Introduction to Tensor Spaces
Appunti del Corso

Mirko Torresani

20 gennaio 2025

Indice

1 Fatti Introduttivi **1**

2 Algebre Tensoriali **5**

3 Decomposizione di Tensori **8**

4 Varietà Algebriche Tensoriali **9**

5 Teoria dell'Apolarità **14**

6 Grassmaniane **17**

7 Rappresentazioni **21**

Riferimenti bibliografici **24**

1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Il prodotto tensoriale $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è definito come lo spazio $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{C})$.

Definizione 1.2. Dato un tensore $f \in V \otimes W$, il suo rango $\operatorname{rk} f$ è

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{i=1}^{s} v_i \otimes w_i\}\,.$$

Proposizione 1.3. *Il rango* $\operatorname{rk} f$ *è equivalentemente definibile come*

(i) il rango del morfismo $V^* \to V$ *associato a* f*;*

(ii) posto $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$*, con* $(v_i)_i$ *e* $(w_j)_j$ *rispettive basi, il rango di* f *è il rango della matrice* $(c_{ij})_{i,j}$*.*

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

Definizione 1.4. Dato un elemento $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, il rango $\operatorname{rk} f$ è definito come

$$\operatorname{rk} f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^{s} v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se f è un vettore in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, allora f induce mappe

$$f_k \colon V_k^* \to \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger \colon \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$$

per ogni k.

Definizione 1.5. Un tensore $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ si dice V_i-conciso, o i-conciso, se f_i.

Definizione 1.6. Il multi-rango di f è definito come

$$\operatorname{mrk} f = (\operatorname{rk} f_1, \ldots, \operatorname{rk} f_d) =: (r_1, \ldots, r_d)\,,$$

dove $\operatorname{rk} f_k$ è il rango di f_k come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta $f_k^\dagger$).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.*

Proposizione 1.7. *Sia f un tensore, allora*

$$\max_i r_i \leq \operatorname{rk} f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

Dimostrazione. Sia r il rango di f, e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}\,.$$

L'immagine della funzione trasporta $f_k^\dagger$, da $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \to V_k$, è contenuta nel generato $\langle v_{k,1}, \ldots, v_{k,r}\rangle$, e quindi l'immagine ha dimensione ha al più dimensione r.

Se $\{u_{i,1}, \ldots, u_{i,r_i}\}$ è una base per l'immagine di $f_i^\dagger$, allora f si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1,\ldots,j_d}\, u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni k

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[\sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1,\ldots,j_d} u_{k,j_k}\right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}\,.$$

Conseguentemente per ogni k, il rango r è al più $\prod_{i \neq k} r_i$. $\square$

Corollario 1.8. *Se* $\operatorname{rk} f = 1$*, allora* $\operatorname{rk} f_k = 1$ *per ogni* k*.*

Corollario 1.9. *Fissato un certo* k*, se* $r_j = 1$ *per ogni* $j \neq k$ *allora* $\operatorname{rk} f_k = \operatorname{rk} f = 1$*.*

Proposizione 1.10. *Sia* f *un tensore 1-conciso, tale che* $r_1 \geq \cdots \geq r_d$ *e che* $\operatorname{rk} f = r_1$*. Allora* $f_1(V_1^*)$ *è generato precisamente da* r_1 *tensori indecomponibili in* $V_2 \otimes \cdots \otimes V_d$*.*

Dimostrazione. Sappiamo che $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger \colon \bigotimes_{i>1} V_i^* \to V_1$$

è generata da $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$. Siccome il rango di f_1, e quindi quello di $f_1^\dagger$, è per ipotesi r_1, quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore f è 1-conciso, e quindi f_1 è iniettivo. In definitiva, $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$ e $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}\}$ formano una base di V_1.

Consideriamo quindi la base duale $\{v_1^1, \ldots, v_1^{r_1}\}$ di V_1^*. Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \ldots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1,\ldots,r_1} . \qquad \square$$

Come non-esempio consideriamo $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, ed il tensore

$$f \coloneqq e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_0 .$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle .$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre, $\operatorname{mrk} f$ è $(2, 2, 2)$. Conseguentemente, $\operatorname{rk} f = 3$ come ci si può immaginare.

Proposizione 1.11. *Sia* $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$*. Il rango di* f *coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene* $f_1(V_1^*)$*.*

Dimostrazione. Se r è il rango di f, allora f si scrive come $\sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$ e conseguentemente $f_1(V_1^*)$ è contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$.

D'altra parte, supponiamo che $f_1(V_1^*)$ sia contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$. Fissiamo una base $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,m}\}$ di V_1, ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i}\, v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \quad 1 \leq k \leq r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i}\, v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} . \qquad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

Definizione 1.12. Siano A, B e C tre spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Inoltre sia $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base di A, e sia V un sottospazio di $B \otimes C$ con base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Una *modificazione* di $f \in A \otimes B \otimes C$ è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j \,.$$

Analogo per V in $A \otimes B$ o in $A \otimes C$.

Definizione 1.13. Dato $V_1 \subseteq B \otimes C$, $V_2 \subseteq A \otimes C$ e $V_3 \subseteq A \otimes B$ il *rango minimale modulo tre sottospazi* V_1, V_2 *e* V_3 è

$$\operatorname{minrk}(f \mod V_1\ V_2\ V_3) \coloneqq \min\{\operatorname{rk} \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}\,.$$

Proposizione 1.14. *Sia* $f \in A \otimes B \otimes C$ *un tensore conciso di rango* r*, e poniamo* $f = \sum_{k=1}^m g_k \otimes c_k$ *con* $g_i \in A \otimes B$ *e* $\{c_1, \dots, c_m\}$ *una base di* C*. Se* $g_1 \neq 0$*, esistono constanti* $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^{\perp})^*$$

ha rango al più $r-1$*. Se* $\operatorname{rk} g_1 = 1$*, allora* $\hat{f}$ *ha rango almeno* $r-1$ *qualunque siano le costanti.*

Dimostrazione. Sappiamo che esistono $h_1, \dots, h_r$, tensori di rango 1 in $A \otimes B$, che generano uno spazio contenente $f_3(C^*)$. Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t}\, h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j \,.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità, $\alpha^{1,1} \neq 0$, e porre $\lambda_j \coloneqq \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \sum_{j=2}^{m} (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\
&= \sum_{j=2}^{m} \left[\alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}}\, \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\
&= \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{t=2}^{r} \left(\alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1}\alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j
\end{aligned} \quad .$$

Ergo $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ è contenuto in $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$, che uno span di tensori di rango 1. Quindi $\hat{f}$ ha rango al più $r-1$.

