Zadanie 3

Pokaż, że w każdym grafie prostym o co najmniej dwóch wierzchołkach są dwa wierzchołki o takim samym rzędzie.

ODP:
Niech $G = (V, E)$ i $n = |V|$. Musimy rozważyć dwa przypadki:

- Istnieje izolowany wierzchołek:

  Niech a będzie wierzchołkiem izolowanym. Wtedy dla dowolnego $x \in V \backslash \{a\}$ mamy $\mathcal{N}(x) \subseteq V \backslash \{a, x\}$, więc $deg(x) \leq n - 2$. Zatem deg : $V \to \{0, ...n-2\}$. Ale $|V| = n$ i $|\{0, ..., n-2\}| = n - 1$, więc deg nie jest injekcją

- Nie istnieje wierzchołek izolowany:

  Wtedy deg : $V \to \{1, ..., n-1\}$, zatem deg nie jest injekcją

DEF:
$\mathcal{N}$ - Sąsiedzi wierzchołka - dla $G = G(D, C)$ i $X \subseteq D$ mamy $\mathcal{N}(X) = \{y \in C : (\exists x \in X)(\{x, y\} \in E(G))\}$

Zadanie 4

Pokaż, że graf cykliczny C_n jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą

ODP:
Jeżeli $n = 2k$ to C_n rozkłada się na dwa zbiory: $X = \{1, 3, ..., 2k-1\}$ i $Y = \{2, 4, ..., 2k\}$ - za darmo.

Jeżeli n nie jest parzyste to wystarczy skorzystać z charakteryzacji grafów dwudzielnych - są to grafy których wszystkie cykle są długości parzystej - nie da się takich stworzyć dla n nieparzystego więc sprzeczność.

Zadanie 5

Wyznacz średnicę i rzędy elementów w hiperkostce Q_n.

ODP:
Hiperkostka powstaje poprzez podwajanie ilości elementów hiperkostrki o stopniu o 1 mniejszym.

Tj:
$deg(Q) = n$
$d(Q) = n$ (najdłuższa najkrótsza ścieżka)

d-d:
$deg(Q_1) = 1$
$d(Q_1) = 1$
$Q_n \cong G \cong G'$, gdzie $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$
wtedy $Q_{n+1} = (V \cup V', E \cup E' \cup (v_k, v'_k) : v_k \in V \land v'_k \in V' \land 0 \leq k < 2^n)$
$d(Q_{n+1}) = max(dist(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V \cup V')$
dla $v_k \in V, v'_l \in V'$, $dist(v_k, v'_l) = dist(v_k, v_l) + dist(v_l, v'_l) = dist(v_k, v_l) + 1$
więc $d(Q_{n+1}) = max(dist(v_k, v_l) + 1) = max(dist(v_k, v_l)) + 1 = d(Q_n) + 1$

kiedy łączymy dwa Q_n w Q_{n+1}, to do każdego wierzchołka dodajemy dokładnie jedną krawędź
więc $deg(Q_{n+1}) = deg(Q_n) + 1$

Zadanie 6

Pokaż, że dla każdego $n \geq 1$ hiper-kostka Q_n jest grafem dwudzielnym.

ODP:
$Q_n = (V, E)$
Zdefiniujmy funkcję $f : V \to \{0,1\}^n$
$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow f(v_1)$ i $f(v_2)$ **różnią się tylko 1 elementem**
wtedy $(v_1, v_2) \in E \Rightarrow sum(f(v_1)) = sum(f(v_2)) \pm 1$
weźmy $V = V_1 \cup V_2$
$V_1 = \{v \in V : \neg(2 \mid sum(f(v)))\}$
$V_2 = \{v \in V : 2 \mid sum(f(v))\}$
widać że V_1 i V_2 są rozłączne
wtedy $v_1, v_2 \in V_1 \vee v_1, v_2 \in V_2 \implies sum(f(v_1)) = sum(f(v_2)) \pm 2k$
czyli $(v_1, v_2) \notin E$
więc graf jest dwudzielny

Zadanie 13

Rozstrzygnij czy następujące ciągi są graficzne i jeśli ciąg jest graficzny, to znajdź graf prosty o tym ciągu stopni:

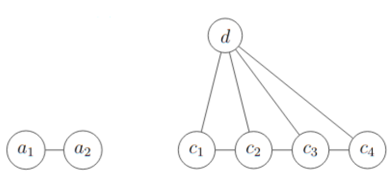
1. (4,3,2,1,0) 2 .(4,3,3,2,2,1,1) 3. (6,4,4,4,3,1,1,1)

Punkt (1): nie ma takiego grafu; oto uzasadnienie: graf taki musiałby mieć 5 wierzchołków i jeden z nich miałby rząd 4; miałby więc on krawędź ze wszystkimi innymi; więc żaden wierzchołek nie może mieć rzędu 0.

