浙江大学 20_21_－20_22_学年_秋冬_学期

《线性代数Ⅰ（H）》课程期末考试试卷

课程号：_061R0040_，开课学院：_数学科学学院___

考试试卷：A√卷、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带___________入场

考试日期：_2022_年_1_月_10_日,考试时间：_120（8:00-10:00）_分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：______________所属院系：_____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

评分依据为写在答题本上的解答！

一、（12 分）定义实数域上线性空间$\mathbb{R}^n$到自身的映射T如下：

对任何 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$T(X)=(x_1-x_2,x_2-x_3,\cdots,x_{n-1}-x_n,x_n-x_1).$$

（1） 验证 $T\in L(\mathbb{R}^n)$（即 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上线性映射）.

（2） 求值域 $\mathrm{Im}(T)$ 和核空间$Ker(T)$ 的维数.

二、 （12 分）设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&2&1&0\\3&3&0&-1\\1&1&2&0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

求线性方程组 $AX=b$ 的一般解.

三、（12 分）设三元二次齐次实多项式如下：

$$f(x,y,z)=x^2+2xy+y^2-6yz-4xz\ .$$

（1） 求实对称矩阵A 使得 $f(x,y,z)=(x,y,z)A(x,y,z)^T$.

（2） 求一个与A合同的对角矩阵.

（3） 求 f 的正惯性指标和负惯性指标.

四、（12 分）设$V=\mathbb{R}^{4\times1}$, $W=\mathbb{R}^{3\times1}$. 定义线性映射 $T\in L(V,W)$：

$$T(X)=AX=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\ \forall X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in V.$$

（1） 证明T的秩为 2.

（2） 求V和$\operatorname{Im}(T)$ 的基 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4]$, $[\eta_1,\eta_2]$. 使得

$$T(\varepsilon_1)=\eta_1,T(\varepsilon_2)=\eta_2,T(\varepsilon_3)=T(\varepsilon_4)=(0,0,0)^T.$$

五、(12)设$V=\mathbb{R}^{2\times2}$ 是按矩阵加法和数乘构成的实数域上线性空间.

(1)验证下列向量组构成V的一组基：

$$B=\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\}.$$

（2）在V上定义运算

$$\sigma((a_{ij})_{2\times2},(b_{ij})_{2\times2})=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}.$$

验证σ是V上一个内积，使得V成为一个欧氏空间.

（3） 将 Schmidt 正交化过程用于 B 求出V的一组单位正交基.

六、（8 分）求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

的所有特征值和对应的特征子空间，及其与A相似的一个对角矩阵.

七、（16 分）设$V=\mathbb{R}^3$ 是具有自然内积的欧氏空间，$T\in L(V)$. 设

$$\alpha_1=(1,2,0),\ \alpha_2=(0,1,2),\ \alpha_3=(2,0,1),$$
$$T(\alpha_1)=-(1,0,2),\ T(\alpha_2)=-(2,1,0),\ T(\alpha_3)=-(0,2,1).$$

（1） 求T关于V的自然基的矩阵.

（2） 证明T是一个正交变换.

（3） 证明T是一个镜面反射变换.(存在V的单位正交基$\{\eta,\beta,\gamma\}$使得 $T(\eta)=-\eta,\ T(\beta)=\beta,\ T(\gamma)=\gamma$，或等价地，存在单位向量$\eta$ 使得 $T(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta,\ \forall\alpha\in V$).

八、（16 分）判断下列命题的真伪.如果是真命题，给出一个简要证明，如果是伪命题，给出一个具体反例:

（1）设A是实数域上$m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩$r(A^TA)=r(A)$.

（2）设A是复数域上$m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩$r(A^TA)=r(A)$.

（3）设V,W是数域F上的线性空间，则$V\cup W$ 是线性空间.

(4) 实矩阵的下列性质有其二必有其三：

（a） $A^T=A$ ，(b) $A^TA=E$（单位矩阵），（c） $A^2=E$.

