Topological Methods in Nonlinear Analysis
Appunti del Corso

Mirko Torresani

28 novembre 2024

In tutto il corso le varietà le pensiamo sempre come embedded e lisce.

Definizione 1. Una terna ammissibile è una terna (f, U, y), dove

(i) U è un aperto di $\mathbb{R}^k$;

(ii) f è una funzione continua e propria da $\overline{U}$ in $\mathbb{R}^k$;

(iii) $f^{-1}(y)$ non interseca ∂U.

Definizione 2 (Grado di Brower)**.** Se f è liscia, e y è f-regolare, definiamo

$$\deg(f, U, y) \coloneqq \sum_{p \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det d_p f)\,.$$

Proposizione 3. *Data una terna ammissibile, esiste un ε per cui tutte le terne ε-vicine hanno lo stesso grado.*

Proposizione 4. *Esiste un modo per assegnare ad ogni terna ammissibile un grado, che sia coerente con la Definizione 2.*

Teorema 5. *La funzione grado rispetta le seguenti proprietà:*

(i) $\deg(\mathrm{id}, \mathbb{R}^n, \mathbf{0}) = 1$*;*

(ii) se $U_1 \cap U_2$ sono disgiunti, contenuti in U, la loro unione contiene la $f^{-1}(y)$, e (f, U, y), (f, U_i, y) sono regolari, allora

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y)\,;$$

(iii) Se $H(x, \lambda)$ è un omotopia propria, e $\alpha(\lambda)$ è una curva per cui

$$H(x, \lambda) \neq \alpha(\lambda) \quad \forall x \in \partial U, \lambda \in [0, 1]$$

allora $\deg(H(\cdot, 0), U, \alpha(0))$ *coincide con* $\deg(H(\cdot, 1), U, \alpha(1))$*.*

Proposizione 6. *Valgono le seguenti proprietà ((f, U, y) sarà sempre ammissibile):*

(i) $\deg(f, \varnothing, y) = 0$*;*

(ii) se V *è un altro aperto per cui* $f^{-1}(y) \cap U \subseteq V$*, allora* $\deg(f, U, y)$ *coincide con* $\deg(f, V, y)$*;*

(iii) se $\deg(f, U, y) \neq 0$*, allora* $f^{-1}(y)$ *non è vuoto;*

(iv) la terna $(f - y, U, \mathbf{0})$ *è ammissibile e ha lo stesso grado di* (f, U, y)*.*

Teorema 7. *La mappa* $y \mapsto \deg(f, U, y)$ *fornisce una mappa continua da* $\mathbb{R}^k \setminus f(\partial U)$ *a* $\mathbb{Z}$*; in particolare sulle componenti connesse è costante.*

Teorema 8. *Sia* U *un aperto limitato, e siano* (f, U, y)*,* (g, U, y) *ammissibili, tali che* $f_{|\partial U} = g_{|\partial U}$*. Allora i gradi delle due terne coincidono.*

Dimostrazione. Siccome U *è limitato*, allora l'omotopia $\lambda f(x) + (1-\lambda) g(x)$ è propria. Ricordiamo che in generale combinazione lineare di mappe proprie non è propria. □

Se U non è limitato l'enunciato è falso. Basta prendere $U = \mathbb{R}$, le mappe $f(x) = x$, $g(x) = -x$, ed il punto $y = 1$. La questione è che $H(x, 1/2)$ è la mappa costante nulla, che non è propria.

Osservazione. Se prendiamo il grado che conosciamo, definito su varietà, anche immerse, il teorema precedente è falso. Basta prendere $M = S^2$, $f = \mathrm{id}_{S^2}$, e g come la riflessione di una coordinata.

Teorema 9. *Le richieste del Teorema 5 definiscono un'unica funzione grado sulle terne ammissibili su aperti limitati.*

Come sappiamo usando la funzione grado possiamo dimostrare risultati classici interessanti.

