

Topological Methods in Nonlinear Analysis

Appunti del Corso

Mirko Torresani

28 novembre 2024

In tutto il corso le varietà le pensiamo sempre come embedded e lisce.

Definizione 1. Una terna ammissibile è una terna (f, U, y) , dove

- (i) U è un aperto di \mathbb{R}^k ;
- (ii) f è una funzione continua e propria da \overline{U} in \mathbb{R}^k ;
- (iii) $f^{-1}(y)$ non interseca ∂U .

Definizione 2 (Grado di Brower). Se f è liscia, e y è f -regolare, definiamo

$$\deg(f, U, y) := \sum_{p \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det d_p f).$$

Proposizione 3. *Data una terna ammissibile, esiste un ε per cui tutte le terne ε -vicine hanno lo stesso grado.*

Proposizione 4. *Esiste un modo per assegnare ad ogni terna ammissibile un grado, che sia coerente con la Definizione 2.*

Teorema 5. *La funzione grado rispetta le seguenti proprietà:*

- (i) $\deg(\operatorname{id}, \mathbb{R}^n, \mathbf{0}) = 1$;
- (ii) *se $U_1 \cap U_2$ sono disgiunti, contenuti in U , la loro unione contiene la $f^{-1}(y)$, e (f, U, y) , (f, U_1, y) sono regolari, allora*

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y);$$

- (iii) *Se $H(x, \lambda)$ è un omotopia propria, e $\alpha(\lambda)$ è una curva per cui*

$$H(x, \lambda) \neq \alpha(\lambda) \quad \forall x \in \partial U, \lambda \in [0, 1]$$

allora $\deg(H(\cdot, 0), U, \alpha(0))$ coincide con $\deg(H(\cdot, 1), U, \alpha(1))$.

Proposizione 6. *Valgono le seguenti proprietà ((f, U, y) sarà sempre ammissibile):*

- (i) $\deg(f, \emptyset, y) = 0$;
- (ii) se V è un altro aperto per cui $f^{-1}(y) \cap U \subseteq V$, allora $\deg(f, U, y)$ coincide con $\deg(f, V, y)$;
- (iii) se $\deg(f, U, y) \neq 0$, allora $f^{-1}(y)$ non è vuoto;
- (iv) la terna $(f - y, U, \mathbf{0})$ è ammissibile e ha lo stesso grado di (f, U, y) .

Teorema 7. *La mappa $y \mapsto \deg(f, U, y)$ fornisce una mappa continua da $\mathbb{R}^k \setminus f(\partial U)$ a \mathbb{Z} ; in particolare sulle componenti connesse è costante.*

Teorema 8. *Sia U un aperto limitato, e siano (f, U, y) , (g, U, y) ammissibili, tali che $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$. Allora i gradi delle due terne coincidono.*

Dimostrazione. Siccome U è limitato, allora l'omotopia $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ è propria. Ricordiamo che in generale combinazione lineare di mappe proprie non è propria. \square

Se U non è limitato l'enunciato è falso. Basta prendere $U = \mathbb{R}$, le mappe $f(x) = x$, $g(x) = -x$, ed il punto $y = 1$. La questione è che $H(x, 1/2)$ è la mappa costante nulla, che non è propria.

Osservazione. Se prendiamo il grado che conosciamo, definito su varietà, anche immerse, il teorema precedente è falso. Basta prendere $M = S^2$, $f = \text{id}_{S^2}$, e g come la riflessione di una coordinata.

Teorema 9. *Le richieste del Teorema 5 definiscono un'unica funzione grado sulle terne ammissibili su aperti limitati.*

Come sappiamo usando la funzione grado possiamo dimostrare risultati classici interessanti.

Teorema 10 (di Brower). *Una mappa dal disco in sé ammette un punto fisso.*

Teorema 11. *La chiusura di un aperto limitato non ha un retrazione continua sulla sua frontiera.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una retrazione continua $r: \bar{U} \rightarrow \partial U$. Allora siccome r coincide con id_U sulla frontiera, sappiamo che per ogni $y \in U$

$$\deg(r, U, y) = \deg(\text{id}_U, U, y) = 1$$

Ma la preimmagine di y via r è vuota. \square

Teorema 12. Dato un aperto limitato U in \mathbb{R}^k , $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua che sia C^1 in un intorno di $f^{-1}(0)$, e $h: \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che

- (i) $h(x, 0) = \mathbf{0}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $f(x) + h(x, \lambda) \neq 0$ per ogni $(x, \lambda) \in \partial U \times [0, 1]$;
- (iii) $\det(J_f(x)) \neq 0$ per ogni $x \in f^{-1}(\mathbf{0})$;
- (iv) $\sum_{f^{-1}(\mathbf{0})} \text{sgn}(\det(J_f(0))) \neq 0$.

