

# Introduction to Tensor Spaces

## Appunti del Corso

Mirko Torresani

3 gennaio 2025

### 1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 1.1.** Il prodotto tensoriale  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  è definito come lo spazio  $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; \mathbb{C})$ .

**Definizione 1.2.** Dato un tensore  $f \in V \otimes W$ , il suo rango  $\text{rk } f$  è

$$\text{rk } f = \min\{s \mid f = \sum_{i=1}^s v_i \otimes w_i\}.$$

**Proposizione 1.3.** Il rango  $\text{rk } f$  è equivalentemente definibile come

- (i) il rango del morfismo  $V^* \rightarrow V$  associato a  $f$ ;
- (ii) posto  $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$ , con  $(v_i)_i$  e  $(w_j)_j$  rispettive basi, il rango di  $f$  è il rango della matrice  $(c_{ij})_{i,j}$ .

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

**Definizione 1.4.** Dato un elemento  $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ , il rango  $\text{rk } f$  è definito come

$$\text{rk } f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^s v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se  $f$  è un vettore in  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ , allora  $f$  induce mappe

$$f_k: V_k^* \rightarrow \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger: \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$$

per ogni  $k$ .

**Definizione 1.5.** Un tensore  $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  si dice  $V_i$ -conciso, o  $i$ -conciso, se  $f_i$ .

**Definizione 1.6.** Il multi-rango di  $f$  è definito come

$$\text{mrk } f = (\text{rk } f_1, \dots, \text{rk } f_d) =: (r_1, \dots, r_d),$$

dove  $\text{rk } f_k$  è il rango di  $f_k$  come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta  $f_k^\dagger$ ).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein*: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.

**Proposizione 1.7.** Sia  $f$  un tensore, allora

$$\max_i r_i \leq \text{rk } f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

*Dimostrazione.* Sia  $r$  il rango di  $f$ , e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}.$$

L'immagine della funzione trasporta  $f_k^\dagger$ , da  $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$ , è contenuta nel generato  $\langle v_{k,1}, \dots, v_{k,r} \rangle$ , e quindi l'immagine ha dimensione al più  $r$ .

Se  $\{u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}\}$  è una base per l'immagine di  $f_i^\dagger$ , allora  $f$  si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni  $k$

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[ \sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{k,j_k} \right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}.$$

Conseguentemente per ogni  $k$ , il rango  $r$  è al più  $\prod_{i \neq k} r_i$ . □

**Corollario 1.8.** Se  $\text{rk } f = 1$ , allora  $\text{rk } f_k = 1$  per ogni  $k$ .

**Corollario 1.9.** Fissato un certo  $k$ , se  $r_j = 1$  per ogni  $j \neq k$  allora  $\text{rk } f_k = \text{rk } f = 1$ .

**Proposizione 1.10.** Sia  $f$  un tensore 1-conciso, tale che  $r_1 \geq \cdots \geq r_d$  e che  $\text{rk } f = r_1$ . Allora  $f_1(V_1^*)$  è generato precisamente da  $r_1$  tensori indecomponibili in  $V_2 \otimes \cdots \otimes V_d$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$  via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger: \bigotimes_{i>1} V_i^* \rightarrow V_1$$

è generata da  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$ . Siccome il rango di  $f_1$ , e quindi quello di  $f_1^\dagger$ , è per ipotesi  $r_1$ , quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore  $f$  è 1-conciso, e quindi  $f_1$  è iniettivo. In definitiva,  $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$  e  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$  formano una base di  $V_1$ .

Consideriamo quindi la base duale  $\{v_1^1, \dots, v_1^{r_1}\}$  di  $V_1^*$ . Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \dots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1, \dots, r_1}. \quad \square$$

Come non-esempio consideriamo  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , ed il tensore

$$f := e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_0.$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle.$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre,  $\text{mrk } f$  è  $(2, 2, 2)$ . Conseguentemente,  $\text{rk } f = 3$  come ci si può immaginare.

**Proposizione 1.11.** *Sia  $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ . Il rango di  $f$  coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene  $f_1(V_1^*)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $r$  è il rango di  $f$ , allora  $f$  si scrive come  $\sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}$  e conseguentemente  $f_1(V_1^*)$  è contenuto in  $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$ .

D'altra parte, supponiamo che  $f_1(V_1^*)$  sia contenuto in  $\langle v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$ . Fissiamo una base  $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m}\}$  di  $V_1$ , ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i} v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i} \quad 1 \leq k \leq r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i} v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}. \quad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

**Definizione 1.12.** Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre spazi vettoriali su  $\mathbb{C}$ . Inoltre sia  $\{a_1, \dots, a_n\}$  una base di  $A$ , e sia  $V$  un sottospazio di  $B \otimes C$  con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Una *modificazione* di  $f \in A \otimes B \otimes C$  è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j.$$

Analogo per  $V$  in  $A \otimes B$  o in  $A \otimes C$ .

