浙江大学 2022-2023 学年秋冬学期

《线性代数 I（H)》课程期末模拟试卷（A）

一、（10 分）已知矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&2&0&0\\-1&-2&3&0\\5&-3&-4&4\end{pmatrix}$，求 $M_{11}+M_{22}+M_{33}+M_{44}$，其中 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式.

二、（10 分）设 $\mathbf{R}^{5\times 2}$ 表示实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 5×2 矩阵构成的线性空间，已知

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&2\end{pmatrix},$$

记 $W=\{B\in\mathbf{R}^{5\times 2}\mid AB=0\}$.

（1）证明：W 是 $\mathbf{R}^{5\times 2}$ 的子空间；

（2）求 W 的维数和一组基.

三、（10 分）设 $M_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上 2 阶方阵所构成的线性空间，$\mathbf{R}[x]_4$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上次数小于 4 的多项式所构成的线性空间，定义 $M_2(\mathbf{R})\to\mathbf{R}[x]_4$ 的映射

$$T(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix})=ax^3+2(b-c)x^2+3(b-c)x+4d(a,b,c,d\in\mathbf{R}).$$

证明：T 是线性映射，但不是同构映射.

四、（10 分）设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 n 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的 s 个线性无关的解.

（1）证明：$r(A)\leq n-s+1$；

（2）若 $r(A)=n-s+1$，求 $AX=2b$ 的一般解.

五、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&1&4\\-4&2&4\\-1&1&2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}2&1&-3\\4&0&5\\3&-2&-1\end{pmatrix}$，且矩阵 B 满足 $AP=PB$. 求 B 的特征值与对应的特征子空间.

六、（15 分）设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},Y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}(n>1)$，且 $X^{\mathrm{T}}Y=\alpha$（α 为常数），记矩阵 $A=E+XY^{\mathrm{T}}$，证明：

（1）A^2,A,E 在 n 阶矩阵空间 $M_n(\mathbf{R})$ 中线性相关；

（2）当 $\alpha\neq-1$ 时，A 是可逆矩阵，并且求其逆矩阵；

（3）当 $\alpha=-2$ 时，$r(E-A)+r(E+A)=n$ 且 A 相似于对角矩阵.

七、（15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（1）求 a；

（2）求可逆矩阵 P.

八、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

（1）存在线性空间 V 的两个非平凡子空间 V_1,V_2 使得 $\forall\alpha\in V$ 都有 $\alpha\in V_1$ 且 $\alpha\in V_2$.

（2）设 A 为实数域上的 n 阶方阵，X 为 n 元实列向量，若 $A^{k-1}X\neq0$，但 $A^kX=0$，则 X，AX，$\ldots$，$A^{k-1}X(k>0)$ 线性无关.

（3）设 A，B 均为 n 阶实矩阵且有相同的特征值，则 A 与 B 的相抵标准形相同.

（4）设整系数线性方程组为 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则该方程对任意整数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有整数解的充分必要条件为该方程组的系数行列式等于 ±1.