Se il rango di $g_1 \in A \otimes B$ è 1, allora possiamo tranquillamente porre $h_1 = g_1$. In questo caso $\alpha^{1,t} = 0$ per ogni $t > 1$ e $\hat{f}$ assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti* $\lambda_j \in \mathbb{C}$:

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^{m} \sum_{t=2}^{r} \alpha^{j,t}\, h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^{t} h_t \otimes \left[\sum_{j=2}^{m} \alpha^{j,t}\, c_j \right] .$$

Ma questo implica che $\hat{f}_3(c_1^{\perp})$ coincide con $\langle h_2, \ldots, h_r \rangle$, da cui

$$\operatorname{rk} \hat{f} \geq \operatorname{rk} \hat{f}_3 = r - 1 .$$ □

Corollario 1.15. *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$, e sia f un tensore C-conciso. Fissato un sottospazio W di C^*, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod 0\ 0\ f_3(W)) + \dim W ,$$

e l'uguaglianza si ottiene se $f(W)$ è generato da tensori di rango 1.

Dimostrazione. Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a $\dim W$. □

Corollario 1.16. *Se $f \in A \otimes B \otimes C$ è conciso, e $U \subseteq A^*$, $V \subseteq B^*$, $W \subseteq C^*$ sono sottospazi, allora*

$$\operatorname{rk} f \geq \operatorname{minrk}(f \mod f(U)\ f(V)\ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W ,$$

e se $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$ sono generati da tensori dai rango 1, vale l'uguaglianza.

2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

Definizione 2.1. Dato un gruppo G, un G-modulo è, in questo contesto, un $\mathbb{C}[G]$-modulo nel senso dell'algebra commutativa.

Definizione 2.2. Se G agisce su un $\mathbb{C}$-spazio V e W (tramite un morfismo $G \underset{\rho}{\to} GL(V)$)

(i) G agisce su V^* via $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^{\dagger}$;

(ii) G agisce su $V \oplus W$ via $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$;

(iii) G agisce su $V \otimes W$ via $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

Definizione 2.3. L'algebra tensoriale $(TV, \otimes)$ è definita come

$$TV \coloneqq \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d} .$$

Vogliamo definire *l'algebra simmetrica.*

Definizione 2.4. I d-tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha \ \forall \sigma \in S_d\}\,,$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V\,.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica* π_S da TV in SV:

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\,.$$

Proposizione 2.5. *Lo spazio $S^d V$ è generato dall'insieme $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,d\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{d-|I|} \left[\sum_{i \in I} v_i\right]^{\otimes d}\,,$$

e che per ogni $\alpha \in S^d V$ la somma precedente coincide con $d! \cdot \alpha$. □

L'algebra SV risulta effettivamente un algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico* $\odot$ su SV come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta)\,.$$

Osservazione. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V, una base di $S^d V$ è data da

$$\mathcal{B}_{S^d V} = \{v_{j_1} \odot \cdots \odot v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim S^d V = \binom{n+d-1}{d}\,.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori.* Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

Proposizione 2.6. *Dato un tensore $f \in S^2 V$ di rango r, esso ammette una decomposizione della forma*

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i\,.$$

Proposizione 2.7. *La rappresentazione di $GL(V)$ sullo spazio vettoriale $S^2 V$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia $W \subseteq S^2V$ un $GL(V)$-sottomodulo contenente un tensore f non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

con $v_1, \dots, v_r$ indipendenti.

Sia un morfismo $g \in GL(V)$ per cui $g(v_1) = 2v_1$ e $g(v_i) = v_i$ per ogni $i > 1$. Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1\,,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W \qquad \square$$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico.*

Definizione 2.8. Il rango simmetrico di $f \in S^dV$ è

$$\operatorname{rk}_S f \coloneqq \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \dots + v_r^{\otimes d}\}\,.$$

Sicuramente $\operatorname{rk} f \le \operatorname{rk}_S f$, e vale l'uguaglianza per $d = 2$. È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon.* Nel 2018 Shitov [2] ha pensato di trovare un controesempio, smentito da sé stesso nel 2024 [1].

Proposizione 2.9. *Posto $\mathbb{C}[V]$ l'algebra delle funzioni $V \to \mathbb{C}$ generata da V^*, lo spazio S^dV^* è isomorfo a $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$.*

Dimostrazione. La mappa che funziona è

$$\Phi\colon S^dV^* \to \mathbb{C}[V]_d\,,\ \phi \mapsto f_\phi\,,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \dots, v)\,. \qquad \square$$

Definizione 2.10 (Waring rank)**.** Per ogni $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$ il rango di Waring è

$$\operatorname{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^d + \dots + l_r^d,\ l_i \text{ forma lineare}\}\,.$$

Definizione 2.11. I d-tensori antisimmetrici sono

$$\Lambda^dV \coloneqq \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \operatorname{sgn}(\sigma)\,\alpha\ \forall \sigma \in S_d\}\,,$$

e l'algebra antisimmetrica è

$$\Lambda V \coloneqq \bigoplus_{d \ge 0} \Lambda^dV\,.$$

Definiamo la proiezione antisimmetrica π_Λ come

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} \,.$$

Analogamente a quanto fatto prima definiamo il prodotto antisimmetrico (o *wedge*) come

$$\alpha \wedge \beta \coloneqq \pi_\Lambda(\alpha \otimes \beta) \,.$$

Proposizione 2.12. *Un insieme finito $v_1, \ldots, v_d$ è linearmente indipendente se e solo se*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0 \,.$$

Corollario 2.13. *Una base $\mathcal{B}_{\Lambda^d V}$ di $\Lambda^d V$ è*

$$\mathcal{B}_{\Lambda^d V} = \{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\}_{1 \le j_1 < \cdots < j_d \le n}$$

e quindi

$$\dim \Lambda^d V = \binom{n}{d} \,.$$

Proposizione 2.14. *Lo spazio $\Lambda^2 V$ è un $GL(V)$-modulo irriducibile.*

3 Decomposizione di Tensori

Dati due spazi A, B, lo spazio $G \coloneqq GL(A) \times (B)$ è incluso in $GL(A \otimes B)$. Dei teoremi di semplice decomposizione sono dati dai seguenti.

Proposizione 3.1. *Lo spazio $S^2(A \otimes B)$ si G-decompone come*

$$S^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes S^2 B) \oplus (\Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B) \,.$$

Ed allo stesso modo $\Lambda^2(A \otimes B)$ si G-decompone come

$$\Lambda^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \oplus (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \,.$$

Gli elementi di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ si decompongono in $(GL_2(\mathbb{C}))^3$-orbite secondo la seguente tabella:

orbita	r_1	r_2	r_3	$\operatorname{rk} f$	rappresentante
A	1	1	1	1	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0$
B_1	1	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1$
B_2	2	1	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1$
B_3	2	2	1	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
W	2	2	2	3	$a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
G	2	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$

4 Varietà Algebriche Tensoriali

Definizione 4.1. Sia $Z \subseteq \mathbb{P}V$ un sottoinsieme dello spazio proiettivo su V. Il *cono affine* è $\hat{V} \coloneqq \pi^{-1}(Z)$, con π la proiezione proiettiva.

