Introduction to Tensor Spaces
Appunti del Corso

Mirko Torresani

3 gennaio 2025

1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Il prodotto tensoriale $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è definito come lo spazio $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{C})$.

Definizione 1.2. Dato un tensore $f \in V \otimes W$, il suo rango $\operatorname{rk} f$ è

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{i=1}^{s} v_i \otimes w_i\}\,.$$

Proposizione 1.3. *Il rango* $\operatorname{rk} f$ *è equivalentemente definibile come*

(i) il rango del morfismo $V^* \to V$ *associato a* f*;*

(ii) posto $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$*, con* $(v_i)_i$ *e* $(w_j)_j$ *rispettive basi, il rango di* f *è il rango della matrice* $(c_{ij})_{i,j}$*.*

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

Definizione 1.4. Dato un elemento $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, il rango $\operatorname{rk} f$ è definito come

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^{s} v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se f è un vettore in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, allora f induce mappe

$$f_k \colon V_k^* \to \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger \colon \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$$

per ogni k.

Definizione 1.5. Un tensore $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ si dice V_i-conciso, o i-conciso, se f_i.

Definizione 1.6. Il multi-rango di f è definito come

$$\operatorname{mrk} f = (\operatorname{rk} f_1, \ldots, \operatorname{rk} f_d) =: (r_1, \ldots, r_d)\,,$$

dove $\operatorname{rk} f_k$ è il rango di f_k come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta $f_k^\dagger$).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.*

Proposizione 1.7. *Sia f un tensore, allora*

$$\max_i r_i \leq \operatorname{rk} f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

Dimostrazione. Sia r il rango di f, e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}\,.$$

L'immagine della funzione trasporta $f_k^\dagger$, da $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$, è contenuta nel generato $\langle v_{k,1}, \ldots, v_{k,r} \rangle$, e quindi l'immagine ha dimensione ha al più dimensione r.

Se $\{u_{i,1}, \ldots, u_{i,r_i}\}$ è una base per l'immagine di $f_i^\dagger$, allora f si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1, \ldots, j_d} u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni k

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[\sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1, \ldots, j_d} u_{k,j_k} \right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}\,.$$

Conseguentemente per ogni k, il rango r è al più $\prod_{i \neq k} r_i$. $\square$

Corollario 1.8. *Se* $\operatorname{rk} f = 1$, *allora* $\operatorname{rk} f_k = 1$ *per ogni* k.

Corollario 1.9. *Fissato un certo k, se $r_j = 1$ per ogni $j \neq k$ allora* $\operatorname{rk} f_k = \operatorname{rk} f = 1$.

Proposizione 1.10. *Sia f un tensore 1-conciso, tale che $r_1 \geq \cdots \geq r_d$ e che* $\operatorname{rk} f = r_1$. *Allora $f_1(V_1^*)$ è generato precisamente da r_1 tensori indecomponibili in $V_2 \otimes \cdots \otimes V_d$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger \colon \bigotimes_{i>1} V_i^* \to V_1$$

è generata da $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$. Siccome il rango di f_1, e quindi quello di $f_1^\dagger$, è per ipotesi r_1, quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore f è 1-conciso, e quindi f_1 è iniettivo. In definitiva, $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$ e $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$ formano una base di V_1.

Consideriamo quindi la base duale $\{v_1^1, \ldots, v_1^{r_1}\}$ di V_1^*. Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \ldots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1,\ldots,r_1} . \qquad \square$$

Come non-esempio consideriamo $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, ed il tensore

$$f \coloneqq e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_0 .$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle .$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre, $\operatorname{mrk} f$ è $(2, 2, 2)$. Conseguentemente, $\operatorname{rk} f = 3$ come ci si può immaginare.

Proposizione 1.11. *Sia $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$. Il rango di f coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene $f_1(V_1^*)$.*

Dimostrazione. Se r è il rango di f, allora f si scrive come $\sum_{i=1}^{r} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ e conseguentemente $f_1(V_1^*)$ è contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^{r}$.

D'altra parte, supponiamo che $f_1(V_1^*)$ sia contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^{r}$. Fissiamo una base $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,m}\}$ di V_1, ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i}\, v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \quad 1 \le k \le r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i}\, v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} . \qquad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

Definizione 1.12. Siano A, B e C tre spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Inoltre sia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base di A, e sia V un sottospazio di $B \otimes C$ con base $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Una *modificazione* di $f \in A \otimes B \otimes C$ è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j .$$

Analogo per V in $A \otimes B$ o in $A \otimes C$.