Teorema 10 (di Brower)**.** *Una mappa dal disco in sé ammette un punto fisso.*

Teorema 11. *La chiusura di un aperto limitato non ha un retrazione continua sulla sua frontiera.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una retrazione continua $r \colon \overline{U} \to \partial U$. Allora siccome r coincide con id_U sulla frontiera, sappiamo che per ogni $y \in U$

$$\deg(r, U, y) = \deg(\mathrm{id}_U, U, y) = 1$$

Ma la preimmagine di y via r è vuota. □

Teorema 12. *Dato un aperto limitato U in $\mathbb{R}^k$, $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^k$ continua che sia C^1 in un intorno di $f^{-1}(0)$, e $h\colon \overline{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^k$ tale che*

(i) $h(x,0) = \mathbf{0}$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $f(x) + h(x,\lambda) \neq 0$ *per ogni* $(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$*;*

(iii) $\det(J_f(x)) \neq 0$ *per ogni* $x \in f^{-1}(\mathbf{0})$*;*

(iv) $\sum_{f^{-1}(\mathbf{0})} \operatorname{sgn}(\det(J_f(0))) \neq 0$.

Allora $f(x) + h(x,1)$ *ha soluzione in* U.

Dimostrazione. Basta prendere $H(x,\lambda) = f(x) + h(x,\lambda)$. □

Consideriamo la situazione in cui abbiamo un operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ e g sia continua, e di voler risolvere $L(x) + g(x) = \mathbf{0}$.

Proposizione 13. *L'insieme*

$$S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^k \mid \exists \lambda \in [0,1] t.c.\ L(x) + \lambda g(x) = \mathbf{0}\}$$

è limitato, e quindi per il teorema precedente il problema $L(x) + \lambda g(x) = \mathbf{0}$ *ha soluzione.*

Vogliamo estendere quello che abbiamo fatto a varietà. Si $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà, e sia U un aperto, $f\colon M \to M$ una mappa.

Definizione 14. Dico che la coppia (f,U) è ammissibile se l'insieme

$$\operatorname{fix}(f,U) \coloneqq \{x \in U \mid f(x) = x\}$$

è finito.

Definizione 15. Se (f,U) è ammissibile, l'indice di punto fisso è definito come

$$\operatorname{ind}(f,U) \coloneqq \sum_{f(x)=x} \operatorname{sgn}(\det(J_f(x)))$$

Equivalentemente, posto un intorno tubolare T di M in $\mathbb{R}^k$, ed una retrazione $r\colon T \to M$, possiamo definire

$$\operatorname{ind}(f,U) = \deg(id - f \circ r, r^{-1}(U), \mathbf{0})\,.$$

Proposizione 16. *L'indice di punto fisso possiede le seguenti proprietà:*

Normalizzazione *se* $f\colon M \to M$ *è costante,* $\operatorname{ind}(f,M) = 1$*;*

Additività *se* U_1 *e* U_2 *sono disgiunti, contenuti in* U*, tali che* $\operatorname{fix}(f,U_1) \cup \operatorname{fix}(f,U_2)$ *contenga* $\operatorname{fix}(f,U)$*, allora*

$$\operatorname{ind}(f,U) = \operatorname{ind}(f,U_1) + \operatorname{ind}(f,U_2)\,;$$

Omotopia *se* $H(x, \lambda)$ *è ammissibile, cioè*

$$\{(x, \lambda) \mid x = H(x, \lambda)\}$$

è compatto, allora

$$\inf(H(\cdot, 0), U) = \operatorname{ind}(H(\cdot, 1), U);$$

Località *se* (f, U) *è ammissibile, allora* $\operatorname{ind}(f, U) = \operatorname{ind}(f_{|_U}, U)$*;*

