

# Introduction to Tensor Spaces

## Appunti del Corso

Mirko Torresani

20 gennaio 2025

### Indice

<b>1</b>	<b>Fatti Introduttivi</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Algebre Tensoriali</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Decomposizione di Tensori</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Varietà Algebriche Tensoriali</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Teoria dell'Apolarità</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Grassmaniane</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Rappresentazioni</b>	<b>21</b>
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>24</b>

### 1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 1.1.** Il prodotto tensoriale  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  è definito come lo spazio  $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; \mathbb{C})$ .

**Definizione 1.2.** Dato un tensore  $f \in V \otimes W$ , il suo rango  $\text{rk } f$  è

$$\text{rk } f = \min \left\{ s \mid f = \sum_{i=1}^s v_i \otimes w_i \right\}.$$

**Proposizione 1.3.** Il rango  $\text{rk } f$  è equivalentemente definibile come

- (i) il rango del morfismo  $V^* \rightarrow V$  associato a  $f$ ;
- (ii) posto  $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$ , con  $(v_i)_i$  e  $(w_j)_j$  rispettive basi, il rango di  $f$  è il rango della matrice  $(c_{ij})_{i,j}$ .

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

**Definizione 1.4.** Dato un elemento  $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ , il rango  $\text{rk } f$  è definito come

$$\text{rk } f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^s v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se  $f$  è un vettore in  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ , allora  $f$  induce mappe

$$f_k: V_k^* \rightarrow \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger: \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$$

per ogni  $k$ .

**Definizione 1.5.** Un tensore  $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  si dice  $V_i$ -conciso, o  $i$ -conciso, se  $f_i$ .

**Definizione 1.6.** Il multi-rango di  $f$  è definito come

$$\text{mrk } f = (\text{rk } f_1, \dots, \text{rk } f_d) =: (r_1, \dots, r_d),$$

dove  $\text{rk } f_k$  è il rango di  $f_k$  come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta  $f_k^\dagger$ ).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein*: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.

**Proposizione 1.7.** Sia  $f$  un tensore, allora

$$\max_i r_i \leq \text{rk } f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

*Dimostrazione.* Sia  $r$  il rango di  $f$ , e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}.$$

L'immagine della funzione trasporta  $f_k^\dagger$ , da  $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$ , è contenuta nel generato  $\langle v_{k,1}, \dots, v_{k,r} \rangle$ , e quindi l'immagine ha dimensione ha al più dimensione  $r$ .

Se  $\{u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}\}$  è una base per l'immagine di  $f_i^\dagger$ , allora  $f$  si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni  $k$

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[ \sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{k,j_k} \right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}.$$

Conseguentemente per ogni  $k$ , il rango  $r$  è al più  $\prod_{i \neq k} r_i$ . □

**Corollario 1.8.** Se  $\text{rk } f = 1$ , allora  $\text{rk } f_k = 1$  per ogni  $k$ .

**Corollario 1.9.** Fissato un certo  $k$ , se  $r_j = 1$  per ogni  $j \neq k$  allora  $\text{rk } f_k = \text{rk } f = 1$ .

**Proposizione 1.10.** Sia  $f$  un tensore 1-conciso, tale che  $r_1 \geq \dots \geq r_d$  e che  $\text{rk } f = r_1$ . Allora  $f_1(V_1^*)$  è generato precisamente da  $r_1$  tensori indecomponibili in  $V_2 \otimes \dots \otimes V_d$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}$  via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger: \bigotimes_{i>1} V_i^* \rightarrow V_1$$

è generata da  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$ . Siccome il rango di  $f_1$ , e quindi quello di  $f_1^\dagger$ , è per ipotesi  $r_1$ , quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore  $f$  è 1-conciso, e quindi  $f_1$  è iniettivo. In definitiva,  $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$  e  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$  formano una base di  $V_1$ .

Consideriamo quindi la base duale  $\{v_1^1, \dots, v_1^{r_1}\}$  di  $V_1^*$ . Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \dots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1, \dots, r_1}. \quad \square$$

Come non-esempio consideriamo  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , ed il tensore

$$f := e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_0.$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle.$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre,  $\text{mrk } f$  è  $(2, 2, 2)$ . Conseguentemente,  $\text{rk } f = 3$  come ci si può immaginare.

**Proposizione 1.11.** Sia  $f \in V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ . Il rango di  $f$  coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene  $f_1(V_1^*)$ .

*Dimostrazione.* Se  $r$  è il rango di  $f$ , allora  $f$  si scrive come  $\sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}$  e conseguentemente  $f_1(V_1^*)$  è contenuto in  $\langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$ .

D'altra parte, supponiamo che  $f_1(V_1^*)$  sia contenuto in  $\langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$ . Fissiamo una base  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m}\}$  di  $V_1$ , ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i} v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \quad 1 \leq k \leq r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i} v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}. \quad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

**Definizione 1.12.** Siano  $A, B$  e  $C$  tre spazi vettoriali su  $\mathbb{C}$ . Inoltre sia  $\{a_1, \dots, a_n\}$  una base di  $A$ , e sia  $V$  un sottospazio di  $B \otimes C$  con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Una *modificazione* di  $f \in A \otimes B \otimes C$  è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j.$$

Analogo per  $V$  in  $A \otimes B$  o in  $A \otimes C$ .

**Definizione 1.13.** Dato  $V_1 \subseteq B \otimes C$ ,  $V_2 \subseteq A \otimes C$  e  $V_3 \subseteq A \otimes B$  il *rango minimale modulo tre sottospazi*  $V_1, V_2$  e  $V_3$  è

$$\text{minrk}(f \text{ mod } V_1 \ V_2 \ V_3) := \min\{\text{rk } \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}.$$

**Proposizione 1.14.** Sia  $f \in A \otimes B \otimes C$  un tensore conciso di rango  $r$ , e poniamo  $f = \sum_{k=1}^m g_k \otimes c_k$  con  $g_i \in A \otimes B$  e  $\{c_1, \dots, c_m\}$  una base di  $C$ . Se  $g_1 \neq 0$ , esistono costanti  $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  tali che

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^\perp)^*$$

ha rango al più  $r - 1$ . Se  $\text{rk } g_1 = 1$ , allora  $\hat{f}$  ha rango almeno  $r - 1$  qualunque siano le costanti.

*Dimostrazione.* Sappiamo che esistono  $h_1, \dots, h_r$ , tensori di rango 1 in  $A \otimes B$ , che generano uno spazio contenente  $f_3(C^*)$ . Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t} h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità,  $\alpha^{1,1} \neq 0$ , e porre  $\lambda_j := \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[ \alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}} \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[ \sum_{t=2}^r \left( \alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1} \alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j \end{aligned}$$

Ergo  $\hat{f}_3(c_1^\perp)$  è contenuto in  $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$ , che uno span di tensori di rango 1. Quindi  $\hat{f}$  ha rango al più  $r - 1$ .

