Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

51 № 3953
Ч - 671

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к курсовому проектированию
для студентов III курса ФПМИ, направление 010500

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 519.61(07)
Ч - 671

Составители:

ассист. *П.А. Домников*
д-р техн. наук, профессор *М.Г. Персова*
канд. техн. наук, доцент *А.Г. Задорожный*
канд. техн. наук, доцент *А.В. Чернышёв*

Рецензент д-р техн. наук, профессор *Ю.Г. Соловейчик*

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Требования к выполнению курсового проекта и оформлению пояснительной записки 4

2. Основные теоретические сведения 6

2.1. Математические модели физических процессов в виде краевых задач 6

2.2. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркина 8

2.3. Построение дискретных аналогов в МКЭ 11

2.4. Хранение конечноэлементной сетки 14

2.5. Сборка и хранение глобальной матрицы конечноэлементной СЛАУ 16

2.6. Базисные функции и локальные матрицы 19

2.7. Учет краевых условий 24

2.8. Тестирование разработанной программы 26

2.9. Некоторые комментарии для решения задач ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат 27

2.10. Задание правой части в виде δ-функции 28

2.11. Задание правой части в виде производной известной скалярной функции, заданной своими значениями в узлах 29

2.12. Оценка точности конечноэлементных решений 30

3. Варианты заданий к курсовому проекту 31

Список литературы 55

1. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА И ОФОРМЛЕНИЮ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

При выполнении практической части курсового проекта студенту необходимо выполнить следующее.

- Выписать решаемое уравнение в общем виде [1, с. 24] и в соответствующей системе координат с краевыми условиями согласно варианту задания (одномерные задачи – [1, с. 128–131], двумерные задачи – [1, с. 226–227], трехмерные задачи – [1, с. 328–329]).
- Записать для исходной краевой задачи эквивалентную вариационную постановку в форме уравнения Галеркина [1, с. 97–101, 128–131, 854].
- Получить аппроксимацию уравнения Галеркина на конечномерных подпространствах, описать переход к конечноэлементной СЛАУ [1, с. 104–108].
- Выписать формулы для базисных функций согласно варианту задания (одномерные задачи – [1, с. 131–139, 147–154, 167–168], двумерные задачи – [1, с. 230, 245–247, 249–253, 275–279, 289–299, 554–556], трехмерные задачи – [1, с. 331, 334–342, 344–350]).
- Записать аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц (если интегралы для вычисления локальных матриц предполагается считать численно, то записать используемые схемы численного интегрирования). При этом необходимо учитывать разложение коэффициента диффузии по базисным функциям согласно варианту задания.
- Написать подпрограммы вычисления элементов локальных матриц и элементов локальных векторов правой части.
- Сделать рисунок расчетной области, в которой ищется решение дифференциального уравнения, и конечноэлементной сетки. Пронумеровать узлы и конечные элементы на данном рисунке. При этом конечноэлементная сетка должна содержать хотя бы один внутренний узел.

- Описать структуры данных, используемых для задания расчетной области и конечноэлементной сетки.
- Сохранить расчетную область в соответствующих файлах или написать подпрограмму, генерирующую конечноэлементную сетку.
- Написать подпрограмму генерации портрета глобальной матрицы конечноэлементной СЛАУ в профильном или в разреженном строчном формате в соответствии с вариантом задания.
- Написать подпрограмму поэлементной сборки глобальной матрицы и вектора правой части конечноэлементной СЛАУ. При этом подаваемая на вход конечноэлементная сетка должна читаться из файлов.
- Написать подпрограммы учета краевых условий.
- Написать подпрограмму решения СЛАУ прямым или итерационным методом в соответствии с вариантом задания.
- Разработать систему тестов и провести тестирование разработанных программ.
- Провести исследования, включающие в себя выполнение расчетов на равномерных или неравномерных сетках и определение порядка аппроксимации на основе численных экспериментов для неполиномиальных решений.
- Оформить пояснительную записку и защитить курсовой проект, ответив на вопросы преподавателя.

Пояснительная записка по курсовому проекту должна включать в себя следующие разделы.

1. *Постановка задачи*:
- решаемое уравнение;
- краевые условия;
- расчетная область.
2. *Теоретическая часть*:
- вариационная постановка;
- конечноэлементная дискретизация и переход к локальным матрицам;
- аналитические выражения для вычисления локальных матриц либо схемы численного интегрирования в случае, если интегралы для вычисления локальных матриц предполагается считать численно.
3. *Описание разработанных программ*:
- структуры данных, используемые для задания расчетной области и конечноэлементной сетки;

– структура основных модулей программы, в том числе генерация портрета СЛАУ, вычисление локальных матриц, генерация глобальных матриц, решение СЛАУ.

4. *Описание тестирования программ*:

– тестовые примеры с пояснением, что проверяет данный тест; для каждого теста должна быть описана расчетная область (включая подобласти), конечноэлементная сетка, краевые условия, коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий по подобластям;

– полученные результаты.

5. *Проведенные исследования и выводы*.

Исследования включают в себя проведение расчетов на равномерных и неравномерных сетках по пространству, определение порядка аппроксимации на основе численных экспериментов для неполиномиальных решений.

6. *Тексты основных модулей программ*.

Приводится листинг программы.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИДЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Эллиптическая краевая задача для функции u определяется дифференциальным уравнением

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} u\right) + \gamma u = f\,, \tag{2.1}$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, и краевыми условиями

$$u\Big|_{S_1} = u_g, \tag{2.2}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \theta, \tag{2.3}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_3} + \beta\left(u\big|_{S_3} - u_\beta\right) = 0, \tag{2.4}$$

в которых $u\big|_{S_i}$ – значение искомой функции u на границе S_i, а $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_i}$ – значение на S_i производной функции u по направлению внешней нормали к поверхности S_i, $i = 1, 2, 3$. Коэффициент λ в уравнении (2.1) часто называют коэффициентом диффузии.

Краевая задача (2.1)–(2.4) может быть использована для описания стационарных (т. е. не зависящих от времени) электрических, магнитных и тепловых полей, а также течения вязкой жидкости в канале и процессов фильтрации [1, с. 24–25].

Напомним формулы, определяющие операторы div и grad в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. В декартовой системе координат (x, y, z):

$$\operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right), \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} \vec{Q} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial z}; \tag{2.6}$$

в цилиндрической системе координат (r, φ, z):

$$\operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial z}\right), \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div} \vec{Q} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rQ_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_3}{\partial z}; \tag{2.8}$$

в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div}\vec{Q} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(Q_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(Q_2\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Q_3}{\partial\varphi}. \qquad (2.10)$$

Формулы (2.5)–(2.10) записаны для случая трехмерной области Ω (т. е. $n = 3$). Для одно- и двумерных областей Ω ($n = 1,2$) эти формулы останутся справедливыми, если в них опустить соответствующие компоненты и слагаемые. Таким образом, *двумерными* называют задачи, в которых решение зависит только от двух пространственных координат, а *одномерными* – задачи, в которых решение зависит только от одной пространственной координаты.