Commutatività *se* U_1 *e* U_2 *sono aperti di* M_1 *e* M_2*, e* $f_1 \colon M_1 \to M_2$ *e* $f_2 \colon M_2 \to M_1$ *sono funzioni per cui uno tra* $(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(U_2))$*,* $(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(U_1))$ *è ammissibile, allora lo è anche l'altro e*

$$\operatorname{ind}(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(U_2)) = \operatorname{ind}(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(U_1))\,;$$

Soluzione *se* $\operatorname{ind}(f, U) \neq 0$*, allora* $\operatorname{fix}(f, U) \neq \varnothing$*;*

Escissione *se* $\operatorname{fix}(f, U) \subseteq U_1$*, allora* $\operatorname{ind}(f, U) = \operatorname{ind}(f, U_1)$*;*

Moltiplicatività *siano* U_1*,* U_2*,* M_1*,* M_2 *come sopra, e* $f_i \colon M_i \to M_i$ *tali che* (f_i, U_i) *siano ammissibili. Allora* $(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2)$ *è ammissibile e*

$$\operatorname{ind}(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) = \operatorname{ind}(f_1, U_1) \operatorname{ind}(f_2, U_2)\,;$$

Omotopia Generalizzata *sia* $H \colon U \times [0, 1] \to M$*, e sia* W *un aperto di* $U \times [0, 1]$*.Se*

$$\{(x, \lambda) \in W \mid x = H(x, \lambda)\}$$

è compatto, e

$$W_\lambda \coloneqq \{x \in M \mid (x, \lambda \in W)\}\,,$$

allora $\operatorname{ind}(H(\cdot, \lambda), W_\lambda)$ *è costante.*

Consideriamo ora il caso di indice di un campo vettoriale. Per fare ciò ricordiamo il seguente risultato.

Proposizione 17. *Dato un campo vettoriale* X *su una varietà, ed uno zero* p *di* X*, il differenziale* d_pX *può essere canonicamente identificato con un endomorfismo dello spazio tangente a* p*.*

Sia quindi una varietà M embedded in $\mathbb{R}^k$, e sia un aperto U, ed un campo $f \colon U \to \mathbb{R}^k$.

Definizione 18. Diciamo che (f, U) ammissibile se f non ha zeri in ∂U, e $f^{-1}(\mathbf{0})$ è compatto.

Osservazione. Se f e g sono campi per cui $f_{|_{\partial U}} = g_{|_{\partial U}}$, allora l'omotopia $H(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) g(x)$ è sensata e ammissibile.

Lemma 19. *Se (f, U) è ammissibile, allora* $\deg(f, U) = (-1)^n \deg(-f, U)$*, con n la dimensione di M.*

In particolare, se M è compatta senza bordo, allora per ogni campo vettoriale $f, g\colon M \to \mathbb{R}^k$

$$\deg(f, M) = \deg(g, M) = \chi(M)\,,$$

e se M ha dimensione dispari $\chi(M) = 0$.

La teoria del grado trova grande applicazione nelle equazioni differenziali al primo ordine su una varietà, della forma $\dot{x} = X_t(x)$. A tal proposito fissiamo un tempo $T > 0$ e sia

$$\mathcal{D} \coloneqq \{p \in M \mid \phi_t(p) \text{ è definito per } 0 \leq t \leq T\}\,.$$

Esso è aperto, e per ogni $U \subseteq \mathcal{D}$ abbiamo una mappa $\phi_T\colon U \to M$. Se $\operatorname{ind}(\phi_T, U)$ non è vuoto, allora abbiamo un punto fisso. per ϕ_T.

(i) Se il sistema è autonomo, il punto fisso trovato dà luogo ad un'orbita periodica.

(ii) Se il sistema non è autonomo, ma T è il periodo nel tempo di f, allora la mappa $P_T\colon U \to M$ (di "Poincaré") permette di trovare orbite periodiche trovandone l'indice.