Se il rango di  $g_1 \in A \otimes B$  è 1, allora possiamo tranquillamente porre  $h_1 = g_1$ . In questo caso  $\alpha^{1,t} = 0$  per ogni  $t > 1$  e  $\hat{f}$  assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti*  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ :

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m \sum_{t=2}^r \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^r h_t \otimes \left[ \sum_{j=2}^m \alpha^{j,t} c_j \right].$$

Ma questo implica che  $\hat{f}_3(c_1^\perp)$  coincide con  $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$ , da cui

$$\text{rk } \hat{f} \geq \text{rk } \hat{f}_3 = r - 1. \quad \square$$

**Corollario 1.15.** *Sia  $f \in A \otimes B \otimes C$ , e sia  $f$  un tensore  $C$ -conciso. Fissato un sottospazio  $W$  di  $C^*$ , allora*

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod 0 \ 0 \ f_3(W)) + \dim W,$$

*e l'uguaglianza si ottiene se  $f(W)$  è generato da tensori di rango 1.*

*Dimostrazione.* Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a  $\dim W$ .  $\square$

**Corollario 1.16.** *Se  $f \in A \otimes B \otimes C$  è conciso, e  $U \subseteq A^*$ ,  $V \subseteq B^*$ ,  $W \subseteq C^*$  sono sottospazi, allora*

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod f(U) \ f(V) \ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W,$$

*e se  $f(U)$ ,  $f(V)$ ,  $f(W)$  sono generati da tensori di rango 1, vale l'uguaglianza.*

## 2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

**Definizione 2.1.** Dato un gruppo  $G$ , un  $G$ -modulo è, in questo contesto, un  $\mathbb{C}[G]$ -modulo nel senso dell'algebra commutativa.

**Definizione 2.2.** Se  $G$  agisce su un  $\mathbb{C}$ -spazio  $V$  e  $W$  (tramite un morfismo  $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ )

- (i)  $G$  agisce su  $V^*$  via  $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^\dagger$ ;
- (ii)  $G$  agisce su  $V \oplus W$  via  $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$ ;
- (iii)  $G$  agisce su  $V \otimes W$  via  $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$ .

**Definizione 2.3.** L'algebra tensoriale  $(TV, \otimes)$  è definita come

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}.$$

Vogliamo definire l'algebra simmetrica.

**Definizione 2.4.** I  $d$ -tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha \ \forall \sigma \in S_d\},$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica*  $\pi_S$  da  $TV$  in  $SV$ :

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d).$$

**Proposizione 2.5.** Lo spazio  $S^d V$  è generato dall'insieme  $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, d\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{d-|I|} \left[ \sum_{i \in I} v_i \right]^{\otimes d},$$

e che per ogni  $\alpha \in S^d V$  la somma precedente coincide con  $d! \cdot \alpha$ . □

L'algebra  $SV$  risulta effettivamente un'algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico*  $\odot$  su  $SV$  come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta).$$

**Osservazione.** Se  $v_1, \dots, v_n$  è una base di  $V$ , una base di  $S^d V$  è data da

$$\mathcal{B}_{S^d V} = \{v_{j_1} \odot \cdots \odot v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim S^d V = \binom{n+d-1}{d}.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori*. Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

**Proposizione 2.6.** Dato un tensore  $f \in S^2 V$  di rango  $r$ , esso ammette una decomposizione della forma

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i.$$

**Proposizione 2.7.** La rappresentazione di  $GL(V)$  sullo spazio vettoriale  $S^2 V$  è irriducibile.

*Dimostrazione.* Sia  $W \subseteq S^2V$  un  $GL(V)$ -sottomodulo contenente un tensore  $f$  non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

con  $v_1, \dots, v_r$  indipendenti.

Sia un morfismo  $g \in GL(V)$  per cui  $g(v_1) = 2v_1$  e  $g(v_i) = v_i$  per ogni  $i > 1$ . Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W \quad \square$$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico*.

**Definizione 2.8.** Il rango simmetrico di  $f \in S^dV$  è

$$\text{rk}_S f := \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \dots + v_r^{\otimes d}\}.$$

Sicuramente  $\text{rk} f \leq \text{rk}_S f$ , e vale l'uguaglianza per  $d = 2$ . È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon*. Nel 2018 Shitov [2] ha pensato di trovare un controesempio, smentito da sé stesso nel 2024 [1].

**Proposizione 2.9.** Posto  $\mathbb{C}[V]$  l'algebra delle funzioni  $V \rightarrow \mathbb{C}$  generata da  $V^*$ , lo spazio  $S^dV^*$  è isomorfo a  $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$ .

*Dimostrazione.* La mappa che funziona è

$$\Phi: S^dV^* \rightarrow \mathbb{C}[V]_d, \quad \phi \mapsto f_\phi,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \dots, v). \quad \square$$

**Definizione 2.10** (Waring rank). Per ogni  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$  il rango di Waring è

$$\text{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^d + \dots + l_r^d, \quad l_i \text{ forma lineare}\}.$$

**Definizione 2.11.** I  $d$ -tensori antisimmetrici sono

$$\Lambda^dV := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \text{sgn}(\sigma) \alpha \quad \forall \sigma \in S_d\},$$

e l'algebra antisimmetrica è

$$\Lambda V := \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^dV.$$

Definiamo la proiezione antisimmetrica  $\pi_\Lambda$  come

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

Analogamente a quanto fatto prima definiamo il prodotto antisimmetrico (o *wedge*) come

$$\alpha \wedge \beta := \pi_\Lambda(\alpha \otimes \beta).$$

**Proposizione 2.12.** *Un insieme finito  $v_1, \dots, v_d$  è linearmente indipendente se e solo se*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0.$$

**Corollario 2.13.** *Una base  $\mathcal{B}_{\Lambda^d V}$  di  $\Lambda^d V$  è*

$$\mathcal{B}_{\Lambda^d V} = \{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim \Lambda^d V = \binom{n}{d}.$$

**Proposizione 2.14.** *Lo spazio  $\Lambda^2 V$  è un  $GL(V)$ -modulo irriducibile.*

### 3 Decomposizione di Tensori

Dati due spazi  $A, B$ , lo spazio  $G := GL(A) \times (B)$  è incluso in  $GL(A \otimes B)$ . Dei teoremi di semplice decomposizione sono dati dai seguenti.

**Proposizione 3.1.** *Lo spazio  $S^2(A \otimes B)$  si  $G$ -decompone come*

$$S^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes S^2 B) \oplus (\Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

*Ed allo stesso modo  $\Lambda^2(A \otimes B)$  si  $G$ -decompone come*

$$\Lambda^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \oplus (S^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

Gli elementi di  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$  si decompongono in  $(GL_2(\mathbb{C}))^3$ -orbite secondo la seguente tabella:

orbita	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\text{rk } f$	rappresentante
$A$	1	1	1	1	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0$
$B_1$	1	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1$
$B_2$	2	1	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1$
$B_3$	2	2	1	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
$W$	2	2	2	3	$a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
$G$	2	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$



## 4 Varietà Algebriche Tensoriali

**Definizione 4.1.** Sia  $Z \subseteq \mathbb{P}V$  un sottoinsieme dello spazio proiettivo su  $V$ . Il *cono affine* è  $\hat{V} := \pi^{-1}(Z)$ , con  $\pi$  la proiezione proiettiva.