09

1. 记 $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上全体连续实函数作成的实线性空间，对 $f,g \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$，用

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

来定义内积. 如果

$$f,g:[0,2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=\sin x,$$

求 f 与 g 的夹角 θ.

2. 设 V 是次数 ≤ 2 的实多项式线性空间，$T:V\to V$,

$$T(f(x)) = f(x) + xf'(x).$$

求 T 的特征值. 对于每个特征值，求属于它的特征子空间.

3. 设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leq 1$; 反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C, 使得 $A=BC$.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $AX=\beta$ 有解但解不唯一.

(a) 求 a 的值；

(b) 给出 $AX=\beta$ 的一般解.

5. 设 A 是可逆实矩阵.

(a) 证明 $A^T A$ 是对称矩阵.

(b) 证明 $A^T A$ 是正定的.

6. 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) 求可逆矩阵 $Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 使 $Q^T A Q$ 是对角矩阵.

(b) 给出 A 的正惯性指数、负惯性指数，并确定 A 的定性.

7. 设 $\beta = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ 是 V 的一组基，$T : V \to V$ 是线性变换，

$T(v_1) = v_2$，$T(v_2) = v_3, \ldots$，$T(v_{n-1}) = v_n$，$T(v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$.

求 T 关于 β 的矩阵表示. 在什么条件下 T 是同构？

8. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有两个不同的特征值 λ_1，λ_2，且属于 λ_1 的特征子空间的维数是 $n-1$. 证明 A 是可对角化的.

9. 判断下面命题的真伪. 若它是真命题, 给出一个简单的证明; 若它是伪命题, 举一个具体的反例将它否定.

(a) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w, 总存在线性映射 $T: V \to W$ 使 $T(v) = w$.

(b) 若线性方程组有 m 个方程, n 个变量, 且 $m < n$, 则这个方程组一定有非零解.

(c) 若 n 阶方阵 A 的秩是 n, 则 A 是可逆矩阵.

(d) 正交变换是可对角化的.

10.

1. 求全部的实数 a, 使线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

的解集是非空的.

2. 设 $M_{3\times2}(F)$ 是数域 F 上全体 3×2 矩阵构成的线性空间,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $T: M_{3\times2}(F) \to M_{3\times2}(F)$ 如下, 对任意的 $A \in M_{3\times2}(F)$

$$T(A) = PAQ.$$

(a) 证明 T 是线性映射.

(b) 求出 T 的核空间和像空间.

(c) 验证关于 T 的维数公式.

3. 设 A 和 B 是 n 阶方阵, 其中 n 是奇数. 若 $AB = -BA$, 证明: A 是不可逆的或者 B 是不可逆的.

4. 设 V 是欧氏空间，$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 且 $\mathbf{v}\neq 0$. 证明

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$$

当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使 $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$.

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实正交矩阵.

   (a) 证明 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| \le n$.

   (b) 在什么条件下等式成立？

6. 求 2×2 实矩阵 A, 使得 A 的特征值是 2 和 1, 而对应于 2 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 生成，对应于 1 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 生成.

7. 设 n 阶方阵 A 和 B 都可对角化，并且它们有相同的特征子空间（但不一定有相同的特征值）. 证明 $AB=BA$.

8. 实三元二次多项式 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 的定义是

$$f(x,y,z)=2x^2-8xy+y^2-16xz+14yz+5z^2.$$

   (a) 给出 3×3 实对称矩阵 A, 使 $f(x,y,z)=(x,y,z)A(x,y,z)^T$.

   (b) 给出一个与 A 相合的对角矩阵.

   (c) 给出 A 的秩，正惯性指数和负惯性指数.

9. 判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单的证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

   (a) 若线性映射 $T_1,T_2:V\to W$ 对 V 的一组基中的每一个基向量 v 满足 $T_1(v)=T_2(v)$, 则 $T_1=T_2$.

   (b) 若对于任何正整数 n, 方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 是可逆的.

   (c) 若线性映射 $T:V\to W$ 的核是 K, 则 $\dim V=\dim W+\dim K$.

