# Introduction to Tensor Spaces
# Appunti del Corso

Mirko Torresani

30 novembre 2024

## 1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base $\mathbb{C}$.

**Definizione 1.1.** Il prodotto tensoriale $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è definito come lo spazio $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{C})$.

**Definizione 1.2.** Dato un tensore $f \in V \otimes W$, il suo rango $\operatorname{rk} f$ è

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{i=1}^{s} v_i \otimes w_i\} .$$

**Proposizione 1.3.** *Il rango* $\operatorname{rk} f$ *è equivalentemente definibile come*

*(i) il rango del morfismo* $V^* \to V$ *associato a* $f$*;*

*(ii) posto* $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$*, con* $(v_i)_i$ *e* $(w_j)_j$ *rispettive basi, il rango di* $f$ *è il rango della matrice* $(c_{ij})_{i,j}$*.*

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

**Definizione 1.4.** Dato un elemento $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, il rango $\operatorname{rk} f$ è definito come

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^{s} v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se $f$ è un vettore in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, allora $f$ induce mappe

$$f_k \colon V_k^* \to \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger \colon \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$$

per ogni $k$.

**Definizione 1.5.** Un tensore $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ si dice $V_i$-conciso, o $i$-conciso, se $f_i$.

**Definizione 1.6.** Il multi-rango di $f$ è definito come

$$\operatorname{mrk} f = (\operatorname{rk} f_1, \ldots, \operatorname{rk} f_d) =: (r_1, \ldots, r_d)\,,$$

dove $\operatorname{rk} f_k$ è il rango di $f_k$ come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta $f_k^\dagger$).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.*

**Proposizione 1.7.** *Sia $f$ un tensore, allora*

$$\max_i r_i \leq \operatorname{rk} f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

*Dimostrazione.* Sia $r$ il rango di $f$, e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}\,.$$

L'immagine della funzione trasporta $f_k^\dagger$, da $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$, è contenuta nel generato $\langle v_{k,1}, \ldots, v_{k,r} \rangle$, e quindi l'immagine ha dimensione ha al più dimensione $r$.

Se $\{u_{i,1}, \ldots, u_{i,r_i}\}$ è una base per l'immagine di $f_i^\dagger$, allora $f$ si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1,\ldots,j_d}\, u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni $k$

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[ \sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1,\ldots,j_d} u_{k,j_k} \right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}\,.$$

Conseguentemente per ogni $k$, il rango $r$ è al più $\prod_{i \neq k} r_i$. □

**Corollario 1.8.** *Se* $\operatorname{rk} f = 1$*, allora* $\operatorname{rk} f_k = 1$ *per ogni $k$.*

**Corollario 1.9.** *Fissato un certo $k$, se $r_j = 1$ per ogni $j \neq k$ allora* $\operatorname{rk} f_k = \operatorname{rk} f = 1$.

**Proposizione 1.10.** *Sia $f$ un tensore 1-conciso, tale che $r_1 \geq \cdots \geq r_d$ e che* $\operatorname{rk} f = r_1$*. Allora $f_1(V_1^*)$ è generato precisamente da $r_1$ tensori indecomponibili in $V_2 \otimes \cdots \otimes V_d$.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger \colon \bigotimes_{i>1} V_i^* \to V_1$$

è generata da $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$. Siccome il rango di $f_1$, e quindi quello di $f_1^\dagger$, è per ipotesi $r_1$, quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore $f$ è 1-conciso, e quindi $f_1$ è iniettivo. In definitiva, $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$ e $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$ formano una base di $V_1$.

Consideriamo quindi la base duale $\{v_1^1, \ldots, v_1^{r_1}\}$ di $V_1^*$. Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \ldots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1,\ldots,r_1} . \qquad \square$$

Come non-esempio consideriamo $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, ed il tensore

$$f \coloneqq e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_0 .$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle .$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre, $\operatorname{mrk} f$ è $(2, 2, 2)$. Conseguentemente, $\operatorname{rk} f = 3$ come ci si può immaginare.

**Proposizione 1.11.** *Sia $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$. Il rango di $f$ coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene $f_1(V_1^*)$.*

*Dimostrazione.* Se $r$ è il rango di $f$, allora $f$ si scrive come $\sum_{i=1}^{r} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ e conseguentemente $f_1(V_1^*)$ è contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$.

D'altra parte, supponiamo che $f_1(V_1^*)$ sia contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$. Fissiamo una base $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,m}\}$ di $V_1$, ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i} \, v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \quad 1 \leq k \leq r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i} \, v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} . \qquad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

**Definizione 1.12.** Siano $A$, $B$ e $C$ tre spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Inoltre sia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base di $A$, e sia $V$ un sottospazio di $B \otimes C$ con base $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Una *modificazione* di $f \in A \otimes B \otimes C$ è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j .$$

Analogo per $V$ in $A \otimes B$ o in $A \otimes C$.