Для описания осесимметричных стационарных магнитных полей в некоторых случаях удобней использовать уравнение ротор-роторного типа

$$\operatorname{rot}_\varphi\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right) = J_\varphi, \qquad (2.11)$$

где μ – магнитная проницаемость среды, $\vec{A} = (A_r, A_\varphi, A_z) = (0, A_\varphi, 0)$ – вектор-потенциал с единственной ненулевой компонентой A_φ, являющейся функцией только двух пространственных переменных r и z: $A_\varphi = A_\varphi(r, z)$, J_φ – φ-компонента вектора плотности токов. Под $\operatorname{rot}_\varphi \vec{G}$ в уравнении (2.11) понимается φ-компонента вектора $\operatorname{rot}\vec{G}$ в цилиндрической системе координат, а сам вектор $\operatorname{rot}\vec{G}$ в этой системе координат определяется соотношением

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial G_\varphi}{\partial z},\ \frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rG_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_r}{\partial\varphi}\right). \qquad (2.12)$$

2.2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА В ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ГАЛЕРКИНА

Будем называть пространством H^m множество функций v, которые вместе со своими производными до m-го порядка включительно интегрируемы с квадратом на Ω.

Потребуем, чтобы невязка $R(u) = -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u - f$ дифференциального уравнения (2.1) была ортогональна (в смысле скалярного произведения пространства $L_2\left(\Omega\right) \equiv H^0$) некоторому пространству Φ функций v, которое мы будем называть *пространством пробных функций*, т. е.

$$\int_\Omega \left(-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u - f\right) v \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall v \in \Phi . \tag{2.13}$$

Воспользуемся формулой Грина, которая является обобщением формулы интегрирования по частям для многомерного случая, в виде

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) v \,\mathrm{d}\Omega + \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}S . \tag{2.14}$$

Преобразуем слагаемое $\int_\Omega -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) v \,\mathrm{d}\Omega$ в (2.13) с использованием формулы Грина (2.14):

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \,\mathrm{d}\Omega - \int_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}S +$$
$$+\int_\Omega \left(\gamma u - f\right) v \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall v \in \Phi , \tag{2.15}$$

где $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, как и ранее, граница Ω. Интегралы по границам S_2 и S_3 можно преобразовать, воспользовавшись краевыми условиями (2.3) и (2.4):

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \,\mathrm{d}\Omega - \int_{S_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}S - \int_{S_2} \theta v \,\mathrm{d}S -$$
$$-\int_{S_3} \beta\left(u - u_\beta\right) v \,\mathrm{d}S + \int_\Omega \left(\gamma u - f\right) v \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall v \in \Phi . \tag{2.16}$$

В качестве Φ выберем H_0^1 – пространство пробных функций $v_0 \in H^1$, которые на границе S_1 удовлетворяют нулевым первым краевым условиям. При этом будем считать, что $u \in H_g^1$, где H_g^1 – множество функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные (на что указывает верхний индекс) и удовлетворяющих только первым краевым условиям на границе S_1. С учетом того, что $v_0\big|_{S_1} = 0$, уравнение (2.16) принимает вид

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \gamma u v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_{S_3} \beta u v_0 \mathrm{d}S =$$

$$= \int_\Omega f v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_{S_2} \theta v_0 \mathrm{d}S + \int_{S_3} \beta u_\beta v_0 \mathrm{d}S \quad \forall v_0 \in H_0^1. \tag{2.17}$$

Таким образом, общая схема построения вариационной формулировки в форме уравнения Галеркина выглядит следующим образом. Если нам нужно решать краевую задачу для дифференциального уравнения

$$Lu = f, \tag{2.18}$$

то следует левую и правую части этого уравнения домножить на функцию v из пространства пробных функций Φ и проинтегрировать по Ω. Фактически это соответствует скалярному умножению Lu и f на v в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$(Lu, v) = (f, v) \qquad \forall v \in \Phi. \tag{2.19}$$

Очевидно, что уравнение (2.19) можно записать в виде

$$(Lu - f, v) = 0 \qquad \forall v \in \Phi, \tag{2.20}$$

что означает ортогональность невязки $Lu - f$ дифференциального уравнения (2.18) пространству Φ пробных функций v.

Далее в уравнении (2.19) необходимо (и это *принципиально* для построения *уравнения Галеркина*) преобразовать его левую часть с использованием формулы Грина (интегрирования по частям) для понижения порядка дифференцирования функции u и затем полученные (после интегрирования по частям) поверхностные интегралы преобразовать с использованием краевых условий. В результате должно получиться уравнение в операторной форме

$$L\left(u, v\right) = f\left(v\right) \qquad \forall v \in \Phi,$$

где в качестве Φ выступает пространство H_0^1.

Теоретические аспекты построения вариационных формулировок более подробно рассмотрены в [1, разделы 3.1 и 3.2]. Особенности вариационных постановок для одномерных задач описаны в [1, раздел 4.1]. Вариационная постановка для уравнения ротор-роторного типа (2.11) приведена в [1, с. 854].

2.3. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ В МКЭ

При построении конечноэлементных аппроксимаций по методу Галеркина пространства H_g^1 и H_0^1 заменяются конечномерными пространствами V_g^h и V_0^h. При этом чаще всего в МКЭ функции из пространств V_g^h и V_0^h являются элементами одного и того же конечномерного пространства V^h, которое мы всегда будем определять как линейное пространство, натянутое на базисные функции ψ_i, $i = 1...n$.

Как правило, в МКЭ базисом пространства V^h является набор *финитных кусочно-полиномиальных функций* ψ_i. При этом приближенное решение $u^h \in V_g^h$, полученное как линейная комбинация таких финитных кусочно-полиномиальных функций ψ_i, называют *МКЭ-решением* (т. е. *решением, полученным по методу конечных элементов*).

В МКЭ в качестве базисных функций ψ_i берутся *финитные функции* (или *функции* с *локальным носителем*), т. е. такие функции, каждая из которых отлична от нуля лишь на нескольких малых подобластях Ω_i расчетной области Ω. Эти подобласти Ω_i (ячейки сетки), на которые разбивается расчетная область Ω, в совокупности с ненулевыми на Ω_i базисными функциями называются *конечными элементами*. На каждой подобласти Ω_i базисная функция ψ_i является полиномом заданной степени. Таким образом, пространство V^h является пространством кусочно-полиномиальных функций.

