

Introduction to Tensor Spaces

Appunti del Corso

Mirko Torresani

21 gennaio 2025

Indice

1	Fatti Introduttivi	1
2	Algebre Tensoriali	5
3	Decomposizione di Tensori	8
4	Varietà Algebriche Tensoriali	9
5	Teoria dell'Apolarità	14
6	Grassmaniane	17
7	Rappresentazioni	21
	Riferimenti bibliografici	24

1 Fatti Introduttivi

Per noi gli spazi vettoriali saranno di dimensione finita, con campo base \mathbb{C} .

Definizione 1.1. Il prodotto tensoriale $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è definito come lo spazio $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; \mathbb{C})$.

Definizione 1.2. Dato un tensore $f \in V \otimes W$, il suo rango $\text{rk } f$ è

$$\text{rk } f = \min \left\{ s \mid f = \sum_{i=1}^s v_i \otimes w_i \right\}.$$

Proposizione 1.3. Il rango $\text{rk } f$ è equivalentemente definibile come

- (i) il rango del morfismo $V^* \rightarrow V$ associato a f ;
- (ii) posto $f = \sum c_{ij} v_i \otimes w_j$, con $(v_i)_i$ e $(w_j)_j$ rispettive basi, il rango di f è il rango della matrice $(c_{ij})_{i,j}$.

Nel caso in cui abbiamo un prodotto tensore di più spazi, le cose si complicano.

Definizione 1.4. Dato un elemento $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, il rango $\text{rk } f$ è definito come

$$\text{rk } f = \min\{s \mid f = \sum_{j=1}^s v_{j,1} \otimes \cdots \otimes v_{j,d}\}$$

Un argomento, storicamente molto importate, riguarda il *calcolo del rango tensoriale*. Per una sua prima trattazione introduciamo la seguente notazione: se f è un vettore in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$, allora f induce mappe

$$f_k: V_k^* \rightarrow \bigotimes_{i \neq k} V_i \quad f_k^\dagger: \bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$$

per ogni k .

Definizione 1.5. Un tensore $f \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ si dice V_i -conciso, o i -conciso, se f_i .

Definizione 1.6. Il multi-rango di f è definito come

$$\text{mrk } f = (\text{rk } f_1, \dots, \text{rk } f_d) =: (r_1, \dots, r_d),$$

dove $\text{rk } f_k$ è il rango di f_k come mappa lineare (o equivalentemente il rango della mappa trasporta f_k^\dagger).

Per il resto della trattazione useremo la *notazione di Einstein*: quando lo stesso indice compare come pedice e apice, allora viene intesa una sommatoria rispetto a quell'indice, se non diversamente indicato.

Proposizione 1.7. Sia f un tensore, allora

$$\max_i r_i \leq \text{rk } f \leq \min_i \prod_{j \neq i} r_j$$

Dimostrazione. Sia r il rango di f , e poniamo

$$f = \sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{d,i}.$$

L'immagine della funzione trasporta f_k^\dagger , da $\bigotimes_{i \neq k} V_i^* \rightarrow V_k$, è contenuta nel generato $\langle v_{k,1}, \dots, v_{k,r} \rangle$, e quindi l'immagine ha dimensione ha al più dimensione r .

Se $\{u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}\}$ è una base per l'immagine di f_i^\dagger , allora f si può scrivere come

$$f = \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}$$

e per ogni k

$$f = u_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-1,j_{k-1}} \otimes \left[\sum_{j_k=1}^{r_k} \alpha^{j_1, \dots, j_d} u_{k,j_k} \right] \otimes u_{k+1,j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes u_{d,j_d}.$$

Conseguentemente per ogni k , il rango r è al più $\prod_{i \neq k} r_i$. □

Corollario 1.8. Se $\text{rk } f = 1$, allora $\text{rk } f_k = 1$ per ogni k .

Corollario 1.9. Fissato un certo k , se $r_j = 1$ per ogni $j \neq k$ allora $\text{rk } f_k = \text{rk } f = 1$.

Proposizione 1.10. Sia f un tensore 1-conciso, tale che $r_1 \geq \dots \geq r_d$ e che $\text{rk } f = r_1$. Allora $f_1(V_1^*)$ è generato precisamente da r_1 tensori indecomponibili in $V_2 \otimes \dots \otimes V_d$.

Dimostrazione. Sappiamo che $f = \sum_{i=1}^{r_1} v_{1,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}$ via vettori arbitrari. Conseguentemente, l'immagine di

$$f_1^\dagger: \bigotimes_{i>1} V_i^* \rightarrow V_1$$

è generata da $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$. Siccome il rango di f_1 , e quindi quello di f_1^\dagger , è per ipotesi r_1 , quei vettori devono essere necessariamente indipendenti. Inoltre, per ipotesi, il tensore f è 1-conciso, e quindi f_1 è iniettivo. In definitiva, $\dim V_1^* = \dim V_1 = r_1$ e $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}\}$ formano una base di V_1 .

Consideriamo quindi la base duale $\{v_1^1, \dots, v_1^{r_1}\}$ di V_1^* . Per costruzione

$$f(V_1^*) = \langle f(v_1^1), \dots, f(v_1^{r_1}) \rangle = \langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1, \dots, r_1}. \quad \square$$

Come non-esempio consideriamo $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, ed il tensore

$$f := e_0 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_0 \otimes e_0.$$

Si può osservare che in effetti è 1-conciso, e che

$$f(V_1^*) = \langle e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, e_0 \otimes e_0 \rangle.$$

Tuttavia quest'ultima espressione non può essere ricondotta ad uno span di tensori indecomponibili. Inoltre, $\text{mrk } f$ è $(2, 2, 2)$. Conseguentemente, $\text{rk } f = 3$ come ci si può immaginare.

Proposizione 1.11. Sia $f \in V_1 \otimes \dots \otimes V_d$. Il rango di f coincide col minimo numero di elementi indecomponibili necessari per generare uno spazio che contiene $f_1(V_1^*)$.

Dimostrazione. Se r è il rango di f , allora f si scrive come $\sum_{i=1}^r v_{1,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}$ e conseguentemente $f_1(V_1^*)$ è contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$.

D'altra parte, supponiamo che $f_1(V_1^*)$ sia contenuto in $\langle v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \rangle_{i=1}^r$. Fissiamo una base $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m}\}$ di V_1 , ed una conseguente base duale. Allora

$$f_1(v_1^k) = \alpha^{k,i} v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i} \quad 1 \leq k \leq r,$$

e

$$f = \alpha^{k,i} v_{1,k} \otimes v_{2,i} \otimes \dots \otimes v_{d,i}. \quad \square$$

Consideriamo ora il caso in cui tensoriamo solo per *tre* spazi.

Definizione 1.12. Siano A, B e C tre spazi vettoriali su \mathbb{C} . Inoltre sia $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base di A , e sia V un sottospazio di $B \otimes C$ con base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Una *modificazione* di $f \in A \otimes B \otimes C$ è una somma della forma

$$f + \sum_{i,j} a_i \otimes v_j.$$

Analogo per V in $A \otimes B$ o in $A \otimes C$.