   (d) 若方阵 A 相似于方阵 B, 则 A 与 B 有相同的特征向量.

1. 求 $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}$, 使 $(1,1,1)^T$, $(1,0,-1)^T$, $(1,-1,0)^T\in\mathbf{R}^3$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ 的特征向量.

2. 记线性映射 σ 的核为 $\ker\sigma$, 像为 $\operatorname{Im}\sigma$. 设 $\sigma_1,\sigma_2:V\to V$ 是线性映射. 证明:

   (a) $\ker\sigma_1\subseteq\ker(\sigma_2\circ\sigma_1)$.

   (b) $\operatorname{Im}(\sigma_2\circ\sigma_1)\subseteq\operatorname{Im}\sigma_2$.

3. 设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基, 线性映射 $\sigma:V\to V$ 定义如下:

$$\sigma(v_1)=v_2+v_3,\ \sigma(v_2)=v_3,\ \sigma(v_3)=v_1-v_2.$$

   (a) 给出 σ 关于基 B 的矩阵表示.

   (b) 证明 $B'=\{v_2,\ v_3+v_1,\ v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基.

   (c) 给出 σ 关于基 B' 的矩阵表示.

4. 设 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组单位正交基. 证明: 对于任何 $u\in V$, 成立

$$|u|^2=(u,v_1)^2+(u,v_2)^2+\cdots+(u,v_n)^2.$$

5. 记 $P_2(\mathbf{R})$ 为次数小于或等于 2 的实多项式线性空间.

   (a) 证明: $(f,g)=\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$ 是 $P_2(\mathbf{R})$ 的内积.

   (b) 将 Schmidt 正交化过程应用于 $S=\{1,\ x,\ x^2\}$, 求出 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组单位正交基 B.

6. 设 $\sigma:V\to V$ 是有限维线性空间 V 上的一个同构映射. 记 $V(\sigma;\lambda)$ 为 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

   (a) 如果 λ 是 σ 的特征值, 证明: $\lambda\neq 0$.

   (b) 如果 λ 是 σ 的特征值, 证明: $V(\sigma;\lambda)=V(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$.

   (c) 证明 “σ 可对角化” 的充要条件是 “σ^{-1} 可对角化”.

7. 求下面实对称矩阵的秩，正惯性指数和负惯性指数.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 10 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & -14 \end{pmatrix}.$$

8. 设 A, B 都是域 F 上的 n 阶对角矩阵，且 A 的对角元是 B 的对角元的一个置换. 证明：

(a) A 相似于 B.

(b) A 相合于 B.

9. 判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单的证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(a) 若 S 是线性空间 V 的线性相关子集，则 S 的每一个向量都是 S 的其它向量的线性组合.

(b) 域 F 上的全体 n 阶可逆阵构成 $M_{n\times n}(F)$ 的一个子空间.

(c) 若存在正整数 n, 使方阵 A 的 n 次幂 $A^n = 0$, 则 A 的行列式 $|A| = 0$.

(d) 对任意的 n 阶实对称阵 A, 总存在 ϵ, 使得 $E_n + \epsilon A$ 是正定矩阵.

题 序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总 分
得 分										
评卷人										

12-13

请详细解答下面 9 个问题. 第 1 至第 8 题每题 10 分, 第 9 题 20 分 (每小题 5 分)

1. 求实线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & +5x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & 4 \end{cases}$ 的解集.

2. 设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, A 的秩 $r(A) = 1$.

   (a) 证明存在 (列向量) $X \in \mathbf{F}^m$ 和 $Y \in \mathbf{F}^n$ 使得 $A = XY^T$, 其中 Y^T 是 Y 的转置.

   (b) X 和 Y 是否唯一?

3. 定义线性映射 $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 如下: 对任意的 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ \cdots,\ x_n + x_1).$$

   试给出 T 的核 $\mathrm{Ker}(T)$ 和 T 的像 $\mathrm{Im}(T)$ 的维数.

