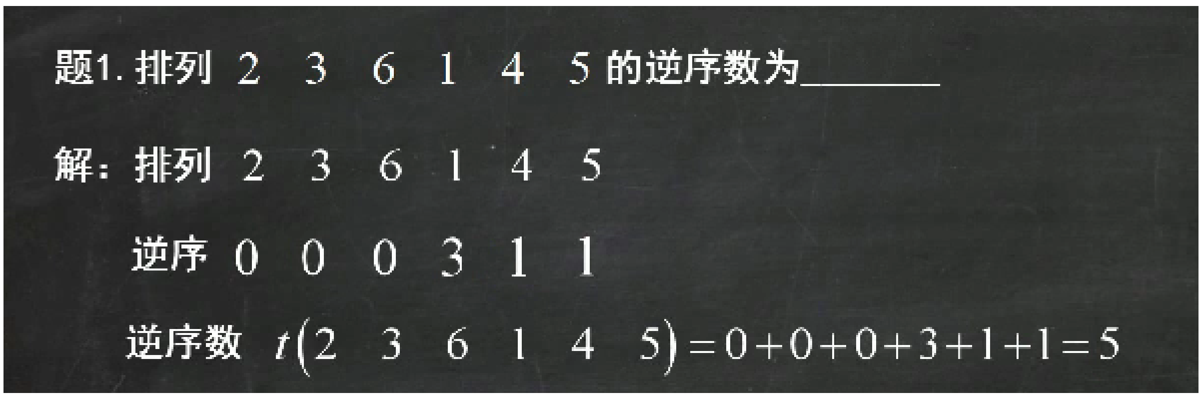
线性代数

行列式

> 行列式是一个数, 经过一系列的计算可以求得一个确定的值;
>
> 行列式是`n*n`阶的

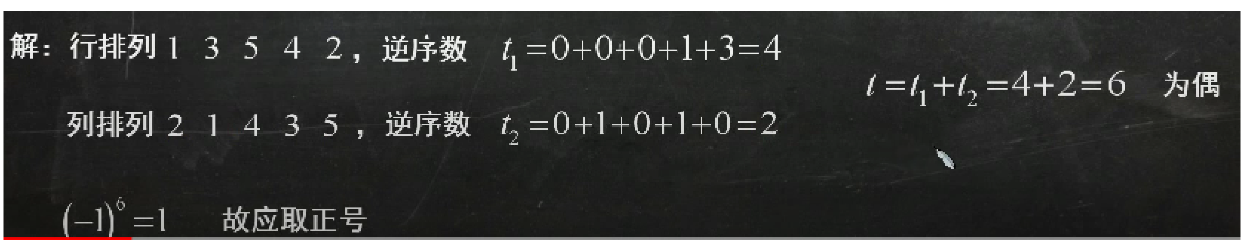
排列的逆序数

- 逆序：排列中，每一个数字的前面，比这个数字大的数的**个数**，为这一个数的逆序
- 逆序数：逆序中每一个数的和



- 通过逆序计算行列式的一项的符号

分别计算行排列的逆序数t_1和列排列的逆序数t_2，将逆序数相加得t，符号值为$(-1)^t$



行列式的计算

行列式的性质

1. 互换行(列), 要变号

例：
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

这里互换了`r1`和`r2`

2. 提公因子, 可以提行的也可以提列的

例：
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

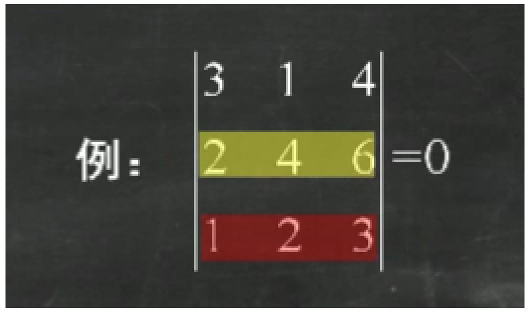
3. 倍加 可以将一行(列)中的所有元素加到另一行(列)的元素中, 行列式的值不变

例：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{11} & a_{22}+2a_{12} & a_{23}+2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. 拆分 对一行或一列拆分, 原行列式的值等于拆分出来的行列式的和