Definizione 1.13. Dato $V_1 \subseteq B \otimes C$, $V_2 \subseteq A \otimes C$ e $V_3 \subseteq A \otimes B$ il *rango minimale modulo tre sottospazi* V_1, V_2 e V_3 è

$$\text{minrk}(f \text{ mod } V_1 \ V_2 \ V_3) := \min\{\text{rk } \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ modificazione ottenuta da un singolo } V_i\}.$$

Proposizione 1.14. Sia $f \in A \otimes B \otimes C$ un tensore conciso di rango r , e poniamo $f = \sum_{k=1}^m g_k \otimes c_k$ con $g_i \in A \otimes B$ e $\{c_1, \dots, c_m\}$ una base di C . Se $g_1 \neq 0$, esistono costanti $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tali che

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \in A \otimes B \otimes (c_1^\perp)^*$$

ha rango al più $r - 1$. Se $\text{rk } g_1 = 1$, allora \hat{f} ha rango almeno $r - 1$ qualunque siano le costanti.

Dimostrazione. Sappiamo che esistono h_1, \dots, h_r , tensori di rango 1 in $A \otimes B$, che generano uno spazio contenente $f_3(C^*)$. Quindi

$$g_j = \alpha^{j,t} h_t \in A \otimes B.$$

Conseguentemente

$$f = \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j.$$

Possiamo assumere, senza perdita di generalità, $\alpha^{1,1} \neq 0$, e porre $\lambda_j := \alpha^{j,1}/\alpha^{1,1}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \sum_{j=2}^m (g_j - \lambda_j g_1) \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[\alpha^{j,t} h_t - \frac{\alpha^{j,1}}{\alpha^{1,1}} \alpha^{1,t} h_t \right] \otimes c_j \\ &= \sum_{j=2}^m \left[\sum_{t=2}^r \left(\alpha^{j,t} - \frac{\alpha^{j,1} \alpha^{1,t}}{\alpha^{1,1}} \right) h_t \right] \otimes c_j \end{aligned}$$

Ergo $\hat{f}_3(c_1^\perp)$ è contenuto in $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$, che uno span di tensori di rango 1. Quindi \hat{f} ha rango al più $r - 1$.

Se il rango di $g_1 \in A \otimes B$ è 1, allora possiamo tranquillamente porre $h_1 = g_1$. In questo caso $\alpha^{1,t} = 0$ per ogni $t > 1$ e \hat{f} assume la forma seguente, *indipendentemente dalle costanti* $\lambda_j \in \mathbb{C}$:

$$\hat{f} = \sum_{j=2}^m \sum_{t=2}^r \alpha^{j,t} h_t \otimes c_j = \sum_{t=2}^r h_t \otimes \left[\sum_{j=2}^m \alpha^{j,t} c_j \right].$$

Ma questo implica che $\hat{f}_3(c_1^\perp)$ coincide con $\langle h_2, \dots, h_r \rangle$, da cui

$$\text{rk } \hat{f} \geq \text{rk } \hat{f}_3 = r - 1. \quad \square$$

Corollario 1.15. *Sia $f \in A \otimes B \otimes C$, e sia f un tensore C -conciso. Fissato un sottospazio W di C^* , allora*

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod 0 \ 0 \ f_3(W)) + \dim W,$$

e l'uguaglianza si ottiene se $f(W)$ è generato da tensori di rango 1.

Dimostrazione. Applichiamo la proposizione precedente per un numero di volte pari a $\dim W$. \square

Corollario 1.16. *Se $f \in A \otimes B \otimes C$ è conciso, e $U \subseteq A^*$, $V \subseteq B^*$, $W \subseteq C^*$ sono sottospazi, allora*

$$\text{rk } f \geq \text{minrk}(f \bmod f(U) \ f(V) \ f(W)) + \dim U + \dim V + \dim W,$$

e se $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$ sono generati da tensori di rango 1, vale l'uguaglianza.

2 Algebre Tensoriali

Parliamo brevemente di algebre tensoriali.

Definizione 2.1. Dato un gruppo G , un G -modulo è, in questo contesto, un $\mathbb{C}[G]$ -modulo nel senso dell'algebra commutativa.

Definizione 2.2. Se G agisce su un \mathbb{C} -spazio V e W (tramite un morfismo $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$)

- (i) G agisce su V^* via $\rho^*(g) = [\rho(g)^{-1}]^\dagger$;
- (ii) G agisce su $V \oplus W$ via $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$;
- (iii) G agisce su $V \otimes W$ via $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

Definizione 2.3. L'algebra tensoriale (TV, \otimes) è definita come

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}.$$

Vogliamo definire l'algebra simmetrica.

Definizione 2.4. I d -tensori simmetrici sono

$$S^d V := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \alpha \ \forall \sigma \in S_d\},$$

e l'algebra simmetrica è

$$SV := \bigoplus_{d \geq 0} S^d V.$$

Definiamo ora la *proiezione simmetrica* π_S da TV in SV :

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d).$$

Proposizione 2.5. Lo spazio $S^d V$ è generato dall'insieme $\{v^{\otimes d} \mid v \in V\}$.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, d\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{d-|I|} \left[\sum_{i \in I} v_i \right]^{\otimes d},$$

e che per ogni $\alpha \in S^d V$ la somma precedente coincide con $d! \cdot \alpha$. □

L'algebra SV risulta effettivamente un'algebra, grazie all'introduzione del *prodotto simmetrico* \odot su SV come

$$\alpha \odot \beta = \pi_S(\alpha \otimes \beta).$$

Osservazione. Se v_1, \dots, v_n è una base di V , una base di $S^d V$ è data da

$$\mathcal{B}_{S^d V} = \{v_{j_1} \odot \cdots \odot v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim S^d V = \binom{n+d-1}{d}.$$

In seguito sarà molto importante parlare di *decomposizione di tensori*. Un esempio in quella direzione viene ai prossimi risultati.

Proposizione 2.6. Dato un tensore $f \in S^2 V$ di rango r , esso ammette una decomposizione della forma

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i.$$

Proposizione 2.7. La rappresentazione di $GL(V)$ sullo spazio vettoriale $S^2 V$ è irriducibile.

Dimostrazione. Sia $W \subseteq S^2V$ un $GL(V)$ -sottomodulo contenente un tensore f non nullo. Sicuramente possiamo scrivere

$$f = \sum_{i=1}^r v_i \otimes v_i \quad v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

con v_1, \dots, v_r indipendenti.

Sia un morfismo $g \in GL(V)$ per cui $g(v_1) = 2v_1$ e $g(v_i) = v_i$ per ogni $i > 1$. Allora vale che

$$W \ni \frac{1}{3}(g \cdot f - f) = v_1 \otimes v_1,$$

e quindi

$$S^2V = \langle (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_1) \rangle_{g \in GL(V)} \subseteq W \quad \square$$

Possiamo analogamente definire un *rango simmetrico*.

Definizione 2.8. Il rango simmetrico di $f \in S^dV$ è

$$\text{rk}_S f := \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = v_1^{\otimes d} + \dots + v_r^{\otimes d}\}.$$

Sicuramente $\text{rk} f \leq \text{rk}_S f$, e vale l'uguaglianza per $d = 2$. È una congettura se sono uguali, detta *congettura di Comon*. Nel 2018 Shitov [2] ha pensato di trovare un controesempio, smentito da sé stesso nel 2024 [1].

Proposizione 2.9. Posto $\mathbb{C}[V]$ l'algebra delle funzioni $V \rightarrow \mathbb{C}$ generata da V^* , lo spazio S^dV^* è isomorfo a $\mathbb{C}[V]_d \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$.

