Trabalho Computacional - Teoria da Decisão - UFMG

Pedro Loes

27/02/2021

Resumo

- *Este artigo apresenta uma solução para um problema aplicado do curso de* Teoria da Decisão *do departamento de* ***Engenharia de Sistemas*** *da* ***UFMG*** *ministrado pelo professor* Lucas Batista. *O objetivo deste trabalho foi aplicar as técnicas de* ***otimização*** *e* ***teoria da decisão*** *lecionadas ao longo do semestre. O problema consiste em otimizar o posicionamento de Pontos de Acesso para atender a demanda de internet dos clientes de uma conferência. As etapas de* ***Análise Exploratória***, ***Modelagem***, ***Espaços de Busca*** *e* ***Prototipagem*** *consistiram no desenho e na construção do algoritmo em* ***R*** *e* ***C++***. *As etapas de* ***Convergência*** *e* ***Custo Computacional*** *consistiram na exploração do* ***espaço de soluções***. *A etapa* ***Mínimo Global*** *consistiu em* ***otimizar*** *o número de* ***pontos de acesso*** *para suprir os* ***consumos de banda*** *demandados pelos clientes, atendendo às* ***restrições pré-estabelecidas***. *Finalmente na etapa* ***otimizador em produção*** *foi desenvolvido um aplicativo para generalizar o uso do algoritmo em futuras demandas da unidade de decisão permitindo a aplicação da análise em outros bancos de dados por meio de uma interface simples, rápida e intuitiva.*

Especificações do Problema

- Deseja-se instalar uma rede **WLAN** do tipo **N 2D** para atendimento de um centro de convenções com **800 × 800 metros**. Para planejamento dessa rede foram estimados **500** pontos de demanda, com suas respectivas **posições** geográficas e **consumos** de largura de **banda**. O arquivo **clientes.csv** contém:
  - Coordenada **x** do cliente em metros.
  - Coordenada **y** do cliente em metros.
  - Consumo de banda do cliente em **Mbps**.
- Amostra das **10** primeiras observações:

Id	x	y	Mbps
1	168.99	220.62	0.47347
2	218.11	211.16	0.41026
3	207.48	157.38	1.37570
4	213.25	189.93	0.93025
5	199.19	140.71	0.15790
6	177.74	188.51	0.94899
7	197.44	176.30	0.30420
8	161.48	197.12	1.16990
9	189.84	211.32	1.29950
10	269.22	224.90	0.51370

- Variáveis de Decisão:
  - Coordenadas dos pontos a serem instalados na área de **800 x 800 metros**.
  - Ponto de Acesso que será responsável pelo atendimento de cada cliente.
- Restrições:
  - Ao menos **95%** dos pontos de demanda devem ter suas demandas integralmente atendidas.
  - Cada ponto de acesso a ser instalado tem capacidade de **150Mbps**, que não pode ser excedida.
  - Um cliente pode ser atendido por um **Pa** se a distância entre ambos é inferior a **85 metros**.
  - Cada cliente só pode ser atendido por um único **Pa**.
  - Devido a restrições orçamentárias, podem ser instalados no máximo **100 Pa's**.
- Simplificações:
  - Os pontos de demanda e seus **consumos** de banda são **estáticos**.
  - O efeito de **obstáculos** no ambiente foram **desprezados**.
  - Um ponto de acesso **não** causa **interferência** em outros.