Allora $f(x) + h(x, 1)$ ha soluzione in U .

Dimostrazione. Basta prendere $H(x, \lambda) = f(x) + h(x, \lambda)$. □

Consideriamo la situazione in cui abbiamo un operatore lineare $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e g sia continua, e di voler risolvere $L(x) + g(x) = \mathbf{0}$.

Proposizione 13. *L'insieme*

$$S := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ t.c. } L(x) + \lambda g(x) = \mathbf{0}\}$$

è limitato, e quindi per il teorema precedente il problema $L(x) + \lambda g(x) = \mathbf{0}$ ha soluzione.

Vogliamo estendere quello che abbiamo fatto a varietà. Si $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà, e sia U un aperto, $f: M \rightarrow M$ una mappa.

Definizione 14. Dico che la coppia (f, U) è ammissibile se l'insieme

$$\text{fix}(f, U) := \{x \in U \mid f(x) = x\}$$

è finito.

Definizione 15. Se (f, U) è ammissibile, l'indice di punto fisso è definito come

$$\text{ind}(f, U) := \sum_{f(x)=x} \text{sgn}(\det(J_f(x)))$$

Equivalentemente, posto un intorno tubolare T di M in \mathbb{R}^k , ed una retrazione $r: T \rightarrow M$, possiamo definire

$$\text{ind}(f, U) = \deg(id - f \circ r, r^{-1}(U), \mathbf{0}).$$

Proposizione 16. *L'indice di punto fisso possiede le seguenti proprietà:*

Normalizzazione se $f: M \rightarrow M$ è costante, $\text{ind}(f, M) = 1$;

Additività se U_1 e U_2 sono disgiunti, contenuti in U , tali che $\text{fix}(f, U_1) \cup \text{fix}(f, U_2)$ contenga $\text{fix}(f, U)$, allora

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(f, U_1) + \text{ind}(f, U_2);$$

Omotopia se $H(x, \lambda)$ è ammissibile, cioè

$$\{(x, \lambda) \mid x = H(x, \lambda)\}$$

è compatto, allora

$$\inf(H(\cdot, 0), U) = \inf(H(\cdot, 1), U);$$

Località se (f, U) è ammissibile, allora $\inf(f, U) = \inf(f|_U, U)$;

Commutatività se U_1 e U_2 sono aperti di M_1 e M_2 , e $f_1: M_1 \rightarrow M_2$ e $f_2: M_2 \rightarrow M_1$ sono funzioni per cui uno tra $(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(U_2))$, $(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(U_1))$ è ammissibile, allora lo è anche l'altro e

$$\inf(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(U_2)) = \inf(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(U_1));$$

Soluzione se $\inf(f, U) \neq 0$, allora $\text{fix}(f, U) \neq \emptyset$;

Escissione se $\text{fix}(f, U) \subseteq U_1$, allora $\inf(f, U) = \inf(f, U_1)$;

Moltiplicatività siano U_1, U_2, M_1, M_2 come sopra, e $f_i: M_i \rightarrow M_i$ tali che (f_i, U_i) siano ammissibili. Allora $(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2)$ è ammissibile e

$$\inf(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) = \inf(f_1, U_1) \inf(f_2, U_2);$$

Omotopia Generalizzata sia $H: U \times [0, 1] \rightarrow M$, e sia W un aperto di $U \times [0, 1]$. Se

$$\{(x, \lambda) \in W \mid x = H(x, \lambda)\}$$

è compatto, e

$$W_\lambda := \{x \in M \mid (x, \lambda) \in W\},$$

allora $\inf(H(\cdot, \lambda), W_\lambda)$ è costante.

Consideriamo ora il caso di indice di un campo vettoriale. Per fare ciò ricordiamo il seguente risultato.

Proposizione 17. Dato un campo vettoriale X su una varietà, ed uno zero p di X , il differenziale $d_p X$ può essere canonicamente identificato con un endomorfismo dello spazio tangente a p .

Sia quindi una varietà M embedded in \mathbb{R}^k , e sia un aperto U , ed un campo $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Definizione 18. Diciamo che (f, U) ammissibile se f non ha zeri in ∂U , e $f^{-1}(0)$ è compatto.

Osservazione. Se f e g sono campi per cui $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$, allora l'omotopia $H(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ è sensata e ammissibile.