Получим аппроксимацию уравнения Галеркина (2.17) на конечномерных подпространствах V_g^h и V_0^h, аппроксимирующих исходные пространства H_g^1 и H_0^1. Для этого заменим в (2.17) функцию $u \in H_g^1$ аппроксимирующей ее функцией $u^h \in V_g^h$, а функцию $v_0 \in H_0^1$ – функцией $v_0^h \in V_0^h$:

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u^h \cdot \operatorname{grad} v_0^h d\Omega + \int_\Omega \gamma u^h v_0^h d\Omega + \int_{S_3} \beta u^h v_0^h dS =$$

$$= \int_\Omega f v_0^h d\Omega + \int_{S_2} \theta v_0^h dS + \int_{S_3} \beta u_\beta v_0^h dS \qquad \forall v_0^h \in V_0^h. \tag{2.21}$$

Поскольку любая функция $v_0^h \in V_0^h$ может быть представлена в виде линейной комбинации

$$v_0^h = \sum_{i \in N_0} q_i^v \psi_i , \tag{2.22}$$

вариационное уравнение (2.21) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\int_\Omega \lambda \operatorname{grad} u^h \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_\Omega \gamma u^h \psi_i d\Omega + \int_S \beta u^h \psi_i dS =$$

$$= \int_\Omega f \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta \psi_i dS, \quad i \in N_0 . \tag{2.23}$$

Таким образом, МКЭ-решение u^h удовлетворяет системе уравнений (2.23). Поскольку $u^h \in V_g^h$, оно может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций пространства V^h:

$$u^h = \sum_{j=1}^{n} q_j \psi_j , \tag{2.24}$$

причем $n - n_0$ компонент вектора весов $\mathbf{q} = \left(q_1, \ldots, q_n\right)^{\mathrm{T}}$ могут быть фиксированы и определены из условия

$$u^h\Big|_{S_1} = u_g . \tag{2.25}$$

Подставляя (2.24) в (2.23), получаем СЛАУ *для компонент* q_j вектора весов $\mathbf{q}$ *с индексами* $j \in N_0$:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \psi_j \cdot \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS \right) q_j =$$

$$= \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_\beta \psi_i dS, \qquad i \in N_0 , \tag{2.26}$$

причем количество целых чисел k ($1 \le k \le n$) в множестве N_0 равно n_0.

Итак, при решении краевой задачи (2.1)–(2.4) с использованием базисных функций, принимающих нулевые значения во всех узлах сетки, кроме одного, конечноэлементная СЛАУ (2.26) для вектора весов $\mathbf{q}$ может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{b}, \tag{2.27}$$

где компоненты матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$ определяются соотношениями

$$A_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS, \; i \in N_0, j = 1 \ldots n, \\ \delta_{ij}, \quad i \notin N_0, \quad j = 1 \ldots n, \end{cases} \tag{2.28}$$

$$b_i = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} f\psi_i d\Omega + \int\limits_{S_2} \theta\psi_i dS + \int\limits_{S_3} \beta u_\beta \psi_i dS, & i \in N_0, \\ u_g\left(\mathbf{x}_i\right), & i \notin N_0, \end{cases} \tag{2.29}$$

в которых δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

2.4. ХРАНЕНИЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ

Хранение конечноэлементной сетки должно быть таким, чтобы можно было достаточно просто организовать цикл по элементам. При обработке каждого элемента нужен простой доступ к координатам его вершин и к информации о значениях параметров дифференциального уравнения на элементе (для вычисления локальных матриц и векторов), а также нужны глобальные номера локальных базисных функций этого элемента (для занесения компонент локальных матриц и векторов в глобальные). Могут еще также понадобиться глобальные номера ребер и граней конечных элементов, а также некоторая дополнительная информация об особых узлах при наличии в сетке несогласованных элементов.

Вся необходимая информация о конечноэлементной сетке хранится в специальных структурах данных. При этом организация структуры данных очень сильно зависит от типа сетки.

Рассмотрим вариант структур данных, предназначенных для хранения сеток из треугольных элементов первого порядка (т. е. с базисными функциями в виде кусочных полиномов первой степени).

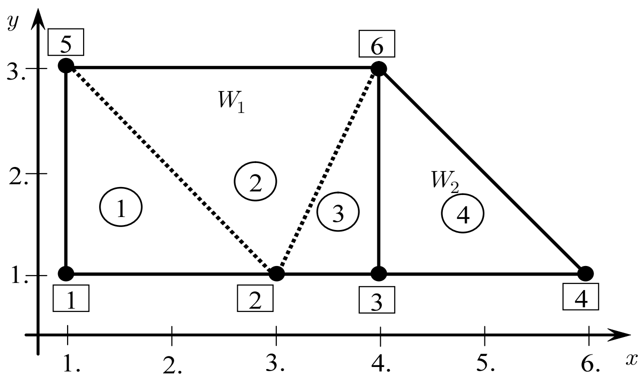

Рис. 1. Пример сетки из треугольных элементов первого порядка

Рассмотрим пример сетки, представленный на рис. 1. В нем треугольники с номерами 1–3 лежат в подобласти W_1, а треугольник с номером 4 – в подобласти W_2. Будем считать, что на горизонтальных (нижней и верхней) границах расчетной области заданы краевые условия второго рода (с разными значениями параметра θ), а на левой (вертикальной) и правой (наклонной) границах – краевые условия первого рода (также с разными значениями параметра u_g).

Для данного примера массив узлов (в котором каждый узел сетки описывается двумя координатами x_k и y_k) состоит из следующих шести пар вещественных чисел:

```
1. 1.   3. 1.   4. 1.   6. 1.   1. 3.   4. 3.
```

Информация о треугольниках сетки может быть представлена массивом, состоящим из четверок целых чисел, и для сетки, изображенной на рис. 1, этот массив будет содержать следующие четверки чисел:

```
1 2 5 1     2 6 5 1      2 3 6 1      3 4 6 2,
```

где каждые первые три числа являются номерами вершин треугольника, а каждое четвертое – номером подобласти, которой этот треугольник принадлежит.

Краевые условия второго рода для элементов первого порядка можно хранить в отдельном массиве тройками целых чисел, первые два из которых – номера вершин ребра, а третье – номер формулы, по которой должно вычисляться значение параметра θ. Для рассматриваемой нами задачи (в которой краевые условия второго рода заданы на нижней и верхней границах расчетной области и параметр θ на этих границах может определяться разными формулами) и для сетки, изображенной на рис. 1, массив с информацией о вторых краевых условиях примет вид

```
1 2 1    2 3 1    3 4 1    5 6 2
```

Структуры данных для хранения информации о краевых условиях третьего рода могут быть организованы аналогичным способом, при этом по номеру формулы будут вычисляться значения u_β и β.

Информация о краевых условиях первого рода при использовании элементов первого порядка может быть задана массивом пар целых чисел, в которых первое число – номер узла, а второе – номер формулы, по которой должно вычисляться значение параметра u_g. В нашем примере этот массив будет содержать четыре пары целых чисел:

```
1 1    5 1    4 2    6 2
```

Более подробно о способах хранения и алгоритмах работы с конечноэлементными сетками можно прочитать в [1, глава 10].