Dimostrazione. La mappa che funziona è

$$\Phi: S^dV^* \rightarrow \mathbb{C}[V]_d, \quad \phi \mapsto f_\phi,$$

con

$$f_\phi(v) = \phi(v, \dots, v). \quad \square$$

Definizione 2.10 (Waring rank). Per ogni $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$ il rango di Waring è

$$\text{rk}_S f = \min\{r \in \mathbb{N} \mid f = l_1^d + \dots + l_r^d, \quad l_i \text{ forma lineare}\}.$$

Definizione 2.11. I d -tensori antisimmetrici sono

$$\Lambda^dV := \{\alpha \in V^{\otimes d} \mid \sigma \cdot \alpha = \text{sgn}(\sigma) \alpha \quad \forall \sigma \in S_d\},$$

e l'algebra antisimmetrica è

$$\Lambda V := \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^dV.$$

Definiamo la proiezione antisimmetrica π_Λ come

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

Analogamente a quanto fatto prima definiamo il prodotto antisimmetrico (o *wedge*) come

$$\alpha \wedge \beta := \pi_\Lambda(\alpha \otimes \beta).$$

Proposizione 2.12. *Un insieme finito v_1, \dots, v_d è linearmente indipendente se e solo se*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0.$$

Corollario 2.13. *Una base $\mathcal{B}_{\Lambda^d V}$ di $\Lambda^d V$ è*

$$\mathcal{B}_{\Lambda^d V} = \{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n}$$

e quindi

$$\dim \Lambda^d V = \binom{n}{d}.$$

Proposizione 2.14. *Lo spazio $\Lambda^2 V$ è un $GL(V)$ -modulo irriducibile.*

3 Decomposizione di Tensori

Dati due spazi A, B , lo spazio $G := GL(A) \times (B)$ è incluso in $GL(A \otimes B)$. Dei teoremi di semplice decomposizione sono dati dai seguenti.

Proposizione 3.1. *Lo spazio $S^2(A \otimes B)$ si G -decompone come*

$$S^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes S^2 B) \oplus (\Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

Ed allo stesso modo $\Lambda^2(A \otimes B)$ si G -decompone come

$$\Lambda^2(A \otimes B) = (S^2 A \otimes \Lambda^2 B) \oplus (S^2 A \otimes \Lambda^2 B).$$

Gli elementi di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ si decompongono in $(GL_2(\mathbb{C}))^3$ -orbite secondo la seguente tabella:

orbita	r_1	r_2	r_3	$\text{rk } f$	rappresentante
A	1	1	1	1	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0$
B_1	1	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1$
B_2	2	1	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1$
B_3	2	2	1	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
W	2	2	2	3	$a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_0 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_0$
G	2	2	2	2	$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$

4 Varietà Algebriche Tensoriali

Definizione 4.1. Sia $Z \subseteq \mathbb{P}V$ un sottoinsieme dello spazio proiettivo su V . Il *cono affine* è $\hat{V} := \pi^{-1}(Z)$, con π la proiezione proiettiva.

Definizione 4.2. Se X l'insieme di zeri comuni di $S \subseteq S^\bullet V^*$, allora poniamo $X := Z(S)$.

Definizione 4.3. Viceversa, dato $A \subseteq \mathbb{P}V$,

$$I(A) := \{F \in S^\bullet V^* \mid F(a) = 0 \ \forall a \in \hat{A}\}$$

è l'ideale di A .

Definizione 4.4. L'embedding di Segre è dato da

$$\begin{aligned} \text{Seg}: \mathbb{P}A \times \mathbb{P}B &\rightarrow \mathbb{P}(A \otimes B) \\ ([a], [b]) &\mapsto [a \otimes b] \end{aligned}$$

L'immagine è data dalla proiezione delle matrici $\dim A \times \dim B$ di rango 1, cioè dal luogo di zeri di $\Lambda^2 A^* \otimes \Lambda^2 B^* \subseteq S^2(A \otimes B)$.

Proposizione 4.5. In generale l'analoga mappa da $\mathbb{P}A_1 \times \cdots \times \mathbb{P}A_n$ a $\mathbb{P}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$ dà come immagine un'insieme chiuso.

Definizione 4.6. La d -mappa di Veronese è

$$\begin{aligned} v_d: \mathbb{P}V &\rightarrow \mathbb{P}(S^d V) \\ [a] &\mapsto [a^{\otimes d}] \end{aligned}$$

L'immagine è costituita da $\text{Seg}((\mathbb{P}V)^n) \cap \mathbb{P}(S^d V)$, e quindi è una varietà proiettiva.

Definizione 4.7. Data una mappa f da V in sé, $f^{\wedge m}$ è la naturale endomorfismo di $\Lambda^m V$. Se $m = \dim V$, $f^{\wedge m}$ è la moltiplicazione per $\det(f)$.

Definizione 4.8. La Grassmanniana è

$$\text{Gr}(r, V) := \{[v_1 \wedge \cdots \wedge v_r] \mid v_f \in V\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^r V).$$

Osserviamo che nel proiettivo un tale prodotto wedge è insensibile a cambi di base del sottospazio generato. La Grassmaniana parametrizza quindi i sottospazi

Definizione 4.9. Per ogni $\phi \in V^*$ e $v \in V$, definiamo $\phi \lrcorner v := \phi(v)$. Per induzione se $\phi \in V^*$, $v \in V$ e $f \in \Lambda^k V$ imponiamo

$$\phi \lrcorner (v \wedge f) := (\phi \lrcorner v) \wedge f - v \wedge (\phi \lrcorner f).$$

Infine imponiamo $(\phi \wedge g) \lrcorner f := \phi \lrcorner (g \lrcorner f)$.

Proposizione 4.10. $f \in \Lambda^r V$ può essere scritta come un prodotto wedge $w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$ se e solo se

$$(\psi \lrcorner f) \wedge f = 0 \quad \forall \psi \in \Lambda^{r-1} V^*$$

In particolare, se

$$f = p_{i_1 \dots i_r} v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_r}$$

allora l'equazione diventa

$$\sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k p_{i_1 \dots i_{r-1} j_k} p_{j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_{r+1}} = 0,$$

per ogni scelta di multiindici (i_1, \dots, i_r) e (j_1, \dots, j_{r+1}) . Avendo ottenuto una equazione polinomiale, $\text{Gr}(r, V)$ è una varietà proiettiva.

Parliamo ora di spazi tangenti.

Definizione 4.11. Sia $M \subseteq V$ un sottoinsieme e $v \in V$. Allora

$$\hat{T}_v M := \left\{ \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} \mid \gamma: \mathbb{C} \rightarrow M \text{ curva liscia} \right\}$$

è lo spazio tangente.

Osserviamo che lo spazio tangente su v o su λv rimane invariato per $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Definizione 4.12. Sia $X \subseteq \mathbb{P}V$ una varietà proiettiva. Un punto $v \in X$ si dice liscio se esiste un insieme aperto U (di Zarinksi) su cui lo spazio tangente $\hat{T}_w X$ ha la stessa dimensione per ogni $w \in U$. L'insieme dei punti singolari è un chiuso proiettivo.

Poniamo quindi

$$\dim X := \dim(\hat{T}_v X) - 1$$

con v un punto liscio.