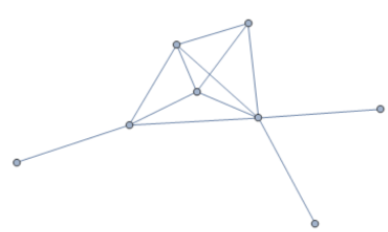
Przykłady z punktów (2) i (3) zbudować można tak: bierzemy rozważany ciąg; stosujemy twierdzenie Havela-Hakimi tak długo aż otrzymamy ciąg rzędów dla którego potrafimy znaleźć odpowiadający im graf a potem odwracamy proces.

TW. HAVELA-HAKIMI - Ciąg $(d_1, ..., d_n)$ jest graficzny tylko wtedy gdy ciąg $(d'_1, ..., d'_n)$ jest graficzny, gdzie:

$$d'_i = \begin{cases} d_i - 1 & : \text{i=2, ..., } d_1 + 1 \\ d_i & : \text{i = } d_1 + 2, \text{ ..., n} \end{cases} \tag{1}$$



ppunkt 2


ppunkt 3

Zadanie 14

Pokaż, że grafy proste G_1 i G_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich dopełnienia $\overline{G_1}$ i $\overline{G_2}$ są izomorficzne.

ODP:
Niech $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ oraz niech $f : V_1 \to V_2$ będzie izomorfizmem grafów. Wtedy dla dowolnych $x, y \in V_1$ mamy:

$x, y \in E(G_1) \iff f(x), f(y) \in E(G_2)$, więc
$x, y \notin E(G_1) \iff f(x), f(y) \notin E(G_2)$, czyli
$x, y \in E(\overline{G_1}) \iff f(x), f(y) \in E(\overline{G_2})$

Zadanie 25

Załóżmy że $G = (V, E)$ jest takim grafem prostym że $|E| \geq |V|$. Pokaż że graf G zawiera cykl.

Drzewo - $G = (V, E), |V| = n, |E| = n - 1$
ODP:
Weźmy przypadek graniczny - drzewo z jedną dodaną krawędzią. Nie można dodać krawędzi do drzewa w taki sposób aby nie stworzyć cyklu.

Zadanie 26

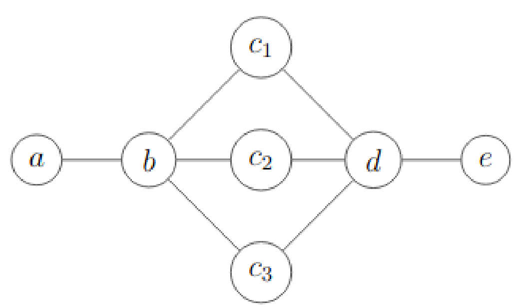
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Załóżmy że $v \in V$ jest wierzchołkiem o stopniu nieparzystym. Pokaż że istnieje inny wierzchołek $u \in V$ o rzędzie nieparzystym od którego jest jakaś droga do v.

ODP:
Tw Eulera: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 * |E|$

Suma stopnie wierzchołków spójnych składowych jest parzysta, a więc jeżeli $v, u \in V$ w grafie spójnym to musi istnieć między nimi droga

Zadanie 29

1. Wyznacz wszystkie grafy rozpinające w następującym grafie:



Wskazówka: W każdym grafie rozpinającym tego grafu musi być droga od a do e.

2. Uogólnij poprzedni punkt na podobny graf w którym zamiast trzech wierzchołków c_1, c_2, c_3 mamy n wierzchołków $c_1, \ldots, c_n$

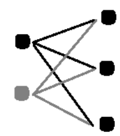
ODP:
Dla n wierzchołków $c_1, ..., c_n$ mamy $n * 2^{n-1}$

DEF:
Graf rozpinający to inaczej drzewo rozpinające.

