Projekt nr 1
Procesy stochastyczne w biologii i naukach społecznych

Marcin Socha 418253, Antoni Misztal 417741

19 czerwca 2023

1 Projekt

Rozważmy problem procesu stochastycznego $x(t)$ spełniającego równanie

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(x\ln(x) - ax\right) + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau}} x\eta(t), \tag{1}$$

gdzie a jest stałą dodatnią, τ stałą czasu, σ amplitudą białego szumu, zaś $\eta(t)$ procesem gaussowskim spełniającym

$$< \eta(t) >= 0 \tag{2}$$

oraz

$$< \eta(t_1)\eta(t_2) >= \delta(t_1 - t_2). \tag{3}$$

1.1 a)

Policzmy rozkład stacjonarny x. Zauważmy, że równanie (1) jest równaniem Langevina dla funkcji

$$F(x) = -\frac{1}{\tau}(x\ln(x) - ax) \tag{4}$$

oraz

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau}} x. \tag{5}$$

W związku z tym możemy zastosować formułę Ito

$$dH(x) = (H'(x)F(x) + \frac{1}{2}H''(x)G^2(x))dt + H'(x)G(x)dW + O(dt^{3/2}) \tag{6}$$

dla funkcji $y(x) = H(x) = \ln(x)$, gdzie W to proces Wienera. Wówczas

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right)(x\ln(x) - ax) - \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{2\sigma^2}{\tau}x^2 + \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau}}x\eta(t) + O(dt^{1/2}) \\
\frac{dy}{dt} &\approx -\frac{1}{\tau}\left(y - a + \sigma^2\right) + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau}}\eta(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Zauważmy, że powyższe równanie (7) również jest równaniem Langevina. Wiemy z wykładu, że rozkład stacjonarny y możemy zapisać równaniem

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{A\tau}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(-2\int^y (z-a+\sigma^2)/(2\sigma^2)dz\right) \\ &= \frac{A\tau}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{2\sigma^2 y - 2ay + y^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{A\tau}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-(y-(a-\sigma^2))^2 - (a-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{(a-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{A\tau}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-(y-(a-\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy coś podobnego do rozkładu normalnego. Policzmy teraz A, tak by całka po dy na całej prostej wynosiła 1

$$\begin{aligned} \frac{A\tau}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-(a-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\ \sigma(\sqrt{2}/\sqrt{\pi})\exp\left(\frac{2\sigma^2}{(a-\sigma^2)^2}\right) &= A. \end{aligned} \tag{9}$$

Stąd otrzymujemy rozkład normalny z parametrami $\mu_s = a - \sigma^2$ oraz $\sigma_s = \sigma$. Podstawiając pod $y = \ln x$ dostajemy rozkład logarytmicznie normalny z tymi samymi parametrami, więc ostatecznie

$$P_{ss}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(\ln(x)-(a-\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

Rozwiążmy teraz analitycznie równanie (1) znajdując rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $x(t)$.

Rozważmy jednak równanie (7) jako startowe. Zauważmy, że jest ono równoważne równaniu Fokkera- Plancka postaci

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{\tau}(y-a+\sigma^2)P(y,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{2\sigma^2}{\tau}P(y,t)\right]. \tag{11}$$

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie (11) będące postaci

$$P(y,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(y-\mu(t))^2}{2\sigma^2}\right). \tag{12}$$

Podstawmy więc to równanie do (11) aby móc wyliczyć $\mu(t)$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}(y-\mu(t))\mu'(t)e^{-(y-\mu(t))^2/(2\sigma^2)} = \\ &-\frac{1}{\sigma^3\tau\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(y-\mu(t))^2}{2\sigma^2}\right)\left(a\mu(t) - ay - \sigma^2\mu(t) - y\mu(t) - \sigma^2 + y^2 + \sigma^2 y\right) + \\ &+\frac{1}{\tau\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(\frac{-(y-\mu(t))^2}{2\sigma^2}\right)\left(-2y\mu(t) + \mu^2(t) - \sigma^2 + y^2\right)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Stąd łatwo widzimy dzieląc przez $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}e^{-(y-\mu(t))^2/(2\sigma^2)}$, że

$$
\begin{aligned}
&(y-\mu(t))\mu'(t) = \\
&-\frac{1}{\tau}\left(a\mu(t) - ay - \sigma^2\mu(t) - y\mu(t) - \sigma^2 + y^2 + \sigma^2 y\right) + \\
&+\frac{1}{\tau}\left(-2y\mu(t) + \mu^2(t) - \sigma^2 + y^2\right).
\end{aligned} \tag{14}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
&(y-\mu(t))\mu'(t) = \\
&-\frac{1}{\tau}\left(a\mu(t) - ay - \sigma^2\mu(t) + y\mu(t) + \sigma^2 y - \mu^2(t)\right) \\
&= -\frac{1}{\tau}(\sigma^2 - a + \mu)(y - \mu).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Stąd

$$
\mu'(t) = -\frac{1}{\tau}(\sigma^2 - a + \mu) \Rightarrow \mu = Ce^{-t/\tau} + a - \sigma^2. \tag{16}
$$

