Exercice 1: *Suites arithmétiques et géométriques*

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. donc $\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 + nr$. Donc,

$$\forall n \geq 1,\ \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2} = \frac{u_0+(n-1)r+u_0+(n+1)r}{2} = u_0 + nr = u_n$$

2. $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géometrique de raison q. donc $\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 \times q^r$. Donc,

$$\forall n \geq 1,\ u_{n-1} \times u_{n+1} = u_0 \times q^{n-1} \times u_0 \times q^{n+1} = u_0^2 \times q^{2n} = (u_0 \times q^n)^2 = u_n^2$$

Exercice 2: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n + 2u_n$$

1. $u_1 = 3u_0 + 2v_0 = 7$, $v_1 = 3v_0 + 2u_0 = 8$, $u_2 = 3u_1 + 2v_1 = 37$ et $v_2 = 3v_1 + 2u_1 = 38$.

2. On dit qu'une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n$. La valeur de la constante est ensuite donnée par la valeur du premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (3v_n + 2u_n) = u_n - v_n$$

La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut $u_0 - v_0 = -1$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$$

3. On doit montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$

La suite u est bien une suite arithmético-géométrique.

4. On va appliquer la méthode qui permet d'obtenir l'expression du terme général à partir de la formule de récurrence.

   (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 5x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - \left(\frac{-1}{2}\right) = u_n + \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5u_n + \frac{5}{2} = 5\big(u_n + \frac{1}{2}\big) = 5w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géometrique de raison 5 et de premier terme $w_o = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{3}{2} \times 5^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - \frac{1}{2}$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 3:

1. On applique la même méthode que dans l'exercice 2.

   (a) Recherche du point fixe

   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) = 2w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_o = u_0 + 1 = 1$.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - 1$. Donc,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$$

2. L'équation caractéristique associée à cette suite est $\mathbf{X}^2 = 4\mathbf{X} - 4$ de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Cette équation admet donc une racine double $x = \frac{4}{2} = 2$. On en déduit la forme du terme général de la suite u

   $$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + nB) \times 2^n$$

   Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.

   $$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = (A + B) \times 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

   L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)2^n$.

Exercice 4: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse aux deux suites définies par

$$u_0 = a,\ u_1 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{-1}{2} \times v_n$$

   La suite v est géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = b - a$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. S_n est la somme des (n-1) premiers termes de la suite v qui est géométrique donc

   $$S_n = (b - a) \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 - \frac{-1}{2}} = \frac{2(b - a)}{3} \times \left(1 - (\frac{-1}{2})^n\right)$$

3. On peut simplifier l'expression de la somme S_n qui est une somme télescopique. En effet

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = S_n + u_0 = \frac{2(b-a)}{3} \times \left(1 - (\frac{-1}{2})^n\right) + a$$

La suite $\left((\frac{-1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique pour une raison dont la valeur absolue est strictement inférieure à 1 donc elle converge vers 0. Par somme et produit sur les suites convergentes, la suite u converge.
Par somme et produit sur les limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2(b-a)}{3} + a = \frac{2b+a}{3}$$

<u>Exercice</u> <u>5:</u> Pour étudier la monotonie d'une suite u, on peut s'intéresser au signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1$$

On étudie alors le polynôme $P = \mathbf{X}^2 - \mathbf{X} + 1$. Son discriminant est négatif donc ce polynôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. De plus, $P(0) = 1$ donc $P \geq 0$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

La suite u est croissante.

2. On doit d'abord montrer que la suite est bien définie. On va le montrer par récurrence en posant comme hypothèse de récurrence

$P(n)$: "$u_n \geq 0$" (on aurait du poser $u_n \geq -1$ mais chaque u_n est une racine carrée donc il est positif

- <u>Initialisation</u>
  $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- <u>Hérédité</u>
  Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$.
  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \geq 0$.
  On a donc que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- <u>Conclusion</u> On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

On pourra donc toujours appliquer la formule de récurrence donc la suite u est bien définie.

Passons à la monotonie.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n$$

On va étudier la fonction $g : x \to \sqrt{1+x} - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$.
De plus,

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{1+x} \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $\forall x \geq 0,\ g(x) \leq g(0) = 0$.
Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ donc $g(u_n) \leq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite u est donc décroissante. On a montré de plus qu'elle était minorée par 0 donc elle converge. Notons l sa limite. On a donc

$$\sqrt{1+l} = l \Leftrightarrow 1+l = l^2 \Leftrightarrow \big(l - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)\big(l - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\big) = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$ donc $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Il n'y a pas de problème de définition puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour la monotonie, on s'intéresse à la fonction $g(x) = \mathbf{e}^x - 1 - x$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathbf{e}^x - 1$.
La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \mathbf{e}^x$.
On va pouvoir en déduire du signe de g'' le signe de g'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$		$+$	$+\infty$
$g'(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Puis on en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite u est croissante.

Exercice 6:

1.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{3^n(\frac{2^n}{3^n} - 1)}{3^n(\frac{2^n}{3^n} + 1)} = \frac{\frac{2^n}{3^n} - 1}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = \frac{\big(\frac{2}{3}\big)^n - 1}{\big(\frac{2}{3}\big)^n + 1}$$

La suite $\Big(\big(\frac{2}{3}\big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme et quotient de suites convergentes, la suite u est convergente.
Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

2.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{-1}{n+1} \leq \cos(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

Les suites $\big(\frac{-1}{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\frac{1}{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes et de même limite 0.
Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times ... \times n}{n \times n \times ... \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times ... \times \frac{n-1}{n} \times 1 \\
&\leq \frac{1}{n} \times 1 \times ... \times 1 \times 1 \\
\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n &\leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 0.
Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. On a l'intuition que cette suite diverge vers $+\infty$. On va devoir la minorer par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [1; n],\ \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
u_n &\geq \sqrt{n}
\end{aligned}$$

La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par le théorème de minoration, la suite u diverge vers $+\infty$.