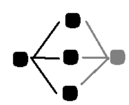
Zadanie 33

Wyznacz liczbę grafów rozpinających w grafach $K_{2,n}$

$K_{2,3}$:



to to samo co:



Wiec liczba grafów rozpinających to $n * 2^{n-1}$

DEF:
$K_{2,n}$ - pełen graf dwudzielny

Zadanie 35

Niech T będzie drzewem. Pokaż, że $\overline{d}(T) \leq 2$ ($\overline{d}(T)$ - średni stopień wierzchołka w T)

ODP:
Tw Eulera: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 * |E|$
Z tw. Eulera wiadomo, że dla drzewa suma wszystkich stopni wierzchołków to $2n - 2$ (dwukrotność liczby krawędzi)

$\frac{2*n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n} \leq 2$

Zadanie 37

Pokaż że $\delta(G) \leq \overline{d}(G) \leq \Delta(G)$

ODP:
$\forall x \in G \; deg(x) \geq \delta(G)$, więc

$$\overline{d}(G) = \frac{\sum_{x \in V(G)} deg(x)}{|V(G)|} \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \delta(G)}{|V(G)|}$$

$\forall x \in G \; deg(x) \leq \Delta(G)$, więc

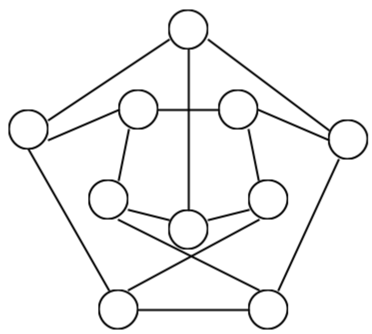
$$\overline{d}(G) = \frac{\sum_{x \in V(G)} deg(x)}{|V(G)|} \leq \frac{\sum_{x \in V(G)} \Delta(G)}{|V(G)|}$$

DEF:
$\Delta(G)$ - $max\{deg(x) : x \in V(G)\}$
$\delta(G)$ - $min\{deg(x) : x \in V(G)\}$

Zadanie 45

Narysuj na płaszczyźnie graf Petersena tak aby na rysunku były tylko dwa przecięcia krawędzi.

ODP:



Zadanie 49

Wyznacz liczby $\kappa(G)$, $\lambda(G)$, $\delta(G)$ dla grafów K_n, L_n oraz W_n (dla wszystkich n):

ODP:

	$\delta(G)$	$\kappa(G)$	$\lambda(G)$
K_n	n-1	n-1	n-1
L_n	1	1	1
W_n	3	3	3

DEF:
$\lambda(G)$ - Spójność krawędziowa grafu spójnego $G = (V, E)$,
$\lambda(G) = min\{|Y| : (Y \subseteq E) \wedge (G \backslash Y \text{ nie jest spójny})\}$

$\delta(G)$ - Minimalny rząd wierzchołka grafu:
$\delta(G) = min\{deg(x) : x \in V(G)\}$

$\kappa(G)$ - Spójność wierzchołkowa grafu spójnego:

$$\kappa(G) = \begin{cases} n-1 & : \text{G} \tilde{\ } K_n \\ min\{|X| : X \subseteq V \wedge G \backslash X \text{ nie jest spójny} & : \text{nie jest pełny} \end{cases} \text{,gdzie } K_n \text{ - graf pełny}$$

Graf pełny K_n to graf prosty, w którym dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź je łącząca. Jeżeli graf pełny ma |V|=n wierzchołków, to posiada $|E| = n(n-1)/2$ krawędzi. Graf pełny jest grafem regularnym stopnia n-1.
Graf koło W_n to graf powstający z grafu C_{n-1} przez połączenie każdego wierzchołka z nowym wierzchołkiem v. $|V| = n$, $|E| = 2n - 2$.
Graf liniowy L_n to graf otrzymany z grafu cyklicznego C_n przez usunięcie jednej krawędzi, $|V| = n$, $|E| = n - 1$.