例：
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. 对应成比例, 值为零. 某一行元素的值都是另一行的元素的相同倍数, 则行列式值为0

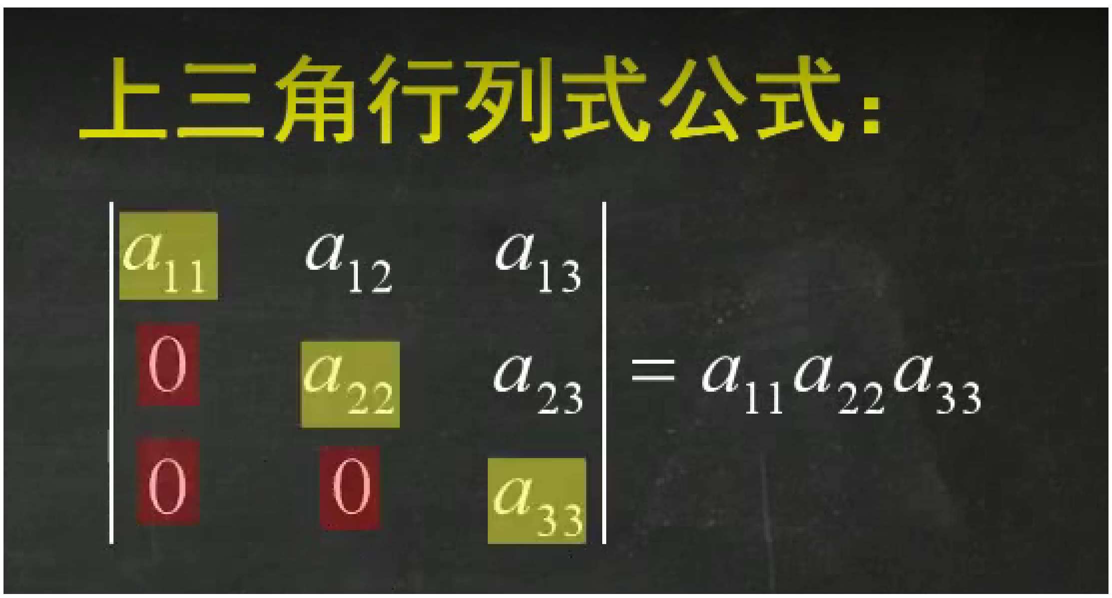


计算

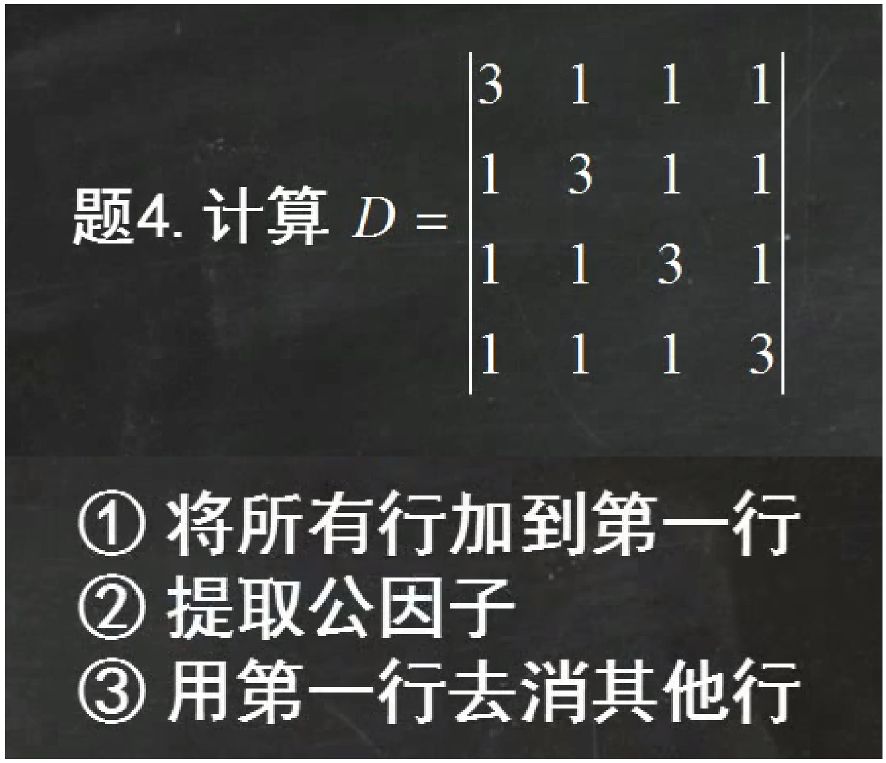
1. 二阶行列式

   主对角线相乘减次对角线相乘

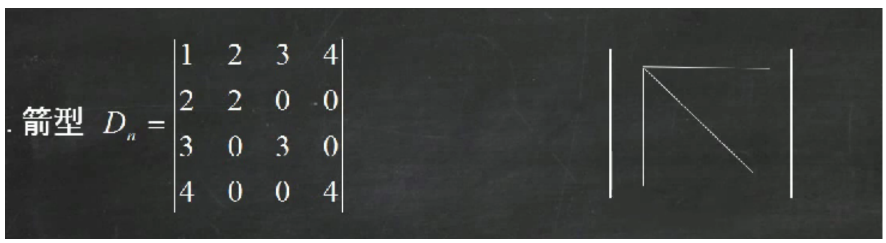
2. 其他行列式
   1. 上三角行列式
      1. 上三角行列式的变换:通过性质,将行列式中主对角线下方的数字变为0
      2. 公式:



      3. 计算过程:
         1. 通解:
            1. 从主对角线的第一个位置开始, 即$a_{11} -> a_{22} -> ....$
            2. 将主对角线一个元素下的元素, 通过倍加的性质全变为0, 一次变换一个元素, 用变换元素的行减去对角线元素的行
               1. > 这样做的好处是可以一次变换一个元素, 并且不会影响后面元素的变换, 单过程繁杂, 一次只变换一个元素
            3. 直到形成上三角行列式
            4. 技巧:
               1. 当对角线元素与下面元素不成正比关系时, 要计算分数比较困难, 所以可以通过**性质一:互换行列变号**的方式, 将合适的元素替换, 达到避免计算分数的效果
               2. 利用性质**提公因子**的性质,可以将行列式中的数字尽可能地减小, 方便计算

3. 

4. 箭型行列式:

   使用列于列相减的方法化简成上三角形行列式

行列式的展开

1. 余子式记作M_{ij}:去掉a_{ij}所在的行与列. 求余子式时需要将行列式的值计算出来

> a_{ij}为行列式的第`i`行第`j`列的元素

2. 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，即$A_{ij}$的一次项系数
3. 行列式展开公式
   1. 按照第`i`行展开公式

   $$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad \text{(i=1,2,3,...n)}$$

   2. 按照第`j`列展开公式

   $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad \text{(j=1,2,3,...n)}$$

4. 定理:
   1. 某行（列）元素与另一行（列）的代数余子式之积相加等于`0`
5. 技巧
   1. 算式中若包含行列式的某一行(列)的全部代数余子式A_{ij}时, 可以将其对应代数余子式的元素替换为其系数, 得到的新行列式的值与原式相等

$$
D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}
$$

[redacted]

$$
② \ A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}
$$

2. 算式中包含行列式的某一行(列)的全部余子式M_{ij}, 可以将通过公式转换成代数余子式A_{ij}, 然后利用技巧1计算

6. 范德蒙行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)
$$

矩阵

> 是一个表
>
> 矩阵是`n*m`阶, `n`和`m`可以相等也可以不相等
>
> 当`n`和`m`相等时, 称为方阵, 此时可以计算出行列式值
>
> 行列式的运算与矩阵不同