**Definizione 4.2.** Se  $X$  l'insieme di zeri comuni di  $S \subseteq S^\bullet V^*$ , allora poniamo  $X := Z(S)$ .

**Definizione 4.3.** Viceversa, dato  $A \subseteq \mathbb{P}V$ ,

$$I(A) := \{F \in S^\bullet V^* \mid F(a) = 0 \ \forall a \in \hat{A}\}$$

è l'ideale di  $A$ .

**Definizione 4.4.** L'embedding di Segre è dato da

$$\begin{aligned} \text{Seg}: \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B &\rightarrow \mathbb{P}(A \otimes B) \\ ([a], [b]) &\mapsto [a \otimes b] \end{aligned}$$

L'immagine è data dalla proiezione delle matrici  $\dim A \times \dim B$  di rango 1, cioè dal luogo di zeri di  $\Lambda^2 A^* \otimes \Lambda^2 B^* \subseteq S^2(A \otimes B)$ .

**Proposizione 4.5.** In generale l'analoga mappa da  $\mathbb{P}A_1 \times \cdots \times \mathbb{P}A_n$  a  $\mathbb{P}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$  dà come immagine un'insieme chiuso.

**Definizione 4.6.** La  $d$ -mappa di Veronese è

$$\begin{aligned} v_d: \mathbb{P}V &\rightarrow \mathbb{P}(S^d V) \\ [a] &\mapsto [a^{\otimes d}] \end{aligned}$$

L'immagine è costituita da  $\text{Seg}((\mathbb{P}V)^n) \cap \mathbb{P}(S^d V)$ , e quindi è una varietà proiettiva.

**Definizione 4.7.** Data una mappa  $f$  da  $V$  in sé,  $f^{\wedge m}$  è la naturale endomorfismo di  $\Lambda^m V$ . Se  $m = \dim V$ ,  $f^{\wedge m}$  è la moltiplicazione per  $\det(f)$ .

**Definizione 4.8.** La Grassmanniana è

$$\text{Gr}(r, V) := \{[v_1 \wedge \cdots \wedge v_r] \mid v_f \in V\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^r V).$$

Osserviamo che nel proiettivo un tale prodotto wedge è insensibile a cambi di base del sottospazio generato. La Grassmaniana parametrizza quindi i sottospazi

**Definizione 4.9.** Per ogni  $\phi \in V^*$  e  $v \in V$ , definiamo  $\phi \lrcorner v := \phi(v)$ . Per induzione se  $\phi \in V^*$ ,  $v \in V$  e  $f \in \Lambda^k V$  imponiamo

$$\phi \lrcorner (v \wedge f) := (\phi \lrcorner v) \wedge f - v \wedge (\phi \lrcorner f).$$

Infine imponiamo  $(\phi \wedge g) \lrcorner f := \phi \lrcorner (g \lrcorner f)$ .

**Proposizione 4.10.**  $f \in \Lambda^r V$  può essere scritta come un prodotto wedge  $w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$  se e solo se

$$(\psi \lrcorner f) \wedge f = 0 \quad \forall \psi \in \Lambda^{r-1} V^*$$

In particolare, se

$$f = p_{i_1 \dots i_r} v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_r}$$

allora l'equazione diventa

$$\sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k p_{i_1 \dots i_{r-1} j_k} p_{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_{r+1}} = 0,$$

per ogni scelta di multiindici  $(i_1, \dots, i_r)$  e  $(j_1, \dots, j_{r+1})$ . Avendo ottenuto una equazione polinomiale,  $\text{Gr}(r, V)$  è una varietà proiettiva.

Parliamo ora di spazi tangenti.

**Definizione 4.11.** Sia  $M \subseteq V$  un sottoinsieme e  $v \in V$ . Allora

$$\hat{T}_v M := \left\{ \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} \mid \gamma: \mathbb{C} \rightarrow M \text{ curva liscia} \right\}$$

è lo spazio tangente.

Osserviamo che lo spazio tangente su  $v$  o su  $\lambda v$  rimane invariato per  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

**Definizione 4.12.** Sia  $X \subseteq \mathbb{P}V$  una varietà proiettiva. Un punto  $v \in X$  si dice liscio se esiste un insieme aperto  $U$  (di Zarinksi) su cui lo spazio tangente  $\hat{T}_w X$  ha la stessa dimensione per ogni  $w \in U$ . L'insieme dei punti singolari è un chiuso proiettivo.

Poniamo quindi

$$\dim X := \dim(\hat{T}_v X) - 1$$

con  $v$  un punto liscio.

**Proposizione 4.13.** Vale che

$$\hat{T}_{v_1 \otimes \dots \otimes v_d} \text{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_d) = \sum_{j=1}^d v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes V_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_d.$$

**Proposizione 4.14.** Analogamente vale che

$$\hat{T}_{[v^{\otimes d}]} v_d(\mathbb{P}V) = \{[v^{\otimes (d-1)} \otimes w] \mid w \in V\}.$$

Parliamo ora di orbite. Sulle nostre varietà proiettive facciamo agire  $G := SL(V)$ . È il rivestimento universale (di grado finito) di  $PGL(V)$ .

**Proposizione 4.15** (Borel). *Se un'azione è algebrica, allora per ogni orbita  $\mathcal{O}$  la sua chiusura è ancora  $G$ -invariante e*

$$\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{\text{orbite di dimensione minore}\}.$$

Conseguentemente, le orbite di dimensione minore sono chiuse, e se l'azione è irriducibile, essa è unica.

In questa ottica delle azioni, guardiamo alle tre varietà di prima.

- (i) Dato l'embedding di Veronese  $v_d$ , esso è  $G$ -equivariante, e la sua immagine è l'*orbita chiusa* per l'azione di  $G$  su  $\mathbb{P}(S^d V)$ .
- (ii) Per quanto riguarda, l'embedding di Segre, l'immagine è l'orbita chiusa per l'azione di  $SL(V_1) \times \cdots \times SL(V_d)$ .
- (iii) Possiamo anche considerare varietà di Segre-Veronese dentro

$$\mathbb{P}(S^{a_1} V \otimes \cdots \otimes S^{a_d} V)$$

- (iv) Le varietà di Grassmann *proiettive*, indicate come  $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}V)$ , possiedono delle naturali coordinate di Plücker che le immergono dentro  $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1} V)$ .

Parliamo ora di *varietà secanti*. Iniziamo ora con delle definizioni.

**Definizione 4.16.** Siano  $X$  e  $Y$  sottoinsiemi di  $\mathbb{P}(W)$ . Il Join è definito come

$$J(X, Y) := \overline{\bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \langle x, y \rangle}$$

La chiusura serve per prendere anche le tangenti come limite di secanti.

Se  $X = Y = v_3(\mathbb{P}\mathbb{C}^2)$ , dato in coordinate come  $(\dim_{\mathbb{C}} S^3 \mathbb{C}^2 = 4)$

$$[x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, 3x_0^2 x_1, 3x_0 x_1^2, x_1^3],$$

allora  $X$  prende il nome di *cubica gobba*. Studiamo ora l'azione di  $SL_2$  su  $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$ . Abbiamo tre orbite che sono

$$X, \text{ Tan}(X) \setminus X, \mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \text{Tan}(X)$$

Se  $f \in S^3 \mathbb{C}^2$ , allora può essere pensato come un polinomio omogeneo cubico in  $x_0$  e  $x_1$ . Su  $\mathbb{C}$  ricade in tre casistiche

- (i)  $f$  una radice tripla, e appartiene a  $X$ .
- (ii)  $f$  ha una radice singola ed una doppia, ed appartiene a  $\text{Tan}(X) \setminus X$ ;
- (iii)  $f$  ha tre radici singole, ed appartiene a  $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \text{Tan}(X)$ .