**Definizione 1.13.** Dato  $V_1 \subseteq B \otimes C$ ,  $V_2 \subseteq A \otimes C$  e  $V_3 \subseteq A \otimes B$  il rango minimale modulo tre sottospazi  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  è

$$\text{minrk}(f \text{ mod } V_1 V_2 V_3) := \min\{\text{rk } \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}.$$

**Proposizione 1.14.** Sia  $f \in A \otimes B \otimes C$  un tensore conciso di rango  $r$ , e poniamo  $f = \sum_{k=1}^m g_k \otimes c_k$  con  $g_i \in A \otimes B$  e  $\{c_1, \dots, c_m\}$  una base di  $C$ . Se  $g_1 \neq 0$ , esistono costanti  $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  tali che

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^\perp)^*$$

ha rango al più  $r-1$ . Se  $\text{rk } g_1 = 1$ , allora  $\hat{f}$  ha rango almeno  $r-1$  qualunque siano le costanti.

*Dimostrazione.* Sappiamo che esistono  $h_1, \dots, h_r$ , tensori di rango 1 in  $A \otimes B$ , che generano uno spazio contenente  $f_3(C^*)$ . Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t} h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità,  $\alpha^{1,1} \neq 0$ , e porre  $\lambda_j := \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[ \alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}} \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[ \sum_{t=2}^r \left( \alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1} \alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j \end{aligned}$$

Ergo  $\hat{f}_3(c_1^\perp)$  è contenuto in  $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$ , che uno span di tensori di rango 1. Quindi  $\hat{f}$  ha rango al più  $r-1$ .

Se il rango di  $g_1 \in A \otimes B$  è 1, allora possiamo tranquillamente porre  $h_1 = g_1$ . In questo caso  $\alpha^{1,t} = 0$  per ogni  $t > 1$  e  $\hat{f}$  assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti  $\lambda_j \in \mathbb{C}$* :

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m \sum_{t=2}^r \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^r h_t \otimes \left[ \sum_{j=2}^m \alpha^{j,t} c_j \right].$$

Ma questo implica che  $\hat{f}_3(c_1^\perp)$  coincide con  $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$ , da cui

$$\text{rk } \hat{f} \geq \text{rk } \hat{f}_3 = r-1.$$

□

**Corollario 1.15.** Sia  $f \in A \otimes B \otimes C$ , e sia  $f$  un tensore  $C$ -conciso. Fissato un sottospazio  $W$  di  $C^*$ , allora

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod 0 \ 0 \ f_3(W)) + \dim W,$$

e l'uguaglianza si ottiene se  $f(W)$  è generato da tensori di rango 1.

*Dimostrazione.* Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a  $\dim W$ .  $\square$

**Corollario 1.16.** Se  $f \in A \otimes B \otimes C$  è conciso, e  $U \subseteq A^*$ ,  $V \subseteq B^*$ ,  $W \subseteq C^*$  sono sottospazi, allora

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod f(U) \ f(V) \ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W,$$

e se  $f(U)$ ,  $f(V)$ ,  $f(W)$  sono generati da tensori dai rango 1, vale l'uguaglianza.

## 2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

**Definizione 2.1.** Dato un gruppo  $G$ , un  $G$ -modulo è, in questo contesto, un  $\mathbb{C}[G]$ -modulo nel senso dell'algebra commutativa.

**Definizione 2.2.** Se  $G$  agisce su un  $\mathbb{C}$ -spazio  $V$  e  $W$  (tramite un morfismo  $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ )

- (i)  $G$  agisce su  $V^*$  via  $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^\dagger$ ;
- (ii)  $G$  agisce su  $V \oplus W$  via  $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$ ;
- (iii)  $G$  agisce su  $V \otimes W$  via  $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$ .

**Definizione 2.3.** L'algebra tensoriale  $(TV, \otimes)$  è definita come

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}.$$

Vogliamo definire l'algebra simmetrica.

