

数学分析 (甲) I (H) 2021 秋冬期末

图灵回忆卷

2022 年 1 月 5 日

一、(10 分) 叙述 Cauchy 收敛原理, 并证明数列 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k(k+1)}$ 收敛.

二、(32 分) 计算

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^4)^{\frac{1}{4}} dt}{x^3}.$

2. $\int \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx.$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

4. 求 $y = e^x$ 过点 $(0, 0)$ 的切线 L , 并求 $y = e^x$ 、 L 和 y 轴所夹图形绕 x 轴旋转一周的体积.

三、(8 分) 证明: 无上界数列必存在发散于无穷大的子列.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上定义, 证明:

$$\sup_{x \in [0, 1]} f(x) - \inf_{x \in [0, 1]} f(x) = \sup_{x', x'' \in [0, 1]} |f(x') - f(x'')|.$$

五、(10 分) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 可导, 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

六、(10 分) 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ 则 } g(x) \text{ 一致连续.}$$

七、(10 分) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 证明 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 均收敛, 且其值相等.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 三阶可导, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) > 0$, $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) \in (0, 1)$, 且数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = x_n(1 - f(x_n))$

1. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$;

2. 证明: 存在 $\alpha > 0$ 和常数 $c \neq 0$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} cn^\alpha x_n = 1$.