Definizione 4.2. Se X l'insieme di zeri comuni di $S \subseteq S^{\bullet}V^*$, allora poniamo $X \coloneqq Z(S)$.

Definizione 4.3. Viceversa, dato $A \subseteq \mathbb{P}V$,

$$I(A) \coloneqq \{F \in S^{\bullet}V^* \mid F(a) = 0 \ \forall a \in \hat{A}\}$$

è *l'ideale di* A.

Definizione 4.4. L'embedding di Segre è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{Seg}\colon \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B &\to \mathbb{P}(A \otimes B) \\ ([a],[b]) &\mapsto [a \otimes b] \end{aligned}$$

L'immagine è data dalla proiezione delle matrici $\dim A \times \dim B$ di rango 1, cioè dal luogo di zeri di $\Lambda^2 A^* \otimes \Lambda^2 B^* \subseteq S^2(A \otimes B)$.

Proposizione 4.5. *In generale l'analoga mappa da* $\mathbb{P}A_1 \times \cdots \times \mathbb{P}A_n$ *a* $\mathbb{P}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$ *dà come immagine un'insieme chiuso.*

Definizione 4.6. La d-mappa di Veronese è

$$\begin{aligned} v_d\colon \mathbb{P}V &\to \mathbb{P}(S^d V) \\ [a] &\mapsto [a^{\otimes d}] \end{aligned}$$

L'immagine è costituita da $\mathrm{Seg}((\mathbb{P}V)^n) \cap \mathbb{P}(S^d V)$, e quindi è una varietà proiettiva.

Definizione 4.7. Data una mappa f da V in sé, $f^{\wedge m}$ è la naturale endomorfismo di $\Lambda^m V$. Se $m = \dim V$, $f^{\wedge m}$ è la moltiplicazione per $\det(f)$.

Definizione 4.8. La Grasmanniana è

$$\mathrm{Gr}(r, V) \coloneqq \{[v_1 \wedge \cdots \wedge v_r] \mid v_f \in V\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^r V).$$

Osserviamo che nel proiettivo un tale prodotto wedge è insensibile a cambi di base del sottospazio generato. La Grassmaniana parametrizza quindi i sottospazi

Definizione 4.9. Per ogni $\phi \in V^*$ e $v \in V$, definiamo $\phi \lrcorner v \coloneqq \phi(v)$. Per induzione se $\phi \in V^*$, $v \in V$ e $f \in \Lambda^k V$ imponiamo

$$\phi \lrcorner (v \wedge f) \coloneqq (\phi \lrcorner v) \wedge f - v \wedge (\phi \lrcorner f)\,.$$

Infine imponiamo $(\phi \wedge g) \lrcorner f \coloneqq \phi \lrcorner (g \lrcorner f)$.

Proposizione 4.10. *$f \in \Lambda^r V$ può essere scritta come un prodotto wedge $w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$ se e solo se*
$$(\psi \lrcorner f) \wedge f = 0 \;\forall \psi \in \Lambda^{r-1} V^*$$

In particolare, se
$$f = p_{i_1 \dots i_r} v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_r}$$
allora l'equazione diventa
$$\sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k p_{i_1 \dots i_{r-1} j_k}\, p_{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \cdots j_{r+1}} = 0\,,$$
per ogni scelta di multiindici $(i_1, \dots, i_k)$ e $(j_1, \dots, j_k)$. Avendo ottenuto una equazione polinomiale, $\mathrm{Gr}(r, V)$ è una varietà proiettiva.

Parliamo ora di spazi tangenti.

Definizione 4.11. Sia $M \subseteq V$ un sottoinsieme e $v \in V$. Allora
$$\hat{T}_v M \coloneqq \left\{ \frac{d\gamma}{dt}\bigg|_{t=0} \mid \gamma \colon \mathbb{C} \to M \text{ curva liscia} \right\}$$
è lo spazio tangente.

Osserviamo che lo spazio tangente su v o su λv rimane invariato per $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Definizione 4.12. Sia $X \subseteq \mathbb{P}V$ una varietà proiettiva. Un punto $v \in X$ si dice liscio se esiste un insieme aperto U (di Zarinksi) su cui lo spazio tangente $\hat{T}_w X$ ha la stessa dimensione per ogni $w \in U$. L'insieme dei punti singolari è un chiuso proiettivo.

Poniamo quindi
$$\dim X \coloneqq \dim(\hat{T}_v X) - 1$$
con v un punto liscio.

Proposizione 4.13. *Vale che*
$$\hat{T}_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_d} \operatorname{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_d) = \sum_{j=1}^{d} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes V_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_d\,.$$

Proposizione 4.14. *Analogamente vale che*
$$\hat{T}_{[v^{\otimes d}]} v_d(\mathbb{P}V) = \{[v^{\otimes (d-1)} \otimes w] \mid w \in V\}\,.$$

Parliamo ora di orbite. Sulle nostre varietà proiettive facciamo agire $G \coloneqq SL(V)$. È il rivestimento universale (di grado finito) di $PGL(V)$.

Proposizione 4.15 (Borel)**.** *Se un'azione è algebrica, allora per ogni orbita $\mathcal{O}$ la sua chiusura è ancora G-invaiante e*
$$\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{\textit{orbite di dimensione minore}\}.$$

Conseguentemente, le orbite di dimensione minore sono chiuse, e se l'azione è irriducibile, essa è unica.

In questa ottica delle azioni, guardiamo alle tre varietà di prima.

(i) Dato l'embedding di Veronese v_d, esso è G-equivariante, e la sua immagine è *l'orbita chiusa* per l'azione di G su $\mathbb{P}(S^d V)$.

(ii) Per quanto riguarda, l'embedding di Segre, l'immagine è l'orbita chiusa per l'azione di $SL(V_1) \times \cdots \times SL(V_d)$.

(iii) Possiamo anche considerare varietà di Segre-Veronese denntro

$$\mathbb{P}(S^{a_1} V \otimes \cdots \otimes S^{a_d} V)$$

(iv) Le varietà di Grassmann *proiettive*, indicate come $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}V)$, possiedono delle naturali coordinate di Plücker che le immergono dentro $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1} V)$.

Parliamo ora di *varietà secanti*. Iniziamo ora con delle definizioni.

Definizione 4.16. Siano X e Y sottoinsiemi di $\mathbb{P}(W)$. Il Join è definito come

$$J(X, Y) := \overline{\bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \langle x, y \rangle}$$

La chiusura serve per prendere anche le tangenti come limite di secanti.