Modelagem

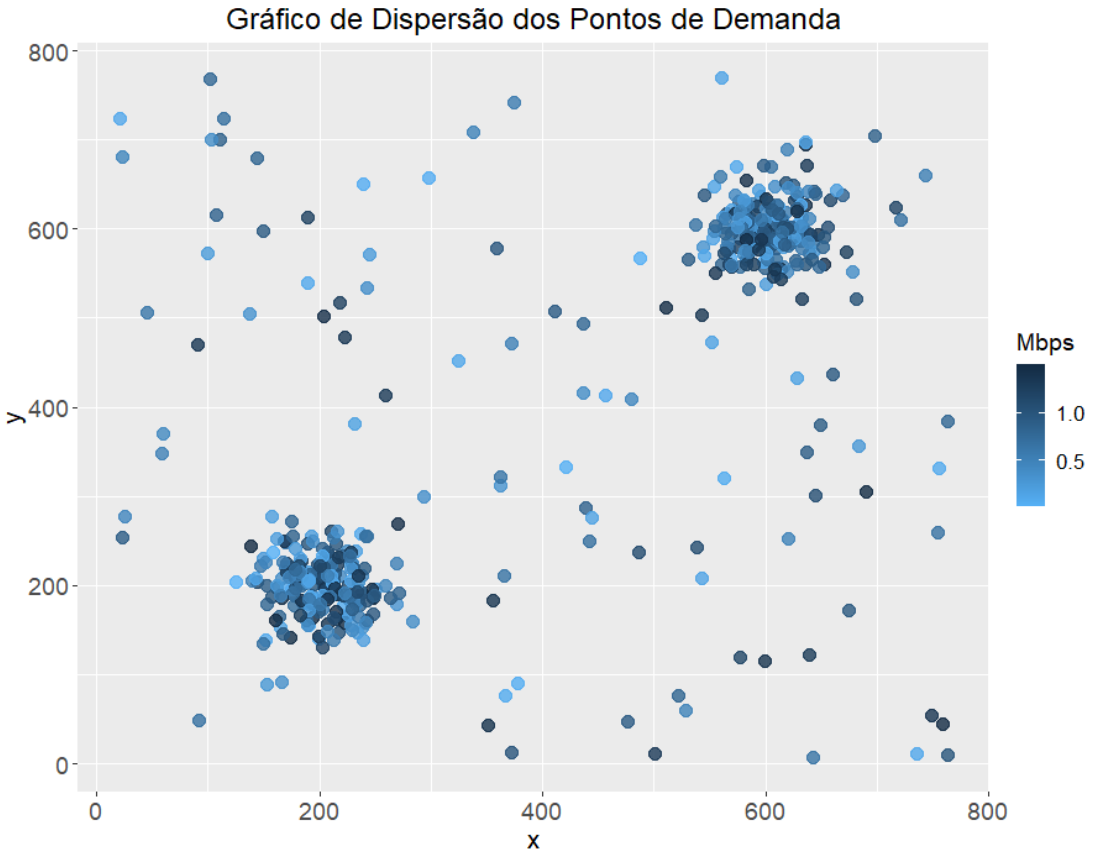
- Definição de Variáveis:
  - Pd_i $\leftarrow$ Pontos de Demanda $i = \{1, 2, 3, ..., 500\}$, $Pd_i \in R\{x, y\}$, x, y $= \{1, ..., 800\}$
  - Pa_j $\leftarrow$ Pontos de Acesso $j = \{1, 2, ..., 100\}$, $Pa_j \in R\{x, y\}$, x, y $= \{1, ..., 800\}$
  - β_i $\leftarrow$ Consumo de banda em Mbps dos Pd's, $\forall\, i \in Pd_i$
  - $d_{i,j}$ $\leftarrow$ Distância Euclidiana entre Pd_i e Pa_j, $\forall\, i \in Pd_i$, $\forall\, j \in Pa_j$
  - α_j $\leftarrow$ Ativação do Pa_j, $\alpha_j \in \{0, 1\}$ $\forall\, j \in Pa_j$
  - $\eta_{i,j}$ $\leftarrow$ Atendimento do Pd_i pelo Pa_j, $\eta_{i,j} \in \{0, 1\}$ $\forall\, i \in Pd_i$, $\forall\, j \in Pa_j$

- Definição da Função:
  - min $(\sum_{j=1}^{|Pa|} \alpha_j)$

- Definição das Restrições:
  - $\sum_{i=1}^{|Pd|} \sum_{j=1}^{|Pa|} \eta_{i,j} \geq 475$
  - $\sum_{i=1}^{|Pd|} \eta_{i,j} \times \beta_i \leq 150 \quad \forall\, j \in \alpha_j = 1$
  - $\sum_{j=1}^{|Pa|} \eta_{i,j} \leq 1 \quad \forall\, i \in Pd$
  - $\sum_{j=1}^{|Pa|} \alpha_j \leq 100$
  - $\exists\, \eta_{i,j}\, \forall\, d_{i,j} \leq 85$