4. 设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上有限维线性空间, $T : V \to V$ 是线性映射. 证明 V 的非零向量都是 T 的特征向量当且仅当存在 $\alpha \in \mathbf{F}$, 使 $T(v) = \alpha v$ 对于任何 $v \in V$ 成立.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，其中 $b\neq 0$; λ 是 A 的特征值.

(a) 证明 $\lambda\neq 0$.

(b) 证明 $(b,\lambda-a)^T$ 是属于 λ 的特征向量.

(c) 若 A 有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2, 求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

6. 实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 使 Q^TAQ 是对角矩阵.

7. 设 V 是欧氏空间， $T:V\to V$ 是线性映射， $\lambda\in\mathbf{R}$, u 是 V 的非零向量. 证明： λ 是 T 的特征值且 u 是属于 λ 的特征向量当且仅当对于任何 $v\in V$ 成立 $(T(u),v)=\lambda(u,v)$.

8. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足矩阵方程 $A^2-6A+5I_n=0$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵.

(a) 证明 A 是正定的.

(b) 若 $n=2$, 试给出全部有可能与 A 相似 (注意：不是相合 !) 的对角矩阵.

9. 判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单的证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(a) 若有限维线性空间 V 的线性映射 $T:V\to V$ 是可对角化的，则 T 是同构.

(b) 若 A,B 是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵.

(c) 若 n 阶方阵 A,B 中的 A 是可逆的，则 AB 与 BA 是相似的.

(d) 若 $n(>1)$ 阶方阵 A 的特征多项式是 $f(\lambda)=\lambda^n$, 则 A 是零矩阵.

得 分										
评卷人										

请详细解答下面 9 个问题. 第 1 至第 8 题每题 10 分, 第 9 题 20 分 (每小题 5 分)

1. 映射 $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 由 $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3,\ x_1 + x_3)$ 定义.

   (a) 证明 T 是线性映射.

   (b) 给出 T 关于 $\mathbf{R}^3$ 和 $\mathbf{R}^2$ 的标准基的矩阵表示.

   (c) 给出 T 的核 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一组基.

3. 设 $(\ ,\ )$ 是实线性空间 V 的内积, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组单位正交基.

   (a) 证明：对任意的 $x, y \in V$, 有 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, v_i)(y, v_i)$.

   (b) 设 $x = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i v_i$ 和 $y = \sum_{i=1}^{n} v_i$ 的夹角是 θ, 求 $\cos\theta$, 并指出 x 和 y 是否正交.

2. 记 $V=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\mid f \text{ 可导 }\}$, 即 V 是由实数到自身的全体可导函数所构成的集合.

(a) 试给出 V 上加法和数乘运算, 使 V 成为实线性空间, 并写出 V 中的零向量.

(b) 记 $S=\{f_1, f_2, f_3\}$, 其中

$$f_1(x)=x;\quad f_2(x)=\sin x;\quad f_3(x)=e^x,\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

证明 S 是 V 的线性无关子集.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维实线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的列向量, 已知 4 阶行列式 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)|=d_1$, $|(\beta_2,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)|=d_2$. 求下面 4 阶方阵的行列式:

(a) $A=(3\alpha_1-100\alpha_2, 7\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$.

(b) $B=(5\beta_1+6\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

5. 设域 $\mathbf{F}$ 上 n 维线性空间 V 的非零向量都是线性映射 $T: V \to V$ 的特征向量.

(a) 证明 T 是数乘映射, 即存在 $\lambda \in \mathbf{F}$, 使得对于任何 $v \in V$, 有 $T(v) = \lambda v$.

(b) 给出 T 的秩和零度 (T 的零度 $=\dim(\mathrm{Ker}(T))$).

6. 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$, 其特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 2$.

(a) 求 x 和 y 的值.

(b) 若将 A 看作实矩阵, A 是否可对角化? 为什么?

(c) 若将 A 看作复矩阵, A 是否可对角化? 为什么?

7. 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵.