Definizione 1.13. Dato $V_1 \subseteq B \otimes C$, $V_2 \subseteq A \otimes C$ e $V_3 \subseteq A \otimes B$ il *rango minimale modulo tre sottospazi* V_1, V_2 *e* V_3 è

$$\operatorname{minrk}(f \mod V_1\, V_2\, V_3) := \min\{\operatorname{rk} \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}\,.$$

Proposizione 1.14. *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$ un tensore conciso di rango r, e poniamo $f = \sum_{k=1}^{m} g_k \otimes c_k$ con $g_i \in A \otimes B$ e $\{c_1, \dots, c_m\}$ una base di C. Se $g_1 \neq 0$, esistono constanti $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^{\perp})^*$$

ha rango al più $r-1$. Se $\operatorname{rk} g_1 = 1$, allora $\hat{f}$ ha rango almeno $r-1$ qualunque siano le costanti.

Dimostrazione. Sappiamo che esistono $h_1, \dots, h_r$, tensori di rango 1 in $A \otimes B$, che generano uno spazio contenente $f_3(C^*)$. Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t}\, h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j\,.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità, $\alpha^{1,1} \neq 0$, e porre $\lambda_j := \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^{m} \left[\alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}}\, \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{t=2}^{r} \left(\alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1}\alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j \end{aligned}\,.$$

Ergo $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ è contenuto in $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$, che uno span di tensori di rango 1. Quindi $\hat{f}$ ha rango al più $r-1$.

Se il rango di $g_1 \in A \otimes B$ è 1, allora possiamo tranquillamente porre $h_1 = g_1$. In questo caso $\alpha^{1,t} = 0$ per ogni $t > 1$ e $\hat{f}$ assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti* $\lambda_j \in \mathbb{C}$:

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} \sum_{t=2}^{r} \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^{t} h_t \otimes \left[\sum_{j=2}^{m} \alpha^{j,t}\, c_j \right]\,.$$

Ma questo implica che $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ coincide con $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$, da cui

$$\operatorname{rk} \hat{f} \geq \operatorname{rk} \hat{f}_3 = r - 1\,.$$

□

Corollario 1.15. *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$, e sia f un tensore C-conciso. Fissato un sottospazio W di C^*, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod 0\ 0\ f_3(W)) + \dim W\,,$$

e l'uguaglianza si ottiene se $f(W)$ è generato da tensori di rango 1.

Dimostrazione. Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a $\dim W$. □

Corollario 1.16. *Se $f \in A \otimes B \otimes C$ è conciso, e $U \subseteq A^*$, $V \subseteq B^*$, $W \subseteq C^*$ sono sottospazi, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod f(U)\ f(V)\ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W\,,$$

e se $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$ sono generati da tensori dai rango 1, vale l'uguaglianza.

2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

Definizione 2.1. Dato un gruppo G, un G-modulo è, in questo contesto, un $\mathbb{C}[G]$-modulo nel senso dell'algebra commutativa.

Definizione 2.2. Se G agisce su un $\mathbb{C}$-spazio V e W (tramite un morfismo $G \underset{\rho}{\to} GL(V)$)

(i) G agisce su V^* via $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^\dagger$;

(ii) G agisce su $V \oplus W$ via $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$;

(iii) G agisce su $V \otimes W$ via $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

Definizione 2.3. L'algebra tensoriale $(TV, \otimes)$ è definita come

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}\,.$$

Vogliamo definire *l'algebra simmetrica.*

Definizione 2.4. I d-tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha\ \forall \sigma \in S_d\}\,,$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V\,.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica* π_S da TV in SV:

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\,.$$

Proposizione 2.5. *Lo spazio $S^d V$ è generato dall'insieme $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,d\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{d-|I|} \left[\sum_{i \in I} v_i \right]^{\otimes d},$$

e che per ogni $\alpha \in S^d V$ la somma precedente coincide con $d! \cdot \alpha$. □

L'algebra SV risulta effettivamente un algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico* $\odot$ su SV come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta)\,.$$

Osservazione. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V, una base di $S^d V$ è data da

$$\mathcal{B}_{S^d V} = \{v_{j_1} \odot \cdots \odot v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim S^d V = \binom{n+d-1}{d}\,.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori.* Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

Proposizione 2.6. *Dato un tensore $f \in S^2 V$ di rango r, esso ammette una decomposizione della forma*

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i\,.$$

Proposizione 2.7. *La rappresentazione di $GL(V)$ sullo spazio vettoriale $S^2 V$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia $W \subseteq S^2 V$ un $GL(V)$-sottomodulo contenente un tensore f non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

con $v_1, \ldots, v_r$ indipendenti.