Se $X = Y = v_3(\mathbb{P}\mathbb{C}^2)$, dato in coordinate come ($\dim_{\mathbb{C}} S^3 \mathbb{C}^2 = 4$)

$$[x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, 3x_0^2 x_1, 3x_0 x_1^2, x_1^3] \,,$$

allora X prende il nome di *cubica gobba*. Studiamo ora l'azione di SL_2 su $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$. Abbiamo tre orbite che sono

$$X, \ \mathrm{Tan}(X) \setminus X, \ \mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \mathrm{Tan}(X)$$

Se $f \in S^3 \mathbb{C}^2$, allora può essere pensato come un polinomio omogeneo cubico in x_0 e x_1. Su $\mathbb{C}$ ricade in tre casistiche

(i) f una radice tripla, e appartiene a X.

(ii) f ha una radice singola ed una doppia, ed appartiene a $\mathrm{Tan}(X) \setminus X$;

(iii) f ha tre radici singole, ed appartiene a $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \mathrm{Tan}(X)$.

Può essere dimostrato che $X \cup (\mathbb{P}(S^2 \mathbb{C}^3) \setminus \mathrm{Tan}(X))$ coincide esattamente con l'unione delle secanti. Detto altrimenti, $J(X, X)$ è tutto lo spazio $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$.

Definizione 4.17. La varietà secante è data da

$$\sigma_k(X) := J(X, \ldots, X) \,.$$

Abbiamo quindi una catena ascendente

$$X \subseteq \sigma_1(X) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_{p_0}(X) = \mathbb{P}(W)\,.$$

Se consideriamo X come $\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$ dentro $\mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$, allora

$$\sigma_r(X) = \{f \in \mathrm{Hom}(V_1^\vee, V_2) \mid \mathrm{rk}\, f \leq r\}\,,$$

in quanto ogni matrice di rango r (in senso matriciale) può essere scritta come somma di matrici di rango 1.

Si può dimostrare che la chiusura di Zarinksky di

$$\{f \in \mathrm{Hom}(V_1^\vee, V2) \mid \mathrm{rk}\, f = r\}$$

coincide precisamente con $\sigma_r(X)$. Questo recupera il risultato di Borel.

Consideriamo ora il caso $X = v_d(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$, con $d \geq 3$.

Per $d = 3$ siamo di fronte alla cubica gobba. Se supponiamo di proiettare questa cubica su un piano, usando un generico punto $p \notin X$ come fuoco, osserviamo che la proiezione ha un nodo precisamente se p è in una secante, o ha una cuspide precisamente quando p sta in una tangente. Ma una cubica in un piano può solo avere un nodo. Quindi se p sta su una secante, essa è unica. Analogamente se $p \notin X$ sta su una tangente essa è unica. Si può provare, come già detto, che $\sigma_2(X) = \mathbb{P}^3\mathbb{C}\,.$

Per $d = 4$ stiamo guardando l'immersione di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^4\mathbb{C}$. In questo caso abbiamo infinite SL_2-orbite, in quanto quattro radici non possono essere generalmente portate una dentro l'altra. La catena secante è della forma

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \sigma_3(X) = \mathbb{P}^4$$

Capiamo l'equazione di $\sigma_2(X)$. Sia

$$S^2\mathbb{C}^{2\vee} = \{\alpha_0\partial_0^2 + 2\alpha_1\partial_0\partial_1 + \alpha_2\partial_1^2\}$$

e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f \colon S^2\mathbb{C}^{2\vee} &\to S^2\mathbb{C}^2 \\ \partial &\mapsto \partial f \end{aligned}$$

con $f \in S^4\mathbb{C}^2$.

Sia ℓ una forma lineare. Allora l'immagine di $\mathcal{C}_{\ell^4}$ è $\mathbb{C}$-generata da ℓ^2 ed ha dimensione 1. Inoltre,

$$\mathcal{C}_{\lambda f + \mu g} = \lambda\mathcal{C}_f + \mu\mathcal{C}_g$$

e quindi se ℓ_1, ℓ_2 sono due forme lineari, allora

$$\mathrm{rk}\, \mathcal{C}_{\lambda_1\ell_1^4 + \lambda_2\ell_2^4} \leq 2\,.$$

Quindi la mappa precedente ha sempre determinante nullo, in quando $\dim S^2\mathbb{C}^2 = 3$.

Conseguentemente, la varietà $\sigma_2(X)$ è contenuta in $V(\det \mathcal{C}_f)$. Inoltre vale l'uguaglianza in quanto $\det \mathcal{C}_f$ è un polinomio cubico irriducibile.

Inoltre, SL_2 agisce su $S^4\mathbb{C}^2$, e quindi su

$$\bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2)\,.$$

Proposizione 4.18. *Il sottoanello*

$$\left[\bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2)\right]^{SL_2} \subseteq \bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2)$$

è un anello polinomiale completo: $\mathbb{C}[I,J]$, *con* $\deg I = 2$ *e* $\deg J = 3$. *Questo fatto (mi fido) è molto raro in teoria degli invarianti. Inoltre come varietà algebrica è* $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, *oltre ad essere liscia. A meno di multipli scalari* $J = \det \mathcal{C}_f$.

Lemma 4.19. $\dim \sigma_r(X) \leq r\,\dim(X) + (r-1)$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\sigma^r(X) \coloneqq \{(x_1,\dots,x_r,y) \mid y \in \langle x_1,\dots,x_r\rangle\}$$

dentro

$$X \times \cdots \times X \times \mathbb{P}W$$

E consideriamo le due mappe

$$X \times \cdots \times X \xleftarrow{\pi_1} \sigma^r(X) \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}W\,.$$

Notiamo che $\pi_2(\sigma^r(X)) = \sigma_r(X)$, e che π_1 è suriettiva con fibra generica $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$. Conseguentemente

$$\begin{aligned}\dim \sigma_r(X) \leq \dim \sigma^r(X) &= \dim(\text{Fibra}) + \dim(X \times \cdots \times X)\\ &= (r-1) + r\dim(X)\,.\end{aligned}$$ □

Si postula che valga l'uguaglianza.

Definizione 4.20. X si dice essere $(h+1)$-difettivo se $\sigma_{h+1}X$ ha dimensione minore del minimo tra X e la stima del teorema precedente.

Lemma 4.21 (Terracini)**.** *Se* $x_i \in X_i$ *sono punti generici, e* $p \in \langle x_1,\dots,x_{h+1}\rangle$ *è generico, allora*

$$T_pJ(X_1,\dots,X_{h+1}) = \langle T_{x_1}X_1,\dots,T_{x_{h+1}}X_{h+1}\rangle\,.$$

Sia ora $X \subseteq \mathbb{P}^N$, e $p \in \mathbb{P}^N$

Definizione 4.22. Il rango $\mathrm{rk}_X(p)$ è definito come

$$\mathrm{rk}_X(p) = \min\{h+1 \mid p \in \langle x_1,\dots,x_{h+1}\rangle\}\,.$$

Definizione 4.23. Il rango di bordo $\mathrm{brk}_X(p)$ è definito come

$$\mathrm{brk}_X(p) = \min\{h+1 \mid p \in \sigma_{h+1}(X)\}\,.$$

Ovviamente $\mathrm{brk}_X(p)$ è minore di $\mathrm{rk}_X(p)$.