Può essere dimostrato che  $X \cup (\mathbb{P}(S^2 \mathbb{C}^3) \setminus \text{Tan}(X))$  coincide esattamente con l'unione delle secanti. Detto altrimenti,  $J(X, X)$  è tutto lo spazio  $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$ .

**Definizione 4.17.** La varietà secante è data da

$$\sigma_k(X) := J(X, \dots, X).$$

Abbiamo quindi una catena ascendente

$$X \subseteq \sigma_1(X) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_{p_0}(X) = \mathbb{P}(W).$$

Se consideriamo  $X$  come  $\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$  dentro  $\mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$ , allora

$$\sigma_r(X) = \{f \in \text{Hom}(V_1^\vee, V_2) \mid \text{rk } f \leq r\},$$

in quanto ogni matrice di rango  $r$  (in senso matriciale) può essere scritta come somma di matrici di rango 1.

Si può dimostrare che la chiusura di Zarinksky di

$$\{f \in \text{Hom}(V_1^\vee, V_2) \mid \text{rk } f = r\}$$

coincide precisamente con  $\sigma_r(X)$ . Questo recupera il risultato di Borel.

Consideriamo ora il caso  $X = v_d(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ , con  $d \geq 3$ .

Per  $d = 3$  siamo di fronte alla cubica gobba. Se supponiamo di proiettare questa cubica su un piano, usando un generico punto  $p \notin X$  come fuoco, osserviamo che la proiezione ha un nodo precisamente se  $p$  è in una secante, o ha una cuspide precisamente quando  $p$  sta in una tangente. Ma una cubica in un piano può solo avere un nodo. Quindi se  $p$  sta su una secante, essa è unica. Analogamente se  $p \notin X$  sta su una tangente essa è unica. Si può provare, come già detto, che  $\sigma_2(X) = \mathbb{P}^3\mathbb{C}$ .

Per  $d = 4$  stiamo guardando l'immersione di  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  in  $\mathbb{P}^4\mathbb{C}$ . In questo caso abbiamo infinite  $SL_2$ -orbite, in quanto quattro radici non possono essere generalmente portate una dentro l'altra. La catena secante è della forma

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \sigma_3(X) = \mathbb{P}^4$$

Capiamo l'equazione di  $\sigma_2(X)$ . Sia

$$S^2\mathbb{C}^{2\vee} = \{\alpha_0\partial_0^2 + 2\alpha_1\partial_0\partial_1 + \alpha_2\partial_1^2\}$$

e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f: S^2\mathbb{C}^{2\vee} &\rightarrow S^2\mathbb{C}^2 \\ \partial &\mapsto \partial f \end{aligned}$$

con  $f \in S^4\mathbb{C}^2$ .

Sia  $\ell$  una forma lineare. Allora l'immagine di  $\mathcal{C}_{\ell^4}$  è  $\mathbb{C}$ -generata da  $\ell^2$  ed ha dimensione 1. Inoltre,

$$\mathcal{C}_{\lambda f + \mu g} = \lambda \mathcal{C}_f + \mu \mathcal{C}_g$$

e quindi se  $\ell_1, \ell_2$  sono due forme lineari, allora

$$\text{rk } \mathcal{C}_{\lambda_1\ell_1^4 + \lambda_2\ell_2^4} \leq 2.$$

Quindi la mappa precedente ha sempre determinante nullo, in quando  $\dim S^2\mathbb{C}^2 = 3$ .

Conseguentemente, la varietà  $\sigma_2(X)$  è contenuta in  $V(\det \mathcal{C}_f)$ . Inoltre vale l'uguaglianza in quanto  $\det \mathcal{C}_f$  è un polinomio cubico irriducibile.

Inoltre,  $SL_2$  agisce su  $S^4\mathbb{C}^2$ , e quindi su

$$\bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2).$$

**Proposizione 4.18.** *Il sottoanello*

$$\left[ \bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2) \right]^{SL_2} \subseteq \bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2)$$

*è un anello polinomiale completo:  $\mathbb{C}[I, J]$ , con  $\deg I = 2$  e  $\deg J = 3$ . Questo fatto (mi fido) è molto raro in teoria degli invarianti. Inoltre come varietà algebrica è  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , oltre ad essere liscia. A meno di multipli scalari  $J = \det \mathcal{C}_f$ .*

**Lemma 4.19.**  $\dim \sigma_r(X) \leq r \dim(X) + (r - 1)$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$\sigma^r(X) := \{(x_1, \dots, x_r, y) \mid y \in \langle x_1, \dots, x_r \rangle\}$$

dentro

$$X \times \dots \times X \times \mathbb{P}W$$

E consideriamo le due mappe

$$X \times \dots \times X \xleftarrow{\pi_1} \sigma^r(X) \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}W.$$

Notiamo che  $\pi_2(\sigma^r(X)) = \sigma_r(X)$ , e che  $\pi_1$  è suriettiva con fibra generica  $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$ . Conseguentemente

$$\begin{aligned} \dim \sigma_r(X) &\leq \dim \sigma^r(X) = \dim(\text{Fibra}) + \dim(X \times \dots \times X) \\ &= (r - 1) + r \dim(X). \end{aligned} \quad \square$$

Si postula che valga l'uguaglianza.

**Definizione 4.20.**  $X$  si dice essere  $(h + 1)$ -difettivo se  $\sigma_{h+1}X$  ha dimensione minore del minimo tra  $X$  e la stima del teorema precedente.

**Lemma 4.21** (Terracini). *Se  $x_i \in X_i$  sono punti generici, e  $p \in \langle x_1, \dots, x_{h+1} \rangle$  è generico, allora*

$$T_p J(X_1, \dots, X_{h+1}) = \langle T_{x_1} X_1, \dots, T_{x_{h+1}} X_{h+1} \rangle.$$

Sia ora  $X \subseteq \mathbb{P}^N$ , e  $p \in \mathbb{P}^N$

**Definizione 4.22.** Il rango  $\text{rk}_X(p)$  è definito come

$$\text{rk}_X(p) = \min\{h + 1 \mid p \in \langle x_1, \dots, x_{h+1} \rangle\}.$$

**Definizione 4.23.** Il rango di bordo  $\text{brk}_X(p)$  è definito come

$$\text{brk}_X(p) = \min\{h + 1 \mid p \in \sigma_{h+1}(X)\}.$$

Ovviamente  $\text{brk}_X(p)$  è minore di  $\text{rk}_X(p)$ .

Se  $X = v_d(\mathbb{P}V) = \{\ell^{\otimes d} \mid \ell \in \mathbb{P}V\}$  in  $\mathbb{P}(S^d V)$ , allora stiamo sostanzialmente guardando al rango simmetrico.