Stąd rozkład zmiennej y wynosi

$$
P(y,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y - Ce^{-t/\tau} - a + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{17}
$$

W takim razie skoro $y = \ln(x)$, to szukanym rozkładem jest

$$
P(x,t) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x - Ce^{-t/\tau} - a + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{18}
$$

ponieważ dla danego zbioru A mamy

$$
\begin{aligned}
P(x \in A) = P(y \in \ln(A)) &= \int_{\ln(A)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y - Ce^{-t/\tau} - a + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \int_A \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x - Ce^{-t/\tau} - a + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Z podpunktu c) wiemy, że $x(0) = \frac{a}{2}$, więc prawie na pewno $\mu(0) = \frac{a}{2}$, więc wracając do wzoru (16) mamy, że

$$
\mu = \left(\sigma^2 - \frac{a}{2}\right) e^{-t/\tau} + a - \sigma^2, \tag{20}
$$

więc ostatecznie otrzymujemy

$$
P(x,t) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x - (\sigma^2 - \frac{a}{2})e^{-t/\tau} - a + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{21}
$$

1.2 b)

Widzimy, że skoro rozkład stacjonarny x jest logarytmicznie normalny o parametrach $\mu_s = a - \sigma^2$ oraz $\sigma_s = \sigma$, to znamy wartość oczekiwaną oraz wariancję i wynoszą one kolejno

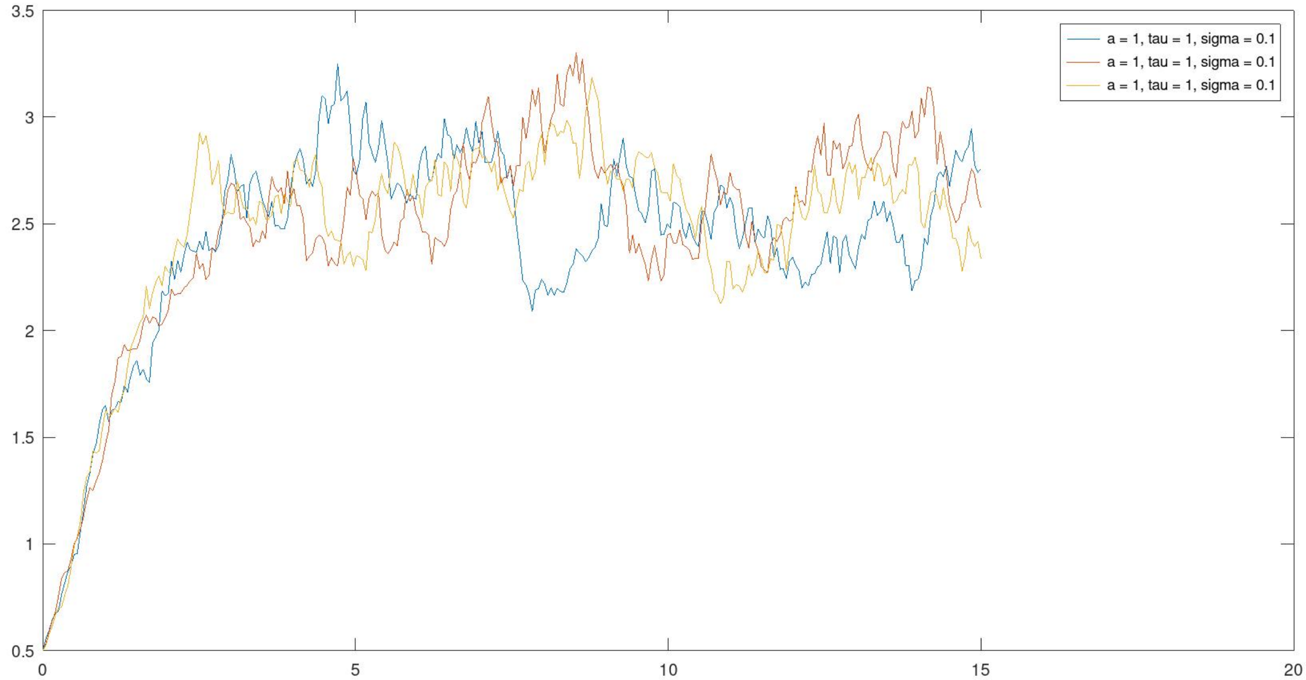
$$\langle x \rangle = \exp(\mu_s + \sigma_s^2/2) = \exp(a - \sigma^2/2) \tag{22}$$