(a) 设 $\lambda \neq 0$. 证明 λ 是 $m \times m$ 矩阵 AB 的特征值当且仅当 λ 是 $n \times n$ 矩阵 BA 的特征值.

(b) 证明 $I_m - AB$ 是可逆矩阵当且仅当 $I_n - BA$ 是可逆矩阵 (I_m 是 m 阶单位矩阵, I_n 是 n 阶单位矩阵).

8. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

(a) 求实对称矩阵 A, 使 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A(x_1, x_2, x_3)^T$.

(b) 求可逆矩阵 P, 使 P^TAP 是 A 的相合规范形.

(c) 给出 f 的正惯性指数和负惯性指数, 并指出 f 是否正定或负定.

9. 判断下面命题的真伪. 若它是真命题, 给出一个简单的证明; 若它是伪命题, 举一个具体的反例将它否定.

(a) 域 $\mathbf{F}$ 上所有 n 阶不可逆方阵所构成的集合是 n 阶矩阵空间 $M_n(\mathbf{F})$ 的子空间.

(b) 对称矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 也是对称矩阵.

(c) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, I_m 是 m 阶单位矩阵, $B = (A \,|\, I_m)$ 是 A 的增广矩阵, 则 B 的秩 $r(B) = m$.

(d) 若 $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, 且 $n < m$, 则任何线性映射 $T: V \to W$ 都不可能是满射.

一. (10 分) 求过点 $(2,0,-1)$ 且垂直于平面 $x+2y-z=1$ 的直线标准方程和参数方程, 以及该直线方向矢量的方向余弦.

14-15

二. (10 分) 求参数 a,b 的值, 使得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & b \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=a$ 都成立, 并求 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 5 \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

三. (10 分) 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$, 其中 n 是自然数.

四. (10 分) 设 W 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 的解空间, 求 W 的一组单位正交基, 并将其扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的单位正交基, 这里 $\mathbb{R}$ 是实数域.

五. (10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基, V 上的线性变换 T 满足

$$T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2,\quad T(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2,\quad T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2.$$

求 T 的像空间 $\mathrm{Im}T$ 和核空间 $\mathrm{Ker}T$, 以及 T 的秩 $r(T)$.

六. (10 分) 设 T 是次数小于等于 2 的实多项式线性空间 V 上的变换, 对任意 $f(x) \in V$, 定义

$$T(f(x)) = \frac{d((x-2)f(x))}{dx}.$$

证明 T 是 V 上的线性变换, 并求 T 的特征值; 对于每个特征值, 求属于它的特征子空间.

七. (10 分) 设在 $F[x]_3$ 中有两组基:

(I): $\alpha_1 = 1 - x$, $\alpha_2 = -x + x^2$, $\alpha_3 = 3x - 2x^2$; 和 $\lambda(a_1, a_2, a_3) = X.(x_1, x_2, x_3)$

(II): $\beta_1 = 4x + 5x^2$, $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = 3x + 4x^2$.

1. 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵.
2. 设 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1, 1, -1)^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标.

八. (10 分) 已知实对称矩阵 A 有两个特征值 1 和 -1, 对应的特征向量分别是 $(1, -1, 0)^T$ 和 $(1, 1, -2)^T$. 假如该矩阵与对角矩阵 $\operatorname{diag}(1, 2, -1)$ 相似, 求 A^n, 其中 n 为自然数.

九. (20 分) 判断下面命题的真伪. 若它是真命题, 给出一个简单的证明; 若它是伪命题, 举一个具体的反例将它否定.

1. 假如 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵, 那么 AB 也是正定矩阵.
2. 设 A 和 B 都是可逆矩阵, 那么矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 也是可逆矩阵. ✓
3. 若 M 表示区间 $[0, 1]$ 上所有可积实值函数全体 (关于通常函数加法和数乘) 所构成的实线性空间, 在 M 上定义 $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, 那么 M 关于该运算成为欧氏空间.
4. 对任何 $m \times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b, 方程组 $A^T AX = A^T b$ 总有解.