Se  $X' = \mathbb{P}V \times \cdots \times \mathbb{P}V$  dentro  $\mathbb{P}(V^{\otimes d})$ , stiamo guardando al rango normale.

Siccome  $v_d(\mathbb{P}V)$  coincide con  $X' \cap \mathbb{P}(S^d V)$ , allora ogni elemento di  $\mathbb{P}(S^d V)$  ha due ranghi. È una congettura se sono uguali.

Inoltre, è sicuramente vero che

$$\sigma_{h+1}(v_d(\mathbb{P}V)) \subseteq \mathbb{P}(S^d V) \cap \sigma_{h+1}(X').$$

È una congettura se valga l'uguaglianza.

Benché il Prof. Ottaviani abbia messo delle note, queste ultime sono così incomprensibili che ho deciso comunque di continuare le note.

## 5 Teoria dell'Apolarità

Sia  $K = \mathbb{C}$ , e sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n + 1$ . Inoltre, siano

$$R = K[x_0, \dots, x_n] \simeq S^\bullet V, \quad S = K[\partial_0, \dots, \partial_n] \simeq S^\bullet V^\vee$$

L'anello  $R$  ha un unico ideale massimale omogeneo:  $\mathfrak{M} = (\partial_0, \dots, \partial_n)$ . Inoltre,  $S$  agisce su  $R$  additivamente tramite la ovvia azione che indichiamo con  $\cdot$ .

D'ora in poi useremo la notazione a multiindice.

**Lemma 5.1.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono multiindici tali che  $|\alpha| = |\beta|$ , allora

$$\partial^\alpha \cdot x^\beta = \begin{cases} \alpha! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

**Corollario 5.2.** L'accoppiamento tra  $S^d V^\vee$  e  $S^d V$  è una dualità, e  $S^d V^\vee$  è isomorfo a  $(S^d V)^\vee$ .

**Lemma 5.3.** Se  $g \in S_d$ , e  $\ell = \sum c_i x_i$ , allora

$$g \cdot \ell^d = d! g(c_0, \dots, c_n)$$

*Dimostrazione.* Usando la notazione a multiindice, possiamo notare semplicemente che

$$g \cdot \ell^d = g \cdot \left[ \sum_{|\alpha|=d} c^\alpha x^\alpha \binom{d}{\alpha} \right] = \sum_{|\alpha|=d} g_\alpha c^\alpha \alpha! \binom{d}{\alpha}$$

che coincide esattamente con  $d! g(c_0, \dots, c_n)$ . □

**Definizione 5.4.** Dato  $f \in S^d V = R_d$ , l'ideale apolare è definito come

$$f^\perp = \{g \in S \mid g \cdot f = 0\}.$$

**Definizione 5.5.** Una  $R$ -algebra  $S$ , con  $R$  un anello, è detta Artiniana se  $R$  è Artiniano e se  $S$  è un  $R$ -modulo finitamente generato. In particolare, se  $R$  è un campo stiamo chiedendo che  $\dim_R S$  sia finito.

**Proposizione 5.6.** (i)  $f^\perp$  è un ideale omogeneo (i.e. è un sottomodulo graduato).

(ii) il zoccolo  $(f^\perp)_d$  ha  $K$ -codimensione 1.

(iii) Se  $k > d$ , allora  $(f^\perp)_k = S^k V$ .

(iv)  $L$ 'algebra graduata

$$A_f := SV^\vee / (f^\perp) = \bigoplus_{e=0}^{\infty} S^e V^\vee / (f^\perp)_e.$$

è un'algebra Artiniana.

**Proposizione 5.7.** Sia  $f \in S^d V$ . Allora per ogni  $e < d$  vale che

$$(f^\perp)_e = [(f^\perp)_e : \mathfrak{M}^{d-2}]_e = \{g \in S_e \mid \forall h \in \mathfrak{M}^{d-e} (gh) \cdot f = 0\}.$$

*Dimostrazione.* L'inclusione  $\subseteq$  è immediata.

Per quanto riguarda l'inclusione  $\supseteq$ , sia  $g \in [(f^\perp)_d : \mathfrak{M}^{d-e}]$  per cui  $(g\partial^\alpha) \cdot f = 0$  per ogni  $|\alpha| = d - e$ . Siccome  $S$  è un anello commutativo, allora

$$(g\partial^\alpha) \cdot f = (\partial^\alpha g) \cdot f = \partial^\alpha \cdot (g \cdot f),$$

e per il Lemma 5.1, sappiamo che tutti i coefficienti di  $g \cdot f \in S_{d-e}$  sono zero. Conseguentemente,  $g \cdot f = 0$ , i.e.  $g$  appartiene a  $(f^\perp)_e$ .  $\square$

**Proposizione 5.8.** Sia  $f \in S^d V$  e sia  $e \in \{0, \dots, d\}$ . La moltiplicazione

$$(A_f)_e \times (A_f)_{d-e} \rightarrow (A_f)_d \simeq \mathbb{C}$$

è una dualità perfetta.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che la componente di sinistra è non-degenere. Per simmetria lo stesso risultato vale anche per l'altra componente.

Sia  $[t] \in (A_f)_e$ , tale che  $[tu] = 0$  in  $(A_f)_f$  per ogni  $u \in (A_f)_{d-e}$ . In particolare,  $tu$  appartiene a  $(f^\perp)_d$  per ogni  $u \in \mathfrak{M}^{d-e} \subseteq S_{d-e}$ . Ergo,  $t$  appartiene a  $[(f^\perp)_d : \mathfrak{M}^{d-e}]_e$ . La precedente proposizione implica quindi che  $t$  appartiene a  $(f^\perp)_e$ , i.e.  $[f] = 0$  in  $(A_f)_e$ .  $\square$

La precedente proposizione ci dice che l'algebra è un'algebra di Gorenstein.

Siano  $Z = \{[\ell_1], \dots, [\ell_r]\} \subseteq \mathbb{P}V$ , con  $\deg \ell_i = 1$ .

**Lemma 5.9** (Apolarità).  $f$  coincide con  $\sum \ell_i^d$  se e solo se  $I_Z$  è contenuto in  $f^\perp$ .

Nel caso in cui  $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ , allora il lemma precedente diventa come segue.

**Lemma 5.10** (Apolarità per forme bilineari). Sia  $f \in \mathbb{C}[x, y]$ , e siano  $(\alpha_i : \beta_i)$  punti distinti in  $\mathbb{P}^1$ , allora

$$\left[ \prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y \right] \cdot f = 0 \Leftrightarrow f = \sum_i c_i (\alpha_i x + \beta_i y)^d$$

*Dimostrazione.* Posto

$$Z = \{[\alpha_1 x + \beta_1 y], \dots, [\alpha_k x + \beta_k y]\},$$

allora il risultato segue dal Lemma di Apolarità una volta provato che

$$I_Z = ((\beta_1 \partial_x - \alpha_1 \partial_y) \cdots (\beta_k \partial_x - \alpha_k \partial_y)).$$

Sicuramente l'ideale proposto, che denotiamo con  $J$ , è contenuto in  $I_Z$ .