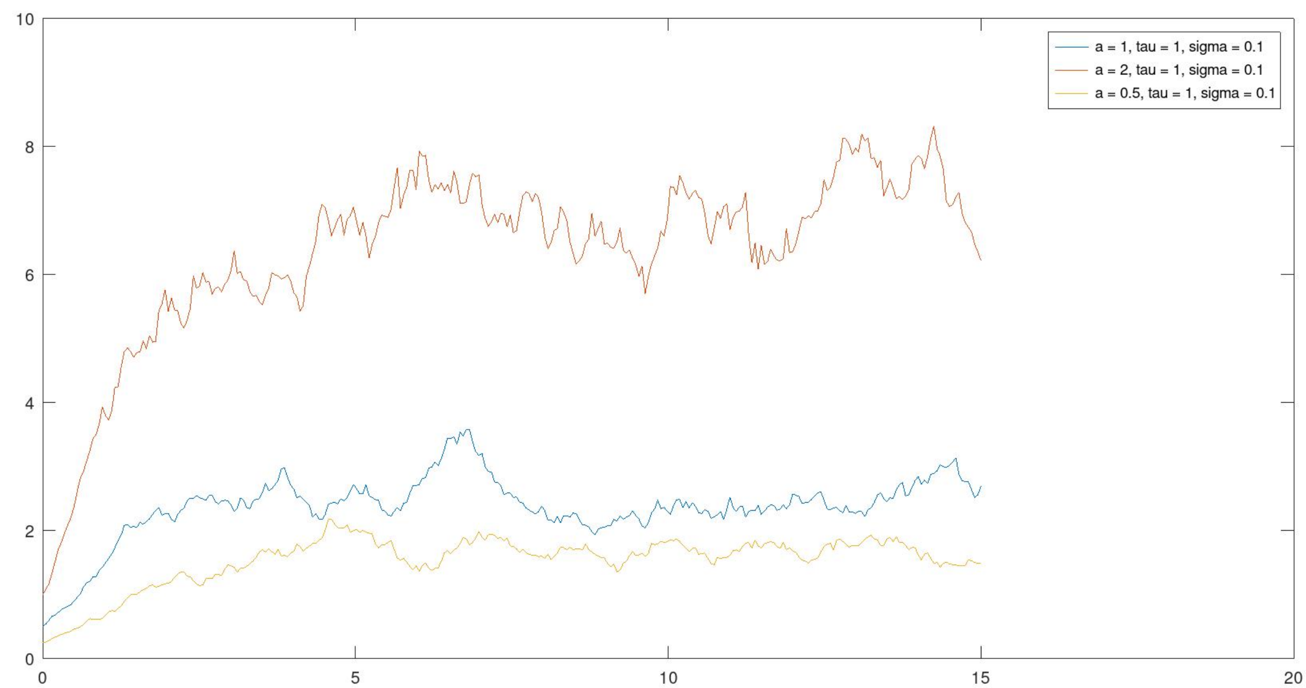
$$SD(x) = \sqrt{(\exp(\sigma_s^2) - 1)\exp(2\mu_s + \sigma_s^2)} = \sqrt{(\exp(\sigma^2) - 1)\exp(2a - \sigma^2)}. \tag{23}$$