Proposizione 4.13. Vale che

$$\hat{T}_{v_1 \otimes \dots \otimes v_d} \text{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_d) = \sum_{j=1}^d v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes V_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_d.$$

Proposizione 4.14. Analogamente vale che

$$\hat{T}_{[v^{\otimes d}]} v_d(\mathbb{P}V) = \{[v^{\otimes (d-1)} \otimes w] \mid w \in V\}.$$

Parliamo ora di orbite. Sulle nostre varietà proiettive facciamo agire $G := SL(V)$. È il rivestimento universale (di grado finito) di $PGL(V)$.

Proposizione 4.15 (Borel). *Se un'azione è algebrica, allora per ogni orbita \mathcal{O} la sua chiusura è ancora G -invariante e*

$$\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{\text{orbite di dimensione minore}\}.$$

Conseguentemente, le orbite di dimensione minore sono chiuse, e se l'azione è irriducibile, essa è unica.

In questa ottica delle azioni, guardiamo alle tre varietà di prima.

- (i) Dato l'embedding di Veronese v_d , esso è G -equivariante, e la sua immagine è l'*orbita chiusa* per l'azione di G su $\mathbb{P}(S^d V)$.
- (ii) Per quanto riguarda, l'embedding di Segre, l'immagine è l'orbita chiusa per l'azione di $SL(V_1) \times \cdots \times SL(V_d)$.
- (iii) Possiamo anche considerare varietà di Segre-Veronese dentro

$$\mathbb{P}(S^{a_1} V \otimes \cdots \otimes S^{a_d} V)$$

- (iv) Le varietà di Grassmann *proiettive*, indicate come $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}V)$, possiedono delle naturali coordinate di Plücker che le immergono dentro $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1} V)$.

Parliamo ora di *varietà secanti*. Iniziamo ora con delle definizioni.

Definizione 4.16. Siano X e Y sottoinsiemi di $\mathbb{P}(W)$. Il Join è definito come

$$J(X, Y) := \overline{\bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \langle x, y \rangle}$$

La chiusura serve per prendere anche le tangenti come limite di secanti.

Se $X = Y = v_3(\mathbb{P}\mathbb{C}^2)$, dato in coordinate come $(\dim_{\mathbb{C}} S^3 \mathbb{C}^2 = 4)$

$$[x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, 3x_0^2 x_1, 3x_0 x_1^2, x_1^3],$$

allora X prende il nome di *cubica gobba*. Studiamo ora l'azione di SL_2 su $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$. Abbiamo tre orbite che sono

$$X, \text{ Tan}(X) \setminus X, \mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \text{Tan}(X)$$

Se $f \in S^3 \mathbb{C}^2$, allora può essere pensato come un polinomio omogeneo cubico in x_0 e x_1 . Su \mathbb{C} ricade in tre casistiche

- (i) f una radice tripla, e appartiene a X .
- (ii) f ha una radice singola ed una doppia, ed appartiene a $\text{Tan}(X) \setminus X$;
- (iii) f ha tre radici singole, ed appartiene a $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \setminus \text{Tan}(X)$.

Può essere dimostrato che $X \cup (\mathbb{P}(S^2 \mathbb{C}^3) \setminus \text{Tan}(X))$ coincide esattamente con l'unione delle secanti. Detto altrimenti, $J(X, X)$ è tutto lo spazio $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$.

Definizione 4.17. La varietà secante è data da

$$\sigma_k(X) := J(X, \dots, X).$$

Abbiamo quindi una catena ascendente

$$X \subseteq \sigma_1(X) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_{p_0}(X) = \mathbb{P}(W).$$

Se consideriamo X come $\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$ dentro $\mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$, allora

$$\sigma_r(X) = \{f \in \text{Hom}(V_1^\vee, V_2) \mid \text{rk } f \leq r\},$$

in quanto ogni matrice di rango r (in senso matriciale) può essere scritta come somma di matrici di rango 1.

Si può dimostrare che la chiusura di Zarinksky di

$$\{f \in \text{Hom}(V_1^\vee, V_2) \mid \text{rk } f = r\}$$

coincide precisamente con $\sigma_r(X)$. Questo recupera il risultato di Borel.

Consideriamo ora il caso $X = v_d(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$, con $d \geq 3$.

Per $d = 3$ siamo di fronte alla cubica gobba. Se supponiamo di proiettare questa cubica su un piano, usando un generico punto $p \notin X$ come fuoco, osserviamo che la proiezione ha un nodo precisamente se p è in una secante, o ha una cuspidale precisamente quando p sta in una tangente. Ma una cubica in un piano può solo avere un nodo. Quindi se p sta su una secante, essa è unica. Analogamente se $p \notin X$ sta su una tangente essa è unica. Si può provare, come già detto, che $\sigma_2(X) = \mathbb{P}^3\mathbb{C}$.

Per $d = 4$ stiamo guardando l'immersione di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^4\mathbb{C}$. In questo caso abbiamo infinite SL_2 -orbite, in quanto quattro radici non possono essere generalmente portate una dentro l'altra. La catena secante è della forma

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \sigma_3(X) = \mathbb{P}^4$$

Capiamo l'equazione di $\sigma_2(X)$. Sia

$$S^2\mathbb{C}^{2\vee} = \{\alpha_0\partial_0^2 + 2\alpha_1\partial_0\partial_1 + \alpha_2\partial_1^2\}$$

e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f: S^2\mathbb{C}^{2\vee} &\rightarrow S^2\mathbb{C}^2 \\ \partial &\mapsto \partial f \end{aligned}$$

con $f \in S^4\mathbb{C}^2$.

Sia ℓ una forma lineare. Allora l'immagine di \mathcal{C}_{ℓ^4} è \mathbb{C} -generata da ℓ^2 ed ha dimensione 1. Inoltre,

$$\mathcal{C}_{\lambda f + \mu g} = \lambda \mathcal{C}_f + \mu \mathcal{C}_g$$

e quindi se ℓ_1, ℓ_2 sono due forme lineari, allora

$$\text{rk } \mathcal{C}_{\lambda_1\ell_1^4 + \lambda_2\ell_2^4} \leq 2.$$

Quindi la mappa precedente ha sempre determinante nullo, in quanto $\dim S^2\mathbb{C}^2 = 3$.

Conseguentemente, la varietà $\sigma_2(X)$ è contenuta in $V(\det \mathcal{C}_f)$. Inoltre vale l'uguaglianza in quanto $\det \mathcal{C}_f$ è un polinomio cubico irriducibile.

Inoltre, SL_2 agisce su $S^4\mathbb{C}^2$, e quindi su

$$\bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2).$$

Proposizione 4.18. *Il sottoanello*

$$\left[\bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2) \right]^{SL_2} \subseteq \bigoplus_d S^d(S^4\mathbb{C}^2)$$

è un anello polinomiale completo: $\mathbb{C}[I, J]$, con $\deg I = 2$ e $\deg J = 3$. Questo fatto (mi fido) è molto raro in teoria degli invarianti. Inoltre come varietà algebrica è $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, oltre ad essere liscia. A meno di multipli scalari $J = \det \mathcal{C}_f$.