2.5. СБОРКА И ХРАНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ СЛАУ

Итак, расчетная область разбивается на конечные элементы Ω_l ($l = 1, \ldots, L$, L – количество конечных элементов), поэтому объемные интегралы в выражениях (2.28)–(2.29) могут быть вычислены как сумма интегралов по конечным элементам

$$A_{ij}^{\Omega} = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega =$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \left(\int_{\Omega_l} \lambda \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Omega_l} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega \right), \ i \in N_0, \qquad (2.30)$$

$$b_i^{\Omega} = \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega = \sum_{l=1}^{L} \int_{\Omega_l} f \psi_i d\Omega, \quad i \in N_0. \qquad (2.31)$$

Как уже говорилось выше в п. 2.3, в качестве базисных функций ψ_i берутся финитные функции, отличные от нуля лишь на нескольких конечных элементах. Поэтому большинство интегралов в суммах в выражениях (2.30)–(2.31) будут равны нулю. Ненулевыми интегралы $\int_{\Omega_l} \lambda \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega$, $\int_{\Omega_l} \gamma \psi_j \psi_i d\Omega$ и $\int_{\Omega_l} f \psi_i d\Omega$ будут в том случае, если базисные функции ψ_i и ψ_j являются ненулевыми на конечном элементе Ω_l. В простейшем случае, когда базисная функция ψ_i ассоциирована с i-м узлом (т. е. равна единице в i-м узле и нулю в остальных узлах), ненулевыми рассмотренные выше интегралы на элементе Ω_l будут в том случае, если узлы i и j принадлежат конечному элементу Ω_l.

Таким образом, глобальные матрица и вектор правой части конечноэлементной СЛАУ (2.27) могут быть сгенерированы из локальных матриц и векторов конечных элементов. Основные идеи технологии сборки глобальных матриц и векторов в МКЭ, а также пример сборки в простейшем случае приведен в [1, раздел 2.4]. Примеры сборки глобальных матриц и векторов приведены для одномерных элементов второго порядка в [1, раздел 4.4.2], для одномерных элементов с комбинированным эрмитовым базисом в [1, раздел 4.10], для прямоугольных элементов с билинейными базисными функциями в [1, раздел 5.2.3], для прямоугольных элементов с бикубическими комбинированными эрмитовыми базисными функциями в [1, раздел 5.2.9.2], для треугольных элементов с линейными базисными функциями в [1, раздел 5.3.3, с. 282–286].

Рассмотрим общую процедуру сборки глобальной матрицы из локальных для глобальной матрицы, хранящейся в разреженном формате.

Массивы ig и jg, определяющие портрет разреженной глобальной матрицы, в простейшем случае формируются на основании массива, в котором хранятся конечные элементы с глобальными номерами своих узлов [см. п. 2.4]. Портрет строится из условия, что элементы A_{ij} являются ненулевыми, если узлы с номерами i и j принадлежат одному конечному элементу. Пример алгоритма построения портрета матрицы и программы приведен в [1, раздел 10.5].

Для занесения компонент локальной матрицы в глобальную можно воспользоваться достаточно простой процедурой занесения числа a в компоненту A_{ij}, приведенной в [1, раздел 10.4.5]. Однако этот способ не всегда эффективен, особенно при использовании конечных элементов высоких порядков, и в этом случае эту процедуру можно ускорить, если на конечном элементе номера локальных базисных функций упорядочить по возрастанию соответствующих им глобальных номеров.

Будем считать, что массив jg соответствующим образом упорядочен, а локальная матрица $\hat{\mathbf{A}}$ размера $k \times k$ конечного элемента с упорядоченными локальными номерами базисных функций представлена двумя массивами: двумерным вещественным массивом `A` размера `k × k` и целочисленным массивом `L` длины `k`. При этом элемент `L(i)` – это номер глобальной базисной функции, соответствующей локальной базисной функции с номером `i`. Тогда подпрограмма занесения локальной матрицы в глобальную может быть следующей:

```
subroutine AddLocal(N,di,ig,jg,ggl,ggu,k,L,A)
dimension di(N),ggl(*),ggu(*),ig(N+1),jg(*)
dimension L(k),A(k,k)
* заносим диагональные элементы
do i=1,k
 di(L(i))=di(L(i))+A(i,i)
end do
* начинаем цикл по строкам нижнего (и
* одновременно по столбцам верхнего)
* треугольника локальной матрицы
do i=1,k
* устанавливаем начальное значение нижней
* границы поиска. Поскольку локальные номера
* упорядочены, для каждого последующего
* элемента строки начинать поиск можно с уже
* найденного индекса
 ibeg=ig(L(i))
* начинаем поиск дихотомией по строке нижнего
* (и по столбцу верхнего) треугольника
do j=1,i-1
 iend=ig(L(i)+1)-1
  do while(jg(ibeg).ne.L(j))
   ind=(ibeg+iend)/2
    if(jg(ind).lt.L(j))then
     ibeg=ind+1
    else
     iend=ind
    end if
  end do
  ggl(ibeg)=ggl(ibeg)+A(i,j)
  ggu(ibeg)=ggu(ibeg)+A(j,i)
  ibeg=ibeg+1
 end do
end do
end
```

Заметим, что упорядочение локальных номеров базисных функций по возрастанию их глобальных номеров необходимо *только для ускорения* работы с глобальной матрицей, т. е. ускорения процесса сборки и алгоритма построения портрета матрицы. Для вычисления же самой локальной матрицы упорядочение локальных базисных функций может оказаться даже нежелательным (например, при использовании шаблонных элементов со «своей» нумерацией базисных функций). Поэтому в некоторых случаях имеет смысл использовать сразу две локальные нумерации базисных функций конечного элемента: одну в соответствии с нумерацией базисных функций шаблонного элемента, вторую – по возрастанию глобальных номеров базисных функций.

Программа же занесения локальной матрицы в глобальную при наличии второй нумерации базисных функций (по возрастанию их глобальных номеров) может очень мало отличаться от рассмотренной выше. Для этого достаточно (на каждом конечном элементе) ввести целочисленный массив `LL` длины `k` такой, что в первой его ячейке хранится локальный номер базисной функции с минимальным глобальным номером, во второй – локальный номер базисной функции со следующим по величине глобальным номером и т. д. Тогда в рассмотренной выше программе нужно просто заменить обращение к компонентам `L(i)`, `L(j)`, `A(i,i)`, `A(i,j)` и `A(j,i)` обращениями `L(LL(i))`, `L(LL(j))`, `A(LL(i),LL(i))`, `A(LL(i),LL(j))` и `A(LL(j),LL(i))` соответственно, что и обеспечит занесение компонент локальной матрицы в глобальную строго по возрастанию глобальных номеров базисных функций.

2.6. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ И ЛОКАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Итак, сборка глобальных матрицы и вектора правой части выполняется из локальных матриц и векторов конечных элементов. При этом локальная матрица представляет собой сумму двух матриц: матрицы жесткости и матрицы массы, где элементы матрицы жесткости определяются интегралами вида $\int\limits_{\Omega_l} \lambda \operatorname{grad} \hat{\psi}_j \operatorname{grad} \hat{\psi}_i d\Omega$ ($\hat{\psi}_i$ – локальная базисная функция), а элементы матрицы массы – интегралами вида $\int\limits_{\Omega_l} \gamma \hat{\psi}_j \hat{\psi}_i d\Omega$. Функция f правой части дифференциального уравнения (2.1) довольно часто на конечном элементе заменяется своим полиномиальным интерполянтом, поэтому и компоненты локального вектора правой части, элементы которого, определяемые интегралами вида $\int_{\Omega_l} f\hat{\psi}_i d\Omega$, могут быть вычислены как произведение матрицы массы с коэффициентом $\gamma \equiv 1$ и вектора весов разложения функции f по локальным базисным функциям $\hat{\psi}_i$ (подробнее об этом см. в [1, разделы 4.2, 4.4.1, 4.5, 4.6, 5.2.1, 6.1.1]).