Análise Exploratória

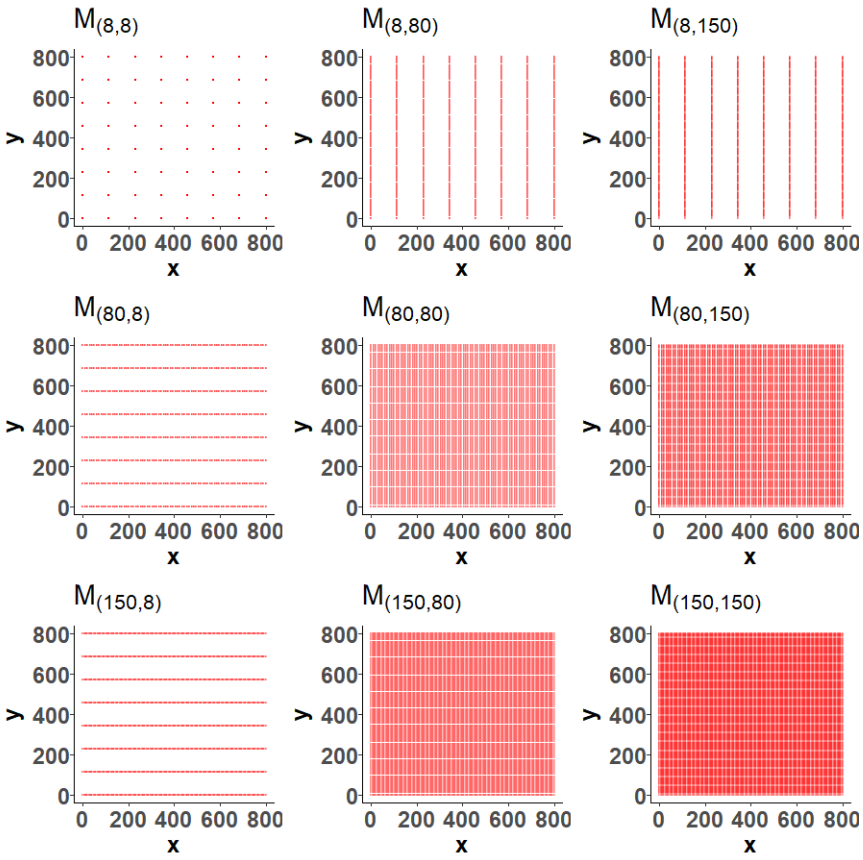
- Para ilustrar uma visão inicial da distribuição dos clientes no espaço de 800 x 800 foi elaborado um gráfico de dispersão 2d com os dados da localização **(x, y)** dos pontos de demanda.
- O parâmetro **alpha** de transparência foi alterado para **0.5** com o intuito de eliminar o problema da sobreposição de **Pd's** e facilitar a compreensão da densidade destes pontos.
- A dimensão de cor foi adicionada considerando o gradiente das cores preta até azul para o consumo de largura de banda requisitada em **Mbps** por cada cliente.



- Existem **2** grandes clusters na dispersão da localização dos clientes em torno dos pontos **(200, 200)** e **(600, 600)**. Os demais pontos apresentam distribuição esparsa na área de **800 x 800** metros.
- Na diagonal que vai de **(0,0)** até **(800,800)** os pontos de demanda são menos espalhados mas na diagonal **(0,800)** até **(800,0)** os pontos estão mais dispersos.
- Parece não existir padrão visual para a distribuição das demandas de banda em **Mbps**.

Espaços de Busca

- Se considerada uma escala continua, a área de **800 x 800** metros possuí infinitas coordenadas de possíveis localizações para os pontos de acesso.
- A construção de espaços de busca considerou espaços discretizados na forma de matrizes do tipo $\boldsymbol{M_{(i,j)}}$ com $\mathbf{i = \{8, 9, \ldots, 150\}}$ e $\mathbf{j = \{8, 9, \ldots, 150\}}$. A posição **i** representa a quantidade de posições igualmente espaçadas no eixo **x** e da mesma forma, a posição **j** no eixo **y**.
- Link do Funcionamento do Algoritmo Animado com exemplo do espaço de busca discreto de 9 x 9:
  - Funcionamento do Algoritmo



- O **1º** gráfico no canto **superior esquerdo** ilustra a área discreta de **800 x 800** em **8** posições igualmente espaçadas para o eixo **x** e **y** totalizando **64** possíveis localizações para os pontos de acesso.
- Os gráficos **fora da diagonal principal** ilustram alguns dos espaços discretos irregulares arbitrariamente escolhidos, ou seja, com um número de possíveis posições diferente para os eixos **x** e **y**.
- Os gráficos **na diagonal principal** ilustram alguns dos espaços discretos regulares, ou seja, com a mesma escala de números discretos para os eixos **x** e **y**. Por serem igualmente espaçados, apresentam o mesmo número de possíveis posições para os eixos **x** e **y**.
- O **último gráfico** no canto inferior direito ilustra a área discreta de **800 x 800** em **150** posições igualmente espaçadas para o eixo **x** e **y** totalizando **22500** possíveis localizações para os pontos de acesso.