Lemma 4.19. $\dim \sigma_r(X) \leq r \dim(X) + (r - 1)$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\sigma^r(X) := \{(x_1, \dots, x_r, y) \mid y \in \langle x_1, \dots, x_r \rangle\}$$

dentro

$$X \times \dots \times X \times \mathbb{P}W$$

E consideriamo le due mappe

$$X \times \dots \times X \xleftarrow{\pi_1} \sigma^r(X) \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}W.$$

Notiamo che $\pi_2(\sigma^r(X)) = \sigma_r(X)$, e che π_1 è suriettiva con fibra generica $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$. Conseguentemente

$$\begin{aligned} \dim \sigma_r(X) &\leq \dim \sigma^r(X) = \dim(\text{Fibra}) + \dim(X \times \dots \times X) \\ &= (r - 1) + r \dim(X). \end{aligned} \quad \square$$

Si postula che valga l'uguaglianza.

Definizione 4.20. X si dice essere $(h + 1)$ -difettivo se $\sigma_{h+1}X$ ha dimensione minore del minimo tra X e la stima del teorema precedente.

Lemma 4.21 (Terracini). *Se $x_i \in X_i$ sono punti generici, e $p \in \langle x_1, \dots, x_{h+1} \rangle$ è generico, allora*

$$T_p J(X_1, \dots, X_{h+1}) = \langle T_{x_1} X_1, \dots, T_{x_{h+1}} X_{h+1} \rangle.$$

Sia ora $X \subseteq \mathbb{P}^N$, e $p \in \mathbb{P}^N$

Definizione 4.22. Il rango $\text{rk}_X(p)$ è definito come

$$\text{rk}_X(p) = \min\{h + 1 \mid p \in \langle x_1, \dots, x_{h+1} \rangle\}.$$

Definizione 4.23. Il rango di bordo $\text{brk}_X(p)$ è definito come

$$\text{brk}_X(p) = \min\{h + 1 \mid p \in \sigma_{h+1}(X)\}.$$

Ovviamente $\text{brk}_X(p)$ è minore di $\text{rk}_X(p)$.

Se $X = v_d(\mathbb{P}V) = \{\ell^{\otimes d} \mid \ell \in \mathbb{P}V\}$ in $\mathbb{P}(S^d V)$, allora stiamo sostanzialmente guardando al rango simmetrico.

Se $X' = \mathbb{P}V \times \cdots \times \mathbb{P}V$ dentro $\mathbb{P}(V^{\otimes d})$, stiamo guardando al rango normale.

Siccome $v_d(\mathbb{P}V)$ coincide con $X' \cap \mathbb{P}(S^d V)$, allora ogni elemento di $\mathbb{P}(S^d V)$ ha due ranghi. È una congettura se sono uguali.

Inoltre, è sicuramente vero che

$$\sigma_{h+1}(v_d(\mathbb{P}V)) \subseteq \mathbb{P}(S^d V) \cap \sigma_{h+1}(X').$$

È una congettura se valga l'uguaglianza.

Benché il Prof. Ottaviani abbia messo delle note, queste ultime sono così incomprensibili che ho deciso comunque di continuare le note.

5 Teoria dell'Apolarità

Sia $K = \mathbb{C}$, e sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$. Inoltre, siano

$$R = K[x_0, \dots, x_n] \simeq S^\bullet V, \quad S = K[\partial_0, \dots, \partial_n] \simeq S^\bullet V^\vee$$

L'anello R ha un unico ideale massimale omogeneo: $\mathfrak{M} = (\partial_0, \dots, \partial_n)$. Inoltre, S agisce su R additivamente tramite la ovvia azione che indichiamo con \cdot .

D'ora in poi useremo la notazione a multiindice.

Lemma 5.1. Se α e β sono multiindici tali che $|\alpha| = |\beta|$, allora

$$\partial^\alpha \cdot x^\beta = \begin{cases} \alpha! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Corollario 5.2. L'accoppiamento tra $S^d V^\vee$ e $S^d V$ è una dualità, e $S^d V^\vee$ è isomorfo a $(S^d V)^\vee$.

Lemma 5.3. Se $g \in S_d$, e $\ell = \sum c_i x_i$, allora

$$g \cdot \ell^d = d! g(c_0, \dots, c_n)$$

Dimostrazione. Usando la notazione a multiindice, possiamo notare semplicemente che

$$g \cdot \ell^d = g \cdot \left[\sum_{|\alpha|=d} c^\alpha x^\alpha \binom{d}{\alpha} \right] = \sum_{|\alpha|=d} g_\alpha c^\alpha \alpha! \binom{d}{\alpha}$$

che coincide esattamente con $d! g(c_0, \dots, c_n)$. □

Definizione 5.4. Dato $f \in S^d V = R_d$, l'ideale apolare è definito come

$$f^\perp = \{g \in S \mid g \cdot f = 0\}.$$

Definizione 5.5. Una R -algebra S , con R un anello, è detta Artiniana se R è Artiniano e se S è un R -modulo finitamente generato. In particolare, se R è un campo stiamo chiedendo che $\dim_R S$ sia finito.

Proposizione 5.6. (i) f^\perp è un ideale omogeneo (i.e. è un sottomodulo graduato).

(ii) il zoccolo $(f^\perp)_d$ ha K -codimensione 1.

(iii) Se $k > d$, allora $(f^\perp)_k = S^k V^\vee$.

(iv) L 'algebra graduata

$$A_f := S V^\vee / (f^\perp) = \bigoplus_{e=0}^{\infty} S^e V^\vee / (f^\perp)_e.$$

è un'algebra Artiniana.

Proposizione 5.7. Sia $f \in S^d V$. Allora per ogni $e < d$ vale che

$$(f^\perp)_e = [(f^\perp)_d : \mathfrak{M}^{d-2}]_e = \{g \in S_e \mid \forall h \in \mathfrak{M}^{d-e} (gh) \cdot f = 0\}.$$

Dimostrazione. L'inclusione \subseteq è immediata.

Per quanto riguarda l'inclusione \supseteq , sia $g \in [(f^\perp)_d : \mathfrak{M}^{d-e}]$ per cui $(g\partial^\alpha) \cdot f = 0$ per ogni $|\alpha| = d - e$. Siccome S è un anello commutativo, allora

$$(g\partial^\alpha) \cdot f = (\partial^\alpha g) \cdot f = \partial^\alpha \cdot (g \cdot f),$$

e per il Lemma 5.1, sappiamo che tutti i coefficienti di $g \cdot f \in S_{d-e}$ sono zero. Conseguentemente, $g \cdot f = 0$, i.e. g appartiene a $(f^\perp)_e$. \square

Proposizione 5.8. Sia $f \in S^d V$ e sia $e \in \{0, \dots, d\}$. La moltiplicazione

$$(A_f)_e \times (A_f)_{d-e} \rightarrow (A_f)_d \simeq \mathbb{C}$$

è una dualità perfetta.

Dimostrazione. Dimostriamo che la componente di sinistra è non-degenere. Per simmetria lo stesso risultato vale anche per l'altra componente.

Sia $[t] \in (A_f)_e$, tale che $[tu] = 0$ in $(A_f)_f$ per ogni $u \in (A_f)_{d-e}$. In particolare, tu appartiene a $(f^\perp)_d$ per ogni $u \in \mathfrak{M}^{d-e} \subseteq S_{d-e}$. Ergo, t appartiene a $[(f^\perp)_d : \mathfrak{M}^{d-e}]_e$. La precedente proposizione implica quindi che t appartiene a $(f^\perp)_e$, i.e. $[f] = 0$ in $(A_f)_e$. \square

La precedente proposizione ci dice che l'algebra è un'algebra di Gorenstein.