D'altra parte, sia  $g \in I_Z$  omogeneo. Allora  $g$  ha  $(\alpha_i, \beta_i)$  come radici: per il Lemma 5.3

$$d!g(\alpha_i, \beta_i) = g \cdot (\alpha_i x + \beta_i y) = 0. \quad (1)$$

per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Ma sappiamo che in due variabili vale un teorema di circa-Ruffini. Detto altrimenti, da (1) sappiamo che il polinomio

$$\prod_{i=1}^k \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y$$

divide  $g$ . □

Una versione più generale, che introduce delle molteplicità, è data dall'enunciato seguente.

**Proposizione 5.11.** Sia  $f \in \mathbb{C}[x, y]_d$ , e siano  $(\alpha_i : \beta_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , punti di  $\mathbb{P}^1$ . Allora

$$\begin{aligned} & \left[ \prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y \right] \cdot f = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists c_i(c, y) \in \mathbb{C}[x, y]_{m_i-1} \text{ t.c. } f = \sum c_i(x, y) (\alpha_i x + \beta_i y)^{d-m_i+1} \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione, in teoria data in classe, è incomprensibile. □

**Definizione 5.12.** Se  $S$  è un anello  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduato, allora un ideale  $I$  riempie l'anello in grado  $k$  se  $I$  contiene  $S_k$ .

**Lemma 5.13.** Siano  $\phi_1, \phi_2$  in  $\mathbb{C}[x, y] = S$  due polinomi senza fattori in comune.



(i) L'ideale  $I = (\phi_1, \phi_2)$  riempie l'anello  $R$  in gradi maggiori o uguali di  $\deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$ . Inoltre,  $I$  ha codimensione 1 in grado  $d := \deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$ .

(ii)  $I_e$  coincide con  $[I_d: \mathfrak{M}^{d-e}]_e$ .

*Dimostrazione.* Sia  $d_i := \deg \phi_i$ , e consideriamo la sequenza corta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S \rightarrow S \oplus S \rightarrow I \rightarrow 0 \\ \beta \mapsto (-\beta\phi_2, \beta\phi_1) \\ (a, b) \mapsto a\phi_1 + b\phi_2 \end{aligned}$$

Siccome  $\phi_1$  e  $\phi_2$  non hanno fattori in comune, la sequenza precedente è esatta.

Conseguentemente, preso un certo polinomio  $g \in S$  di grado  $t \geq d_1 + d_2 - 1$ , allora  $\square$

**Teorema 5.14.** *L'ideale  $f^\perp$  ha sempre due generatori.*

**Teorema 5.15** (Lemma di Apolarità – Versione Schematica). *Sia  $Z \subseteq \mathbb{P}V$  una sottoschema chiuso zero-dimensionale, con ideale vanescente  $I(Z) \subseteq S(V^\vee)$ , e sia  $v_d: \mathbb{P}v \rightarrow \mathbb{P}(S^d V)$  l'embedding di Veronese. Allora, per  $f \in S^d V \setminus \{0\}$ ,*

$$I_Z \subseteq f^\perp \Rightarrow [f] \in \langle v_d(Z) \rangle$$

## 6 Grassmaniane

Fissiamo un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n + 1$ .

**Definizione 6.1.** La Grassmanniana  $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ , i.e. la varietà dei sottospazi di  $V$  di dimensione  $k + 1$ , viene identificata con i prodotti wedge indecomponibili in  $\Lambda^{k+1} V$ .

Ricordiamo il risultato noto.

**Proposizione 6.2.** *La varietà  $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$  ha la struttura di varietà liscia, ed ha dimensione  $(k + 1)(n - k)$ .*

Fissiamo una base  $e_0, \dots, e_n$  per  $V$ , in modo da avere una identificazione canonica  $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ .

Consideriamo un sottospazio  $L = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  di dimensione  $k + 1$ , ed organizziamo i vettori in righe incolonnate, via una matrice  $M_L$  in  $M_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$  di rango massimo.

A questo punto, possiamo osservare il seguente fatto: *due embedding  $\mathbb{C}^{k+1} \xrightarrow{i, j} V$  danno la stessa immagine se e solo se esiste una trasformazione  $g \in GL_{k+1}(\mathbb{C})$  per cui  $i = jg$ .*

Conseguentemente, moltiplicare la matrice  $M_L$  a sinistra per un elemento di  $GL_{k+1}(\mathbb{C})$  non cambia lo spazio generato dalle righe (trasposte). Ma questa operazione coincide con una riduzione di Gauss per righe, che porta  $M_L$  in

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

In base alle possibili configurazione di questa forma, possiamo decomporre la Grassmaniana in celle affini, dette *celle di Schubert*.

Un modo per organizzare queste celle, in modo da avere una descrizione combinatorica, è tramite le *tabelle di Young*.

**Definizione 6.3.** La tabella di Young di parametri interi  $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{k+1})$  è data dal diagramma seguente:

$$\lambda = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

dove la riga  $i$  ha lunghezza  $\lambda_i$ .

Per futura utilità definiamo l'insieme delle tabelle di Young

$$Y_{k,n} := \{\lambda \mid k \text{ righe ed al più } n - k \text{ colonne}\}.$$

Le tabelle di Young possiedono una naturale struttura ad albero, governata dalla relazione di inclusione delle une dentro le altre. Per esempio l'insieme  $Y_{1,3}$  si ordina come segue:

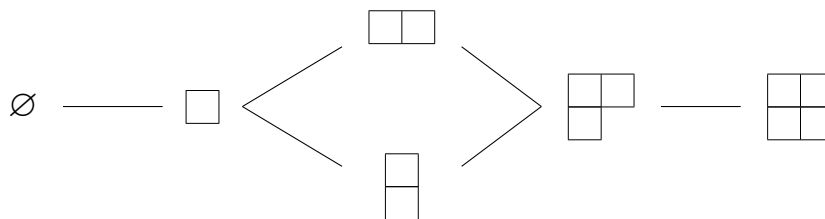


Figura 1: Tabelle di Young con al più 2 righe

**Definizione 6.4.** Fissiamo ora una base  $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$  su  $V$ , e fissiamo la filtrazione

$$F_0 := \{0\}, \quad F_i := \langle e_{n-i+1}, \dots, e_n \rangle.$$

Data una tabella di Young  $\lambda \in Y_{k,n}$ , la cella  $X_\lambda$  è definita come

$$X_\lambda := \{L \in \text{Gr}_{k+1}(V) \mid \dim(L \cap F_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i \quad \forall 1 \leq i \leq k+1\}.$$

Essa è una *cella affine* di codimensione

$$|\lambda| := \#\{\text{scatole in } \lambda\}.$$

In particolare, la cella  $C_{(0,\dots,0)}$  ha dimensione massima. Se guardiamo alla varietà di Grassmann come varietà algebrica con topologia di Zarinsky,  $C_{(0,\dots,0)}$  è ancora aperto. La

varietà di Grassmann è quindi una varietà algebrica particolare: possiede un sottoinsieme aperto, e quindi Zarinsky-denso, che è anche una sottovarietà algebrica affine.