矩阵的三则运算

1. 加减运算：

   只能是**同型矩阵**进行加减运算，对应位置的元素加减

   > 同型矩阵：长宽相等

2. 乘法运算：

   1. 数×矩阵：把矩阵里的每个元素都乘上乘数，得到一个和原矩阵同阶的矩阵
   2. 矩阵×矩阵：前行乘后列

$$
A_{m*n}*B_{n*s}=C_{m*s}
$$

新矩阵的`i`行`j`列的值, 是`A`的`i`行的元素分别乘`B`的`j`列的元素**的和**

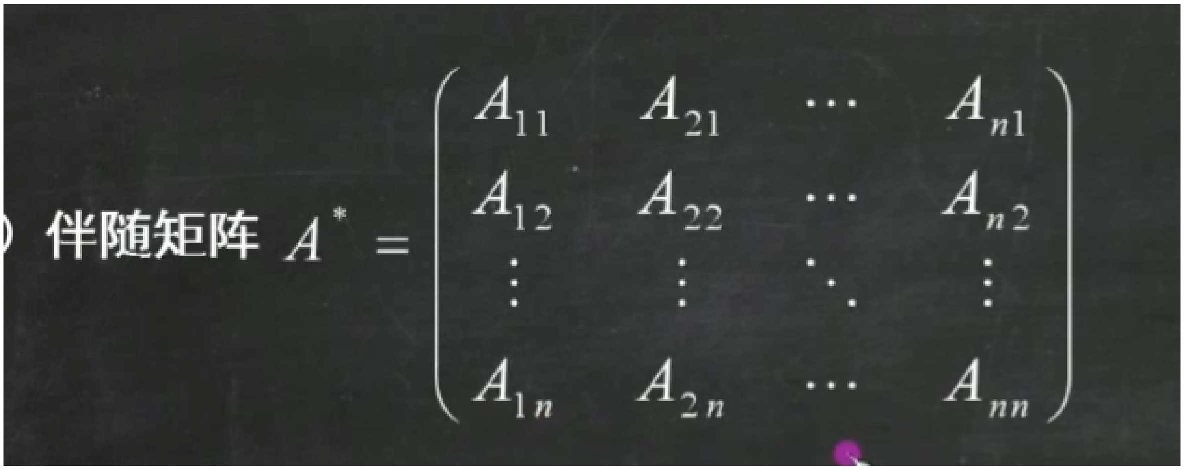
矩阵乘法不满足交换律, 结合律, 分配律

转置矩阵, 伴随矩阵, 单位矩阵, 逆矩阵

1. 转置矩阵A^T

   行变列, 列变行

2. 伴随矩阵A^*

   > A_{ij}为代数余子式

3. 单位矩阵E

   主对角线全为`1`, 其余元素全为0

   1. 单位矩阵的行列式值为`1`
   2. $EA = AE = A$: 单位矩阵乘**任何矩阵**都等于它本身

4. 逆矩阵A^{-1}

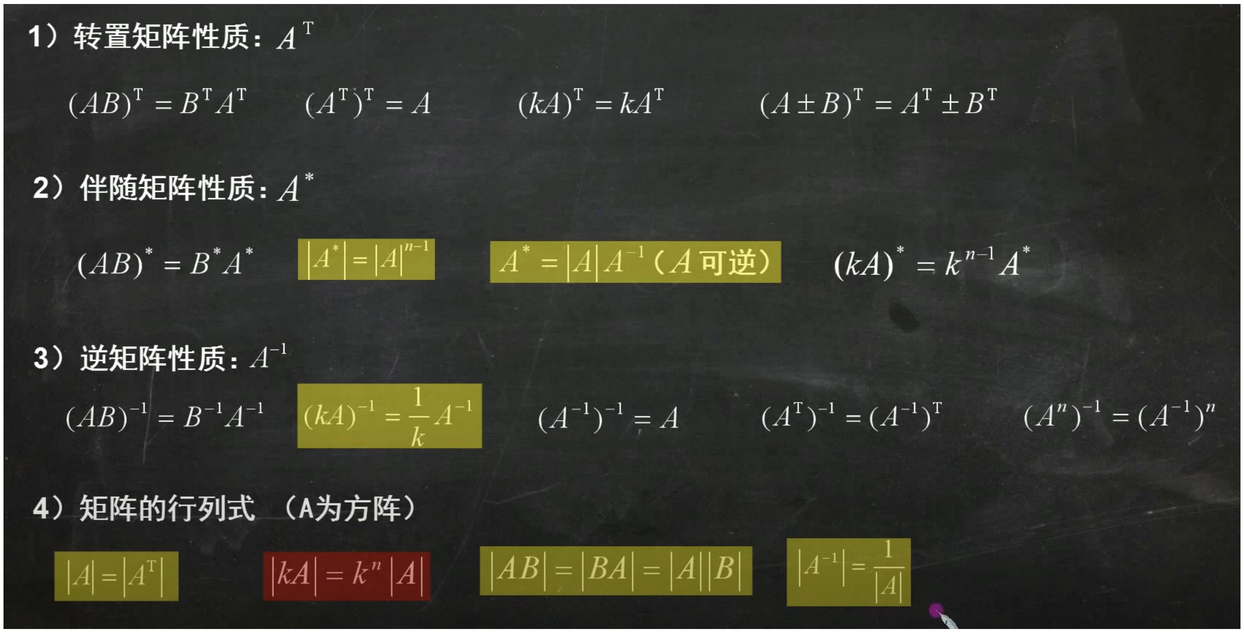
   $AB = BA = E$则B为A的逆矩阵, 记$B = A^{-1}$; 即: $AA^{-1} = E$