Se $X = v_d(\mathbb{P}V) = \{\ell^{\otimes d} \mid \ell \in \mathbb{P}V\}$ in $\mathbb{P}(S^d V)$, allora stiamo sostanzialmente guardando al rango simmetrico.

Se $X' = \mathbb{P}V \times \cdots \times \mathbb{P}V$ dentro $\mathbb{P}(V^{\otimes d})$, stiamo guardando al rango normale.

Siccome $v_d(\mathbb{P}V)$ coincide con $X' \cap \mathbb{P}(S^d V)$, allora ogni elemento di $\mathbb{P}(S^d V)$ ha due ranghi. È una congettura se sono uguali.

Inoltre, è sicuramente vero che

$$\sigma_{h+1}(v_d(\mathbb{P}V)) \subseteq \mathbb{P}(S^d V) \cap \sigma_{h+1}(X')\,.$$

È una congettura se valga l'uguaglianza.

Benché il Prof. Ottaviani abbia messo delle note, queste ultime sono così incomprensibili che ho deciso conmunque di continuare le note.

5 Teoria dell'Apolarità

Sia $K = \mathbb{C}$, e sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$. Inoltre, siano

$$R = K[x_0, \dots, x_n] \simeq S^\bullet V, \quad S = K[\partial_0, \dots, \partial_n] \simeq S^\bullet V^\vee$$

L'anello R ha un unico ideale massimale omogeneo: $\mathfrak{M} = (\partial_0, \dots, \partial_n)$. Inoltre, S agisce su R additivamente tramite la ovvia azione che indichiamo con $\cdot$.

D'ora in poi useremo la notazione a multiindice.

Lemma 5.1. *Se α e β sono multiindici tali che $|\alpha| = |\beta|$, allora*

$$\partial^\alpha \cdot x^\beta = \begin{cases} \alpha! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Corollario 5.2. *L'accoppiamento tra $S^d V^\vee$ e $S^d V$ è una dualità, e $S^d V^\vee$ è isomorfo a $(S^d V)^\vee$.*

Lemma 5.3. *Se $g \in S_d$, e $\ell = \sum c_i x_i$, allora*

$$g \cdot \ell^d = d!\, g(c_0, \dots, c_n)$$

Dimostrazione. Usando la notazione a multiindice, possiamo notare semplicemente che

$$g \cdot \ell^d = g \cdot \left[\sum_{|\alpha|=d} c^\alpha x^\alpha \binom{d}{\alpha} \right] = \sum_{|\alpha|=d} g_\alpha c^\alpha \alpha! \binom{d}{\alpha}$$

che coincide esattamente con $d!\, g(c_0, \dots c_n)$. □

Definizione 5.4. Dato $f \in S^d V = R_d$, *l'ideale apolare* è definito come

$$f^\perp = \{g \in S \mid g \cdot f = 0\}\,.$$

Definizione 5.5. Una R-algebra S, con R un anello, è detta Artiniana se R è Artiniano e se S è un R-modulo finitamente generato. In particolare, se R è un campo stiamo chiedendo che $\dim_R S$ sia finito.

Proposizione 5.6. *(i) $f^\perp$ è un ideale omogeneo (i.e. è un sottomodulo graduato).*

(ii) il zoccolo $(f^\perp)_d$ *ha K-codimensione 1.*

(iii) Se $k > d$, allora $(f^\perp)_k = S^k V^\vee$.

(iv) L'algebra graduata

$$A_f \coloneqq SV^\vee/(f^\perp) = \bigoplus_{e=0}^{\infty} S^e V^\vee/(f^\perp)_e\,.$$

è un'algebra Artiniana.

Proposizione 5.7. *Sia $f \in S^d V$. Allora per ogni $e < d$ vale che*

$$(f^\perp)_e = [(f^\perp)_d \colon \mathfrak{M}^{d-2}]_e = \{g \in S_e \mid \forall h \in \mathfrak{M}^{d-e}\ (gh) \cdot f = 0\}\,.$$

Dimostrazione. L'inclusione $\boxed{\subseteq}$ è immediata.

Per quanto riguarda l'inclusione $\boxed{\supseteq}$, sia $g \in [(f^\perp)_d \colon \mathfrak{M}^{d-e}]$ per cui $(g\partial^\alpha) \cdot f = 0$ per ogni $|\alpha| = d - e$. Siccome S è un anello commutativo, allora

$$(g\partial^\alpha) \cdot f = (\partial^\alpha\, g) \cdot f = \partial^\alpha \cdot (g \cdot f)\,,$$

e per il Lemma 5.1, sappiamo che tutti i coefficienti di $g \cdot f \in S_{d-e}$ sono zero. Conseguentemente, $g \cdot f = 0$, i.e. g appartiene a $(f^\perp)_e$. $\square$

Proposizione 5.8. *Sia $f \in S^d V$ e sia $e \in \{0, \dots, d\}$. La moltiplicazione*

$$(A_f)_e \times (A_f)_{d-e} \to (A_f)_d \simeq \mathbb{C}$$

è una dualità perfetta.

Dimostrazione. Dimostriamo che la componente di sinistra è non-degenere. Per simmetria lo stesso risultato vale anche per l'altra componente.

Sia $[t] \in (A_f)_e$, tale che $[tu] = 0$ in $(A_f)_f$ per ogni $u \in (A_f)_{d-e}$. In particolare, tu appartiene a $(f^\perp)_d$ per ogni $u \in \mathfrak{M}^{d-e} \subseteq S_{d-e}$. Ergo, t appartiene a $[(f^\perp)_d \colon \mathfrak{M}^{d-e}]_e$. La precedente proposizione implica quindi che t appartiene a $(f^\perp)_e$, i.e. $[f] = 0$ in $(A_f)_e$. $\square$

La precedente proposizione ci dice che l'algebra è un'algebra di Gorestein.

Siano $Z = \{[\ell_1], \dots, [\ell_r]\} \subseteq \mathbb{P}V$, con $\deg \ell_i = 1$.

Lemma 5.9 (Apolarità). *f coincide con $\sum \ell_i^d$ se e solo se I_Z è contenuto in $f^\perp$.*

Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, allora il lemma precedente diventa come segue.

Lemma 5.10 (Apolarità per forme bilineari). *Sia $f \in \mathbb{C}[x,y]$, e siano $(\alpha_i : \beta_i)$ punti distinti in $\mathbb{P}^1$, allora*

$$\left[\prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y\right] \cdot f = 0 \;\Leftrightarrow\; f = \sum_i c_i(\alpha_i x + \beta_i y)^d$$

Dimostrazione. Posto

$$Z = \{[\alpha_1 x + \beta_1 y], \ldots, [\alpha_k x + \beta_k y]\},$$

allora il risultato segue dal Lemma di Apolarità una volta provato che

$$I_Z = ((\beta_1 \partial_x - \alpha_1 \partial_y) \cdot \cdots \cdot (\beta_k \partial_x - \alpha_k \partial_y)).$$

Sicuramente l'ideale proposto, che denotiamo con J, è contenuto in I_Z.