Zadanie 50

Pokaż, że dla dowolnego spójnego grafu prostego mamy $\lambda(G) \leq \delta(G)$:

ODP:
Bierzemy graf spójny G. Teraz bierzemy wierzchołek o najmniejszym stopniu. Aby go rozspójnić musimy usunąć dokładnie tyle krawędzi jaki ma stopień, ckd.
DEF:
$\lambda(G)$ - Spójność krawędziowa grafu spójnego $G = (V, E)$,
$\lambda(G) = min\{|Y| : (Y \subseteq E) \wedge (G \backslash Y \text{ nie jest spójny})\}$

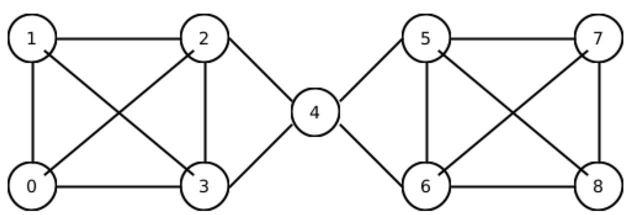
$\delta(G)$ - minimalny rząd wierzchołka grafu:
$\delta(G) = min\{deg(x) : x \in V(G)\}$

Graf pełny K_n to graf prosty, w którym dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź je łącząca. Jeżeli graf pełny ma |V|=n wierzchołków, to posiada $|E| = n(n-1)/2$ krawędzi. Graf pełny jest grafem regularnym stopnia n-1.

Zadanie 51

Podaj przykład prostego grafu spójnego G dla którego $\kappa(G) < \lambda G < \delta(G)$

ODP:
Grafem spełniającym taką zależność jest graf powstały przez połączenie dwóch identycznych grafów pełnych jednym wierzchołkiem.



$\kappa(G) = 1, \qquad \lambda(G) = 2, \qquad \delta(G) = 3$

DEF:
$\lambda(G)$ - Spójność krawędziowa grafu spójnego $G = (V, E)$,
$\lambda(G) = min\{|Y| : (Y \subseteq E) \wedge (G \backslash Y \text{ nie jest spójny})\}$

$\delta(G)$ - Minimalny rząd wierzchołka grafu:
$\delta(G) = min\{deg(x) : x \in V(G)\}$

$\kappa(G)$ - Spójność wierzchołkowa grafu spójnego:

$$\kappa(G) = \begin{cases} n-1 & : \text{G } \tilde{} K_n \\ min\{|X| : X \subseteq V \wedge G \backslash X \text{ nie jest spójny} & : \text{nie jest pełny} \end{cases} \text{,gdzie } K_n \text{ - graf pełny}$$

Zadanie 52

Załóżmy że $\lambda(G) = k > 0$ Pokaż, że jest rozbicie $\{U, V\}$ zbioru wierzchołków grafu takie, że jest dokładnie k krawędzi z jednym końcem w zbiorze U i drugim w zbiorze V

ODP:
Usuwam k krawędzi i mam podział na 2 grafy

DEF:
rozbicie - podzielenie wierzchołków z G na dwa zbiory $\{U, V\}$ i "usunięcie" krawędzi między nimi,
$\lambda(G)$ - Spójność krawędziowa grafu spójnego $G = (V, E)$,
$\lambda(G) = min\{|Y| : (Y \subseteq E) \wedge (G \backslash Y$ nie jest spójny$)\}$

Zadanie 55

Niech G będzie spójnym grafem w którym wszystkie wierzchołki mają rząd parzysty. Pokaż że $\lambda(G) \geq 2$ (czyli że usunięcie jednej dowolnej krawędzi nie rozspójnia grafu)

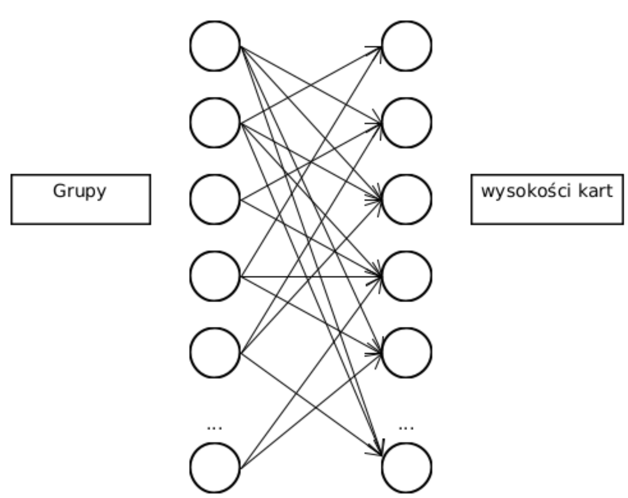
ODP:
Z tw Eulera, gdyby $\lambda(G) = 1$ to suma wszystkich stopni wierzchołków w każdym z utworzonych podgrafów byłaby nieparzysta, co jest nieprawdą