Proposizione 20. *Data un'equazione della forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_n(t, x) \\ x(\tau_n) = p_n \end{cases}$$

con $f_n \underset{\infty}{\to} f$, $(\tau_n, p_n) \to (\tau_0, p_0)$. Se $x_0(t, \tau_0, p_0)$ è definito su $[0, T]$, allora gli x_n sono definite, definitivamente in n, fino a $[0, T]$ e vi è una convergenza uniforme $x_n \underset{\infty}{\to} x_0$.

Teorema 21 (Kupka–Smale)**.** *Supponiamo f autonoma. A meno di perturbare f, esiste un numero finito di orbite periodiche con periodo in $(0, T]$.*

Osservazione. Il risultato originale vuole M compatta, Peixoto dimostrò che il teorema vale anche con M non compatta, col caveat di scegliere l'opportuna topologia per lo spazio delle funzioni (per esempio quella di *convergenza uniforme sui compatti*).

Riguardo ai sistemi autonomi, il prossimo risultato collega l'indice di campo con quello di punto fisso.

Teorema 22. *Dato $U \subseteq M$ relativamente compatto, se la coppia (f, U) è ammissibile allora* $\operatorname{ind}(\phi_T, U)$ *coincide con* $\deg(-f, U)$.

Prima della sua dimostrazione premettiamo dei Lemmi.

Lemma 23. *Sia $K \subseteq M$ un compatto, tale che $K \cap f^{-1}(\mathbf{0}) = \varnothing$. Allora esiste un $\tau > 0$ tale che ϕ_t non ha punti fissi in K per ogni $t \in (-\tau, \tau)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. In particolare, esiste una successione di tempi non nulli $t_n \to 0$ e di punti $\{p_n\} \subseteq K$, tali che $p_n = \phi_{t_n}(p_n)$. Siccome K è compatto, possiamo supporre che p_n converga ad un certo punto $p_0 \in K$. Inoltre, sia x_n la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t_n\, f(x(t)) \\ x(0) = p_n \end{cases}$$

Innanzitutto, sappiamo che

$$x_n(1) = \phi_1^{t_n f}(p_n) = \phi_{t_n}^f(p_n) = p_n\,,$$

da cui

$$\mathbf{0} = x_n(1) - x_n(0) = \int_0^1 t_n f(x_n(t))\, dt = t_n \int_0^1 f(x_n(t))\, dt\,.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\mathbf{0} = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{0} = \lim_{n \to +\infty} \left[\int_0^1 f(x_n(t))\, dt\right] = \int_0^1 f(x_0(t))\, dt = f(p_0)$$

che rappresenta una contraddizione, in quanto f non ha punti fissi su K. $\square$

Lemma 24. *Se $M = \mathbb{R}^k$, e U, (f, U) come sopra, allora*

$$\deg(f, U) = \lim_{t \to 0^-} \deg(I - \phi_t^f, U) \quad I = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}\,.$$

Dimostrazione. Questa enunciato si può trovare in [1, Prop. 3.3], dove si mostra che il limite è in verità costante per piccoli tempi. $\square$

Proposizione 25. *Presa M generica, e U, (f, U) come sopra, allora*

$$\deg(f, U) = \lim_{t \to 0^-} \mathrm{ind}(\phi_t^f, U)\,,$$

col limite in verità costante per t piccoli.

Dimostrazione. Consideriamo la coppia (ϕ_t^f, U). Per t piccolo sappiamo che è ammissibile per il calcolo dell'indice di punto fisso, grazie al Lemma 23 con $K \coloneqq \partial U \subseteq M$.

Approssimiamo f con un campo γ

(i) che ha solo zeri non degeneri (i.e. a determinante della matrice Jacobiana non nulla);

(ii) per $t \neq 0$ piccolo ϕ_t^γ è omotopo a ϕ_t^f con un omotopia che è ammissibile per l'indice di punto fisso. Infatti omotopie "piccole" sono sempre ammissibili in quanto ∂U è compatto.

Come conseguenza, posso sostituire f con γ.