D'altra parte, sia $g \in I_Z$ omogeneo. Allora g ha (α_i, β_i) come radici: per il Lemma 5.3

$$d!g(\alpha_i, \beta_i) = g \cdot (\alpha_i x + \beta_i y) = 0. \tag{1}$$

per ogni $i = 1, \ldots, k$. Ma sappiamo che in due variabili vale un teorema di circa-Ruffini. Detto altrimenti, da (1) sappiamo che il polinomio

$$\prod_{i=1}^k \beta_1 \partial_x - \alpha_1 \partial_y$$

divide g. □

Una versione più generale, che introduce delle molteplicità, è data dall'enunciato seguente.

Proposizione 5.11. *Sia $f \in \mathbb{C}[x,y]_d$, e siano $(\alpha_i : \beta_i)$, $i = 1, \ldots, k$, punti di $\mathbb{P}^1$. Allora*

$$\left[\prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y\right] \cdot f = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \exists c_i(c,y) \in \mathbb{C}[x,y]_{m_i - 1} \;\; t.c. \;\; f = \sum c_i(x,y)(\alpha_i x + \beta_i y)^{d - m_i + 1}$$

Dimostrazione. La dimostrazione, in teoria data in classe, è incomprensibile. □

Definizione 5.12. Se S è un anello $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduato, allora un ideale I *riempe l'anello in grado k* se I contiene S_k.

Lemma 5.13. *Siano ϕ_1, ϕ_2 in $\mathbb{C}[x,y] = S$ due polinomi senza fattori in comune.*

(i) L'ideale $I = (\phi_1, \phi_2)$ riempe l'anello R in gradi maggiori o uguali di $\deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$. Inoltre, I ha codimensione 1 in grado $d \coloneqq \deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$.

(ii) I_e coincide con $[I_d \colon \mathfrak{M}^{d-e}]_e$.

Dimostrazione. Sia $d_i \coloneqq \deg \phi_i$, e consideriamo la sequenza corta

$$0 \to S \to S \oplus S \to I \to 0$$

$$\beta \mapsto (-\beta\phi_2, \beta\phi_1)$$

$$(a, b) \mapsto a\phi_1 + b\phi_2$$

Siccome ϕ_1 e ϕ_2 non hanno fattori in comune, la sequenza precedente è esatta.

Conseguentemente, preso un certo polinomio $g \in S$ di grado $t \geq d_1 + d_2 - 1$, allora $\square$

Teorema 5.14. *L'ideale $f^\perp$ ha sempre due generatori.*

Teorema 5.15 (Lemma di Apolarità – Versione Schematica)**.** *Sia $Z \subseteq \mathbb{P}V$ una un sottoschema chiuso zero-dimensionale, con ideale vanescente $I(Z) \subseteq S(V^\vee)$, e sia $v_d \colon \mathbb{P}v \to \mathbb{P}(S^d V)$ l'embedding di Veronese. Allora, per $f \in S^d V \setminus \{0\}$,*

$$I_Z \subseteq f^\perp \;\Rightarrow\; [f] \in \overline{v_d(Z)}\,,$$

dove $\overline{v_d(Z)}$ è la chiusura di Zarinsky di $v_d(Z)$ in $\mathbb{P}(S^d V)$.

6 Grassmaniane

Fissiamo un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale V di dimensione $n+1$.

Definizione 6.1. La Grassmanniana $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$, i.e. la varietà dei sottospazi di V di dimensione $k+1$, viene identificata con i prodotti wedge indecomponibili in $\Lambda^{k+1} V$.

Ricordiamo il risultato noto.

Proposizione 6.2. *La varietà $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ ha la struttura di varietà liscia, ed ha dimensione $(k+1)(n-k)$.*

Fissiamo una base $e_0, \ldots, e_n$ per V, in modo da avere una identificazione canonica $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$.

Consideriamo un sottospazio $L = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ di dimensione $k+1$, ed organizziamo i vettori in righe incolonnate, via una matrice M_L in $M_{(k+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$ di rango massimo. A questo punto, possiamo osservare il seguente fatto: *due embedding $\mathbb{C}^{k+1} \xrightarrow{i,j} V$ danno la stessa immagine se e solo se esiste una trasformazione $g \in GL_{k+1}\mathbb{C}$ per cui $i = jg$.*

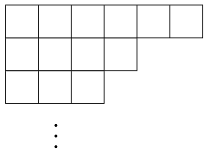
Conseguentemente, moltiplicare la matrice M_L a sinistra per un elemento di $GL_{k+1}(\mathbb{C})$ non cambia lo spazio generato dalle righe (trasposte). Ma questa operazione coincide con una riduzione di Gauss per righe, che porta M_L in

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

In base alle possibili configurazione di questa forma, possiamo decomporre la Grassmaniana in celle affini, dette *celle di Schubert*.ù

Un modo per organizzare queste celle, in modo da avere una descrizione combinatorica, è tramite le *tabelle di Young*.

Definizione 6.3. La tabella di Young di parametri interi $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{k+1})$ è data dal diagramma seguente:

$\lambda =$ 

dove la riga i ha lunghezza λ_i.

Per futura utilità definiamo l'insieme delle tabelle di Young

$$Y_{k,n} \coloneqq \{\lambda \mid k \text{ righe ed al più } n-k \text{ colonne}\}\,.$$

Le tabelle di Young possiedono una naturale struttura ad albero, governata dalla relazione di inclusione delle une dentro le altre. Per esempio l'insieme $Y_{1,3}$ si ordine come segue:

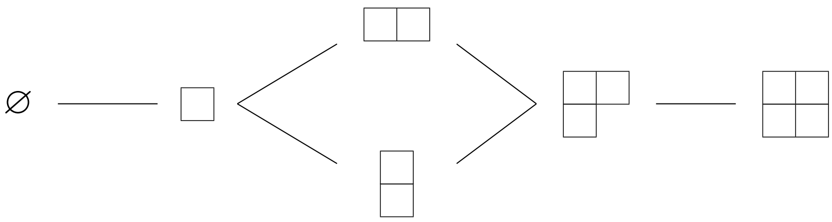


Figura 1: Tabelle di Young con al più 2 righe

Definizione 6.4. Fissiamo ora una base $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ su V, e fissiamo la filtrazione

$$F_0 \coloneqq \{0\},\ \ F_i \coloneqq \langle e_{n-i+1}, \dots, e_n \rangle\,.$$

Data una tabella di Young $\lambda \in Y_{k,n}$, la cella X_λ è definita come

$$X_\lambda \coloneqq \{L \in \mathrm{Gr}_{k+1}(V) \mid \dim(L \cap F_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i\ \forall 1 \leq i \leq k+1\}\,.$$

Essa è una *cella affine* di codimensione

$$|\lambda| \coloneqq \#\{\text{scatole in } \lambda\}\,.$$

In particolare, la cella $C_{(0,\dots,0)}$ ha dimensione massima. Se guardiamo a alla varietà di Grassmann come varietà algebrica con topologia di Zarinsky, $C_{(0,\dots,0)}$ è ancora aperto. La varietà di Grassmann è quindi una varietà algebrica particolare: possiede un sottoinsieme aperto, e quindi Zarinskyi-denso, che è anche una sottovarietà algebrica affine.

