试卷（A）参考答案与提示

1. 本题考察余子式、伴随矩阵的概念，需要使用下三角矩阵的性质、特征值之和等于矩阵对角线元素之和的性质，并考察了伴随矩阵特征值的计算.当然本题也可以不利用下面使用的结论，直接运算出结果也是非常方便的.

解法一：

由题意可知，A为下三角矩阵，故特征值为对角线上元素1, 2, 3, 4，则

$|A| = 1\times2\times3\times4 = 24$，又$A^* = |A|A^{-1}$，故$A^*$特征值为

$\frac{|A|}{\lambda_1} = \frac{24}{1} = 24$，$\frac{|A|}{\lambda_2} = \frac{24}{2} = 12$，$\frac{|A|}{\lambda_3} = \frac{24}{3} = 8$，$\frac{|A|}{\lambda_4} = \frac{24}{4} = 6$

实际上，$A_{ii} = (-1)^{i+i}M_{ii} = M_{ii}\ (i=1,2,3,4)$

故原式 $= \sum_{i=1}^{4} A_{ii} = \sum_{i=1}^{4} \frac{|A|}{\lambda_i} = 50$（$\sum_{i=1}^{4} A_{ii}$为$A^*$对角线元素之和，也为$A^*$特征值之和.

解法二：

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2\times3\times4 = 24$　　$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times2\times4 = 8$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times3\times4 = 12$　　$M_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times2\times3 = 6$

故原式 $= 24+12+8+6 = 50$

2.

（1）子空间容易证明，只需说明非空以及加法、数乘运算封闭即可，略；

（2）求解齐次线性方程组 $AX=0$，得到基础解系α, β（具体运算省略，自己检查时将答案代入方程组即可验证正确性）。于是 W 的维数为 4，基可以表示为 $(\alpha,0),(0,\alpha),(\beta,0),(0,\beta)$，注意需要简要说明这是一组基（线性无关 + 张成 W）.

3. 线性映射只需要验证 $T(\lambda A+\mu B) = \lambda T(A) + \mu T(B)$ 即可；不同构只需说明不是单射，我们发现 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是T 的核空间的基，因此其核空间中不只有 0，故 T 不是单射（本题不是满射比不是单射更为复杂，不推荐使用，要视情况二者灵活运用）.

4. 本题考查非齐次线性方程组的解的一般理论，此类题目考试中经常考察，请务必熟练掌握相关性质.

(1) 我们考虑一组向量 $\beta_2-\beta_1, \beta_3-\beta_1, \cdots, \beta_s-\beta_1$，由于 $A\beta_i=b\ (i=1,2,\cdots,s)$.

则 $A(\beta_i-\beta_1)=A\beta_i-A\beta_1=b-b=0\ (i=1,2,\cdots,s)$

且以上向量组线性无关. 假设其线性相关，则存在不全为0的 $k_2,\cdots,k_s$ 为常数

使得 $k_2(\beta_2-\beta_1)+k_3(\beta_3-\beta_1)+\cdots+k_s(\beta_s-\beta_1)=0$.

$$\Rightarrow -(k_2+k_3+\cdots+k_s)\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+\cdots+k_s\beta_s=0$$

又 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，故 $k_2=k_3=\cdots=k_s=0$. 矛盾，故线性无关.

故 $AX=0$ 解空间 $N(A)$ 维数 $\dim N(A)\geq s-1$.

故 $r(A)=n-\dim N(A)\leq n-s+1$

(2) 由(1)知 $\beta_2-\beta_1, \beta_3-\beta_1, \cdots, \beta_s-\beta_1$ 这 $s-1$ 个向量就是 $AX=0$ 的基础解系.

而 $A\cdot 2\beta_1=2b$，取 $2\beta_1$ 为特解，$AX=2b$ 的一般解为

$$X=2\beta_1+k_2(\beta_2-\beta_1)+k_3(\beta_3-\beta_1)+\cdots+k_s(\beta_s-\beta_1)$$

其中 $k_2,k_3,\cdots,k_s$ 为常数.

5. 本题试图考察教材第 240 页的例 3 的结论，当然不用这一结论也可以做，只是过程会复杂一些（请务必回顾这一结论，实际上就是基的变换与坐标变换的关系，即教材定理 4.10 相关结论）.