Definiamo $\{p_1, \ldots, p_n\} = f^{-1}(\mathbf{0})$, e siano $V_1, \ldots, V_n$ intorni isolanti, per cui $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} \neq \varnothing$. Per il Lemma 23 ϕ_t^f non ha punti fissi su $U \setminus \bigcup_i V_i$. Possiamo quindi restringerci ad ognuno dei V_i.

Sia $W \subseteq V_i$ che sia il dominio di un diffemorfismo $\psi \colon W \to \mathbb{R}^n$, e sia $\hat{f}$ il campo coniugato. Grazie al Lemma 24 sappiamo che

$$\deg(-\hat{f}, \psi(W)) = \operatorname{ind}(\psi \circ \phi_t^f \circ \psi^{-1}, \psi(W))\,.$$

Siccome $\hat{f}$ è coniugato a f, il grado $\deg(f, W)$ coincide col grado $(\hat{f}, \psi(W))$.

Infine, per la proprietà di commutatività, l'indice $\operatorname{ind}(\psi \circ \phi_t^f \circ \psi^{-1}, \psi(W))$ coincide con $\operatorname{ind}(\phi_t^f, W)$. □

Fissiamo un tempo $T > 0$, e sia A_T l'insieme delle orbite di periodo incluso in $(0, T]$.

Lemma 26. *Se $\mathcal{O}$ è un'orbita isolata di A_T non banale, allora esiste un intorno aperto W di $\mathcal{O}$ per cui, per ogni $\tau \in (0, T]$, il flusso ϕ_τ è ben definito su $\overline{W}$, è ammissibile in W per l'indice di punto fisso, e* $\operatorname{ind}(\phi_\tau, W) = 0$.

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{O}$ è un orbita periodica, ϕ_T è ben definito su tutto $\mathcal{O}$. Inoltre, ϕ_T è anche ben definita su un aperto W relativamente compatto che separa $\mathcal{O}$ dalle altre orbite. In particolare, il flusso ϕ_τ non ha punti fissi su ∂W per ogni $\tau \in (0, T]$. Conseguentemente, per la proprietà di omotopia, $\operatorname{ind}(\phi_\tau, U)$ non dipende da τ. Inoltre, siccome $\mathcal{O}$ è non banale, esiste un periodo minimale positivo $\sigma > 0$ di $\mathcal{O}$. Quindi $\operatorname{ind}(\phi_{\sigma/2}, W) = 0$ in quanto $\phi_{\sigma/2}$ è libero da punti fissi sa $\overline{W}$. Infine l'indice calcolato coincide con $\operatorname{ind}(\phi_\tau, U)$ per ogni $\tau \in (0, T]$. □

Lemma 27. *Supponiamo che ϕ_T sia ben definito su un aperto U relativamente compatto, e supponiamo che esistono solo un numero finito di orbite che incontrano $\overline{U}$. Allora se ϕ_σ, ϕ_τ non hanno punti fissi su ∂U, l'indice di punti dei due flussi coincide ($\sigma, \tau \in (0, T]$).*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ le orbite non banali, e siano $W_1, \ldots, W_n$ aperti separanti (in senso forte). Per il lemma precedente sappiamo che

$$\operatorname{ind}(\phi_\tau, W_i) = \operatorname{ind}(\phi_\sigma, W_i) = 0\,.$$

Definendo $U_1 \coloneqq U \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{W_i}$, per escissione e additività sappiamo che

$$\operatorname{ind}(\phi_\tau, U) = \operatorname{ind}(\phi_\tau, U_1)$$
$$\operatorname{ind}(\phi_\sigma, U) = \operatorname{ind}(\phi_\sigma, U_1)$$

Ma su U le orbite periodiche sono solo singolari. □

Riferimenti bibliografici

[1] M. Furi, M. P. Pera e M. Spadini. «The fixed point index of the Poincaré translation operator on differentiable manifolds». In: ().