DEF:
TW Eulera - suma stopni wierzchołków jest parzysta w dowolnym grafie.
$\lambda(G)$ - Spójność krawędziowa grafu spójnego $G = (V, E)$,
$\lambda(G) = min\{|Y| : (Y \subseteq E) \wedge (G \backslash Y$ nie jest spójny$)\}$

Zadanie 57

Podzielmy w dowolny sposób talię 52 kart na 13 grup po 4 karty. Pokaż, że z każdej z tych grup można wybrać po jednej karcie w taki sposób aby otrzymać zestaw 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, W, K, D, A (nie ważne jakiego koloru).

ODP:
Tworzymy graf dwudzielny:



graf ten ma maksymalnie 4 połączenia z podzbioru Grup do podzbioru wysokości kart
Z tw. Hall'a - każdy z podzbiorów grup ma co najmniej 1 połączenie z wysokościami

DEF:
TW Hall'a - Niech $G = G(A, B)$ będzie grafem dwudzielnym. Następujące warunki są równoważne:

1. istnieje pełne skojarzenie w grafie G z A do B
2. $(\forall X \subseteq A)(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|)$

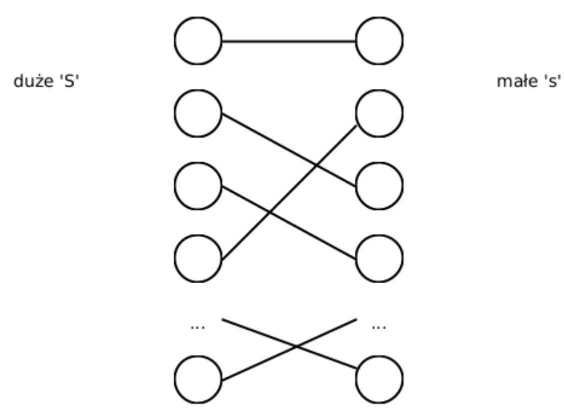
$\mathcal{N}$ **określamy** - dla $G = G(D, C)$ i $X \subseteq D$ mamy $\mathcal{N}(X) = \{y \in C : (\exists x \in X)(\{x, y\} \in E(G))\}$
Skojarzenie pełne - Pełnym skojarzeniem (z C do D) w grafie dwudzielnym $G = G(C, D)$ nazywamy dowolną różnowartościową funkcję $f : D \to C$ taką, że $(\forall x \in D)(\{x, f(x)\} \in E(G))$

Zadanie 61 // do uzupełnienia

Niech $S = (S_1, S_2, ..., S_m)$ będzie ciągiem zbiorów.
Transwersala tego ciągu zbiorów nazywamy ciąg $(s_1, s_2, ..., s_m)$ parami różnych elementów taki, że $s_i \in S_i$ dla każdego $i = 1, ..., m$.
Pokaż że rodzina S ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$(\forall T \subseteq \{1, ..., m\})(|\bigcup_{t \in T} S_t| \geq |T|)$

ODP:



Rodzina S będzie mieć transwersalę gdy znajdę pełne skojarzenie, czyli z **tw Hall'a**
$T = X$ z Hall'a
$\mathcal{N}(X) = \bigcup_{t \in T} S_t$
$(\forall T \subseteq \{1, ..., m\})(|\bigcup_{t \in T} S_t| \geq |T|)$

DEF:
TW HALL'A:

1. istnieje pełne skojarzenie w grafie G ($G = G(A, B)$) z A do B
2. $(\forall X \subseteq A)(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|)$