   1. 公式(少用):

   $$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

   2. 充要条件$|A| \neq 0$；矩阵可逆，矩阵的行列式值不为0
   3. 若矩阵可逆，矩阵的秩等于矩阵的阶数

矩阵行列式的计算(各种矩阵的性质)



> `n`是矩阵的阶

初等行变换

初等行变换

> 没有列变换

1. 换行:

   行与行交换位置

2. 倍乘

   某一行乘以一个数

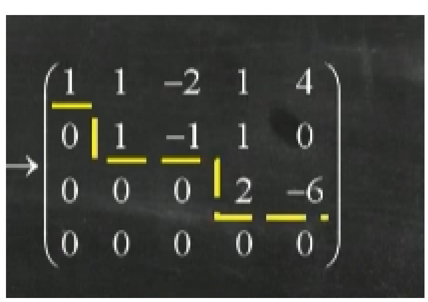
   (除一个数可以看成乘以一个数的倒数)

3. 倍加

   行加上另一行

变换前后用箭头连接

阶梯型矩阵



1. 如果有零行, 零行全在矩阵最下面
2. 每个阶梯首项即为主元, 主元依次往右

3. 阶梯型不是唯一的

最简型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 首先满足阶梯型

1. 主元全为`1`
2. 主元所在的列**其余**元素全为`0`
3. 最简型是唯一的

- 化简技巧:

尽可能先令主元为`1`(换行/倍乘), 再化成阶梯型, 最后去将主元外的元素化为`0`(倍加)

> 可以求
>
> 1. 逆矩阵
> 2. 矩阵的秩
> 3. 向量无关组
> 4. 特征向量
> 5. 解方程组
> 6. 对角化
> 7. 二次型

求逆矩阵

将原矩阵和其单位矩阵连结, 得到一个列数为原来两倍的矩阵, 将这个新矩阵进行**初等行变换**, 使矩阵左半边化为**单位矩阵**, 右半边的矩阵即为原矩阵的逆

> 利用同阶的原矩阵和单位矩阵写成增广矩阵，经过初等变换(如果是两矩阵左右相邻则经过行变换，如果是上下相邻经过列变换)使原矩阵变为单位矩阵，单位矩阵就变成了逆矩阵。

分隔线可以不写, 可以画成竖线

ey:

题1：若 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ **，求** A^{-1}

解： $(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1&0&0\\2&1&0&\vdots&0&1&0\\1&-1&0&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1&0&0\\0&-1&2&\vdots&-2&1&0\\0&-2&1&\vdots&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1&0&0\\0&-1&2&\vdots&-2&1&0\\0&0&-3&\vdots&3&-2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&-1&1&0\\0&-1&2&\vdots&-2&1&0\\0&0&-3&\vdots&3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{2}{3}r_3]{r_1+\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&\vdots&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-3&\vdots&3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\vdots&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\vdots&-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=(E\vdots A^{-1})$

特殊:

二阶矩阵的逆: 1. 主对角线对调　2. 次对角线取反号 3. 除以行列式的值

矩阵解方程

该方程的每一**项**都应为一个**矩阵**

项之间的加减运算同正常数字计算

若某一项为 $常数x\times矩阵A$, 可以视为 $常数x\times矩阵A\times矩阵的单位矩阵E$

某一项除**矩阵**时应留下该矩阵的单位矩阵

等号两边同时除以某一个常数式子时, 为乘以该式子的**逆**

ey:

$$AX=A+2X$$
$$AX-2X=A$$
$$(A-2E)X=A$$
$$(A-2E)^{-1}(A-2E)X=(A-2E)^{-1}A$$
$$X=(A-2E)^{-1}A$$

矩阵的秩$R(A)$

矩阵的**阶梯型**的主元**个数**

性质:

1. $$A_{m\times n} \quad R(A) \leq min\{m,n\}$$
2. A为方阵
$$R(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad R(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$$
3. $$R(A^T)=R(A)=R(kA) \quad (k \neq 0)$$
4. $$R(AB) \leq R(A) \quad R(AB) \leq R(B)$$
5. 矩阵的秩不为矩阵的阶，则说明矩阵的主对角线上的元素一定有至少一个为`0`，即矩阵的行列式值为`0`
6. 满秩矩阵不存在非零解(仅存在零解)
7. 线性方程组$A_{m*n}x=\beta$, 有无穷多解, 秩(A) < n; 秩(A) = n, 方程组有唯一解

向量

向量: 一行或者一列的矩阵

向量组: 多个向量组成的一组向量, 可以用矩阵表示, 矩阵的一列表示一个向量

> 向量大部分为一列的矩阵, 在表达上更喜欢用横着表示, 所以用横着的矩阵的转置矩阵(行列对调)来表示

线性相关

1. 存在一组不全为`0`的数$k_1,k_2,...k_m$, 使$k_1a_1+k_2a_2+...+k_ma_m=0$, 则称向量组$A:a_1,a_2,...a_m$线性相关, 否则线性无关
2. 重要）若$R(a_1,a_2,...a_m)<m$, 则向量线性相关; 若$R(a_1,a_2,...a_m)=m$, 则向量线性无关
3. 极大无关组: 用几个向量能够表示组中其他向量, 则这几个向量为这一组向量的一个极大无关组

解方程组

> 齐次线性: 化简系数矩阵, 等效于化简方程组, 矩阵的每一行对应一个方程, 行中的元素为对应未知数的系数
>
> 非齐次线性: 化简增广矩阵

齐次线性

1. 系数矩阵A_{m*n}：仅由方程组的系数组成的矩阵
    1. $R(A)=m$: 方程组只有零解
    2. $R(A)<m$: 方程组有无穷多解且有$m-R(A)$个**基础解系a**
2. **不是**主元对应的未知数为**自由变量**(其他未知数由自由解的值而定, 自由变量可以任意取值)
3. 基础解系:

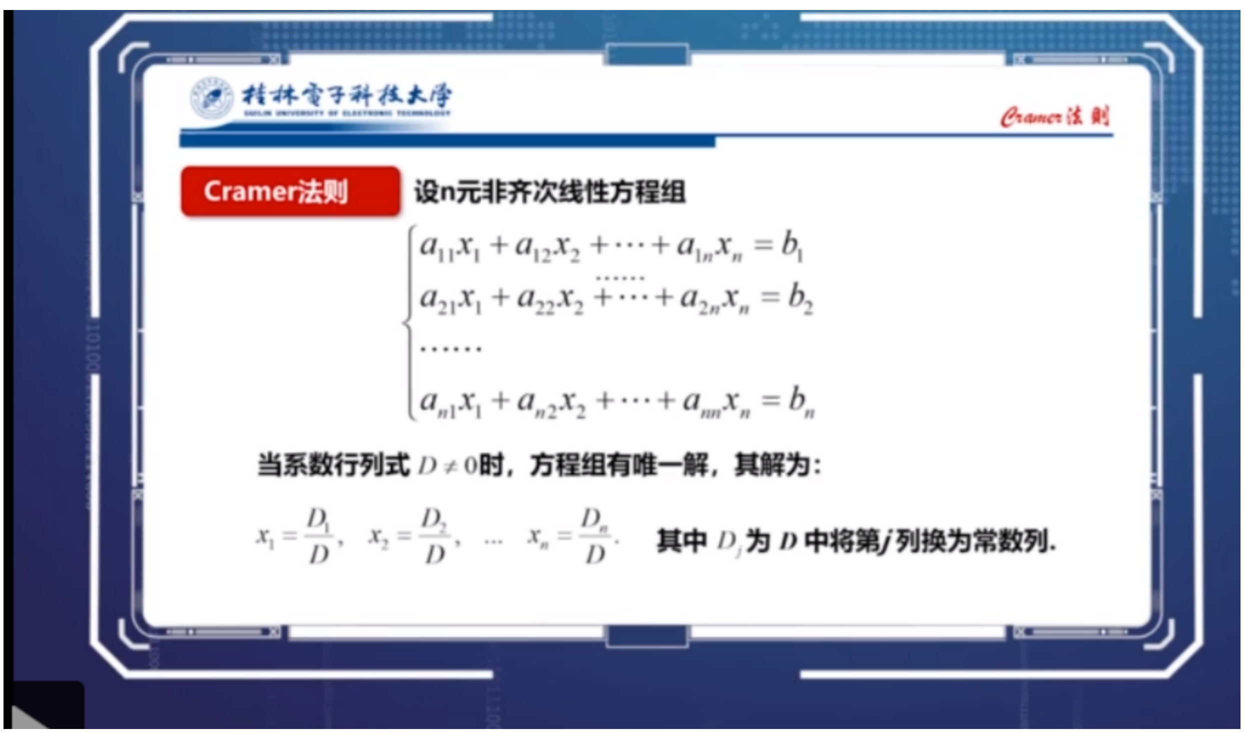
    1. 是一个向量, 方程的解与这个向量满足线性相关. 一个解系可以对应多个方程的解
    2. 自由解不全为0
    3. 不同基础解系线性无关
    4. 方程的通解: 基础解系乘一个常数k_i的总和
        1. $\sum_k = 1$
    5. 求法: 分别令不同的自由解为1, 其他均为0, 求出不同的组合

