0040	1,12E-01	
5,5	0,25	914,9840	915,0660	8,24E-02	
6	0,25	1296	1296	0	
0	0,5	0,0625	0,062500	0	
0,5	0,5	-0,007883	0,125000	0,132883	
1	0,5	0,873026	1,062500	0,189474	
1,5	0,5	4,910710	5,125000	0,214295	
2	0,5	15,83730	16,06250	0,225196	
2,5	0,5	38,89530	39,12500	0,229681	
3	0,5	80,83160	81,06250	0,230895	
3,5	0,5	149,8950	150,1250	0,229681	
4	0,5	255,8370	256,0630	0,225196	
4,5	0,5	409,9110	410,1250	0,214295	
5	0,5	624,8730	625,0630	0,189474	
5,5	0,5	914,9920	915,1250	0,132883	
6	0,5	1296,060	1296,060	0	

0	0,75	0,316406	0,316406	0
0,5	0,75	0,218237	0,378906	0,16067
1	0,75	1,082180	1,316410	0,23423
1,5	0,75	5,112160	5,378910	0,266746
2	0,75	16,03540	16,31640	0,280974
2,5	0,75	39,09210	39,37890	0,286837
3	0,75	81,02800	81,31640	0,288422
3,5	0,75	150,0920	150,3790	0,286837
4	0,75	256,0350	256,3160	0,280974
4,5	0,75	410,1120	410,3790	0,266746
5	0,75	625,0820	625,3160	0,23423
5,5	0,75	915,2180	915,3790	0,16067
6	0,75	1296,320	1296,320	0
0	1	1	1	0
0,5	1	0,892925	1,0625	0,169575
1	1	1,751120	2	0,248883
1,5	1	5,778380	6,0625	0,284121
2	1	16,70050	17	0,299516
2,5	1	39,75660	40,0625	0,305862
3	1	81,69240	82	0,307579
3,5	1	150,7570	151,063	0,305862
4	1	256,7000	257	0,299516
4,5	1	410,7780	411,063	0,284121
5	1	625,7510	626	0,248883
5,5	1	915,8930	916,063	0,169575
6	1	1297	1297	0
0	1,25	2,441410	2,441410	0
0,5	1,25	2,343240	2,503910	0,16067
1	1,25	3,207180	3,441410	0,23423
1,5	1,25	7,237160	7,503910	0,266746
2	1,25	18,16040	18,44140	0,280974
2,5	1,25	41,21710	41,50390	0,286837
3	1,25	83,15300	83,44140	0,288422
3,5	1,25	152,2170	152,5040	0,286837
4	1,25	258,1600	258,4410	0,280974
4,5	1,25	412,2370	412,5040	0,266746
5	1,25	627,2070	627,4410	0,23423
5,5	1,25	917,3430	917,5040	0,16067
6	1,25	1298,440	1298,440	0
0	1,5	5,062500	5,062500	0
0,5	1,5	4,992120	5,125000	0,132883
1	1,5	5,873030	6,062500	0,189474
1,5	1,5	9,910710	10,12500	0,214295
2	1,5	20,83730	21,06250	0,225196
2,5	1,5	43,89530	44,12500	0,229681

3	1,5	85,83160	86,06250	0,230895	
3,5	1,5	154,8950	155,1250	0,229681	
4	1,5	260,8370	261,0630	0,225196	
4,5	1,5	414,9110	415,1250	0,214295	
5	1,5	629,8730	630,0630	0,189474	
5,5	1,5	919,9920	920,1250	0,132883	
6	1,5	1301,060	1301,060	0	
0	1,75	9,378910	9,378910	0	
0,5	1,75	9,359010	9,441410	0,082398	
1	1,75	10,26660	10,37890	0,112324	
1,5	1,75	14,31550	14,44140	0,125867	
2	1,75	25,24720	25,37890	0,131749	
2,5	1,75	48,30720	48,44140	0,134179	
3	1,75	90,24410	90,37890	0,134835	
3,5	1,75	159,3070	159,4410	0,134179	
4	1,75	265,2470	265,3790	0,131749	
4,5	1,75	419,3160	419,4410	0,125867	
5	1,75	634,2670	634,3790	0,112324	
5,5	1,75	924,3590	924,4410	0,082398	
6	1,75	1305,380	1305,380	0	
0	2	16	16	0	
0,5	2	16,0625	16,0625	0	
1	2	17	17	0	
1,5	2	21,0625	21,0625	0	
2	2	32	32	0	
2,5	2	55,0625	55,0625	0	
3	2	97	97	0	
3,5	2	166,063	166,063	0	
4	2	272	272	0	
4,5	2	426,063	426,063	0	
5	2	641	641	0	
5,5	2	931,063	931,063	0	
6	2	1312	1312	0	