Prototipagem do Algoritmo

- Testes exploratórios:
  - Espaços discretos menos granulares que $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ não apresentam solução.
  - Espaços discretos mais granulares que $\boldsymbol{M_{(150,150)}}$ apresentam convergência estável.
  - O custo computacional para executar o algoritmo em **R** foi na unidade de **dias**.
- Os laços para inspecionar o melhor posicionamento dos pontos de acesso em cada espaços de busca foram prototipados em **C++**.
- A importação dos dados, a declaração de objetos e a construção dos espaços de busca foram prototipados no ambiente **R**.

Prototipagem do modulo Rastreador em C++

```
// Função para calcular o quadrado de um número
double enquadra(double x){
  double quadrado = x * x;
  return quadrado;
}

// Função para contar o nº de Pd's cobertos pelo raio de um Pa
std::vector<double> conta_pontos(x, y, wlanx, wlany, indice) {
  int n = wlany.size(); double soma;
  double raio = square(85); indices(0);
  for(int i = 0; i < n; i++) {
    soma = enquadra(wlanx[i] - x) + square(wlany[i] - y);
    if( soma <= raio) {
      indices.push_back(indice[i]);}}
  return indices;
}

// Função para inspecionar espaços de busca discretos
List rastreia(int intervalo_x, int intervalo_y, DoubleVector wlanx,
              DoubleVector wlany, DoubleVector centro_x, DoubleVector centro_y,
              NumericVector indice, int mais_populoso, std::vector<int> viola) {
  std::vector<double> cobertura(0);
  List ret;
  int intervalos = intervalo_x * intervalo_y;
  for (int j = 2; j <= intervalos; j++) {
    if( (conta_pontos(centro_x[j],centro_y[j],
                      wlanx, wlany, indice).size() >=
         conta_pontos(centro_x[mais_populoso], centro_y[mais_populoso],
                      wlanx, wlany, indice).size() ) &&
        (! std::count(viola.begin(), viola.end(), mais_populoso) ) ){
      mais_populoso = j;
      cobertura = conta_pontos(centro_x[mais_populoso],
                               centro_y[mais_populoso],wlanx,wlany,indice);}
    ret["cobertura"] = cobertura;
    ret["mais_populoso"] = mais_populoso;}
  return ret;}
}
```

- A inspeção das matrizes de busca de espaços discretos quadrados e não quadrados entre $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ e $\boldsymbol{M_{(150,150)}}$, bem como a contagem de pontos de demanda dentro do raio de cobertura de um ponto de acesso foram prototipadas com o modulo rastreador no ambiente **C++**. Esse modulo contêm as seguintes funções:
  - **enquadra** eleva um número ao quadrado.
  - **conta_pontos** conta o número de pontos dentro do raio de cobertura de um ponto de acesso.
  - **rastreia** inspeciona as melhores coordenadas para cada ponto de acesso dado um espaço discreto.