非齐次线性

1. 增广矩阵(A, β)： 由系数矩阵和常数组成
    1. $R(A) \neq R(A, \beta)$:　　无解
    2. $R(A) = R(A, \beta) = n$: 有唯一解
    3. $R(A) = R(A, \beta) < n$: 有无穷多解
2. 通解X
    1. $X = (\text{其次通解} + \text{非齐次特解})$
        1. 齐次通解: 不管常数列, 当作齐次线性求通解
        2. 非齐次特解: 增广矩阵化简后的最后一列组成的向量

Cramer法则

> 用于快速求解某个未知数
>
> 或者根据未知数的解来求出题目中要求的行列式
>
> > 题目中的行列式通常是需要进行一定的变换，注意观察某行或某列的内容是否全为方程组的常数列



特征值、特征向量、对角化

特征值λ

1. 矩阵可能有多个特征值
2. λ满足以下 **特征多项式**

$$|A-\lambda E|=0$$

3. 解这个行列式时, 可能会出现类似于λ^k的情况, 此时方程有重根, 即k个λ的值相同, 需要把这k个λ都写出来

特征向量

1. 先求**特征值**λ_i
2. 求$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系
   1. 将λ带入到矩阵$A-\lambda_i E$中, 得到方程的系数矩阵
   2. 解这个系数矩阵
   3. 求得基础解系a_i
3. $\Sigma k_i a_i$即为λ_i对应的**全部**特征向量(k_i不全为0)
4. 求解其他特征值对应的特征向量

相似化

$$P^{-1}AP=B$$

求解P, 使得`A`与`B`满足以上式子, 则称`A`与`B`满足相似化

依据: 特征值的数量与基础解系的数量相同

> 因为矩阵有k个线性无关的特征向量, 所以矩阵能相似对角化　(k为特征值的数量)

相似对角化

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}$$

1. 求得的`P`比较特殊, 使得矩阵`B`满足以上条件
2. 主对角线的元素分别为特征值

求解:

1. 求特征值
2. 求基础解系
3. $P=(a_1,a_2...a_m)$

4. 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

> 基础解系对应得位置和特征值要一一对应

正交相似对角化

矩阵`P`为正交矩阵或矩阵`P`满足正交变换$x = Py$

> 特点: 给出的矩阵一般是主对角线对称的

求解:

1. 求特征值
2. 求基础解系
3. 正交化

   > 正交: 两个向量垂直, 即两个向量相乘等于0
   >
   > 对于对称矩阵, 不同特征值对应的特征向量是正交的

   1. 使求得的基础解系两两正交
      1. 施密特正交化法
         1. $$b1 = a1$$
         2.
         3.
4. 单位化