L'ordinamento delle tabelle di Young fornisce un ordinamento nelle celle della forma

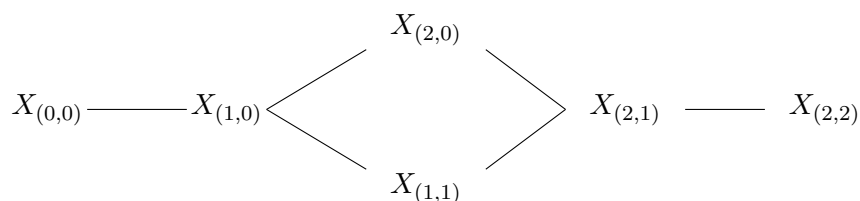
$$\lambda \subseteq \mu \Rightarrow X_\lambda \supseteq X_\mu$$

Inoltre, questo ordinamento è strettamente legato alla forma di Gauss su righe ridotta: infatti, se andiamo a considerare le differenze

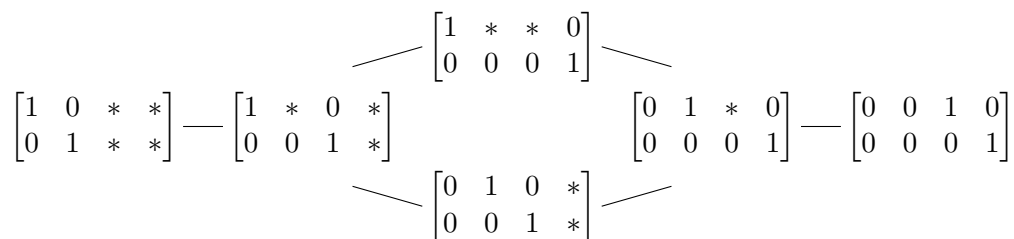
$$X_\lambda^0 := X_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \subseteq \mu} X_\mu,$$

allora i differenti  $X_\lambda^0$  raggruppano i diversi modi in cui si può presentare una forma di Gauss ridotta su righe di una matrice  $(k+1) \times (n+1)$  di rango massimo.

Per dare maggiore chiarezza al discorso — per quanto possibile — consideriamo il caso di  $\text{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$ . Essa è la varietà dei 2-sottospazi in  $\mathbb{C}^4$ , ed ha dimensione complessa 4. Le tabelle di Young  $Y_{1,3}$  sono mostrate nella Figura 1. Le relative celle di Schubert  $\{X_\lambda\}_\lambda$  sono quindi ordinate come segue:



In particolare, otteniamo un analogo diagramma se sostituiamo  $X_\lambda$  con  $X_\lambda^0$ . Quest'ultimo corrisponde alle possibili forme di Gauss ridotte per righe tramite il diagramma seguente:



Possiamo effettivamente visualizzare il collegamento tra forma di Gauss ridotta per righe e tabelle di Young. Supponiamo di voler considerare le celle di Schubert nello spazio  $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ . Le relative tabelle di Young appartengono a  $Y_{k,n}$ , e sono quindi tabelle contenute in una griglia  $A_{k,n}$  di forma  $(k+1) \times (n-k)$ . Una specifica forma di Gauss ridotta avrà degli  $*$ , che procediamo ad allineare sul lato destro di  $A_{k,n}$ . Il complementare, una volta riflessa sull'asse orizzontale, sarà la relativa la tabella di Young.

Per esempio, consideriamo la forma di Gauss in  $\text{Gr}(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^6)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $A_{2,6}$  viene riempita come segue:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & * & * & * \\ \hline & & * & * \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

e quindi la tabella di Young associata a (2) è  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$ .

Parliamo ora della *coomologia della Grassmanniana*. La sua descrizione è puramente combinatorica.

**Teorema 6.5.** *La coomologia di  $\text{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$  è zero in dimensione dispari, ed è*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{R}) = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid \lambda \text{ ha } 2i \text{ scatole}\}|$$

*in dimensione pari.*

*Sketch della dimostrazione.* Si può dimostrare che ognuna delle celle di Schubert  $X_{\lambda}^0$  è topologicamente omeomorfa all'interno di un disco complesso  $D_{\mathbb{C}}^i$ , con  $|\lambda| = i$ . In particolare,  $X_{\lambda}^0$  è omeomorfa al disco reale  $D_{\mathbb{R}}^{2i}$ . Inoltre, se definiamo

$$X^{(2i)} := \bigcup_{|\lambda|=2i} \overline{X_{\lambda}^0},$$

allora abbiamo una decomposizione  $CW$

$$X^{(0)} \subseteq \dots \subseteq X^{(2d)}, \quad d = \dim_{\mathbb{C}} \text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$$

con *celle solo  $\mathbb{R}$ -dimensione pari*. Ma a questo punto sappiamo il complesso cellulare omologico su  $\mathbb{Z}$  è della forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{a_0} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_2} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_{2d}} \rightarrow 0$$

con

$$a_{2i} = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid |\lambda| = 2i\}|.$$

Conseguentemente

$$H_{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{a_{2i}}$$

ed è nulla altrimenti. Per coefficienti univesali concludiamo:

$$H^{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{a_{2i}}. \quad \square$$

Per il teorema dei coefficienti universali, le dimensioni di

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{C})$$

con quelle precedenti.

Per esempio

$$H^i(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3); \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, 2, 6, 8 \\ \mathbb{C}^2 & i = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## 7 Rappresentazioni

**Definizione 7.1.** Dato un gruppo  $G$ , l'anello  $\mathbb{C}G$  è dato dall'insieme delle somme formali

$$\left\{ \sum \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C} \right\}.$$

**Definizione 7.2.** Un *tableau* con  $d$  caselle è un diagramma di Young, con  $d$  caselle, quest'ultime riempite con i numeri  $1, \dots, d$ . Un tableau si dice *standard* se è strettamente crescente nelle righe e nelle colonne.

**Definizione 7.3.** Dato un tableau  $\lambda$ , l'insieme delle simmetrie su riga  $R_\lambda \subseteq \Sigma_d$  è l'insieme delle permutazioni su  $d$  elementi che preservano i valori sulle righe. Analogamente per  $C_\lambda$ , ma sulle colonne.

**Definizione 7.4.** Il simmetrizzatore di Young rispetto ad un tableau  $\lambda$  è

$$c_\lambda := \sum_{\substack{\sigma \in R_\lambda \\ \tau \in C_\lambda}} \varepsilon(\tau) \sigma \tau,$$

dove  $\varepsilon$  è la funzione segno.

Per esempio, se  $\lambda$  e  $\mu$  sono i tableau seguenti

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \boxed{2} \dots \boxed{d} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \vdots \\ \boxed{d} \end{array}$$

allora

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \Sigma_d} \sigma \quad c_\mu = \sum_{\tau \in \Sigma_d} \varepsilon(\tau) \tau$$

I tableau permettono di classificare le rappresentazioni di  $\Sigma_d$ , cioè gli  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli irriducibili. Alcune sono immediate.

(i)  $\Sigma_d$  agisce banalmente su  $\mathbb{C}$ .