（1）验证 P 为可逆矩阵，则 $P^{-1}AP=B$，即 A 与 B 相似，故矩阵 A 的特征值 -2，1，2 就是 B 的特征值；

（2）求 A 的特征向量 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 P 的逆矩阵，则 $P^{-1}\alpha_i(i=1,2,3)$ 即为 B 相应的特征向量.

6. 本题难度较大，考察知识点也很综合，命题时已经是尽力给足提示.

(1) $A^2 = E + 2XY^T + (XY^T)^2$

又 $(XY^T)^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^TX)Y^T = \alpha XY^T$，故

$A^2 = E + (\alpha+2)XY^T = E + (\alpha+2)(A-E)$

$\Rightarrow$ (*) $A^2 - (\alpha+2)A + (\alpha+1)E = 0$，故存在不全为0的常数 $k_1=1$, $k_2=-(\alpha+2)$, $k_3=\alpha+1$

使得 $k_1A^2+k_2A+k_3E=0$ 成立. 故 A^2, A, E 线性相关.

(2) 由(1)中(*)式 $\Rightarrow$ $A(A-(\alpha+2)E) = -(\alpha+1)E$

故 $\alpha\neq -1$ 时，$A\cdot\dfrac{(\alpha+2)E-A}{\alpha+1}=E$. 即 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{(\alpha+2)E-A}{\alpha+1}$

(3) $\alpha=-2$ 时 由(*)式有 $A^2-E=0$ (对合矩阵)

故 $(E-A)(E+A)=0 \Rightarrow r(E-A)+r(E-A)\le n$

又 $n=r(2E)=r((E-A)+(E+A))\le r(E-A)+r(E+A)$

综上有 $r(E-A)+r(E+A)=n$.

① $|E-A|\neq 0$，则 $r(E-A)=n$. $r(E+A)=0$. 即 $A=-E$ 成立

② $|E+A|\neq 0$，则 $r(E+A)=n$，$r(E-A)=0$. 即 $A=E$ 成立

③ $|E-A|=0$ 且 $|E+A|=0$，则 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ 都是 A 的特征值，且

$\dim V_{\lambda_1}=\dim \ker(E-A)=n-r(E-A)$,

$\dim V_{\lambda_2}=\dim \ker(E+A)=n-r(E+A)$

则 $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}=2n-(r(E-A)+r(E+A))=n$. 故 A 可对角化.

7. 本题是 2020 年考研数学一、二的真题，第一题需要一定的理解转化，第二问计算量较大.

（1）

22.【解析】（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, 由题意可知

$r(A)=r(B)$, 而 $r(B)=2$, 故 $r(A)=2$, 于是可得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

（2）

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3$$
$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3$$
$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令$\begin{cases} z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3) \\ z_3=x_3 \end{cases}$,即$\begin{cases} x_1=z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_2+z_3 \\ x_2=\frac{2}{\sqrt{3}}z_2+z_3 \\ x_2=z_3 \end{cases}$,得 $f=z_1^2+z_2^2$,

取 $P_1=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对于二次型 g， $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$,

$\begin{pmatrix} z_1=y_1+y_2 \\ z_2=2y_3 \\ z_3=y_2 \end{pmatrix}$,即$\begin{pmatrix} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=z_3 \\ y_3=\frac{1}{2}z_2 \end{pmatrix}$，得$g=z_1^2+z_2^2$,取$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

取 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,存在变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$使得 $f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

8.

（1）错误. 本题考查覆盖定理的简单情况，可以参考教材 91 页第 8 题.

（2）正确. 本题与辅学网站 2-7 题类似.

（3）错误. 特征值相同不一定相似，也就不一定相抵，反例：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（4）正确. 本题本质上考察整数可逆矩阵逆矩阵也为整数矩阵的条件.

充分性：若该方程组的系数矩阵行列式为± 1，故可由克拉默法则可知

$\forall b=\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T \left(b_1 \quad \cdots \quad b_n \text{为整数} \right)$，方程$Ax=b$的解均为整数解。

必要性；令$Ax=b$，由已知可知

对于

e_1,存在整数解β_1

e_n,存在整数解β_n

所以$A\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}=E_n$，若取$B=\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$，所以$|A||B|=1$，而$A,B$为整数组成的矩阵，从而有$|A|=\pm 1$，即该方程组的系数矩阵行列式为$\pm 1$