Sia un morfismo $g \in GL(V)$ per cui $g(v_1) = 2v_1$ e $g(v_i) = v_i$ per ogni $i > 1$. Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1 \,,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W \qquad \square$$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico.*

Definizione 2.8. Il rango simmetrico di $f \in S^dV$ è

$$\operatorname{rk}_S f \coloneqq \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \cdots + v_r^{\otimes d}\} \,.$$

Sicuramente $\operatorname{rk} f \leq \operatorname{rk}_S f$, e vale l'uguaglianza per $d = 2$. È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon.* Nel 2018 Shitov [2] ha pensato di trovare un controesempio, smentito da sé stesso nel 2024 [1].

Proposizione 2.9. *Posto $\mathbb{C}[V]$ l'algebra delle funzioni $V \to \mathbb{C}$ generata da V^*, lo spazio S^dV^* è isomorfo a $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_d$.*

Dimostrazione. La mappa che funziona è

$$\Phi \colon S^dV^* \to \mathbb{C}[V]_d \,,\ \phi \mapsto f_\phi \,,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \ldots, v) \,. \qquad \square$$

Definizione 2.10 (Waring rank)**.** Per ogni $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_d$ il rango di Waring è

$$\operatorname{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^d + \cdots + l_r^d,\ l_i \text{ forma lineare}\} \,.$$

Definizione 2.11. I d-tensori antisimmetrici sono

$$\Lambda^dV \coloneqq \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha \ \forall \sigma \in S_d\} \,,$$

e l'algebra antisimmetrica è

$$\Lambda V \coloneqq \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^dV \,.$$

Definiamo la proiezione antisimmetrica π_Λ come

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} \,.$$

Analogamente a quanto fatto prima definiamo il prodotto antisimmetrico (o *wedge*) come

$$\alpha \wedge \beta \coloneqq \pi_\Lambda(\alpha \otimes \beta) \,.$$

Proposizione 2.12. *Un insieme finito $v_1, \dots, v_d$ è linearmente indipendente se e solo se*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0\,.$$

Corollario 2.13. *Una base $\mathcal{B}_{\Lambda^d V}$ di $\Lambda^d V$ è*

$$\mathcal{B}_{\Lambda^d V} = \{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim \Lambda^d V = \binom{n}{d}\,.$$

Proposizione 2.14. *Lo spazio $\Lambda^2 V$ è un $GL(V)$-modulo irriducibile.*

3 Decomposizione di Tensori

Dati due spazi A, B, lo spazio $G \coloneqq GL(A) \times (B)$ è incluso in $GL(A \otimes B)$. Dei teoremi di semplice decomposizione sono dati dai seguenti.

Proposizione 3.1. *Lo spazio $S^2(A \otimes B)$ si G-decompone come*

$$S^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes S^2 B) \oplus (\Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B)\,.$$

Ed allo stesso modo $\Lambda^2(A \otimes B)$ si G-decompone come

$$\Lambda^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \oplus (S^2 A \otimes \Lambda^2 B)\,.$$

Gli elementi di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ hanno le orbite secondo $(GL_2(\mathbb{C}))^3$ che seguono la seguente tabella:

orbita	r_1	r_2	r_3	$\operatorname{rk} f$	rappresentante
A	1	1	1	1	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0$
B_1	1	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1$
B_2	2	1	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1$
B_3	2	2	1	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
W	2	2	2	3	$a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
G	2	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$

4 Varietà Algebriche Tensoriali

Definizione 4.1. Sia $Z \subseteq \mathbb{P}V$ un sottoinsieme dello spazio proiettivo su V. Il *cono affine* è $\hat{V} \coloneqq \pi^{-1}(Z)$, con π la proiezione proiettiva.

Definizione 4.2. Se X l'insieme di zeri comuni di $S \subseteq S^\bullet V^*$, allora poniamo $X \coloneqq Z(S)$.

Definizione 4.3. Viceversa, dato $A \subseteq \mathbb{P}V$,

$$I(A) \coloneqq \{F \in S^\bullet V^* \mid F(a) = 0 \ \forall a \in \hat{A}\}$$

è *l'ideale di A*.