Siano $Z = \{[\ell_1], \dots, [\ell_r]\} \subseteq \mathbb{P}V$, con $\deg \ell_i = 1$.

Lemma 5.9 (Apolarità). f coincide con $\sum \ell_i^d$ se e solo se I_Z è contenuto in f^\perp .

Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, allora il lemma precedente diventa come segue.

Lemma 5.10 (Apolarità per forme bilineari). Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$, e siano $(\alpha_i : \beta_i)$ punti distinti in \mathbb{P}^1 , allora

$$\left[\prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y \right] \cdot f = 0 \Leftrightarrow f = \sum_i c_i (\alpha_i x + \beta_i y)^d$$

Dimostrazione. Posto

$$Z = \{[\alpha_1 x + \beta_1 y], \dots, [\alpha_k x + \beta_k y]\},$$

allora il risultato segue dal Lemma di Apolarità una volta provato che

$$I_Z = ((\beta_1 \partial_x - \alpha_1 \partial_y) \cdots (\beta_k \partial_x - \alpha_k \partial_y)).$$

Sicuramente l'ideale proposto, che denotiamo con J , è contenuto in I_Z .

D'altra parte, sia $g \in I_Z$ omogeneo. Allora g ha (α_i, β_i) come radici: per il Lemma 5.3

$$d!g(\alpha_i, \beta_i) = g \cdot (\alpha_i x + \beta_i y) = 0. \quad (1)$$

per ogni $i = 1, \dots, k$. Ma sappiamo che in due variabili vale un teorema di circa-Ruffini. Detto altrimenti, da (1) sappiamo che il polinomio

$$\prod_{i=1}^k \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y$$

divide g . □

Una versione più generale, che introduce delle molteplicità, è data dall'enunciato seguente.

Proposizione 5.11. Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]_d$, e siano $(\alpha_i : \beta_i)$, $i = 1, \dots, k$, punti di \mathbb{P}^1 . Allora

$$\begin{aligned} & \left[\prod_i \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y \right] \cdot f = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists c_i(c, y) \in \mathbb{C}[x, y]_{m_i-1} \text{ t.c. } f = \sum c_i(x, y) (\alpha_i x + \beta_i y)^{d-m_i+1} \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione, in teoria data in classe, è incomprensibile. □

Definizione 5.12. Se S è un anello $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduato, allora un ideale I riempie l'anello in grado k se I contiene S_k .

Lemma 5.13. Siano ϕ_1, ϕ_2 in $\mathbb{C}[x, y] = S$ due polinomi senza fattori in comune.

(i) L'ideale $I = (\phi_1, \phi_2)$ riempie l'anello R in gradi maggiori o uguali di $\deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$. Inoltre, I ha codimensione 1 in grado $d := \deg \phi_1 + \deg \phi_2 - 1$.

(ii) I_e coincide con $[I_d: \mathfrak{M}^{d-e}]_e$.

Dimostrazione. Sia $d_i := \deg \phi_i$, e consideriamo la sequenza corta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S \rightarrow S \oplus S \rightarrow I \rightarrow 0 \\ \beta \mapsto (-\beta\phi_2, \beta\phi_1) \\ (a, b) \mapsto a\phi_1 + b\phi_2 \end{aligned}$$

Siccome ϕ_1 e ϕ_2 non hanno fattori in comune, la sequenza precedente è esatta.

Conseguentemente, preso un certo polinomio $g \in S$ di grado $t \geq d_1 + d_2 - 1$, allora \square

Teorema 5.14. *L'ideale f^\perp ha sempre due generatori.*

Teorema 5.15 (Lemma di Apolarità – Versione Schematica). *Sia $Z \subseteq \mathbb{P}V$ una sottoschema chiuso zero-dimensionale, con ideale vanescente $I(Z) \subseteq S(V^\vee)$, e sia $v_d: \mathbb{P}V \rightarrow \mathbb{P}(S^d V)$ l'embedding di Veronese. Allora, per $f \in S^d V \setminus \{0\}$,*

$$I_Z \subseteq f^\perp \Rightarrow [f] \in \overline{v_d(Z)},$$

dove $\overline{v_d(Z)}$ è la chiusura di Zarinsky di $v_d(Z)$ in $\mathbb{P}(S^d V)$.

6 Grassmaniane

Fissiamo un \mathbb{C} -spazio vettoriale V di dimensione $n + 1$.

Definizione 6.1. La Grassmanniana $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$, i.e. la varietà dei sottospazi di V di dimensione $k + 1$, viene identificata con i prodotti wedge indecomponibili in $\Lambda^{k+1} V$.

Ricordiamo il risultato noto.

Proposizione 6.2. *La varietà $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ ha la struttura di varietà liscia, ed ha dimensione $(k + 1)(n - k)$.*

Fissiamo una base e_0, \dots, e_n per V , in modo da avere una identificazione canonica $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$.

Consideriamo un sottospazio $L = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ di dimensione $k + 1$, ed organizziamo i vettori in righe incolonnate, via una matrice M_L in $M_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$ di rango massimo.

A questo punto, possiamo osservare il seguente fatto: *due embedding $\mathbb{C}^{k+1} \xrightarrow{i,j} V$ danno la stessa immagine se e solo se esiste una trasformazione $g \in GL_{k+1}(\mathbb{C})$ per cui $i = jg$.*

Conseguentemente, moltiplicare la matrice M_L a sinistra per un elemento di $GL_{k+1}(\mathbb{C})$ non cambia lo spazio generato dalle righe (trasposte). Ma questa operazione coincide con una riduzione di Gauss per righe, che porta M_L in

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

In base alle possibili configurazione di questa forma, possiamo decomporre la Grassmaniana in celle affini, dette *celle di Schubert*.

Un modo per organizzare queste celle, in modo da avere una descrizione combinatorica, è tramite le *tabelle di Young*.

Definizione 6.3. La tabella di Young di parametri interi $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{k+1})$ è data dal diagramma seguente:

$$\lambda = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

dove la riga i ha lunghezza λ_i .

Per futura utilità definiamo l'insieme delle tabelle di Young

$$Y_{k,n} := \{\lambda \mid \text{al più } k+1 \text{ righe e } n-k \text{ colonne}\}.$$

Le tabelle di Young possiedono una naturale struttura ad albero, governata dalla relazione di inclusione delle une dentro le altre. Per esempio l'insieme $Y_{1,3}$ si ordina come segue:

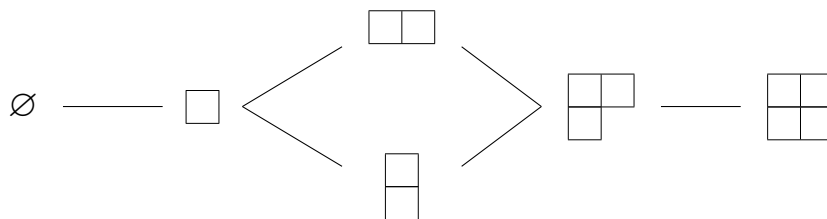


Figura 1: Tabelle di Young in $Y_{1,3}$

Definizione 6.4. Fissiamo ora una base $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ su V , e fissiamo la filtrazione

$$F_0 := \{0\}, \quad F_i := \langle e_{n-i+1}, \dots, e_n \rangle.$$

Data una tabella di Young $\lambda \in Y_{k,n}$, la cella X_λ è definita come

$$X_\lambda := \{L \in \text{Gr}_{k+1}(V) \mid \dim(L \cap F_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i \quad \forall 1 \leq i \leq k+1\}.$$

Essa è una *cella affine* di codimensione

$$|\lambda| := \#\{\text{scatole in } \lambda\}.$$

In particolare, la cella $X_{(0,\dots,0)}$ ha dimensione massima. Se guardiamo alla varietà di Grassmann come varietà algebrica con topologia di Zarinsky, $X_{(0,\dots,0)}$ è ancora aperto. La

varietà di Grassmann è quindi una varietà algebrica particolare: possiede un sottoinsieme aperto, e quindi Zarinsky-denso, che è anche una sottovarietà algebrica affine.