**Definizione 1.13.** Dato $V_1 \subseteq B \otimes C$, $V_2 \subseteq A \otimes C$ e $V_3 \subseteq A \otimes B$ il *rango minimale modulo tre sottospazi $V_1$, $V_2$ e $V_3$* è

$$\mathrm{minrk}(f \mod V_1\, V_2\, V_3) := \min\{\mathrm{rk}\, \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}\,.$$

**Proposizione 1.14.** *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$ un tensore conciso di rango $r$, e poniamo $f = \sum_{k=1}^{m} g_k \otimes c_k$ con $g_i \in A \otimes B$ e $\{c_1, \ldots, c_m\}$ una base di $C$. Se $g_1 \neq 0$, esistono constanti $\lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^{\perp})^*$$

*ha rango al più $r-1$. Se* $\mathrm{rk}\, g_1 = 1$*, allora $\hat{f}$ ha rango almeno $r-1$ qualunque siano le costanti.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che esistono $h_1, \ldots, h_r$, tensori di rango 1 in $A \otimes B$, che generano uno spazio contenente $f_3(C^*)$. Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t}\, h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j\,.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità, $\alpha^{1,1} \neq 0$, e porre $\lambda_j := \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\
&= \sum_{j=2}^{m} \left[ \alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}}\, \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\
&= \sum_{j=2}^{m} \left[ \sum_{t=2}^{r} \left( \alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1}\alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j
\end{aligned} \quad .$$

Ergo $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ è contenuto in $\langle h_2, \ldots, h_r \rangle$, che uno span di tensori di rango 1. Quindi $\hat{f}$ ha rango al più $r-1$.

Se il rango di $g_1 \in A \otimes B$ è 1, allora possiamo tranquillamente porre $h_1 = g_1$. In questo caso $\alpha^{1,t} = 0$ per ogni $t > 1$ e $\hat{f}$ assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti* $\lambda_j \in \mathbb{C}$:

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} \sum_{t=2}^{r} \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^{t} h_t \otimes \left[ \sum_{j=2}^{m} \alpha^{j,t}\, c_j \right]\,.$$

Ma questo implica che $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ coincide con $\langle h_2, \ldots, h_r \rangle$, da cui

$$\mathrm{rk}\, \hat{f} \geq \mathrm{rk}\, \hat{f}_3 = r - 1\,.$$

□

**Corollario 1.15.** *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$, e sia $f$ un tensore $C$-conciso. Fissato un sottospazio $W$ di $C^*$, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod 0\ 0\ f_3(W)) + \dim W\,,$$

*e l'uguaglianza si ottiene se $f(W)$ è generato da tensori di rango 1.*

*Dimostrazione.* Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a $\dim W$. $\square$

**Corollario 1.16.** *Se $f \in A \otimes B \otimes C$ è conciso, e $U \subseteq A^*$, $V \subseteq B^*$, $W \subseteq C^*$ sono sottospazi, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod f(U)\ f(V)\ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W\,,$$

*e se $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$ sono generati da tensori dai rango 1, vale l'uguaglianza.*

# 2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

**Definizione 2.1.** Dato un gruppo $G$, un $G$-modulo è, in questo contesto, un $\mathbb{C}[G]$-modulo nel senso dell'algebra commutativa.

**Definizione 2.2.** Se $G$ agisce su un $\mathbb{C}$-spazio $V$ e $W$ (tramite un morfismo $G \underset{\rho}{\to} GL(V)$)

(i) $G$ agisce su $V^*$ via $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^\dagger$;

(ii) $G$ agisce su $V \oplus W$ via $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$;

(iii) $G$ agisce su $V \otimes W$ via $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

**Definizione 2.3.** L'algebra tensoriale $(TV, \otimes)$ è definita come

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}\,.$$

Vogliamo definire *l'algebra simmetrica.*

**Definizione 2.4.** I $d$-tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha\ \forall \sigma \in S_d\}\,,$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V\,.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica* $\pi_S$ da $TV$ in $SV$:

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\,.$$

**Proposizione 2.5.** *Lo spazio $S^dV$ è generato dall'insieme $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,d\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{d-|I|} \left[\sum_{i \in I} v_i\right]^{\otimes d},$$

e che per ogni $\alpha \in S^dV$ la somma precedente coincide con $d! \cdot \alpha$. $\square$

L'algebra $SV$ risulta effettivamente un algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico* $\odot$ su $SV$ come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta)\,.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori.* Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

**Proposizione 2.6.** *Dato un tensore $f \in S^2V$ di rango $r$, esso ammette una decomposizione della forma*

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i\,.$$

**Proposizione 2.7.** *La rappresentazione di $GL(V)$ sullo spazio vettoriale $S^2V$ è irriducibile.*

*Dimostrazione.* Sia $W \subseteq S^2V$ un $GL(V)$-sottomodulo contenente un tensore $f$ non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

con $v_1, \dots, v_r$ indipendenti.

Sia un morfismo $g \in GL(V)$ per cui $g(v_1) = 2v_1$ e $g(v_i) = v_i$ per ogni $i > 1$. Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1\,,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W$$ $\square$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico*.

**Definizione 2.8.** Il rango simmetrico di $f \in S^d V$ è

$$\mathrm{rk}_S f \coloneqq \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \cdots + v_r^{\otimes d}\}\,.$$

Sicuramente $\mathrm{rk}\, f \leq \mathrm{rk}_S f$, e vale l'uguaglianza per $d = 2$. È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon*. Nel 2017 sembra essere stato trovato un controesempio [1].

**Proposizione 2.9.** *Posto $\mathbb{C}[V]$ l'algebra delle funzioni $V \to \mathbb{C}$ generata da $V^*$, lo spazio $S^d V^*$ è isomorfo a $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_d$.*

*Dimostrazione.* La mappa che funziona è

$$\Phi \colon S^d V^* \to \mathbb{C}[V]_d\,,\ \phi \mapsto f_\phi\,,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \ldots, v)\,. \qquad \square$$

**Definizione 2.10** (Waring rank)**.** Per ogni $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_d$ il rango di Waring è

$$\mathrm{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^f + \cdots + l_r^d,\ l_i \text{ forma lineare}\}\,.$$

## Riferimenti bibliografici

[1] Y. Shitov. *A counterexample to Comon's conjecture*. 2017. `https://arxiv.org/abs/1705.08740v2`.