$\mathcal{N}$ **określamy** - dla $G = G(D, C)$ i $X \subseteq D$ mamy $\mathcal{N}(X) = \{y \in C : (\exists x \in X)(\{x, y\} \in E(G))\}$
d-d:
Weźmy graf dwudzielny $G = G(A, B)$
Zdefiniujmy bijekcje $a : S \to A$ i $b : \bigcup_{S_i \in S} S_i \to B$
$(\forall x \in A \forall y \in B)((x, y) \in E(G) \Leftrightarrow b^{-1}(y) \in a^{-1}(x))$
Wtedy każdy element transwersali $s_i = b^{-1}(f(a(S_i)))$, gdzie $f : A \to B$ jest pełnym skojarzeniem

Dlatego transwersala istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje pełne skojarzenie f
Z twierdzenia Hall'a wiemy że pełne skojarzenie f istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy $(\forall X \subseteq A)(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|) \equiv (\forall T \subseteq 1, ..., m)(|T| \leq |\bigcup_{t \in T} S_t|)$

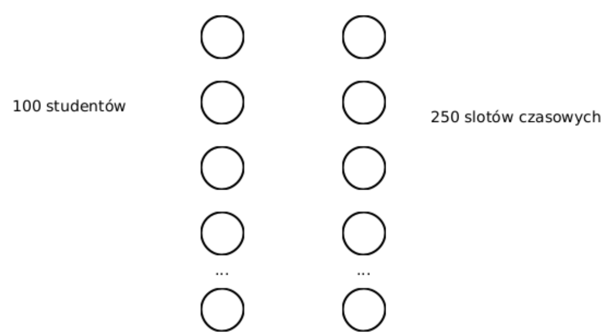
Zadanie 62

Pokaż, że każdy dwudzielny i regularny graf ma doskonałe skojarzenie.
d-d:
Weźmy r-regularny graf dwudzielny $G = G(A, B)$
$\sum_{a \in A} deg(a) = \sum_{b \in B} deg(b)$ bo dwudzielny
$(\forall v \in A \cup B)(deg(v) = r)$ bo r-regularny
więc $|A| * r = |B| * r$, czyli $|A| = |B|$
wtedy dowolne pełne skojarzenie musi być doskonałe
pełne skojarzenie $f : A \to B$ istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy $(\forall X \subseteq A)(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|)$ (tw. Hall'a)
$(\forall X \subseteq A)(\sum_{x \in X} deg(x) \leq \sum_{y \in \mathcal{N}(X)} deg(y))$ co daje $(\forall X \subseteq A)(\sum_{x \in X} r \leq \sum_{y \in \mathcal{N}(X)} r)$
więc $(\forall X \subseteq A)(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|)$

Zadanie 63 // do uzupełnienia

Grupa złożona ze 100 studentów (s) ma uczestniczyć w egzaminach ustnych. Zespół egzaminacyjny składa się z 25 osób. Każdy student ma być przepytany przez jedną osobę z zespołu egzaminacyjnego. Wiadomo, że każdy ma co najmniej 10 ulubionych osób. Pokaż,że można ustawić sesję egzaminacyjną tak, aby (1) każdy student przepytany był przez ulubioną przez niego osobę (2) każdy egzaminator przepyta co najwyżej 10 studentów.

ODP:

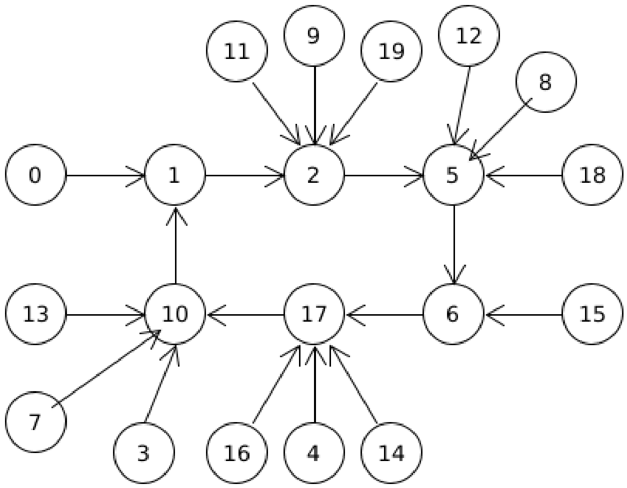


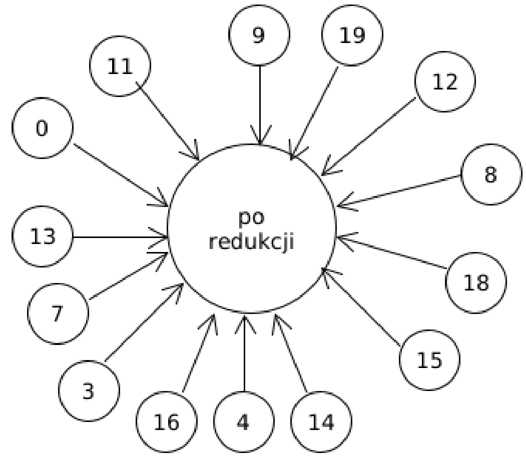
Tworzymy graf dwudzielny jak powyżej. Wtedy $|\mathcal{N}(X)|$ to liczba przydzielonych prowadzących do grupy studentów.

Zadanie 74

Niech $G = (\{0, ..., 19\}, E)$, gdzie $E = \{(k, (k^2 + 1) \bmod 20) : k = 0, ..., 19\}$. Wyznacz silne komponenty spójne grafu oraz zredukowany graf acykliczny grafu G.

ODP:
Silnie spójny komponent : cykl $1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 17 \to 10 \to 1$





DEF:
Graf jest silnie spójny, jeśli dla każdej pary wierzchołków x,y istnieje ścieżka od x do y.
Podzbiór $\subseteq$ E jest silnie spójny jeśli obcięcie grafu G do X jest grafem silnie spójnym.
Silnie spójną składową nazywamy maksymalny w sensie inkluzji silnie spójny podzbiór zbioru wierzchołków.

Kondensacja grafu G jest skierowanym grafem acyklicznym (dag).
Kondensacja grafu skierowanego krok po kroku - ustalamy digraf $G = (V, E, \phi)$:

1. definiujemy $x >> y \equiv$ istnieje ścieżka z x do y
2. definiujemy $()x \equiv y) \leftrightarrow ((x >> y) \wedge (y >> x))$
3. pokazujemy że $\equiv$ jest relacją równoważności na V
4. na $V/\equiv$ definiujemy $E' = \{(C_1, C_2) : (\exists e \in E)(fst(e) \in C_1 \wedge snd(e) \in C_2)\}$
   - $fst(e), snd(e)$ - pierwszy i drugi element krawędzi (jeżeli $e = (x, y)$ to $fst(e) = x, snd(e) = x$)

   Graf $(V/\equiv, E')$ to kondensacja grafu G

Zadanie 75

Niech G będzie zorientowanym grafem acyklicznym o n wierzchołkach. Pokaż, że graf ten ma co najwyżej $\binom{n}{2}$ krawędzi. Podaj przykład takiego grafu o dokładnie $\binom{n}{2}$ krawędziach.

ODP:
Graf skierowany acykliczny, o największej ilości krawędzi i n wierzchołków:

1. Z grafu o $|V| = n$ wierzchołkach weźmy v_0, ilość krawędzi które można z niego poprowadzić to $n - 1$
2. Weźmy teraz kolejny V_1, można poprowadzić co najwyżej $n - 2$ krawędzi (nie można do samego siebie ani do v_0 bo powstanie cykl), i dalej analogicznie
3. Suma wszystkich krawędzi to $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$

$\binom{n}{2}$ po przekształceniu:
$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)\cdot 2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Zadanie 78

Niech G będzie grafem skierowanym o n wierzchołkach i m krawędziach.

1. Pokaż, że jeśli G jest spójny to $n-1 \leq m \leq n(n-1)$
2. Pokaż, że jeśli G jest silnie spójny to $n \leq m \leq n(n-1)$

ODP:
Z poprzedniego zadania:
Maksymalna liczba krawędzi w grafie prostym to $\binom{n}{2}$
(1) Minimalna liczba krawędzi w grafie spójnym to $n-1$ (graf liniowy)
(2) Minimalna liczba krawędzi w grafie spójnym to n (graf cykliczny)

DEF:
Graf prosty nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych.
Graf spójny, to graf w którym dla każdej pary wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy.
Graf jest silnie spójny, jeżeli każde dwa wierzchołki są osiągalne jeden z drugiego.