Definizione 4.4. L'embedding di Segre è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{Seg}\colon \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B &\to \mathbb{P}(A \otimes B) \\ ([a],[b]) &\mapsto [a \otimes b] \end{aligned}$$

L'immagine è data dalla proiezione delle matrici $\dim A \times \dim B$ di rango 1, cioè dal luogo di zeri di $\Lambda^2 A^* \otimes \Lambda^2 B^* \subseteq S^2(A \otimes B)$.

Proposizione 4.5. *In generale l'analoga mappa da* $\mathbb{P}A_1 \times \cdots \times \mathbb{P}A_n$ *a* $\mathbb{P}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$ *dà come immagine un'insieme chiuso.*

Definizione 4.6. La d-mappa di Veronese è

$$\begin{aligned} v_d\colon \mathbb{P}V &\to \mathbb{P}(S^d V) \\ [a] &\mapsto [a^{\otimes d}] \end{aligned}$$

L'immagine è costituita da $\mathrm{Seg}((\mathbb{P}V)^n) \cap \mathbb{P}(S^d V)$, e quindi è una varietà proiettiva.

Definizione 4.7. Data una mappa f da V in sé, $f^{\wedge m}$ è la naturale endomorfismo di $\Lambda^m V$. Se $m = \dim V$, $f^{\wedge m}$ è la moltiplicazione per $\det(f)$.

Definizione 4.8. La Grasmanniana è

$$\mathrm{Gr}(r, V) \coloneqq \{[v_1 \wedge \cdots \wedge v_r] \mid v_f \in V\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^r V).$$

Osserviamo che nel proiettivo un tale prodotto wedge è insensibile a cambi di base del sottospazio generato. La Grassmaniana parametrizza quindi i sottospazi

Definizione 4.9. Per ogni $\phi \in V^*$ e $v \in V$, definiamo $\phi \lrcorner v \coloneqq \phi(v)$. Per induzione se $\phi \in V^*$, $v \in V$ e $f \in \Lambda^k V$ imponiamo

$$\phi \lrcorner (v \wedge f) \coloneqq (\phi \lrcorner v) \wedge f - v \wedge (\phi \lrcorner f)\,.$$

Infine imponiamo $(\phi \wedge g) \lrcorner f \coloneqq \phi \lrcorner (g \lrcorner f)$.

Proposizione 4.10. $f \in \Lambda^r V$ *può essere scritta come un prodotto wedge* $w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$ *se e solo se*

$$(\psi \lrcorner f) \wedge f = 0 \ \forall \psi \in \Lambda^{r-1} V^*$$

In particolare, se

$$f = p_{i_1 \dots i_r} v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_r}$$

allora l'equazione diventa

$$\sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k p_{i_1 \dots i_{r-1} j_k} \, p_{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \cdots j_{r+1}} = 0\,,$$

per ogni scelta di multiindici $(i_1, \dots, i_k)$ e $(j_1, \dots, j_k)$. Avendo ottenuto una equazione polinomiale, $\mathrm{Gr}(r, V)$ è una varietà proiettiva.

Parliamo ora di spazi tangenti.

Definizione 4.11. Sia $M \subseteq V$ un sottoinsieme e $v \in V$. Allora

$$\hat{T}_v M \coloneqq \left\{ \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0} \mid \gamma \colon \mathbb{C} \to M \text{ curva liscia} \right\}$$

è lo spazio tangente.

Osserviamo che lo spazio tangente su v o su λv rimane invariato per $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Definizione 4.12. Sia $X \subseteq \mathbb{P}V$ una varietà proiettiva. Un punto $v \in X$ si dice liscio se esiste un insieme aperto U (di Zarinksi) su cui lo spazio tangente $\hat{T}_w X$ ha la stessa dimensione per ogni $w \in U$. L'insieme dei punti singolari è un chiuso proiettivo.

Poniamo quindi

$$\dim X \coloneqq \dim(\hat{T}_v X) - 1$$

con v un punto liscio.

Proposizione 4.13. *Vale che*

$$\hat{T}_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_d} \operatorname{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_d) = \sum_{j=1}^{d} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes V_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_d\,.$$

Proposizione 4.14. *Analogamente vale che*

$$\hat{T}_{[v^{\otimes d}]} v_d(\mathbb{P}V) = \{[v^{\otimes (d-1)} \otimes w] \mid w \in V\}\,.$$

Riferimenti bibliografici

[1] J. Draisma. «Erratum: A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 8.1 (2024), pp. 225–225. `https://doi.org/10.1137/23M1623781`.

[2] Y. Shitov. «A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), pp. 428–443. `https://doi.org/10.1137/17M1131970`.