Таким образом, для вычисления локальных матриц и векторов используются локальные базисные функции, определенные только на соответствующем конечном элементе. Глобальные же базисные функции получаются естественным образом сшивкой локальных базисных функций соседних конечных элементов. При этом сшиваются те локальные базисные функции (из разных конечных элементов), которые соответствуют одному и тому же узлу в глобальной нумерации. Для вычисления локальных матриц необходим конкретный вид локальных базисных функций, определяемый вариантом задания.

Вид локальных базисных функций и соответствующих локальных матриц жесткости и массы в простейшем случае для одномерных элементов первого порядка приведен в [1, раздел 4.2]. Расчет локальных матриц одномерных элементов произвольного порядка удобно выполнять с использованием базисных функций, определенных на шаблонном элементе (0, 1) (см. [1, раздел 4.3]. Вид шаблонных базисных функций и рассчитанных с их помощью локальных матриц жесткости и массы для одномерных элементов второго порядка приведен в [1, раздел 4.4.1].

Базисные функции одномерных элементов третьего порядка могут быть определены двумя способами: *лагранжевы* кубические базисные функции и *эрмитовы* кубические базисные функции. При построении одномерных кубических лагранжевых базисных функций обычно используют конечные элементы с четырьмя узлами, расположенными равномерно на конечном элементе. Вид этих функций на шаблонном элементе (являющихся базисными полиномами Лагранжа), а также вид локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части приведен в [1, раздел 4.5].

Одномерные кубические *эрмитовы* базисные функции строятся по двум их значениям в граничных узлах и двум значениям их первой производной в тех же граничных узлах. В этом случае на конечном элементе не будет внутренних узлов, и такие конечные элементы с кубическими базисными функциями называют двухузловыми. Вид эрмитовых функций на одномерном шаблонном элементе, а также вид локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части приведены в [1, раздел 4.6]. Заметим, что при использовании эрмитовых функций для решения задач с *разрывным* коэффициентом диффузии необходим специальный комбинированный базис (см. [1, раздел 4.9–4.10].

Вид локальных матриц жесткости и массы для одномерных конечных элементов первого и второго порядка в цилиндрических координатах приведены в [1, разделы 4.15.1 и 4.15.2], а в сферических – в [1, раздел 4.16.1].

Двумерные задачи в зависимости от варианта задания можно рассматривать в декартовой, полярной и цилиндрической системах координат. Общие выражения для вычисления локальных матриц жесткости и массы, а также векторов правой части в различных системах координат приведены в [1, разделы 5.1.1–5.1.4].

На прямоугольных конечных элементах могут быть использованы билинейные, биквадратичные или бикубические базисные функции. Поскольку эти функции являются соответственно линейными, квадратичными или кубическими по каждой из координат, и для построения базисных функций и локальных матриц двумерных элементов удобно воспользоваться выражениями для базисных функций и локальных матриц одномерных элементов соответствующего порядка.

Вид билинейных, биквадратичных и бикубических лагранжевых и эрмитовых базисных функций, а также локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части, определенных через соответствующие матрицы одномерных элементов, приведены соответственно в [1, разделы 5.2.1, 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6]. Особенности использования эрмитовых бикубических элементов для решения задач с разрывным коэффициентом диффузии описаны в [1, раздел 5.2.7].

В некоторых вариантах заданий предлагается использовать кусочно-билинейные базисные функции на так называемых пятиузловых прямоугольниках. Такие элементы могут появляться при использовании *несогласованных сеток* с прямоугольными ячейками. Примеры таких сеток приведены в [1, раздел 11.4]. Для согласования конечных элементов на несогласованной сетке при выполнении курсовых работ предлагается использовать переходные элементы. Технология построения соответствующих базисных функций приведена в [1, раздел 11.7].

На треугольных конечных элементах могут быть использованы линейные и квадратичные базисные функции, а также кубические лагранжевы и эрмитовы базисные функции, которые могут быть определены с использованием так называемых $\mathbf{L}$-координат, для которых существуют достаточно простые выражения для вычисления интегралов по треугольнику [1, с. 277].

Линейные базисные функции на треугольнике фактически являются $\mathbf{L}$-координатами. Формулы для их вычисления, а также формулы для вычисления локальных матриц приведены в [1, разделы 5.3.1 и 5.3.2].

В случае использования на треугольниках базисных функций более высоких порядков узлами конечноэлементной сетки, в которых определяются значения базисных функций, являются не только вершины треугольников, но и точки на их ребрах и внутри треугольников. При этом базисные функции квадратичных и кубических элементов также удобно выразить через $\mathbf{L}$-координаты. Соответствующие выражения для базисных функций приведены в [1, разделы 5.3.4, 5.3.5 и 5.3.6]. В [1, раздел 5.3.4] приведены также примеры вычисления элементов локальной матрицы для треугольных элементов второго порядка для ситуации, когда коэффициент диффузии на конечном элементе берется постоянным, и для ситуации, когда он заменяется квадратичным интерполянтом. Обратим внимание, что ряд вариантов включает в себя условие представления на конечном элементе коэффициентов λ и γ в виде своих интерполянтов (см. [1, разделы 4.2, 4.15.1, 5.3.4]).

И, наконец, в качестве еще одного типа конечных элементов предлагается использовать четырехугольные конечные элементы. Локальные базисные функции первого порядка на четырехугольном конечном элементе строятся с помощью билинейных функций, заданных на шаблонном элементе (мастер-элементе), являющемся единичным квадратом. Вид этих базисных функций приведен в [1, раздел 5.4.1]. Особенностью вычисления локальных матриц для четырехугольников заключается в том, что базисные функции не представлены в аналитическом виде, поэтому используются соответствующая замена переменных и переход к интегрированию по единичному квадрату. Чаще всего более выгодным является численное интегрирование при вычислении компонент локальных матриц жесткости и массы; соответствующие выражения приведены в [1, раздел 5.4.3]. Технология построения базисных функций более высокого порядка на четырехугольном конечном элементе приведена в [1, раздел 5.4.6].

В трехмерном случае в зависимости от варианта задания предлагается использовать параллелепипеидальные и тетраэдральные элементы, а также элементы в виде призм с треугольным и четырехугольным основанием (призмы с четырехугольным основанием называют также шестигранными элементами).

Базисные функции, а также локальные матрицы для параллелепипеидальных элементов любого порядка могут быть определены аналогично базисным функциям и локальным матрицам прямоугольных элементов, т. е. через базисные функции и локальные матрицы одномерных элементов соответствующего порядка. Вид трилинейных базисных функций, а также выражений для вычисления локальных матриц жесткости и массы приведен в [1, раздел 6.1.1].