L'ordinamento delle tabelle di Young fornisce un ordinamento nelle celle della forma

$$\lambda \subseteq \mu \;\Rightarrow\; X_\lambda \supseteq X_\mu$$

Inoltre, questo ordinamento è strettamente legato alla forma di Gauss su righe ridotta: infatti, se andiamo a considerare le differenze

$$X_\lambda^0 \coloneqq X_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \subseteq \mu} X_\mu,$$

allora i differenti X_λ^0 raggruppano i diversi modi in cui si può presentare una forma di Gauss ridotta su righe di una matrice $(k+1) \times (n+1)$ di rango massimo.

Per dare maggiore chiarezza al discorso — per quanto possibile — consideriamo il caso di $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$. Essa è la varietà dei 2-sottospazi in $\mathbb{C}^4$, ed ha dimensione complessa 4. Le tabelle di Young $Y_{1,3}$ sono mostrate nella Figura 1. Le relative celle di Schubert $\{X_\lambda\}_\lambda$ sono quindi ordinate come segue:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{(2,0)} \arrow[dr, no head] & & \\
X_{(0,0)} \arrow[r, no head] & X_{(1,0)} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & X_{(2,1)} \arrow[r, no head] & X_{(2,2)} \\
 & & X_{(1,1)} \arrow[ur, no head] & &
\end{tikzcd}$$

In particolare, otteniamo un analogo diagramma se sostituiamo X_λ con X_λ^0. Quest'ultimo corrisponde alle possibili forme di Gauss ridotte per righe tramite il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[dr, no head] & & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{bmatrix} \arrow[r, no head] & \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[r, no head] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \arrow[ur, no head] & &
\end{tikzcd}$$

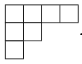
Possiamo effettivamente visualizzare il collegamento tra forma di Gauss ridotta per righe e tabelle di Young. Supponiamo di voler considerare le celle di Schubert nello spazio $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$. Le relative tabelle di Young appartengono a $Y_{k,n}$, e sono quindi tabelle contenute in una griglia $A_{k,n}$ di forma $(k+1) \times (n-k)$. Una specifica forma di Gauss ridotta avrà degli $*$, che procediamo ad allineare sul lato destro di $A_{k,n}$. Il complementare, una volta riflessa sull'asse orizzontale, sarò la relativa la tabella di Young.

Per esempio, consideriamo la forma di Gauss in $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^6)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{2,6}$ viene riempita come segue:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & * & * & * \\ \hline & & * & * \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \tag{2}$$

e quindi la tabella di Young associata a (2) è .

Parliamo ora della *coomologia della Grassmanniana*. La sua descrizione è puramente combinatorica.

Teorema 6.5. *La coomologia di* $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ *è zero in dimensione dispari, ed è*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}); \mathbb{R}) = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid \lambda \text{ ha } 2i \text{ scatole}\}|$$

in dimensione pari.

Sketch della dimostrazione. Si può dimostrare che ognuna delle celle di Schubert X^0_λ è topologicamente omeomorfa all'interno di un disco complesso $D^i_{\mathbb{C}}$, con $|\lambda| = i$. In particolare, X^0_λ è omeomorfa al disco reale $D^{2i}_{\mathbb{R}}$. Inoltre, se definiamo

$$X^{(2i)} := \bigcup_{|\lambda| = 2i} \overline{X^0_\lambda},$$

allora abbiamo una decomposizione *CW*

$$X^{(0)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(2d)}, \; d = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$$

con *celle solo* $\mathbb{R}$*-dimensione pari.* Ma a questo punto sappiamo il complesso cellulare omologico su $\mathbb{Z}$ è della forma

$$0 \to \mathbb{Z}^{a_0} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_2} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_{2d}} \to 0$$

con

$$a_{2i} = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid |\lambda| = 2i\}|\,.$$

Conseguentemente

$$H_{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{a_{2i}}$$

ed è nulla altrimenti. Per coefficienti univesali concludiamo:

$$H^{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}); \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{a_{2i}}\,. \qquad \square$$

Per il teorema dei coefficienti universali, le dimensioni di

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}); \mathbb{C})$$

con quelle precedenti.

Per esempio

$$H^i(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3); \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, 2, 6, 8 \\ \mathbb{C}^2 & i = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7 Rappresentazioni

Definizione 7.1. Dato un gruppo G, l'anello $\mathbb{C}G$ è dato dall'insieme delle somme formali

$$\{\sum \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C}\}\,.$$

Definizione 7.2. Un *tableu* con d caselle è un diagramma di Young, con d caselle, quest'ultime riempite con i numeri $1, \dots, d$. Un tableu si dice *standard* se è strettamente crescente nelle righe e nelle colonne.

Definizione 7.3. Dato un tableu λ, l'insieme delle simmetrie su riga $R_\lambda \subseteq \Sigma_d$ è l'insieme delle permutazioni su d elementi che preservano i valori sulle righe. Analogamente per C_λ, ma sulle colonne.

Definizione 7.4. Il simmetrizzatore di Young rispetto ad un tableu λ è

$$c_\lambda := \sum_{\substack{\sigma \in R_\lambda \\ \tau \in C_\lambda}} \varepsilon(\tau)\sigma\tau\,,$$

dove ε è la funzioen segno.

Per esempio. se λ e μ sono i tableu seguenti

$$\boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{d} \qquad \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \vdots \\ \boxed{d} \end{array}$$

allora

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \Sigma_d} \sigma \qquad c_\mu = \sum_{\tau \in \Sigma_d} \varepsilon(\tau)\tau$$

I tableu permettono di classificare le rappresentazioni irriducibili di Σ_d, cioè gli $\mathbb{C}\Sigma_d$-moduli irriducibili. Alcuni sono immediati.

(i) Σ_d agisce banalmente su $\mathbb{C}$.

(ii) Σ_d agisce su $\mathbb{C}$ attraverso l'azione alternante: $\sigma \cdot v = \varepsilon(\sigma)v$.