- (ii)  $\Sigma_d$  agisce su  $\mathbb{C}$  attraverso l'azione alternante:  $\sigma \cdot v = \varepsilon(\sigma)v$ .
- (iii)  $\Sigma_d$  agisce su  $\mathbb{C}^d$  via  $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$ . Questa azione si scompone, come  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -modulo, come

$$\mathbb{C}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \mid \sum_i x_i = 0\} \oplus \langle e_1 + \dots + e_n \rangle.$$

Sul secondo addendo  $\Sigma_d$  agisce banalmente, e quindi ritroviamo la rappresentazione definita al primo punto. Il primo addendo risulta invece irriducibile, e costituisce una rappresentazione su uno spazio isomorfo a  $\mathbb{C}^{d-1}$ .

Ricordiamo dei fatti di teoria delle rappresentazioni.

- (i) Come  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli abbiamo un isomorfismo  $\mathbb{C}\Sigma_d \simeq \lambda_1 W_1 \oplus \dots \oplus \lambda_r W_r$ , dove  $\{W_i\}_{i=1}^r$  danno tutte le classi di  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli irriducibili.
- (ii) Il numero  $r$  di rappresentazioni irriducibili distinte coincide col numero delle classi di coniugio di  $\Sigma_d$ .
- (iii) Come  $\mathbb{C}$ -algebra  $\mathbb{C}\Sigma_d$  è isomorfa ad un prodotto di spazi di matrici

$$\mathbb{C}\Sigma_d \simeq_{\mathbb{C}} M_{\lambda_1} \mathbb{C} \times \dots \times M_{\lambda_r} \mathbb{C}$$

$$\text{e quindi } |\Sigma_d| = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2.$$

- (iv) Come  $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali ogni  $S_i$  ha dimensione precisamente  $\lambda_i$ .

Abbiamo già trovato 3 rappresentazioni irriducibili di dimensione complessa 1, 1 e 2. Siccome  $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$  sappiamo che come  $\mathbb{C}\Sigma_3$ -modulo

$$\mathbb{C}\Sigma_3 \simeq \mathbb{C}_{\text{banale}} \oplus \mathbb{C}_{\text{sgn}} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$$

Osserviamo il seguente fatto: il numero di rappresentazioni irriducibili di  $\Sigma_d$  coincide con il numero delle classi di coniugio in  $\Sigma_d$ , che a sua volta coincide col numero di partizioni di  $d$ , che infine coincide col numero di tabelle di Young con  $d$  caselle.

**Definizione 7.5.** Per ogni tabella di Young  $\lambda$ , il *tableu canonico* è quello con le entrate scritte in successione, per esempio come segue:

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

Possiamo quindi pensare alle tabelle di Young come a dei particolari tableau standard.

**Teorema 7.6.** (i) Dati due tableau canonici  $\lambda \neq \mu$ , allora

$$c_\lambda c_\mu = 0 \quad c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$$

(ii) Definito  $V_\lambda \subseteq \mathbb{C}\Sigma_d$  come

$$V_\lambda := \mathbb{C}\Sigma_d \cdot c_\lambda$$

essa è una rappresentazione irriducibile di  $\Sigma_d$ .

(iii) I differenti  $\{V_\lambda\}_{|\lambda|=d}$  danno una decomposizione di  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli

$$\mathbb{C}\Sigma_d = \bigoplus_{\substack{|\lambda|=d \\ \text{canonico}}} V_\lambda.$$

Ergo questi  $V_\lambda$  danno la famiglia delle rappresentazioni irriducibili.

(iv) Lo spazio  $V_\lambda$  ha dimensione pari al numero di tableau standard con  $d$  caselle.

**Definizione 7.7.** Un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  si dice simmetrico se è invariante per l'azione di  $S_n$ .

Ricordiamo che un polinomio simmetrico ha la forma

$$g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con  $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  e  $\sigma_i$  l' $i$ -esimo polinomio simmetrico elementare.

**Teorema 7.8.** Sia

$$f: GL_{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$$

una mappa polinomiale nelle entrate della matrice, che è invariante per coniugio. Allora  $f$  è un polinomio simmetrico negli autovalori della matrice, e quindi per il remark precedente

$$f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con  $\sigma_i \in \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ .

Consideriamo ora uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n+1$ , e sia  $\lambda$  un tableau con  $d$  caselle. Allora lo spazio tensoriale  $V^{\otimes d}$  è naturalmente un  $\mathbb{C}\Sigma_d$ -modulo, e l'azione è data dalle permutazione dei fattori nel prodotto tensore.

**Definizione 7.9.** Per ogni tableau canonico  $\lambda$ , lo spazio  $S^\lambda V$  è definito come

$$S^\lambda V := c_\lambda \cdot V^{\otimes d} \subseteq V^{\otimes d}$$

Per esempio,

$$S^{(d)} V = S^d V \quad S^{(1, \dots, d)} V = \Lambda^d V$$

**Teorema 7.10.** (i) La rappresentazione di  $GL(V)$  su  $S^\lambda V$  è irriducibile

(ii) Tutte le rappresentazioni irriducibili di  $GL(V)$  sono isomorfe a  $S^\lambda V$  per qualche tableau canonico  $\lambda$ .

(iii) La dimensione di  $S^\lambda V$  è dato dal numero di riempimenti di  $\lambda$ , visto come semplice tabella di Young, tramite i numeri  $1, \dots, \dim V$ , in modo che l'ordinamento sia strettamente crescente in ogni colonna e debolmente crescente in ogni riga (i.e. semistandard).

Osserviamo che  $S^\lambda V$  non è nullo se e solo se il numero di righe di  $\lambda$  è minore della dimensione di  $V$ . In particolare,  $\lambda$  può avere un numero arbitrario di colonne.

Un esempio un po' meno ovvio è dato da

$$S^{(\lambda_1, \lambda_2)} \mathbb{C}^2 = S^{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbb{C}^2 \oplus (\text{sgn})^{\oplus 2}$$

**Definizione 7.11.** Definiamo il carattere  $s_\lambda$  come

$$s_\lambda := \chi_{S^\lambda V}$$

Queste insieme di tablou danno un'interessante struttura moltiplicativa non indifferente. In particolare, possiamo identificare dei coefficienti per cui

$$S^\lambda \otimes S^\mu V = \bigoplus_{\nu} (S^\nu V)^{\oplus c_{\lambda\mu}^\nu}$$

o equivalentemente

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$$

Possiamo dare un'ulteriore descrizione di questi coefficienti, in termini di *celle di Schubert*.

L'insieme  $\{X_\lambda\}_\lambda$  delle celle di Schubert contenute in una griglia  $(k+1) \times (n-k)$  fornisce una base omologica di  $H^*(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z})$ . Possiamo quindi calcolare il prodotto  $\smile$  in coomologia, per cui vale il seguente risultato.

**Teorema 7.12.**

$$X_\lambda \smile X_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu$$

I coefficienti  $c_{\lambda\mu}^\nu$  sono detti i *coefficienti di Littlewood—Richardson*. Il coefficiente  $c_{\lambda\mu}^\nu$  coincide col numero di skew-tableau semistandard di forma  $\nu/\lambda$  e peso  $\mu$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] J. Draisma. «Erratum: A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 8.1 (2024), pp. 225–225. <https://doi.org/10.1137/23M1623781>.
- [2] Y. Shitov. «A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), pp. 428–443. <https://doi.org/10.1137/17M1131970>.