5.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leq na \\
\frac{na-1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq \frac{na}{n} \\
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ a - \frac{1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq a
\end{aligned}$$

La suite $\left(a - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Par le théorème d'encadrement, la suite u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

6.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leq na \\
\text{Si } a > 0,\ \frac{na-1}{a} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \leq \frac{na}{a} \\
\text{Si } a < 0,\ \frac{na-1}{a} &> \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \geq \frac{na}{a}
\end{aligned}$$

Les suites $\left(n - \frac{1}{a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
Par le théorème de minoration, quelque soit le signe de a, la suite u diverge vers $+\infty$.

Exercice 7: On calcule les premiers termes pour ensuite conjecturer la valeur du terme général.

$$u_1 = a^2,\ u_2 = u_1^2 = (a^2)^2 = a^4,\ u_3 = u_2^2 = (a^4)^2 = a^8$$

On se propose de démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^{2^n}$$

- Initialisation: $u_0 = a$ et $a^{2^0} = a$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = u_n^2 \underset{\text{HDR}}{=} (a^{2^n})^2 = a^{2\times 2^n} = a^{2^{n+1}}$$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- Conclusion: Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^{2^n}$.

Exercice 8: On va raisonner par l'absurde. Supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(n-1) + \cos(n+1) = 2\cos(n)\cos(1)$.

  Les suites $(\cos(n-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers l. Par passage à la limite dans l'égalité, on obtient

$$2l = 2l\cos(1) \text{ donc } l = 0.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$.

  La suite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l. Par passage à la limite dans l'égalité, on obtient

$$l = 2l^2 - 1$$

  Or, 0 n'est pas solution de cette équation donc on aboutit à une contradiction.

La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 9: Etudier les couples de suites ci-dessous :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\times n!}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.
   Quelle est leur limite commune ?
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Exercice 10: On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \end{cases}$$

1. Cette question est là pour justifier la bonne définition de la suite.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P()\ :\ "0 < x_n < 1"$.
   - Initialisation: $x_1 = \frac{x_0(1+x_0)}{1+2x_0} = \frac{2}{3}$ donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité: Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} 0 &< x_n < 1 \\ 0 &< 1 + x_n < 1 + 2x_n \\ 0 &< \frac{1+x_n}{1+2x_n} < 1 \\ 0 &< \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} < 1 \end{aligned}$$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

- Conclusion: Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < x_n < 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} - x_n = \frac{x_n + x_n^2 - x_n - 2x_n^2}{1+2x_n} = \frac{-x_n^2}{1+2x_n} < 0$$

La suite x est décroissante.

3. La suite x est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons l sa limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l + 2l^2 = l + l^2 \Leftrightarrow l = 0.$$

La suite x converge vers 0.

Exercice 11: Soit u une suite réelle et soit w la suite suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_0 + u_1 + ... + u_n}{n+1}$$

1. Montrer que si u est bornée alors w est bornée.
Que pensez-vous de la réciproque?

2. Montrer que si u converge alors w converge vers la même limite.
Que pensez-vous de la réciproque?

3. Montrer que si u est croissante alors w est croissante.

Exercice 12: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. C'est la *suite harmonique.*

1. Montrer que la suite H est croissante.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

3. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 13: On s'intéresse à l'équation (E_n) , $x^n + x^{n-1} + .. + x = 1$.

1. Cette question est là pour justifier que la suite est bien définie.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + .. + x$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est également strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
f_n est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer.

$f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc, $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

f_n est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. 1 a un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. On le note x_n.

2.

$$f_n(1) = 1 + 1 + ... + 1 = n \geq 1$$
$$f_n\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n < 1$$

Donc, on a : $f_n\big(\frac{1}{2}\big) < 1 < f_n(1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\frac{1}{2} < x_n < 1$.

3.

$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n^n + ... + x_n^2 + x_n = x^n(x_n^n + x_n^{n-1} + ... + x_n + 1) = x^n(f_n(x_n) + 1) = 2x_n$ car $f_n(x_n) = 1$.

De plus, $x_n > \frac{1}{2}$ donc $f_{n+1}(x_n) > 1$.

Or, x_{n+1} est l'unique antécédent de 1 par f_{n+1}. Par stricte croissante de f_{n+1}, l'antécédent est donc strictement inférieur à x_n donc $x_{n+1} < x_n$.

4. La suite x est décroissante et minorée par 0 donc par le théorème de la limite monotone, elle converge. On note l sa limite.

5. (a) La suite x est strictement décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n < x_2$.
Par passage à la limite, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq x_2$.

Or, x_2 est l'unique solution positive de $x^2 + x = 1$ donc $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n < 1$.

(b) On a $f_n(x_n) = 1$, c'est-à-dire $x_n \times \frac{1-x_n^n}{1-x_n} = 1$.

On veut passer cette égalité à la limite. Attention, il est difficile de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq x_n^n \leq x_2^n$ et $x_2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_2^n = 0$.
Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. En revenant à l'égalité précédente, on obtient

$$l \times \frac{1}{1-l} = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$