L'ordinamento delle tabelle di Young fornisce un ordinamento nelle celle della forma

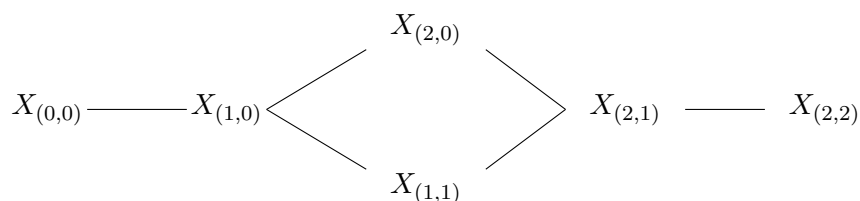
$$\lambda \subseteq \mu \Rightarrow X_\lambda \supseteq X_\mu$$

Inoltre, questo ordinamento è strettamente legato alla forma di Gauss su righe ridotta: infatti, se andiamo a considerare le differenze

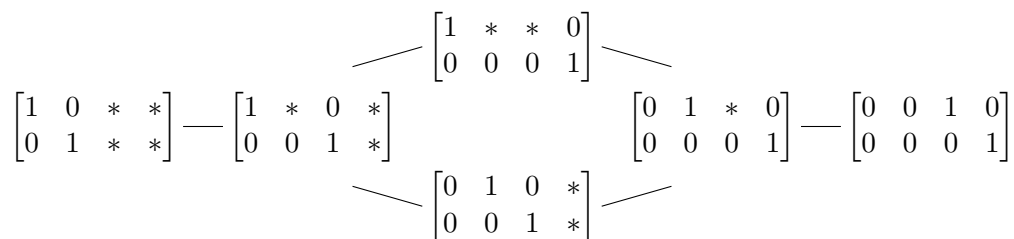
$$X_\lambda^0 := X_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \subseteq \mu} X_\mu,$$

allora i differenti X_λ^0 raggruppano i diversi modi in cui si può presentare una forma di Gauss ridotta su righe di una matrice $(k+1) \times (n+1)$ di rango massimo.

Per dare maggiore chiarezza al discorso — per quanto possibile — consideriamo il caso di $\text{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$. Essa è la varietà dei 2-sottospazi in \mathbb{C}^4 , ed ha dimensione complessa 4. Le tabelle di Young $Y_{1,3}$ sono mostrate nella Figura 1. Le relative celle di Schubert $\{X_\lambda\}_\lambda$ sono quindi ordinate come segue:



In particolare, otteniamo un analogo diagramma se sostituiamo X_λ con X_λ^0 . Quest'ultimo corrisponde alle possibili forme di Gauss ridotte per righe tramite il diagramma seguente:



Possiamo effettivamente visualizzare il collegamento tra forma di Gauss ridotta per righe e tabelle di Young. Supponiamo di voler considerare le celle di Schubert nello spazio $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$. Le relative tabelle di Young appartengono a $Y_{k,n}$, e sono quindi tabelle contenute in una griglia $A_{k,n}$ di forma $(k+1) \times (n-k)$. Una specifica forma di Gauss ridotta avrà degli *, che procediamo ad allineare sul lato destro di $A_{k,n}$. Il complementare, una volta riflesso sull'asse orizzontale, sarà la relativa tabella di Young.

Per esempio, consideriamo la forma di Gauss seguente, rappresentante un elemento di $\text{Gr}(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^6)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{2,6}$ viene riempita come segue:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & * & * & * \\ \hline & & * & * \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

e quindi la tabella di Young associata a (2) è $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$.

Parliamo ora della *coomologia della Grassmanniana*. La sua descrizione è puramente combinatorica.

Teorema 6.5. *La coomologia di $\text{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ è zero in dimensione dispari, ed è*

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{R}) = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid |\lambda| = 2i\}|$$

in dimensione pari.

Sketch della dimostrazione. Si può dimostrare che ognuna delle celle di Schubert X_{λ}^0 è topologicamente omeomorfa all'interno di un disco complesso $D_{\mathbb{C}}^i$, con $|\lambda| = i$. In particolare, X_{λ}^0 è omeomorfa al disco reale $D_{\mathbb{R}}^{2i}$. Inoltre, se definiamo

$$X^{(2i)} := \bigcup_{|\lambda|=2i} \overline{X_{\lambda}^0},$$

allora si può definire una decomposizione CW di $\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ come segue:

$$X^{(0)} \subseteq \dots \subseteq X^{(2d)}, \quad d = \dim_{\mathbb{C}} \text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n),$$

con *celle solamente in dimensione reale pari*. Ma a questo punto sappiamo il complesso cellulare omologico a coefficienti in \mathbb{Z} è della forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{a_0} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_2} \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{a_{2d}} \rightarrow 0$$

con

$$a_{2i} = |\{\lambda \in Y_{k,n} \mid |\lambda| = 2i\}|.$$

Conseguentemente

$$H_{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{a_{2i}}$$

ed è nulla altrimenti. Possiamo quindi concludere per il teorema dei coefficienti univesali:

$$H^{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{2i}(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z}), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{a_{2i}}. \quad \square$$

Per il teorema dei coefficienti universali, le dimensioni di

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^k, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{C})$$

coincidono con quelle precedenti.

Per esempio

$$H^i(\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3); \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, 2, 6, 8 \\ \mathbb{C}^2 & i = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

7 Rappresentazioni

Definizione 7.1. Dato un gruppo G , l'anello $\mathbb{C}G$ è dato dall'insieme delle somme formali

$$\left\{ \sum \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C} \right\}.$$

Definizione 7.2. Un *tableu* con d caselle è un diagramma di Young, con d caselle, quest'ultime riempite con i numeri $1, \dots, d$. Un tableu si dice *standard* se è strettamente crescente nelle righe e nelle colonne.

Definizione 7.3. Dato un tableu λ , l'insieme delle simmetrie su riga $R_\lambda \subseteq \Sigma_d$ è l'insieme delle permutazioni su d elementi che preservano i valori sulle righe. Analogamente per C_λ , ma sulle colonne.

Definizione 7.4. Il simmetrizzatore di Young rispetto ad un tableu λ è

$$c_\lambda := \sum_{\substack{\sigma \in R_\lambda \\ \tau \in C_\lambda}} \varepsilon(\tau) \sigma \tau,$$

dove ε è la funzione segno.