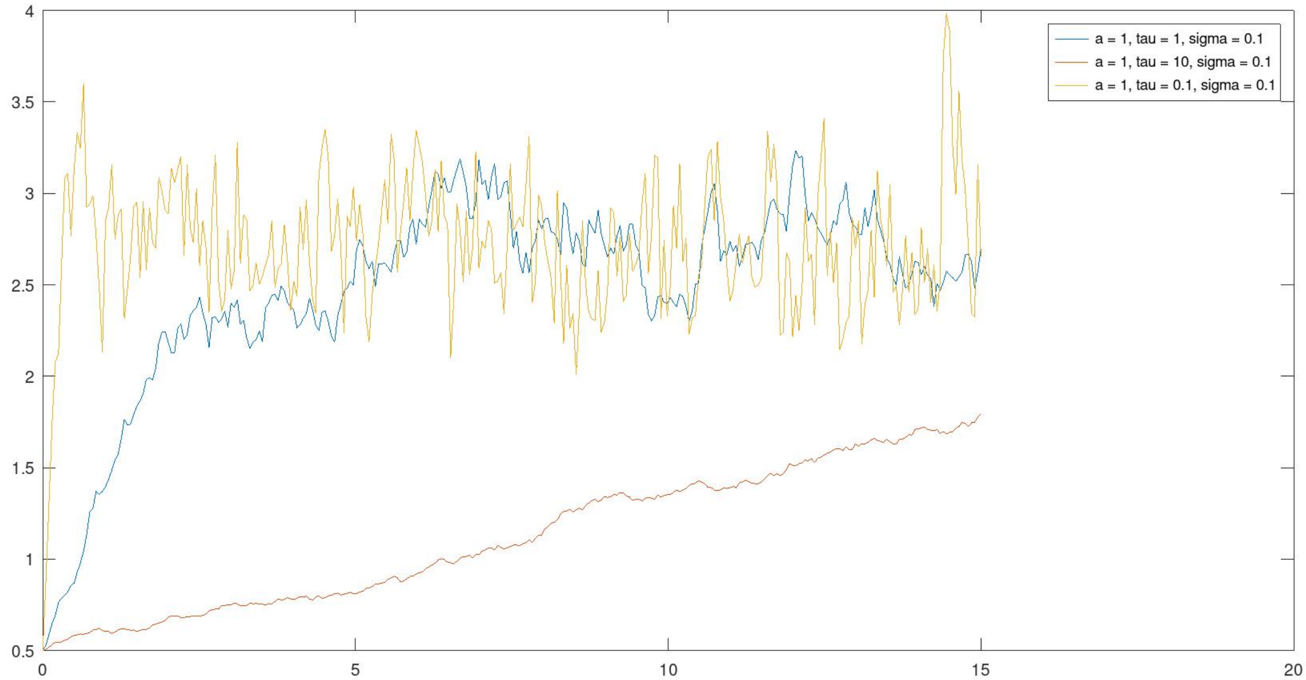
1.3 c)

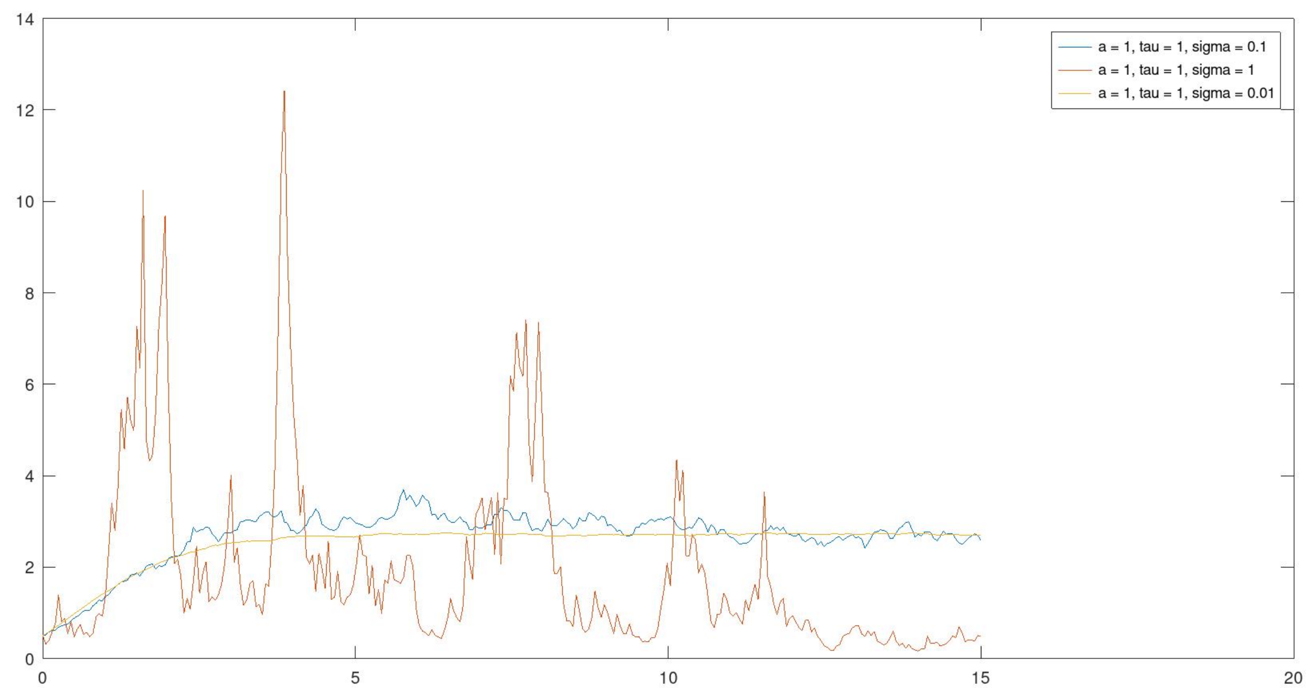
Spróbujmy rozwiązać równanie numerycznie. Zakładając, że (1) dla $x(0) = a/2$ wykorzystajmy metodę Rungego-Kutty. W naszym przypadku będziemy zmieniali parametry a, τ oraz σ. W tej metodzie tworzymy proces Wienera generując tablicę przyrostów danej trajektorii będącą zbiorem n niezależnych losowań z rozkładu normalnego o średniej 0 oraz wariancji równej z góry przyjętej Δt.