Для расчета компонент локальных матриц на тетраэдральных элементах, как и на треугольниках в двумерном случае, вводятся L-координаты. Способ определения трехмерных L-координат, а также формулы для вычисления от них объемных интегралов по тетраэдру приведены в [1, разделы 6.2.1, 6.2.2]. Так же как и в двумерном случае для треугольников, трехмерные L-координаты фактически определяют линейные базисные функции на тетраэдре. Соответствующие выражения для вычисления локальных матриц жесткости и массы приведены в [1, раздел 6.2.3].

Для элементов первого порядка на треугольных призмах вид базисных функций и соответствующие выражения для вычисления локальных матриц жесткости и массы приведены в [1, раздел 6.3.2]. Для построения базисных функций шестигранных конечных элементов первого порядка используются трилинейные базисные функции, определенные на единичном кубе (шаблонном элементе или мастер-элементе). Технология построения базисных функций и выражения для вычисления локальных матриц жесткости и массы для шестигранников приведены в [1, раздел 6.4].

При расчете локальной матрицы необходимо помнить, что по локальной нумерации узлов конечного элемента однозначно определяется локальная нумерация соответствующих базисных функций, которая, в свою очередь, определяет расположение компонент в локальной матрице.

2.7. УЧЕТ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Постановка краевой задачи может включать в себя три типа краевых условий (2.2)–(2.4). При этом первые краевые условия, как правило, называются главными, поскольку все функции пространства решений должны им удовлетворять, а вторые и третьи краевые условия называются естественными, поскольку их выполнение обеспечивается автоматически при решении уравнения Галеркина.

Итак, вначале учитываются вторые и третьи краевые условия. Элементы матрицы и вектора правой части конечноэлементной СЛАУ, определяемые выражениями (2.28)–(2.29), представляют собой сумму объемных и поверхностных интегралов

$$A_{ij} = A_{ij}^{\Omega} + A_{ij}^{S_3}, \quad b_i = b_i^{\Omega} + b_i^{S_2} + b_i^{S_3}, \; i \in N_0. \tag{2.32}$$

Вопросы, связанные с расчетом A_{ij}^{Ω} и b_i^{Ω} через локальные матрицы и вектора с последующей сборкой их в глобальные, были рассмотрены нами выше в разд. 2.5. Расчет $A_{ij}^{S_3}$, $b_i^{S_2}$ и $b_i^{S_3}$ можно организовать аналогично, считая элементы границ S_3 и S_2 также конечными элементами, размерность которых на единицу меньше размерности задачи. Так, в одномерных задачах границы S_3 и S_2 представляют собой точки, в двумерных – ребра (одномерные элементы), а в трехмерных – грани (двумерные элементы). Таким образом, поверхностные интегралы в (2.32), так же как и объемные, могут быть вычислены как сумма интегралов по конечным элементам меньшей размерности:

$$A_{ij}^{S_3} = \int\limits_{S_3} \beta \psi_j \psi_i dS = \sum_{m=1}^{M^{S_3}} \int\limits_{S_3^m} \beta \psi_j \psi_i dS, \tag{2.33}$$

$$b_i^{S_2} = \sum_{m=1}^{M^{S_2}} \int\limits_{S_2^m} \theta \psi_i dS, \quad b_i^{S_3} = \sum_{m=1}^{M^{S_3}} \int\limits_{S_3^m} \beta u_\beta \psi_i dS, \tag{2.34}$$

где M^{S_2} и M^{S_3} – количество ребер в двумерном случае или граней в трехмерном случае, на которых заданы вторые и третьи краевые условия соответственно.

Таким образом, как и в случае с объемными интегралами, большинство интегралов в суммах в выражениях (2.33)–(2.34) будут равны нулю. Ненулевыми интегралы $\int\limits_{S_3^m} \beta\psi_j\psi_i dS$, $\int\limits_{S_2^m} \theta\psi_i dS$ и $\int\limits_{S_3^m} \beta u_\beta \psi_i dS$ будут в том случае, если обе базисные функции ψ_i и ψ_j являются ненулевыми на ребре (грани) S_3^m или S_2^m соответственно. В простейшем случае, когда базисная функция ψ_i ассоциирована с i-м узлом (т. е. равна единице в i-м узле и нулю в остальных узлах), ненулевыми рассмотренные выше интегралы на ребре (грани) S_3^m или S_2^m будут в том случае, если узлы i и j принадлежат ребру (грани) S_3^m или S_2^m.

Таким образом, поверхностные составляющие $\mathbf{A}^{S_3}$ глобальной матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}^{S_2}$ и $\mathbf{b}^{S_3}$ вектора правой части $\mathbf{b}$ конечноэлементной СЛАУ (2.27) так же, как и объемные составляющие $\mathbf{A}^\Omega$ и $\mathbf{b}^\Omega$, могут быть сгенерированы из соответствующих локальных матриц и векторов конечных элементов меньшей размерности. Пример учета естественных краевых условий в простейшем одномерном случае приведен в [1, раздел 4.4.2, 4.10, 4.14].

Заметим, что в двумерном и трехмерном случаях функции θ и u_β в интегралах $\int\limits_{S_2^m} \theta\psi_i dS$ и $\int\limits_{S_3^m} \beta u_\beta \psi_i dS$ при расчете локальных векторов $\hat{\mathbf{b}}^{S_2}$ и $\hat{\mathbf{b}}^{S_3}$, как и функция f при расчете объемной составляющей вектора правой части, как правило, на конечных элементах границ (ребрах или гранях) заменяются своими интерполянтами.

В двумерном случае вид локальной матрицы и векторов краевых условий для билинейных элементов приведен в [1, раздел 5.2.1, с. 234–235], а пример их сборки в глобальные матрицу и вектор в [1, раздел 5.2.3]. Для биквадратичных элементов вид локальной матрицы и векторов краевых условий приведен в [1, раздел 5.2.4, с. 248]. Пример вычисления локальной матрицы и векторов краевых условий для бикубических эрмитовых элементов приведен в [1, раздел 5.2.9.1, с. 260–262]. Вид локальной матрицы и векторов краевых условий для линейных треугольных элементов приведен в [1, раздел 5.3.2, с. 280–281], а пример их расчета и сборки в глобальные матрицу и вектор в [1, раздел 5.3.3]. Для треугольных элементов второго порядка вид локальной матрицы и вектора краевых условий приведен в [1, раздел 5.3.4, с. 295]. В трехмерном случае для тетраэдральных конечных элементов вид локальной матрицы и векторов краевых условий приведен в [1, раздел 6.2.3].

Процедуры занесения локальных матриц и векторов краевых условий в глобальные аналогична рассмотренной в разд. 2.6 процедуре занесения локальных матриц и векторов конечных элементов.

Учет естественных краевых условий организуется проходом по массивам ребер (в двумерном случае) или граней (в трехмерном случае) отдельными циклами для вторых и третьих краевых условий после цикла, организующего проход по конечным элементам, и занесения их локальных матриц и векторов в глобальные.