(iii) Σ_d agisce su $\mathbb{C}^d$ via $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$. Questa azione si decompone, come $\mathbb{C}\Sigma_d$-modulo, come

$$\mathbb{C}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \mid \sum_i x_i = 0\} \oplus \langle e_1 + \cdots + e_n \rangle.$$

Sul secondo addendo Σ_d agisce banalmente, e quindi ritroviamo la rappresentazione definita al primo punto. Il primo addendo risulta invece irriducibile, e costituisce una rappresentazione su uno spazio isomorfo a $\mathbb{C}^{d-1}$.

Ricordiamo dei fatti di teoria delle rappresentazioni.

(i) Come $\mathbb{C}\Sigma_d$-moduli abbiamo un isomorfismo $\mathbb{C}\Sigma_d \simeq \lambda_1 W_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r W_r$, dove $\{W_i\}_{i=1}^r$ danno tutte le classi di $\mathbb{C}\Sigma_d$-moduli irriducibili.

(ii) Il numero r di rappresentazioni irriducibili distinte coincide col numero delle classi di coniugio di Σ_d.

(iii) Come $\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}\Sigma_d$ è isomorfa ad un prodotto di spazi di matrici

$$\mathbb{C}\Sigma_d \simeq_{\mathbb{C}} M_{\lambda_1}\mathbb{C} \times \cdots \times M_{\lambda_r}\mathbb{C}$$

e quindi $|\Sigma_d| = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2$.

(iv) Come $\mathbb{C}$-spazi vettoriale ogni S_i ha dimensione precisamente λ_i.

Abbiamo già trovato 3 rappresentazioni irriducibili di dimensione complessa 1,1 e 2. Siccome $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ sappiamo che come $\mathbb{C}\Sigma_3$-modulo

$$\mathbb{C}\Sigma_3 \simeq \mathbb{C}_{\text{banale}} \oplus \mathbb{C}_{\text{sgn}} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$$

Osserviamo il seguente fatto: il numero di rappresentazioni irriducibili si Σ_d coincide con il numero delle le classi di coniugio in Σ_d, che a sua volta coincide col numero di partizioni di d, che infine coincide col numero di tabelle di Young con d caselle.

Definizione 7.5. Per ogni tabella di Young λ, il *tableu canonico* è quello con le entrate scritte in successione, per esempio come segue:

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

Possiamo quindi pensare alle tabelle di Young come a dei particolari tableu standard.

Teorema 7.6. *(i) Dati due tableu canonici $\lambda \neq \mu$, allora*

$$c_\lambda \, c_\mu = 0 \qquad c_\lambda^2 = n_\lambda \, c_\lambda$$

(ii) Definito $V_\lambda \subseteq \mathbb{C}\Sigma_d$ come

$$V_\lambda \coloneqq \mathbb{C}\Sigma_d \cdot c_\lambda$$

essa è una rappresentazione irriducibile di Σ_d.

(iii) I differenti $\{V_\lambda\}_{|\lambda|=d}$ danno una decomposizione di $\mathbb{C}\Sigma_d$-moduli

$$\mathbb{C}\Sigma_d = \bigoplus_{\substack{|\lambda|=d \\ \textit{canonico}}} V_\lambda \,.$$

Ergo questi V_λ danno la famiglia delle rappresentazioni irriducibili.

(iv) Lo spazio V_λ ha dimensione pari al numero di tableu standard con d caselle.

Definizione 7.7. Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione di S_n.

Ricordiamo che un polinomio simmetrico ha la forma

$$g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

con $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e σ_i l'i-esimo polinomio simmetrico elementare.

Teorema 7.8. *Sia*

$$f \colon GL_{n+1} \to \mathbb{C}$$

una mappa polinomiale nelle entrate della matrice, che è invariante per coniugio. Allora f è un polinomio simmetrico negli autovalori della matrice, e quindi per il remark precedente

$$f = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

con $\sigma_i \in \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale V di dimensione $n+1$, e sia λ un tableu con d caselle. Allora lo spazio tensoriale $V^{\otimes d}$ è naturalmente un $\mathbb{C}\Sigma_d$-modulo, e l'azione è data dalle permutazione dei fattori nel prodotto tensore.

Definizione 7.9. Per ogni tableu canonico λ, lo spazio $S^\lambda V$ è definito come

$$S^\lambda V \coloneqq c_\lambda \cdot V^{\otimes d} \subseteq V^{\otimes d}$$

Per esempio,

$$S^{(d)}V = S^d V \qquad S^{(1,\ldots,d)}V = \Lambda^d V$$

Teorema 7.10. *(i) La rappresentazione di $GL(V)$ su $S^\lambda V$ è irriducibile*

(ii) Tutte le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ sono isomorfe a $S^\lambda V$ per qualche tableu canonico λ.

(iii) La dimensione di $S^\lambda V$ è dato dal numero di riempimenti di λ, visto come semplice tabella di Young, tramite i numeri $1, \dots, \dim V$, in modo che l'ordinamento sia strettamente crescente in ogni colonna e debolmente crescente in ogni riga (i.e. semistandard*).*

Osserviamo che $S^\lambda V$ non è nullo se e solo se il numero di righe di λ è minore della dimensione di V. In particolare, λ può avere un numero arbitrario di colonne.

Un esempio un po' meno ovvio è dato da

$$S^{(\lambda_1,\lambda_2)}\mathbb{C}^2 = S^{\lambda_1-\lambda_2}\mathbb{C}^2 \oplus (\mathrm{sgn})^{\oplus 2}$$

Definizione 7.11. Definiamo il carattere s_λ come

$$s_\lambda \coloneqq \chi_{S^\lambda V}$$

Queste insieme di tablou danno un'interessante struttura moltiplicativa non indifferente. In particolare, possiamo identificare dei coefficienti per cui

$$S^\lambda \otimes S^\mu V = \bigoplus_\nu (S^\nu V)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}}$$

o equivalentemente

$$s_\lambda\, s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}\, s_\nu$$

Possiamo dare un ulteriore descrizione di questi coefficienti, in termini di *celle di Schubert*.

L'insieme $\{X_\lambda\}_\lambda$ delle celle di Schubert contenute in una griglia $(k+1)\times(n-k)$ fornisce una base omologica di $H^*(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z})$. Possiamo quindi calcolare il prodotto $\smile$ in coomologia, per cui vale il seguente risultato.

Teorema 7.12.

$$X_\lambda \smile X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}\, X_\nu$$

I coefficienti $c^\nu_{\lambda\mu}$ sono detti i *coefficienti di Littlewood—Richardson*. Il coefficiente $c^\nu_{\lambda\mu}$ coincide col *numero di skew-tableu semistandard di forma ν/λ e peso μ.*

Riferimenti bibliografici

[1] J. Draisma. «Erratum: A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 8.1 (2024), pp. 225–225. `https://doi.org/10.1137/23M1623781`.

[2] Y. Shitov. «A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), pp. 428–443. `https://doi.org/10.1137/17M1131970`.