**Definizione 2.4.** I  $d$ -tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{ \alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha \ \forall \sigma \in S_d \},$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica*  $\pi_S$  da  $TV$  in  $SV$ :

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d).$$

**Proposizione 2.5.** *Lo spazio  $S^d V$  è generato dall'insieme  $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$ .*

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, d\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{d-|I|} \left[ \sum_{i \in I} v_i \right]^{\otimes d},$$

e che per ogni  $\alpha \in S^d V$  la somma precedente coincide con  $d! \cdot \alpha$ .  $\square$

L'algebra  $SV$  risulta effettivamente un'algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico*  $\odot$  su  $SV$  come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta).$$

**Osservazione.** Se  $v_1, \dots, v_n$  è una base di  $V$ , una base di  $S^d V$  è data da

$$\mathcal{B}_{S^d V} = \{v_{j_1} \odot \cdots \odot v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim S^d V = \binom{n+d-1}{d}.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori*. Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

**Proposizione 2.6.** *Dato un tensore  $f \in S^2 V$  di rango  $r$ , esso ammette una decomposizione della forma*

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i.$$

**Proposizione 2.7.** *La rappresentazione di  $GL(V)$  sullo spazio vettoriale  $S^2 V$  è irriducibile.*

*Dimostrazione.* Sia  $W \subseteq S^2 V$  un  $GL(V)$ -sottomodulo contenente un tensore  $f$  non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

con  $v_1, \dots, v_r$  indipendenti.

Sia un morfismo  $g \in GL(V)$  per cui  $g(v_1) = 2v_1$  e  $g(v_i) = v_i$  per ogni  $i > 1$ . Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W \quad \square$$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico*.

**Definizione 2.8.** Il rango simmetrico di  $f \in S^dV$  è

$$\text{rk}_S f := \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \dots + v_r^{\otimes d}\}.$$

Sicuramente  $\text{rk} f \leq \text{rk}_S f$ , e vale l'uguaglianza per  $d = 2$ . È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon*. Nel 2018 Shitov [2] ha pensato di trovare un controesempio, smentito da sé stesso nel 2024 [1].

**Proposizione 2.9.** Posto  $\mathbb{C}[V]$  l'algebra delle funzioni  $V \rightarrow \mathbb{C}$  generata da  $V^*$ , lo spazio  $S^dV^*$  è isomorfo a  $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$ .

*Dimostrazione.* La mappa che funziona è

$$\Phi: S^dV^* \rightarrow \mathbb{C}[V]_d, \quad \phi \mapsto f_\phi,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \dots, v). \quad \square$$

**Definizione 2.10** (Waring rank). Per ogni  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$  il rango di Waring è

$$\text{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^d + \dots + l_r^d, \text{ } l_i \text{ forma lineare}\}.$$

**Definizione 2.11.** I  $d$ -tensori antisimmetrici sono

$$\Lambda^dV := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \text{sgn}(\sigma) \alpha \ \forall \sigma \in S_d\},$$

e l'algebra antisimmetrica è

$$\Lambda V := \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^dV.$$

Definiamo la proiezione antisimmetrica  $\pi_\Lambda$  come

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

Analogamente a quanto fatto prima definiamo il prodotto antisimmetrico (o *wedge*) come

$$\alpha \wedge \beta := \pi_\Lambda(\alpha \otimes \beta).$$

**Proposizione 2.12.** *Un insieme finito  $v_1, \dots, v_d$  è linearmente indipendente se e solo se*

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0.$$

**Corollario 2.13.** *Una base  $\mathcal{B}_{\Lambda^d V}$  di  $\Lambda^d V$  è*

$$\mathcal{B}_{\Lambda^d V} = \{v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim \Lambda^d V = \binom{n}{d}.$$

**Proposizione 2.14.** *Lo spazio  $\Lambda^2 V$  è un  $GL(V)$ -modulo irriducibile.*

### 3 Decomposizione di Tensori

Dati due spazi  $A, B$ , lo spazio  $G := GL(A) \times (B)$  è incluso in  $GL(A \otimes B)$ . Dei teoremi di semplice decomposizione sono dati dai seguenti.

**Proposizione 3.1.** *Lo spazio  $S^2(A \otimes B)$  si  $G$ -decompone come*

$$S^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes S^2 B) \oplus (\Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

*Ed allo stesso modo  $\Lambda^2(A \otimes B)$  si  $G$ -decompone come*

$$\Lambda^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \oplus (S^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

Gli elementi di  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$  hanno le orbite secondo  $(GL_2(\mathbb{C}))^3$  che seguono la seguente tabella:

orbita	$r_1$	$r_2$	$r_3$	rk $f$	rappresentante
$A$	1	1	1	1	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0$
$B_1$	1	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1$
$B_2$	2	1	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1$
$B_3$	2	2	1	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
$W$	2	2	2	3	$a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
$G$	2	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$

### Riferimenti bibliografici

- [1] J. Draisma. «Erratum: A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 8.1 (2024), pp. 225–225. <https://doi.org/10.1137/23M1623781>.
- [2] Y. Shitov. «A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), pp. 428–443. <https://doi.org/10.1137/17M1131970>.