Lemma 19. *Se (f, U) è ammissibile, allora $\deg(f, U) = (-1)^n \deg(-f, U)$, con n la dimensione di M .*

In particolare, se M è compatta senza bordo, allora per ogni campo vettoriale $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\deg(f, M) = \deg(g, M) = \chi(M),$$

e se M ha dimensione dispari $\chi(M) = 0$.

La teoria del grado trova grande applicazione nelle equazioni differenziali al primo ordine su una varietà, della forma $\dot{x} = X_t(x)$. A tal proposito fissiamo un tempo $T > 0$ e sia

$$\mathcal{D} := \{p \in M \mid \phi_t(p) \text{ è definito per } 0 \leq t \leq T\}.$$

Esso è aperto, e per ogni $U \subseteq \mathcal{D}$ abbiamo una mappa $\phi_T: U \rightarrow M$. Se $\text{ind}(\phi_T, U)$ non è vuoto, allora abbiamo un punto fisso. per ϕ_T .

- (i) Se il sistema è autonomo, il punto fisso trovato dà luogo ad un'orbita periodica.
- (ii) Se il sistema non è autonomo, ma T è il periodo nel tempo di f , allora la mappa $P_T: U \rightarrow M$ (di "Poincaré") permette di trovare orbite periodiche trovandone l'indice.

Proposizione 20. *Data un'equazione della forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_n(t, x) \\ x(\tau_n) = p_n \end{cases}$$

con $f_n \xrightarrow{\infty} f$, $(\tau_n, p_n) \rightarrow (\tau_0, p_0)$. Se $x_0(t, \tau_0, p_0)$ è definito su $[0, T]$, allora gli x_n sono definite, definitivamente in n , fino a $[0, T]$ e vi è una convergenza uniforme $x_n \xrightarrow{\infty} x_0$.

Teorema 21 (Kupka–Smale). *Supponiamo f autonoma. A meno di perturbare f , esiste un numero finito di orbite periodiche con periodo in $(0, T]$.*

Osservazione. Il risultato originale vuole M compatta, Peixoto dimostrò che il teorema vale anche con M non compatta, col caveat di scegliere l'opportuna topologia per lo spazio delle funzioni (per esempio quella di *convergenza uniforme sui compatti*).

Riguardo ai sistemi autonomi, il prossimo risultato collega l'indice di campo con quello di punto fisso.

Teorema 22. *Dato $U \subseteq M$ relativamente compatto, se la coppia (f, U) è ammissibile allora $\text{ind}(\phi_T, U)$ coincide con $\deg(-f, U)$.*

Prima della sua dimostrazione premettiamo dei Lemmi.

Lemma 23. *Sia $K \subseteq M$ un compatto, tale che $K \cap f^{-1}(\mathbf{0}) = \emptyset$. Allora esiste un $\tau > 0$ tale che ϕ_t non ha punti fissi in K per ogni $t \in (-\tau, \tau)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. In particolare, esiste una successione di tempi non nulli $t_n \rightarrow 0$ e di punti $\{p_n\} \subseteq K$, tali che $p_n = \phi_{t_n}(p_n)$. Siccome K è compatto, possiamo supporre che p_n converga ad un certo punto $p_0 \in K$. Inoltre, sia x_n la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t_n f(x(t)) \\ x(0) = p_n \end{cases}$$

Innanzitutto, sappiamo che

$$x_n(1) = \phi_1^{t_n f}(p_n) = \phi_{t_n}^f(p_n) = p_n,$$

da cui

$$\mathbf{0} = x_n(1) - x_n(0) = \int_0^1 t_n f(x_n(t)) dt = t_n \int_0^1 f(x_n(t)) dt.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\mathbf{0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 f(x_n(t)) dt \right] = \int_0^1 f(x_0(t)) dt = f(p_0)$$

che rappresenta una contraddizione, in quanto f non ha punti fissi su K . \square

Lemma 24. *Se $M = \mathbb{R}^k$, e U , (f, U) come sopra, allora*

$$\deg(f, U) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \deg(I - \phi_t^f, U) \quad I = \text{id}_{\mathbb{R}^k}.$$

Dimostrazione. Questo enunciato si può trovare in [1, Prop. 3.3], dove si mostra che il limite è in verità costante per piccoli tempi. \square

Proposizione 25. *Preso M generico, e U , (f, U) come sopra, allora*

$$\deg(f, U) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \text{ind}(\phi_t^f, U),$$

col limite in verità costante per t piccoli.