Prototipagem da Busca em R

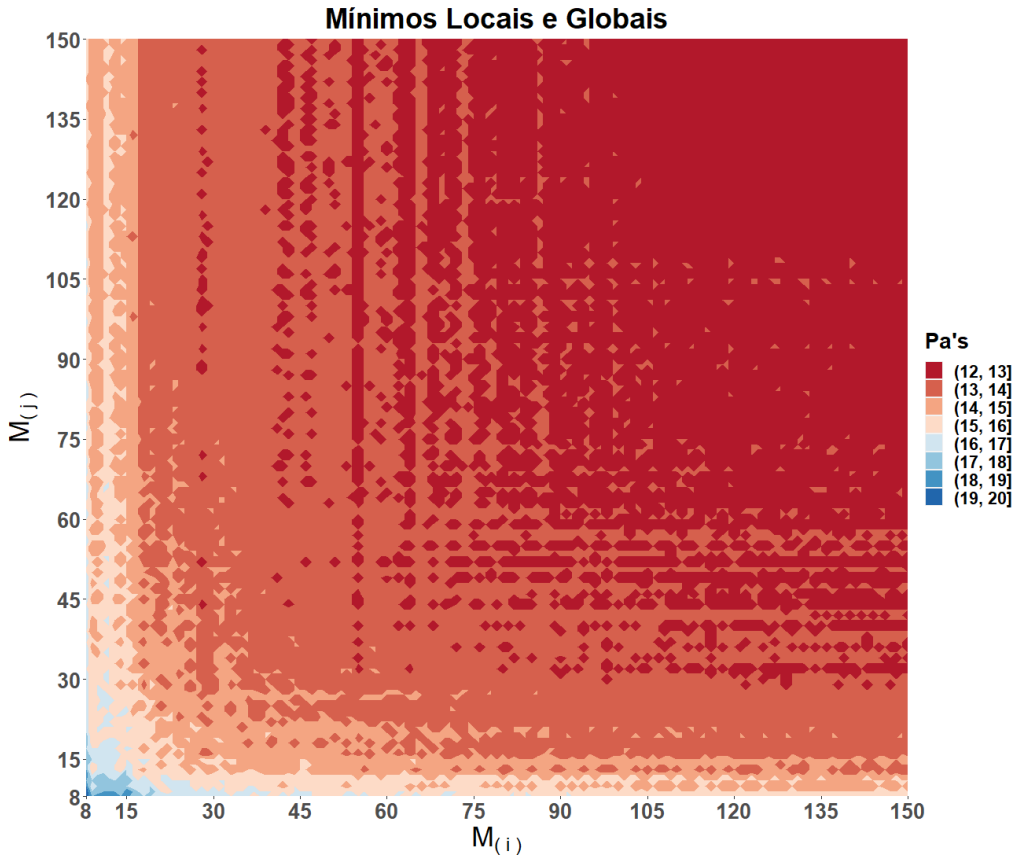
```
# Declara objetos e carrega modulo rastreador.cpp
wlan_completa <- read_csv("clientes.csv", col_names = c("x", "y", "Mbps"))
wlan_id <- wlan_completa %>% mutate(indice = 1:nrow(wlan_completa))
performance <- tibble(intervalos = 8:50, PA = rep(0,143), tempo = rep(0,143))
sourceCpp('rastreador.cpp')

# Laços para combinação de espaços discretos
for(intervalo_x in seq(8, 150, by = 1)){
  for(intervalo_y in seq(8, 150, by = 1)){
    centro_x <- rep(seq(0, 800, length.out = intervalo_x), each = intervalo_y)
    centro_y <- rep(seq(0, 800, length.out = intervalo_y), times = intervalo_x)
    wlan <- wlan_id
    vencedores <- NULL
    contador <- 0
    Mbps <- NULL
    viola <- numeric(1)
    inicio <- Sys.time()
    while(contador < 475){
      cobertura <- NULL
      mais_populoso <- 1
      rastreado <- rastreia(intervalo_x = intervalo_x,
                            intervalo_y = intervalo_y,
                            wlanx = wlan$x,
                            wlany = wlan$y,
                            centro_x = centro_x,
                            centro_y = centro_y,
                            indice = wlan$indice,
                            mais_populoso = mais_populoso,
                            viola = viola)
      megas <- wlan %>%
        filter(indice %in% as.integer(rastreado[[1]])) %>%
        summarise(total = sum(consumo)) %>%
        pull(total)
      if(megas < 150){
        Mbps <- c( Mbps, megas)
        vencedores <- c(vencedores, rastreado[[2]])
        wlan <- wlan %>% filter(!indice %in% as.integer(rastreado[[1]]) )
        contador <- contador + length(rastreado[[1]])
        print(paste0("Indice: ", intervalo_x, " - ", intervalo_y, " - ",
                     "Contador: ", contador))} else { viola <- c(viola, rastreado[[2]])}}
    fim <- Sys.time()
    performance$tempo[indice_perfor] <- fim - inicio
    performance$PA[indice_perfor] <- length(vencedores)
    indice_perfor <- indice_perfor + 1}}
}
```

- Para leitura dos dados e laço para combinação de espaços foram utilizadas as facilidades do ambiente **R** em operar com data frames e gerar vetores de sequências.
- A função **rastreia** foi utilizada no ambiente **R** por meio do pacote **Rcpp** que carrega o modulo **rastreador.cpp** e constrói a conexão entre os dois ambientes.

Convergência

- O algoritmo completo utilizado para convergência considerou as combinações de espaços de busca de $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ até $\boldsymbol{M_{(150,150)}}$ contabilizando o mínimo de **64** o máximo de **22500** coordenadas para possíveis localizações dos pontos de acesso.
- O mapa de superfície tridimensional foi construído para ilustrar as regiões de inspeção do algoritmo. O gradiente das cores **azul(máximo)** e **vermelho(mínimo)** foi utilizado como a terceira dimensão do gráfico para ilustrar o número de pontos de acesso necessários para atingir um mínimo local ou global em cada combinação de espaços discretos.