На заключительном этапе должны быть учтены краевые условия первого рода. Подробнее о способах учета главных краевых условий см. в [1, раздел 5.2.2].

2.8. ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ

Для проверки правильности процедур построения конечноэлементных решений удобно использовать тестовые задачи, решениями которых являются полиномы или кусочные полиномы, точно представимые в виде линейной комбинации базисных функций. Так, при тестировании конечных элементов с линейными базисными функциями используются линейные (или кусочно-линейные) полиномы, квадратичных – линейные и квадратичные (а также кусочно-линейные или кусочно-квадратичные функции), кубических – полиномы (или кусочные полиномы) до третьей степени включительно. При тестировании процедур, использующих эрмитовы конечные элементы с непрерывными производными, необходимо помнить, что тест нужно строить таким образом, чтобы искомая функция была непрерывна вместе со своей первой производной. Для тестирования же процедур, использующих эрмитов базис с разрывными коэффициентами, нужно рассматривать и такие тестовые задачи, решениями которых являются функции с разрывной производной.

Желательно также подбирать в качестве тестовых такие функции, которые хотя бы в одной из подобластей расчетной области являются полным полиномом требуемой степени. Основные принципы тестирования одномерных, двумерных и трехмерных задач изложены соответственно в [1, разделы 4.14, 5.7, 6.5]. Кроме того, примеры тестовых задач для одномерного случая приведены также в [1, раздел 4.4.2], а для двумерного случая в [1, разделы 5.2.3, 5.2.9.1, 5.3.3 – второй пример].

Для верификации разработанных процедур можно также воспользоваться примерами, приведенными в [1, раздел 4.15.4] для одномерных квадратичных элементов в цилиндрической системе координат, в [1, раздел 4.15.5] для одномерных линейных элементов при решении ротор-роторной задачи в цилиндрических координатах с постоянным коэффициентом диффузии, а также в [1, раздел 4.16.2] для одномерных линейных элементов в сферической системе координат.

2.9. НЕКОТОРЫЕ КОММЕНТАРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РОТОР-РОТОРНОГО ТИПА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Как уже говорилось в разделе 2.1, для описания осесимметричных стационарных магнитных полей в ряде случаев используется уравнение ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{rot}_{\varphi}\left(\lambda \operatorname{rot} \vec{A}\right) = f\,. \qquad (2.35)$$

В вариантах, в которых предусмотрено условие, что коэффициент диффузии λ не зависит от r (т. е. в одномерном случае является постоянным, а в двумерном либо является постоянным, либо зависит только от z), уравнение (2.35) с учетом того, что $\vec{A} = \left(0, U\left(r, z\right), 0\right)$, примет вид

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \frac{\lambda}{r^2} u = f\,. \qquad (2.36)$$

Особенности вычисления локальной матрицы для уравнения такого вида в одномерном случае с использованием линейных базисных функций приведены в [1, разделы 4.15.1, 4.15.3]. В двумерном случае при использовании билинейных функций, поскольку локальные матрицы собираются из одномерных, можно также воспользоваться соотношениями, приведенными в [1, раздел 4.15.1, 4.15.3].

При выполнении вариантов, в которых коэффициент диффузии λ зависит от r, лучше воспользоваться так называемой ротор-роторной постановкой, особенности применения которой для уравнений такого типа приведены в [1, раздел 16.6, с. 853–854].

2.10. ЗАДАНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ В ВИДЕ δ-ФУНКЦИИ

Задачи, в которых правая часть может быть задана в виде δ-функции, относятся к классу задач с сосредоточенными источниками (см. [1, глава 8]).

В одномерном случае учет правой части в виде δ-функции с плотностью ρ сводится к тому, что к соответствующей компоненте b_i (если δ-функция задана в i-м узле) добавляется значение плотности

$$b_i = b_i + \rho .$$

При этом, естественно, правая часть может быть задана и в виде суммы распределенного источника и нескольких сосредоточенных.

Покажем, как может быть построена тестовая задача для ситуации, когда правая часть задана в виде δ-функции. Рассмотрим уравнение

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = f^r + \delta\left(x-1\right). \qquad (2.37)$$

Пусть расчетная область Ω является отрезком $\left[0.5, 2\right]$, а первая составляющая f^r правой части уравнения (2.37) определяется соотношением

$$f^r = \begin{cases} -2, & 0.5 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases} \qquad (2.38)$$

Аналитическим решением дифференциального уравнения (2.37) с правой частью (2.38) является функция

$$u = \begin{cases} x^2, & 0.5 < x < 1, \\ x, & 1 < x < 2. \end{cases} \qquad (2.39)$$

На левой границе расчетной области зададим краевое условие второго рода, а на правой – первого рода таким образом, чтобы этим краевым условиям удовлетворяла функция (2.39):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0.5} = -1 , \qquad u\big|_{x=2} = 2 .$$

Очевидно, что конечноэлементная сетка для этой тестовой задачи должна содержать как минимум два конечных элемента $\Omega_1 = \left[0.5, 1\right]$ и $\Omega_2 = \left[1, 2\right]$.

2.11. ЗАДАНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ В ВИДЕ ПРОИЗВОДНОЙ ИЗВЕСТНОЙ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ СВОИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ В УЗЛАХ

Существует отдельный класс физических задач, в которых источник в правой части удобно задавать в виде производной известной скалярной функции, полученной, в свою очередь, из конечноэлементного решения другой задачи, поэтому такая функция, как правило, задана своими значениями в узлах конечноэлементной сетки.

В этом случае уравнение может выглядеть следующим образом:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) = f\,. \tag{2.40}$$

При этом, как уже говорилось, функция $f = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, а g задана своими значениями в узлах конечноэлементной сетки, т. е. может быть представлена в виде $g = \sum\limits_{j=1}^{N} q_j^g \psi_j$, где N – количество узлов в конечноэлементной сетке.

С учетом такого представления выражение для вычисления элементов локального вектора правой части на конечном элементе примет вид

$$\hat{b}_i^{\Omega} = \int\limits_{\Omega} f \hat{\psi}_i d\Omega = \sum_{j=1}^{N^l} \hat{q}_j^g \int\limits_{\Omega_l} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x} \hat{\psi}_i d\Omega\,. \tag{2.41}$$

где N^l – количество узлов на конечном элементе, а $\hat{q}_j^g$ – известные веса разложения функции g по локальным базисным функциям конечного элемента Ω_l.