Per esempio, se λ e μ sono i tableu seguenti

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \boxed{2} \dots \boxed{d} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \vdots \\ \boxed{d} \end{array}$$

allora

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \Sigma_d} \sigma \quad c_\mu = \sum_{\tau \in \Sigma_d} \varepsilon(\tau) \tau$$

I tableu permettono di classificare le rappresentazioni irriducibili di Σ_d , cioè gli $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli irriducibili. Alcuni sono immediati.

(i) Σ_d agisce banalmente su \mathbb{C} .

- (ii) Σ_d agisce su \mathbb{C} attraverso l'azione alternante: $\sigma \cdot v = \varepsilon(\sigma)v$.
- (iii) Σ_d agisce su \mathbb{C}^d via $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$. Questa azione si scompone, come $\mathbb{C}\Sigma_d$ -modulo, come

$$\mathbb{C}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \mid \sum_i x_i = 0\} \oplus \langle e_1 + \dots + e_n \rangle.$$

Sul secondo addendo Σ_d agisce banalmente, e quindi ritroviamo la rappresentazione definita al primo punto. Il primo addendo risulta invece irriducibile, e costituisce una rappresentazione su uno spazio isomorfo a \mathbb{C}^{d-1} .

Ricordiamo dei fatti di teoria delle rappresentazioni.

- (i) Come $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli abbiamo un isomorfismo $\mathbb{C}\Sigma_d \simeq \lambda_1 W_1 \oplus \dots \oplus \lambda_r W_r$, dove $\{W_i\}_{i=1}^r$ danno tutte le classi di $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli irriducibili.
- (ii) Il numero r di rappresentazioni irriducibili distinte coincide col numero delle classi di coniugio di Σ_d .
- (iii) Come \mathbb{C} -algebra $\mathbb{C}\Sigma_d$ è isomorfa ad un prodotto di spazi di matrici

$$\mathbb{C}\Sigma_d \simeq_{\mathbb{C}} M_{\lambda_1} \mathbb{C} \times \dots \times M_{\lambda_r} \mathbb{C}$$

$$\text{e quindi } |\Sigma_d| = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2.$$

- (iv) Come \mathbb{C} -spazi vettoriale ogni S_i ha dimensione precisamente λ_i .

Abbiamo già trovato 3 rappresentazioni irriducibili di dimensione complessa 1, 1 e 2. Siccome $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ sappiamo che come $\mathbb{C}\Sigma_3$ -modulo

$$\mathbb{C}\Sigma_3 \simeq \mathbb{C}_{\text{banale}} \oplus \mathbb{C}_{\text{sgn}} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\oplus 2}$$

Osserviamo il seguente fatto: il numero di rappresentazioni irriducibili di Σ_d coincide con il numero delle classi di coniugio in Σ_d , che a sua volta coincide col numero di partizioni di d , che infine coincide col numero di tabelle di Young con d caselle.

Definizione 7.5. Per ogni tabella di Young λ , il *tableu canonico* è quello con le entrate scritte in successione, per esempio come segue:

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

Possiamo quindi pensare alle tabelle di Young come a dei particolari tableau standard.

Teorema 7.6. (i) Dati due tableau canonici $\lambda \neq \mu$, allora

$$c_\lambda c_\mu = 0 \quad c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$$

(ii) Definire $V_\lambda \subseteq \mathbb{C}\Sigma_d$ come

$$V_\lambda := \mathbb{C}\Sigma_d \cdot c_\lambda$$

essa è una rappresentazione irriducibile di Σ_d .

(iii) I differenti $\{V_\lambda\}_{|\lambda|=d}$ danno una decomposizione di $\mathbb{C}\Sigma_d$ -moduli

$$\mathbb{C}\Sigma_d = \bigoplus_{\substack{|\lambda|=d \\ \text{canonico}}} V_\lambda.$$

Ergo questi V_λ danno la famiglia delle rappresentazioni irriducibili.

(iv) Lo spazio V_λ ha dimensione pari al numero di tableau standard con d caselle.

Definizione 7.7. Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione di S_n .

Ricordiamo che un polinomio simmetrico ha la forma

$$g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e σ_i l' i -esimo polinomio simmetrico elementare.

Teorema 7.8. Sia

$$f: GL_{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$$

una mappa polinomiale nelle entrate della matrice, che è invariante per coniugio. Allora f è un polinomio simmetrico negli autovalori della matrice, e quindi per il remark precedente

$$f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

con $\sigma_i \in \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale V di dimensione $n+1$, e sia λ un tableau con d caselle. Allora lo spazio tensoriale $V^{\otimes d}$ è naturalmente un $\mathbb{C}\Sigma_d$ -modulo, e l'azione è data dalle permutazione dei fattori nel prodotto tensore.

Definizione 7.9. Per ogni tableau canonico λ , lo spazio $S^\lambda V$ è definito come

$$S^\lambda V := c_\lambda \cdot V^{\otimes d} \subseteq V^{\otimes d}$$

Per esempio,

$$S^{(d)} V = S^d V \quad S^{(1, \dots, d)} V = \Lambda^d V$$

Teorema 7.10. (i) La rappresentazione di $GL(V)$ su $S^\lambda V$ è irriducibile

(ii) Tutte le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ sono isomorfe a $S^\lambda V$ per qualche tableau canonico λ .

(iii) La dimensione di $S^\lambda V$ è dato dal numero di riempimenti di λ , visto come semplice tabella di Young, tramite i numeri $1, \dots, \dim V$, in modo che l'ordinamento sia strettamente crescente in ogni colonna e debolmente crescente in ogni riga (i.e. semistandard).

Osserviamo che $S^\lambda V$ non è nullo se e solo se il numero di righe di λ è minore della dimensione di V . In particolare, λ può avere un numero arbitrario di colonne.

Un esempio un po' meno ovvio è dato da

$$S^{(\lambda_1, \lambda_2)} \mathbb{C}^2 = S^{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbb{C}^2 \oplus (\text{sgn})^{\oplus 2}$$

Definizione 7.11. Definiamo il carattere s_λ come

$$s_\lambda := \chi_{S^\lambda V}$$

Queste insieme di tablou danno un'interessante struttura moltiplicativa non indifferente. In particolare, possiamo identificare dei coefficienti per cui

$$S^\lambda \otimes S^\mu V = \bigoplus_{\nu} (S^\nu V)^{\oplus c_{\lambda\mu}^\nu}$$

o equivalentemente

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$$

Possiamo dare un ulteriore descrizione di questi coefficienti, in termini di *celle di Schubert*.

L'insieme $\{X_\lambda\}_\lambda$ delle celle di Schubert contenute in una griglia $(k+1) \times (n-k)$ fornisce una base omologica di $H^*(\text{Gr}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n); \mathbb{Z})$. Possiamo quindi calcolare il prodotto \smile in coomologia, per cui vale il seguente risultato.

Teorema 7.12.

$$X_\lambda \smile X_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu$$

I coefficienti $c_{\lambda\mu}^\nu$ sono detti i *coefficienti di Littlewood—Richardson*. Il coefficiente $c_{\lambda\mu}^\nu$ coincide col *numero di skew-tableau semistandard di forma ν/λ e peso μ* .

Riferimenti bibliografici

- [1] J. Draisma. «Erratum: A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 8.1 (2024), pp. 225–225. <https://doi.org/10.1137/23M1623781>.
- [2] Y. Shitov. «A Counterexample to Comon's Conjecture». In: *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), pp. 428–443. <https://doi.org/10.1137/17M1131970>.