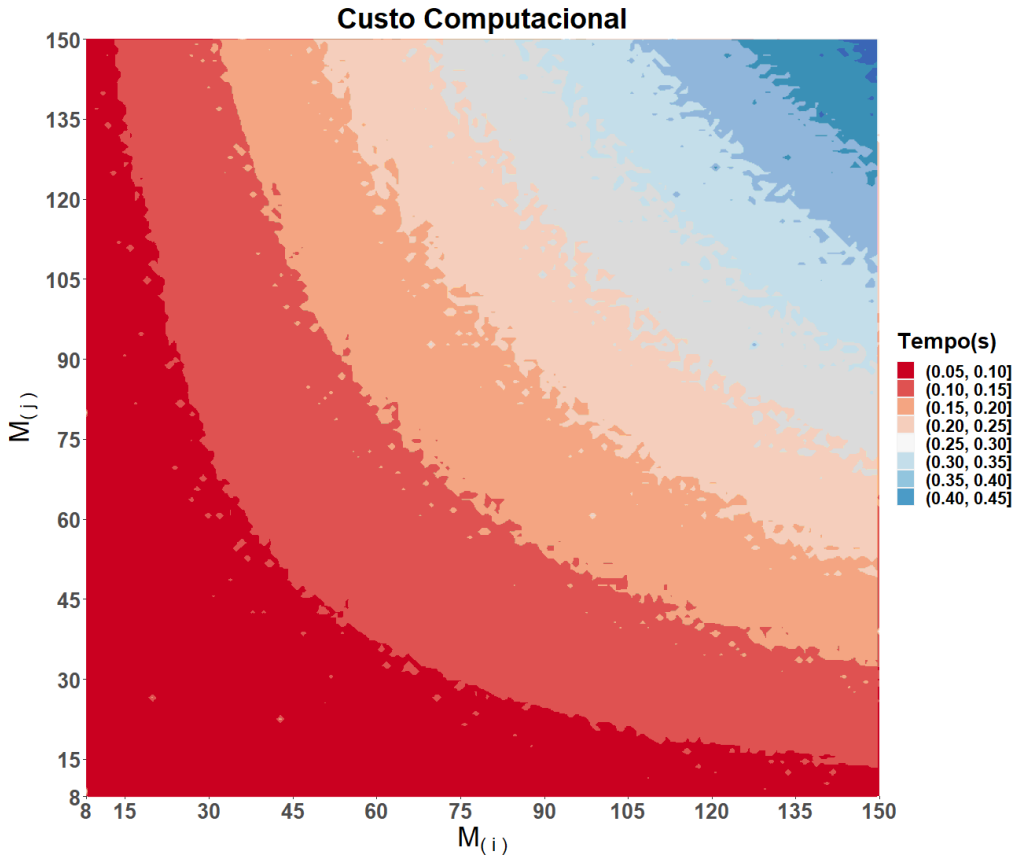


- O ponto na coordenada $\mathbf{i = 8}$ do eixo $\boldsymbol{M_{(i)}}$ e $\mathbf{j = 8}$ do eixo $\boldsymbol{M_{(j)}}$, corresponde a inspeção do espaço de busca $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ que atinge a pior solução ótima de mínimo local gastando **20 Pa's**.
- Entre $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ e $\boldsymbol{M_{(30,30)}}$ o algoritmo passa pelos mínimos locais de **20** até **13 Pa's**, em $\boldsymbol{M_{(27,43)}}$ atinge pela primeira vez o mínimo global de **12 Pa's** e em $\boldsymbol{M_{(90,75)}}$ o algoritmo começa a estabilizar em **12 Pa's** com a maioria dos espaços convergindo para **12 Pa's**.
- O algoritmo estabiliza em **12 Pa´s** para espaços discretos mais granulares que $\boldsymbol{M_{(110,110)}}$. Tal fato indicou convergência porque até $\boldsymbol{M_{(150,150)}}$ o número de **Pa's** permanece em **12**.

Custo Computacional

- As performances de custo computacional do algoritmo nas combinações de espaços de busca foram comparadas utilizando a função **Sys.time** do **R**. O hardware utilizado foi um processador **Intel i7** com **16 GB RAM**.