Из (2.41) очевидно, что в рассматриваемой ситуации локальный вектор правой части может быть вычислен в виде

$$\hat{\mathbf{b}}^{\Omega} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{q}}^{g}\,, \tag{2.42}$$

где компоненты несимметричной локальной матрицы $\hat{D}_{ij}$ вычисляются в виде

$$\hat{D}_{ij} = \int\limits_{\Omega_l} \hat{\psi}_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x} d\Omega\,. \tag{2.43}$$

2.12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Простейшим способом оценку точности конечноэлементных решений можно выполнить следующим образом. Сформировать некоторую базовую сетку. Получить на этой сетке конечноэлементное решение. Вычислить относительную норму вектора погрешности значений функции в узлах конечноэлементной сетки:

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(q_i^h - q_i^*\right)^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^2}}\,,$$

где q_i^h – компоненты вектора $\mathbf{q}$, полученного в результате решения конечноэлементной СЛАУ (2.27), а q_i^* – точные значения искомой функции в узлах, n – количество узлов в базовой сетке. Затем построить вложенную сетку путем разбиения всех ребер конечноэлементной сетки пополам. Получить конечноэлементное решение. Вычислить норму вектора погрешности значений функции в узлах конечноэлементной сетки. Выполнить еще одно или два дробления с оценкой погрешности получаемых численных решений. Оценить уровень уменьшения погрешности при вложенном дроблении конечноэлементных сеток. Конечноэлементное решение при таком вычислении погрешности должно сходиться к точному приблизительно со скоростью $O\left(h^{m+1}\right)$, где m – порядок базисных функций.

Более правильно оценить сходимость конечноэлементного решения $u^h = \sum_{i=1}^{n} q_i^h \psi_i$ (ψ_i – базисные функции степени m) к точному решению u можно в случае, когда оценка погрешности выполняется либо в энергетической норме (или в норме пространства H_1) [1, с. 110–114 и с. 87] – в этом случае скорость сходимости будет $O\left(h^m\right)$, либо в норме пространства $H_0 \equiv L_2$ [1, с. 113] – в этом случае скорость сходимости будет $O\left(h^{m+1}\right)$, при условии, что соответствующая норма точного решения в рассматриваемой области конечна. Подробнее об этом см. в [1, раздел 3.6], а примеры оценки точности конечноэлементных решений в различных нормах для одномерных элементов приведены в [1, разделы 4.8, 4.11]. Читателю предлагается в качестве дополнительного задания оценить точность конечноэлементного решения в различных нормах.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

Задание 1

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^т-разложение.

Задание 2

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией (постоянной функцией на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^т-разложение.

Задание 3

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в сферической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 4

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в сферической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией (постоянной функцией на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 5

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 6

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 7

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям.

Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^{T}-разложение.

Задание 8

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^{T}-разложение.

Задание 9

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ постоянен на всей расчетной области, γ – по линейным базисным функциям. Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^{T}-разложение.

Задание 10

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ постоянен на всей расчетной области, γ – по линейным базисным функциям. Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^{T}-разложение.

Задание 11

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией (постоянной функцией на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать LL^{T}-разложение.

Задание 12

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией (постоянной функцией на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 13

МКЭ для одномерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ постоянен на всей расчетной области. Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 14

МКЭ для одномерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией (постоянной функцией на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 15

МКЭ для одномерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ постоянен на всей расчетной области. Предусмотреть возможность задания правой части в виде δ-функции. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 16

МКЭ для одномерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической системе координат. Базисные функции квадратичные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ является кусочно-постоянной функцией. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 17

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Правая часть задана в виде производной известной скалярной функции, заданной своими значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 18

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Правая часть задана в виде производной известной скалярной функции, заданной своими значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 19

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в сферической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (лагранжевы). Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Правая часть задана в виде производной известной скалярной функции, заданной своими значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^{т}$-разложение.

Задание 20

МКЭ для одномерной краевой задачи для эллиптического уравнения в сферической системе координат. Базисные функции линейные и кубические (эрмитовы). Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Правая часть задана в виде производной известной скалярной функции, заданной своими значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в профильном формате. Для решения СЛАУ использовать $LL^т$-разложение.

Задание 21

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 22

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 23

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 24

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции кубические (лагранжевы) на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 25

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 26

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 27

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 28

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 29

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 30

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 31

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 32

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 33

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 34

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 35

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 36

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 37

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной $\left(r, \varphi\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 38

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной $\left(r, \varphi\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 39

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной $\left(r,\varphi\right)$ системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 40

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической $\left(r,z\right)$ системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 41

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 42

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 43

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 44

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции бикубические (лагранжевы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 45

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 46

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 47

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 48

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 49

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 50

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 51

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 52

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 53

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции бикубические (лагранжевы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 54

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 55

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r, z\right)$ системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 56

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r,\, z\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 57

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r,\, z\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 58

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r,\, z\right)$ системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 59

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной $\left(r,\, \varphi\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 60

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 61

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 62

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции бикубические (лагранжевы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 63

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 64

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции бикубические (эрмитовы) на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция (постоянная на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 65

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 66

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 67

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в полярной (r, φ) системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент γ разложить по билинейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 68

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции кусочно-билинейные на пятиузловых прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 69

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r,\, z\right)$ системе координат. Базисные функции кусочно-билинейные на пятиузловых прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 70

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 71

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической $\left(r,\, z\right)$ системе координат. Базисные функции билинейные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 72

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции биквадратичные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 73

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции биквадратичные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициенты – кусочно-постоянные функции (константы на элементе). Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 74

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ зависит только от z. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 75

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная на элементе. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 76

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции биквадратичные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ зависит только от z. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 77

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции кусочно-билинейные на пятиузловых прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ зависит только от z. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 78

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции билинейные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ зависит только от z. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 79

МКЭ для двумерной краевой задачи для уравнения ротор-роторного типа в цилиндрической (r, z) системе координат. Базисные функции биквадратичные на четырехугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ зависит только от z. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 80

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на тетраэдрах. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 81

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на тетраэдрах. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 82

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции трилинейные на параллелепипедах. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 83

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции трилинейные на параллелепипедах. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 84

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (x, y)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 85

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (x, y)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 86

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (y, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 87

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (y, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 88

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (x, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 89

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с треугольным основанием (основание призмы в координатах (x, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 90

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (x, y)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 91

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (x, y)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 92

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (x, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 93

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (x, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 94

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (y, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 95

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на прямых призмах с четырехугольным основанием (основание призмы в координатах (y, z)). Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 96

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на шестигранниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Задание 97

МКЭ для трехмерной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на шестигранниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ – кусочно-постоянная функция. Правая часть задана в виде производной некоторой скалярной функции с известными значениями в узлах. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соловейчик Ю.Г.*, *Рояк М.Э.*, *Персова М.Г.* Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.

2. *Рояк М.Э.*, *Соловейчик Ю.Г.*, *Шурина Э.П.* Сеточные методы решения краевых задач математической физики. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 120 с.

3. *Численные* методы решения систем уравнений: метод. указ. к выполнению работ по курсу «Численные методы» для III курса ФПМИ / М.Г. Персова, М.Э. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, А.В. Чернышев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 29 с.

4. *Стренг Г.*, *Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 375 с.

5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов.– М.: Мир, 1979. – 379 с.

6. *Митчел Э.*, *Уэйт Р.* Методы конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216 с.

**ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

Методические указания

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Подписано в печать 01.02.2011. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 150 экз.
Уч.-изд. л. 3,25. Печ. л. 3,5. Изд. № 365. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20