Dimostrazione. Consideriamo la coppia (ϕ_t^f, U) . Per t piccolo sappiamo che è ammissibile per il calcolo dell'indice di punto fisso, grazie al Lemma 23 con $K := \partial U \subseteq M$.

Approssimiamo f con un campo γ

- (i) che ha solo zeri non degeneri (i.e. a determinante della matrice Jacobiana non nulla);

- (ii) per $t \neq 0$ piccolo ϕ_t^γ è omotopo a ϕ_t^f con un omotopia che è ammissibile per l'indice di punto fisso. Infatti omotopie “piccole” sono sempre ammissibili in quanto ∂U è compatto.

Come conseguenza, posso sostituire f con γ .

Definiamo $\{p_1, \dots, p_n\} = f^{-1}(\mathbf{0})$, e siano V_1, \dots, V_n intorno isolanti, per cui $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$. Per il Lemma 23 ϕ_t^f non ha punti fissi su $U \setminus \bigcup_i V_i$. Possiamo quindi restringerci ad ognuno dei V_i .

Sia $W \subseteq V_i$ che sia il dominio di un diffeomorfismo $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, e sia \hat{f} il campo coniugato. Grazie al Lemma 24 sappiamo che

$$\deg(-\hat{f}, \psi(W)) = \text{ind}(\psi \circ \phi_t^f \circ \psi^{-1}, \psi(W)).$$

Siccome \hat{f} è coniugato a f , il grado $\deg(f, W)$ coincide col grado $(\hat{f}, \psi(W))$.

Infine, per la proprietà di commutatività, l'indice $\text{ind}(\psi \circ \phi_t^f \circ \psi^{-1}, \psi(W))$ coincide con $\text{ind}(\phi_t^f, W)$. \square

Fissiamo un tempo $T > 0$, e sia A_T l'insieme delle orbite di periodo incluso in $(0, T]$.

Lemma 26. *Se \mathcal{O} è un'orbita isolata di A_T non banale, allora esiste un intorno aperto W di \mathcal{O} per cui, per ogni $\tau \in (0, T]$, il flusso ϕ_τ è ben definito su \overline{W} , è ammissibile in W per l'indice di punto fisso, e $\text{ind}(\phi_\tau, W) = 0$.*

Dimostrazione. Siccome \mathcal{O} è un'orbita periodica, ϕ_T è ben definito su tutto \mathcal{O} . Inoltre, ϕ_T è anche ben definita su un aperto W relativamente compatto che separa \mathcal{O} dalle altre orbite. In particolare, il flusso ϕ_τ non ha punti fissi su ∂W per ogni $\tau \in (0, T]$. Conseguentemente, per la proprietà di omotopia, $\text{ind}(\phi_\tau, U)$ non dipende da τ . Inoltre, siccome \mathcal{O} è non banale, esiste un periodo minimale positivo $\sigma > 0$ di \mathcal{O} . Quindi $\text{ind}(\phi_{\sigma/2}, W) = 0$ in quanto $\phi_{\sigma/2}$ è libero da punti fissi su \overline{W} . Infine l'indice calcolato coincide con $\text{ind}(\phi_\tau, U)$ per ogni $\tau \in (0, T]$. \square

Lemma 27. *Supponiamo che ϕ_T sia ben definito su un aperto U relativamente compatto, e supponiamo che esistono solo un numero finito di orbite di periodo in $(0, T]$ che incontrano \overline{U} . Allora se ϕ_σ, ϕ_τ non hanno punti fissi su ∂U , l'indice di punti dei due flussi coincide ($\sigma, \tau \in (0, T]$).*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ le orbite non banali incluse in A_T , e siano W_1, \dots, W_n aperti separanti (in senso forte). Per il lemma precedente sappiamo che

$$\text{ind}(\phi_\tau, W_i) = \text{ind}(\phi_\sigma, W_i) = 0.$$

Definendo $U_1 := U \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{W_i}$, per escissione e additività sappiamo che

$$\text{ind}(\phi_\tau, U) = \text{ind}(\phi_\tau, U_1)$$

$$\text{ind}(\phi_\sigma, U) = \text{ind}(\phi_\sigma, U_1)$$

Ma su \overline{U} le orbite periodiche di A_T sono solo singolari. Conseguentemente l'omotopia sui tempi tra ϕ_τ e ϕ_σ non può avere punti fissi in ∂U ed è accettabile. \square

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Furi, M. P. Pera e M. Spadini. «The fixed point index of the Poincaré translation operator on differentiable manifolds». In: ().