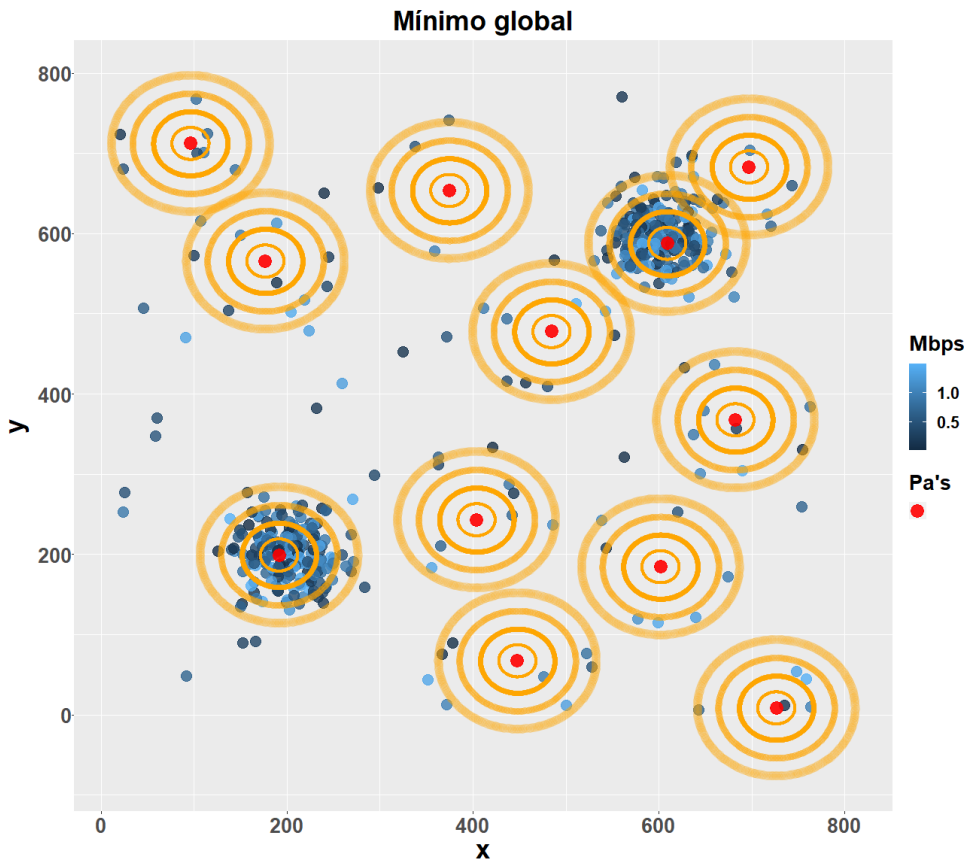
- O mapa de superfície tridimensional foi construído para ilustrar os tempos computacionais necessários para atingir um mínimo local ou global em cada combinação de espaços discretos.



- O ponto na coordenada $\mathbf{i = 8}$ do eixo $\boldsymbol{M_{(i)}}$ e $\mathbf{j = 8}$ do eixo $\boldsymbol{M_{(j)}}$, corresponde a inspeção do espaço de busca $\boldsymbol{M_{(8,8)}}$ que atinge a pior solução ótima de mínimo local com custo computacional de **0.02 segundos**.
- É possível observar **9** intervalos bem distintos com alguns poucos pontos discrepantes dentro de cada curva de nível. Pode-se verificar que a curva vai se tornando mais **linear** a medida que se aproxima dos maiores tempos. Os custos variaram entre **0.02** e **0.48 segundos**.
- O custo computacional total gasto para inspecionar todos os espaços discretos foi de aproximadamente de **41 minutos**.

Mínimo Global

- A solução ótima de mínimo global considerou o espaço de busca $\boldsymbol{M_{(110,110)}}$ totalizando **12100** coordenadas de possíveis localizações para os pontos de acesso. Essa solução foi escolhida porque é um ponto de transição da convergência para estabilização do mínimo global.
- O algoritmo inspecionou o espaço de busca de **12100** possíveis localizações para os pontos de acesso e recuperou as localizações de **12** coordenadas que minimizam o número de pontos de acesso e satisfazem as condições do problema.



- O algoritmo gastou **0.35 segundos** para atingir o mínimo local de **12 Pa's**. É possível observar que ocorre somente uma sobreposição de áreas de cobertura dos pontos de acesso no quadrante superior direito do gráfico.
- Os **2 Pa's** posicionados nas coordenadas **(192, 199)** e **(609, 587)** estão cobrindo um grande número de **Pd's** podendo apresentar consumos de banda próximos da saturação.