Rysunki zostały stworzone w programie Octave przy użyciu kodu (dla każdego rysunku zmieniamy parametry ręcznie).


a = 1, tau = 1, sigma = 0.1
a = 1, tau = 1, sigma = 0.1
a = 1, tau = 1, sigma = 0.1


a = 1, tau = 1, sigma = 0.1
a = 2, tau = 1, sigma = 0.1
a = 0.5, tau = 1, sigma = 0.1


a = 1, tau = 1, sigma = 0.1
a = 1, tau = 10, sigma = 0.1
a = 1, tau = 0.1, sigma = 0.1


a = 1, tau = 1, sigma = 0.1
a = 1, tau = 1, sigma = 1
a = 1, tau = 1, sigma = 0.01

```
function [t, x, info] = rungekutta (a, tau, sigma, T, N)

## compute the Runge-Kutta approximation of solution x of equation
## dx = -(1 / tau)(xln(x) - ax)dt + x(sqrt(2) * sigma / sqrt(tau))dW_t
## where W_t is a Wiener process, [0, T] is an interval for which we want to
## find a solution and N is the number of points for which we want to find
## Runge-Kutta approximation
## INPUT
## a - positive constant
## tau - time constant
## sigma - noise amplitude
## T - end time
## N - number of points used for approximation
## OUTPUT
## t - time vector
## x - approximated values vector
## info - exit code - zero for succes and nonzero for failure


info = 0;
t = zeros (1, N);
x = zeros (1, N);

if (a <= 0)
  info = -1;
  disp ("Warning: a is not positive");
  return;
endif

if (tau <= 0)
  info = -1;
  disp ("Warning: tau is not positive");
  return;
endif

if (sigma <= 0)
  info = -1;
  disp ("Warning: sigma is not positive");
  return;
endif

if (T <= 0)
  info = -1;
  disp ("Warning: T is not positive");
  return;
endif

if (N < 2)
  info = -1;
  disp ("Warning: N is too small (<2)");
  return;
endif
```

```
h = T / (N-1);
x(1) = a / 2;
dW = sqrt (h) * randn (1, N);
ttau = 1 / tau;
ssigma = (sqrt (2) * sigma) / sqrt (tau);
y = zeros (1, N);
for n = 2:N
  t(n) = (n-1) * h;
  y(n-1) = x(n-1) - ttau * (x(n-1) * log (x(n-1)) - a * x(n-1)) * h ...
  + x(n-1) * ssigma * sqrt (h);
  x(n) = x(n-1) - ttau * (x(n-1) * log (x(n-1)) - a * x(n-1)) * h ...
  + x(n-1) * ssigma * dW(n-1) + 0.5 * (y(n-1) * ssigma - x(n-1) * ssigma) ...
  * (dW(n-1) * dW(n-1) - h) / sqrt (h);
endfor
endfunction
```

```
## first plot

[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold on;
[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold off;

## a plots

[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold on;
[t,x] = rungekutta (2, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 2, tau = 1, sigma = 0.1;");
[t,x] = rungekutta (0.5, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 0.5, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold off;

## tau plots
[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold on;
[t,x] = rungekutta (1, 10, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 10, sigma = 0.1;");
[t,x] = rungekutta (1, 0.1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 0.1, sigma = 0.1;");
hold off;

## sigma plots
[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.1;");
hold on;
[t,x] = rungekutta (1, 1, 1, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 1;");
[t,x] = rungekutta (1, 1, 0.01, 15, 300);
plot(t, x, ";a = 1, tau = 1, sigma = 0.01;");
hold off;
```