Tabela de Resultados

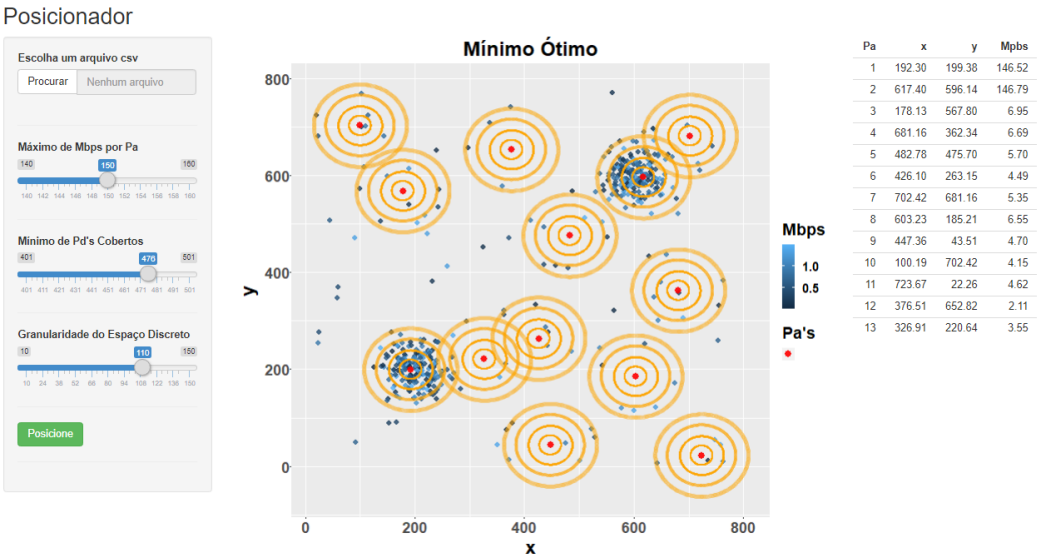
- Tabela de localização dos **12 Pa's** na área de **800 x 800** com os respectivos consumos totais em **Mbps**:

Pa	x	y	Consumo (Mbps)
1	192	199	147.2
2	609	587	148.1
3	177	565	6.9
4	683	368	6.7
5	485	477	5.7
6	404	243	5.8
7	697	683	5.4
8	602	184	6.6
9	96	712	4.2
10	448	67	3.7
11	727	8	4.6
12	375	653	2.1

- É possível observar que os dois clusters principais com um total de **147** e **148** Mbps de consumo estão muito próximos da saturação e talvez fosse adequado a colocação de mais **2 Pa's** nessas regiões para garantir a integridade da entrega do sinal onde há maior concentração de **pontos de demanda**.
- Outra possível consideração seria a de que a diminuição da cobertura de cada **Pa** de **95%** ou **475 Pd's** para **90%** ou **450 Pd's** reduziria o custo total de **Pa's** em **33%** ou seja de **12** para **8 Pa's**.

Otimizador em Produção

- Para atender a demanda da unidade de decisão a nivel de produção foi desenvolvido o aplicativo **Posicionador**.
- Este **programa iterativo** é composto de uma barra lateral para carregar um arquivo **.csv** com 3 colunas. A primeira e a segunda são referentes às coordenadas **(x,y)** dos pontos de demanda e a terceira ao consumo de banda de cada ponto de demanda em **Mbps**. O painel é composto de um gráfico que mostra o posicionamento dos **Pa's** e uma tabela que mostra a localização exata de cada **Pa**, bem como a largura de banda que será demandada. Para que a ferramenta funcione com o banco de dados deste projeto é necessário que o botão Posicione seja acionado.
- Esta ferramenta permite que uma **unidade de decisão** analise os cenários em tempo real otimizando o **tempo humano** gasto pela unidade de decisão para escolher o **melhor cenário**. Outra vantagem é que a unidade decisão poderá fazer **ajustes finos** no otimizador ao invés de escolher entre opções pré-configuradas.



Pa	x	y	Mpbs
1	192.30	199.38	146.52
2	617.40	596.14	146.79
3	178.13	567.80	6.95
4	681.16	362.34	6.69
5	482.78	475.70	5.70
6	426.10	263.15	4.49
7	702.42	681.16	5.35
8	603.23	185.21	6.55
9	447.36	43.51	4.70
10	100.19	702.42	4.15
11	723.67	22.26	4.62
12	376.51	652.82	2.11
13	326.91	220.64	3.55

- Link do Aplicativo Posicionador:
  - Aplicativo Shiny Posicionador